ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE
3, avenue Pierre Larousse-92245 Malakoff CEDEX, FRANCE

Mémoire d'actuariat - Promotion 2008

Modélisation des marchés de matières premières, valorisation de ses dérivés

Louis MARGUERITTE
Jean-Baptiste NESSI

MOTS-CLÉS : matières premières, future, structure à terme, volatilité implicite, skew
KEYWORDS : commodities, future, term structure, implied volatility, skew

ENCADREMENT : Nordine CHOUKAR et Guillaume SAINTJEAN, MAZARS Paris
CORRESPONDANT ENSAE : Romuald ELIE

MÉMOIRE CONFIDENTIEL

Remerciements

La tradition veut que l'on remercie ceux qui nous ont aidés dans notre étude, ce que nous faisons avec enthousiasme.

Nous souhaitions remercier vivement **Nordine Choukar**, actuaire et directeur de mission chez Mazars Actuariat. Il nous a prodigué des conseils pour la mise en oeuvre, des astuces mathématiques particulièrement utiles et nous a encouragé lorsque les résultats espérés n'étaient pas au rendez-vous. Nous avons apprécié sa grande disponibilité et son sens de l'humour qui démystifiait toute équation différentielle stochastique.

Par la même occasion, nous remercions **Guillaume Saintjean**, actuaire et responsable de mission chez Mazars Actuariat pour sa disponibilité et son écoute. En tant qu'ancien de l'ENSAE, il n'a pas hésité à nous donner les précieux conseils pour mener à bien notre sujet avec les contraintes de temps. Merci pour avoir répondu à toutes nos questions, y compris lorsque nous avions besoin de données pour tester nos modèles.

Nous remercions **Romuald Elie**, enseignant-chercheur à l'ENSAE en mathématiques financières pour l'attention qu'il a porté à notre étude.

Nous remercions **Christian-Yann Robert**, enseignant-chercheur à l'ENSAE et actuaire pour les conseils et son dévouement pour la voie actuariat de l'école.

Enfin, nous remercions **nos parents, nos familles et nos amis** qui nous ont relus plusieurs fois, même lorsqu'ils n'appartenaient pas à la sphère financière et grâce à qui nous avons pu rendre le mémoire plus clair et compréhensible. Merci pour leur patience, leur écoute et leur soutien tout au long de cette dernière année d'étude importante pour nous.

Table des matières

Introduction **4**

1 Présentation des marchés et des produits traités **6**
1.1 Marchés et contrats à terme 6
1.2 Produits dérivés sur matières premières 11

2 Analyse statistique des données **15**
2.1 Données sur le marché du gaz 15
2.2 Données sur le marché du Brent 21

3 Modélisation des marchés des matières premières par modèle spot **27**
3.1 Modèle spot à deux facteurs : Schwartz-Smith 27
3.2 Modèle spot à deux facteurs avec saisonnalité 33
3.3 Modèle spot à trois facteurs (volatilité stochastique et saisonnalité) 35
3.4 Conclusion 37

4 Modélisation des marchés des matières premières par modèle de courbe **38**
4.1 Modèle de courbe à un facteur 38
4.2 Modèle de courbe à un facteur : extension 1 41
4.3 Modèle de courbe à un facteur : extension 2 42
4.4 Modèle de courbe à deux facteurs 44

5 Calibration, synthèse et choix du modèle **46**
5.1 Caractéristiques d'un bon modèle 46
5.2 Méthodes de calibration 46
5.3 Calibration des modèles 52
5.4 Synthèse des modèles 63

6 Valorisation de produits exotiques **64**
6.1 Option asiatique 64
6.2 Option bermudéenne 68

Conclusion **73**

Bibliographie **75**

A Rappels de statistique **i**
A.1 Principe d'un test i
A.2 Tests de normalité ii
A.3 Interprétation de la p-value iii

B Rappels d'analyse des séries temporelles **iv**

C Rappels de calcul stochastique **vi**
C.1 Processus stochastique vi
C.2 Processus de Wiener vi
C.3 Intégrale d'Itô vi
C.4 Processus d'Itô et équation différentielle stochastique vii
C.5 Lemme d'Itô vii
C.6 Quelques EDS spécifiques vii
C.7 Le modèle de Black-Scholes viii

D Problème d'interpolation en dimension 1 **x**

E Réduction de variance **xii**

F Outils utilisés **xiii**
F.1 Impression d'écran Bloomberg xiii
F.2 Priceur modèle de courbe (Excel) xiv
F.3 Code calibration par filtres de Kalman (Matlab) xv
F.4 Code pricing option asiatique xvi
F.5 Code pricing option bermudéenne xviii

Table des figures **xxi**

Liste des tableaux **xxiii**

Introduction

Il n'est plus une journée où les quotidiens nationaux n'évoquent la crise liée aux matières premières. Flambée des cours, augmentation significative de la demande et développement durable sont autant de thèmes qui défraient la chronique et qui semblent concerner aussi bien le simple consommateur de carburant à la pompe à essence que le banquier londonien. Le prix de l'or, du pétrole et des matières premières en général suivent actuellement une tendance haussière qui permet de réaliser des plus-values importantes. Ceci est de nature à réjouir certains investisseurs mais engendre des conflits économiques graves et des tensions géopolitiques majeures. Il est difficile d'analyser cette crise énergétique simplement tant les spécificités du marché sont importantes ; il faut avoir à l'esprit quelques notions liées aux marchés des matières premières :

- Les prix spot des matières premières sont définis comme l'intersection des courbes d'offre et de demande, à un point géographique donné.
- La demande pour une matière première, énergétique ou non, est généralement inélastique à la variation des prix, étant donné le caractère indispensable de la matière.
- Il y a une livraison physique du sous-jacent lorsque les contrats à terme (possibilité d'acheter dans le futur à un prix décidé aujourd'hui) arrivent à maturité.
- L'offre, qui est définie par la production et l'exploitation de nouvelles réserves, a un impact sur l'équilibre des prix à long terme.
- Les transactions financières (contrats forwards, contrats futures et options) représentent désormais un volume important d'opérations. Elles influencent notablement les prix parce que le choix de la livraison est laissé à l'initiative de l'acheteur qui peut dénouer son contrat avant la maturité.

Les spéculations portant sur les matières premières énergétiques et alimentaires sur les marchés financiers profitent d'une tendance haussière forte et de la standardisation des contrats à terme. Ces contrats permettent de mettre en place une gestion efficace du risque portant sur le prix et sur la volatilité inhérente aux marchés sous-jacents. Ils fournissent une transparence des prix en servant de référence aux transactions physiques. Durant ces dernières années, les matières premières et leurs dérivés se sont imposées comme instruments de diversification des placements financiers d'où l'accroissement de leur utilisation par les fonds de gestion et les investisseurs institutionnels.

L'objet de ce mémoire présenté à l'Institut des Actuaires (IA) est de proposer des modélisations pertinentes des marchés de matières premières énergétiques afin d'obtenir une valorisation des produits dérivés qui permette une gestion plus efficace du risque de marché. Lorsqu'un client souhaite investir dans un produit financier par l'intermédiaire d'un opérateur, ce dernier valorisera le produit et calculera sa couverture afin de transférer entièrement

ce risque au marché.

La démarche retenue pour cette étude consiste à étudier les caractéristiques des marchés dans un premier temps : c'est l'objet du chapitre 1. Il s'agit de mieux cerner les caractéristiques propres à chaque marché de l'énergie et d'en comprendre les enjeux. Une description des produits financiers classiques ainsi que des produits plus complexes est rendue nécessaire par leur valorisation à la fin de l'étude.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude et l'analyse des données de marché. L'objectif est d'étudier les différentes propriétés propres aux marchés du gaz et du pétrole Brent et d'en retenir les caractéristiques essentielles. On observera qu'il est impossible de proposer un modèle simple comme celui de Black-Scholes à volatilité constante.

L'objectif du chapitre 3 est de proposer un modèle spécifiant directement la diffusion du prix spot (prix au comptant) et d'en déduire la courbe des prix des contrats à terme. La notion mathématique liée à la modélisation des actifs est celle de processus stochastiques. Modéliser des trajectoires de prix revient à spécifier une famille de processus stochastiques. Les calculs s'appuient sur le modèle spot à deux facteurs de Schwartz-Smith. Notre étude propose deux extensions plus conformes à la réalité.

Le chapitre 4 traite d'une approche par modèle de courbe qui consiste à spécifier directement la famille des processus des courbes de contrats à terme et à en déduire la dynamique du prix spot. Il s'agit de considérer un modèle simple à un facteur. Notre étude propose deux extensions répondant plus précisément aux propriétés retenues au chapitre 2.

La calibration des modèles est mise en œuvre dans le chapitre 5 où différentes méthodes sont proposées. Un tableau récapitulatif permet de mettre en lumière les caractéristiques de chaque modèle, leurs avantages, leurs inconvénients, les performances de calibration et les recommandations.

Enfin, le chapitre 6 a pour but d'appliquer les résultats obtenus à la valorisation de deux options exotiques : une option asiatique et une option bermudéenne, produits financiers qui répondent à des besoins spécifiques des investisseurs.

Chapitre 1

Présentation des marchés et des produits traités

1.1 Marchés et contrats à terme

1.1.1 Les marchés de l'énergie

1.1.1.a Le marché du gaz

L'industrie du gaz naturel a connu et connaît encore une période de dérégulation : en Europe par exemple, la libéralisation de ce marché, par la directive du 22 juin 1998, est une véritable révolution. Le fournisseur de gaz naturel n'en est plus forcément le distributeur. Ce produit est la matière première dont la croissance de la consommation est la plus rapide grâce à ses propriétés physiques et chimiques et l'augmentation de son utilisation ces dernières années. De plus, pendant que les réserves de pétrole de nombreuses compagnies pétrolières revoient systématiquement leur niveau de réserve à la baisse, celui du gaz est encore relativement prometteur. A cause de l'augmentation spectaculaire du prix du pétrole, nombreuses sont les compagnies pétrolières qui tentent d'élargir leurs activités au domaine gazier. La volatilité des prix est plus forte sur le marché du gaz que sur le marché du pétrole. De grandes différences subsistent encore entre les pays anglo-saxons, où les prix suivent une loi de l'offre et de la demande et les autres pays européens, où la dérégulation est encore en cours et où le prix du gaz suit parfois une fonction linéaire du prix du pétrole.

Les réserves de gaz naturel sont abondantes. Celles identifiées ont presque doublé au cours des vingt dernières années et s'élèvent à plus de $181.10^{12}\ m^3$ en 2006. Les réserves les plus importantes se trouvent en Russie et au Moyen Orient (Iran et Qatar). Il est intéressant de comparer la consommation de gaz naturel à celle du pétrole. En tenant compte de la consommation actuelle (qui a augmenté deux fois plus vite pour le gaz que pour le pétrole), il reste plus de 63 années de consommation de gaz alors qu'il ne reste que 40 années de consommation de pétrole.

Jusqu'à maintenant, trois marchés régionaux pouvaient être identifiés : l'Amérique, l'Europe et l'Asie. Il n'existe que peu d'échanges entre les marchés à cause du coût de transport élevé du gaz sur de longues distances. Le coût du transport international du gaz est estimé à 1,52 €/MWh/1000 km par gazoduc et à 0,20 €/MWh/1000 km par méthanier (sous forme de gaz liquéfié), ce qui représente 25 % du prix final proposé au consommateur, alors que le gaz brut n'en représente que 8 % . Il faut garder à l'esprit que le transport d'un baril de pé-

trole coûte 2 $ seulement, un faible pourcentage du prix du baril (environ 2 % actuellement). C'est pourquoi le pétrole est un marché entièrement globalisé, alors que le gaz ne l'est pas. Cependant, l'augmentation progressive du gaz pétrole liquéfié facilite des échanges inter-régionaux. Pour avoir un aperçu des échanges des gaz dans le monde, on donne un schéma des principaux flux gaziers dans la figure (1.1).

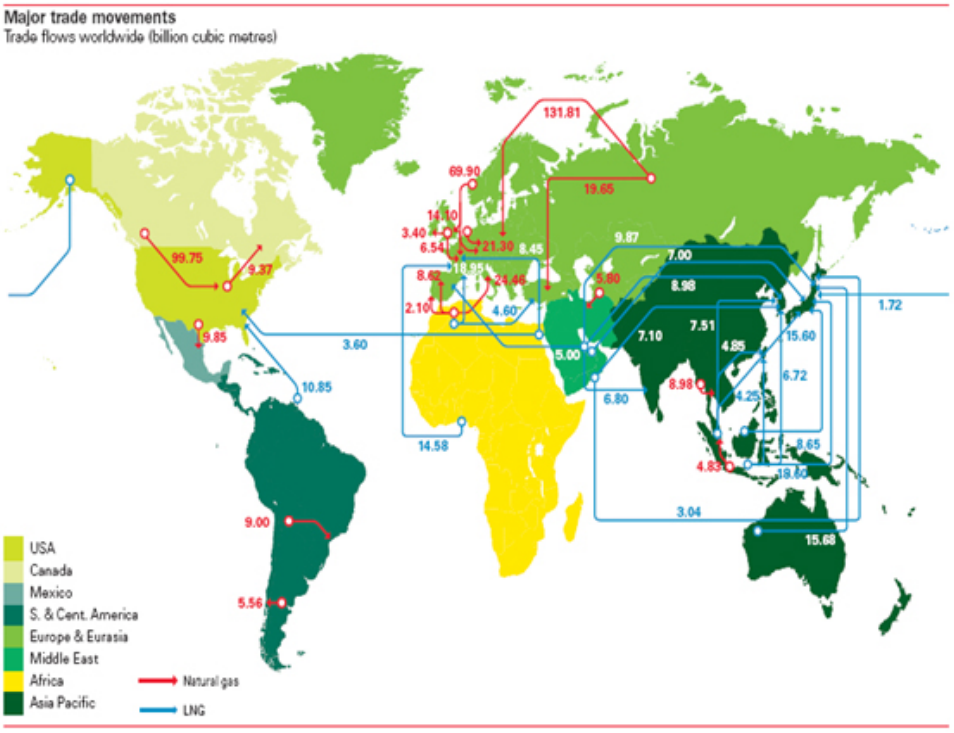

FIG. 1.1 – Principaux flux gaziers dans le monde, source : BP statistical review

Le gaz naturel est vendu par l'intermédiaire de contrats sur le marché spot avec une livraison physique du produit, ou bien avec des contrats à terme de plus ou moins longue maturité. Comme le marché est fragmenté, il n'est pas possible de parler d'un prix mondial pour le gaz naturel, à l'inverse du pétrole. Au Canada et aux États-Unis, où le marché est libéralisé, les prix sont concurrentiels et suivent une loi de l'offre et de la demande. A l'inverse, en fédération de Russie, où l'exploitation et la commercialisation du gaz est un monopole d'état, les prix domestiques sont maintenus artificiellement bas, tandis que le prix à l'exportation est élevé pour compenser les pertes sur le marché domestique. En Italie et en France, on observe un mécanisme intermédiaire où le prix du gaz est indexé sur le prix du pétrole.

Le prix du gaz naturel prend en compte un certain nombre de paramètres :

- Le prix à la source (le coût du gaz lui-même)
- Le coût du transport sur longue distance
- Le coût de la distribution à l'échelle locale

On peut noter qu'aux États-Unis, les prix à la source ont été dérégulés les premiers, tandis que les coûts de transport sont encore fixés par des sociétés nationales.

Les principaux facteurs de la demande en gaz sont le climat, ce qui implique une forte saisonnalité que nous vérifierons par la suite et l'activité économique. Les autres facteurs qui influencent la demande sont la population et le changement de tendance (comme une

croissance économique soutenue). En effet, la nouvelle législation concernant le contrôle de la pollution devrait favoriser la demande pour cette énergie propre.

1.1.1.b Le marché du pétrole

Depuis les vingt dernières années, le pétrole est devenu la matière première la plus importante dans le monde. D'un composé chimique indispensable aux sociétés, le pétrole est maintenant un sous-jacent de produits financiers très élaborés. De nombreux participants agissent sur le marché financier du pétrole : les banques d'investissement (Morgan Stanley, Goldman Sachs), les compagnies d'assurance (AIG), les *hedge funds* (Citadel, Tudor Jones), et bien sûr les compagnies pétrolières (Total, BP). L'expansion du marché commence au début des années 70 avec la nationalisation des intérêts liés au pétrole qui entraîne un découplage de leurs investigations et de leurs productions. Les grandes entreprises exploitantes se sont mises à acheter et revendre du pétrole à l'extérieur de leurs propres réseaux de distribution, si bien qu'après plus de 30 ans, seul un petit pourcentage du volume du pétrole produit par une compagnie est raffiné et distribué dans son propre réseau d'origine. Parallèlement, la volatilité du prix du pétrole et les besoins de couverture ont accéléré le développement des produits dérivés qui influent maintenant sur la formation du prix du pétrole. Le produit financier le plus échangé est sans aucun doute le contrat future sur le pétrole brut qui est coté sur le NYMEX (New York Mercantile Exchange) ; il est plus connu sous le nom de WTI (West Texas Intermediate). Il est important de comprendre que le pétrole est négocié deux fois sur les marchés financiers, la première fois en tant que pétrole brut, et la seconde fois en tant que produit raffiné, ces deux matières étant liées par la technologie et l'économie du raffinage. Comme il a été expliqué dans la section précédente, le prix du gaz ou d'autres matières premières peut être indexé sur celui du pétrole, mais même dans un marché du gaz complètement ouvert à la concurrence, l'évolution du prix est partiellement corrélée au prix du pétrole. En effet, lorsque le gaz naturel devient trop cher par rapport au pétrole, il peut être substitué par du pétrole traité d'une certaine façon et qui a des capacités énergétiques voisines. Cela entraîne une demande accrue en pétrole, ce qui implique une hausse des prix ayant pour effet de réduire l'écart entre le prix du gaz et le prix du pétrole.

Le pétrole est une matière première particulière car elle est destinée in fine à sa consommation et non à sa conservation (comme l'or, l'argent ou le platine). En 2004, les ventes de pétrole sont encore très significatives à l'échelle macroéconomique : environ 2 % du PNB mondial à comparer avec les 7 % des années 1980. En 2006, la demande s'est élevée à 83,7 millions de barils par jour, dont 35 millions sont produits par les pays de l'OPEC (Organization of Petroleum Exporting Countries). Le principal producteur reste l'Amérique du Nord (13,7 millions de barils et par jour), l'Arabie Saoudite (10,8) et l'Iran (4,3), tandis que les principaux consommateurs sont les Etats-Unis (20,6), l'Europe de l'Ouest (15,1) et la Chine (7,4), ce qui entraîne de forts mouvements d'exportation depuis le Moyen-Orient et l'ex-Union Soviétique vers l'Europe et les Etats-Unis. Le pétrole est transporté par des pipelines ou des bateaux-pétroliers. A l'échelle internationale, c'est cette seconde solution qui est le plus souvent adoptée. En revanche, aux Etats-Unis, le pétrole est souvent échangé et transporté grâce au réseau de pipelines qui est géré par la FERC (Federal Energy Regulatory Commission). Il existe plusieurs types de pétrole brut (Arabian Light, Bonny Light, WTI, Brent...) qui dépendent de deux caractéristiques physiques : sa densité et sa quantité de soufre. Les données qui sont utilisées dans cette étude sont celles du Brent coté sur le NYMEX (autre type de pétrole brut). On donne dans la figure (1.2) les principaux flux pétroliers pour mieux comprendre les enjeux des échanges pétroliers à l'échelle internationale.

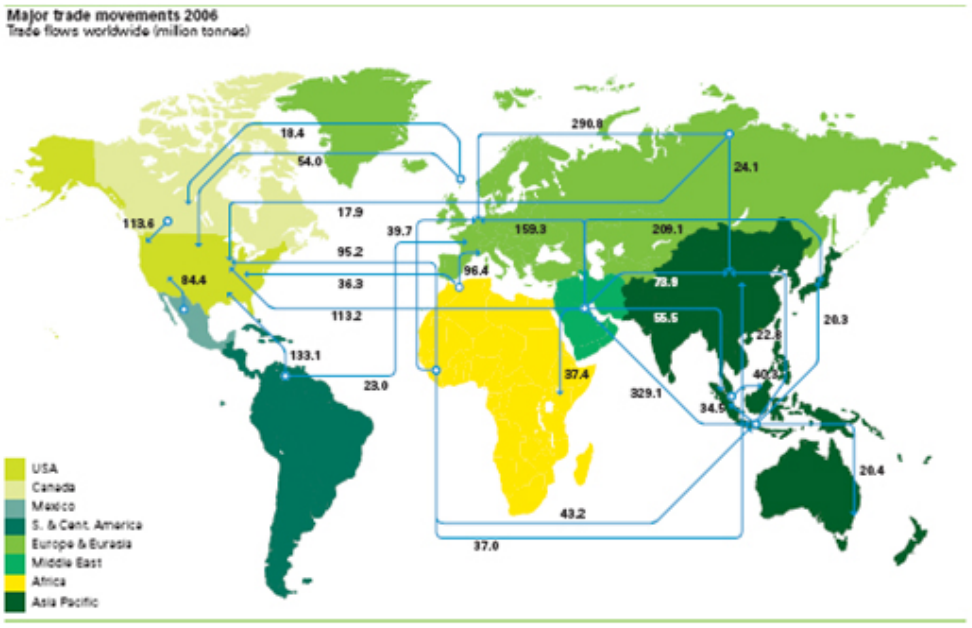

FIG. 1.2 – Principaux flux pétrole dans le monde, source : BP statistical review

Le prix du baril a plus que doublé depuis 2007 et à même dépassé les 135 $ cette année. La hausse du prix du brut résulte de l'adéquation entre l'offre et la demande. Alors que les besoins en pétrole continuent de s'accroître à un rythme important dans le monde (tirés par la forte croissance économique des pays émergents comme la Chine et l'Inde), l'approvisionnement a du mal à suivre. Par conséquent, l'équilibrage entre consommation et production induit un renchérissement des produits pétroliers. Toutefois, les variations du cours du baril sont très amorties avant d'atteindre le consommateur final, notamment à cause des taxes (en France par exemple avec la TIPP) mais aussi des subventions (au Venezuela ou au Koweit notamment). Une augmentation très marquée du prix du brut est donc nécessaire pour freiner significativement la demande. La situation géopolitique accentue régulièrement la pression à la hausse et constitue une source de volatilité importante.

On ne détaillera pas ici tous les problèmes engendrés par le pétrole, notamment ceux de la dépendance énergétique, ceux de la consommation et ceux de la géopolitique. Il faut néanmoins garder à l'esprit que les fluctuations du prix du pétrole ont un impact sur le budget des ménages, donc sur la consommation dans les pays industrialisés. Elles influent aussi sur le prix de tous les biens et services, car tous sont produits en utilisant, au moins indirectement, du pétrole. La découverte de réserves de pétrole dans un pays est souvent perçue comme un « miracle » pour son économie. Toutefois, l'afflux de devises est parfois mal utilisé car il peut encourager la corruption et les ingérences étrangères. L'effet réel est donc souvent plus contrasté, surtout pour les pays les plus pauvres.

1.1.1.c Le marché de l'électricité

La récente introduction de la concurrence sur le marché de l'électricité suit le processus déjà mis en œuvre dans le secteur gazier. L'ouverture des marchés est justifiée par une nouvelle source de bénéfices dans des secteurs peu connus, puisque gérés par des monopoles. Cependant, l'électricité possède quelques traits caractéristiques qu'il convient de citer :

- C'est une matière première essentielle au fonctionnement des sociétés modernes.
- L'électricité est la plupart du temps non stockable (sauf pour l'hydroélectricité qui représente une petite fraction de la production mondiale).
- Elle doit être transportée par un réseau de transmission terrestre. Il n'existe pas d'alternative aux imposants câbles à haute tension, au contraire des réseaux de télécommunications où les satellites ont remplacé les câbles souterrains.

Les conséquences de l'ouverture du marché de l'électricité sont encore floues et difficiles à interpréter. On peut s'en référer à deux chiffres d'avril 2004 pour s'en convaincre :

- Au Royaume-Uni, un des marchés les plus dérégulés, on affiche un coût de production de 0,048 € par kilowatt-heure.
- Au sein du marché le plus centralisé, en France, les coûts d'EDF s'élèvent à 0,051 € par kilowatt-heure, une valeur très comparable.

Aujourd'hui, les nouveaux acteurs dans le marché de l'électricité sont les banquiers d'affaire, ceux qui ont agi sur les marché des matières premières depuis longtemps, comme Morgan Stanley, Goldman Sachs et Deutsche Bank.

Le transport de l'électricité répond à des lois physiques (les lois de Kirchhoff) qu'on ne peut négliger. Ainsi, lorsqu'un générateur de tension ou de courant change son débit où qu'une chute de tension est observée à un nœud du réseau, c'est l'ensemble de ce dernier qui en subit les conséquences, à l'image de la panne de courant géante qui a lieu en août 2003 au Nord-Est des États-Unis et au Canada entre les chutes du Niagara et New York. Une autre caractéristique du prix de l'électricité est l'existence de pics et de sauts (*spikes* et *jumps*) beaucoup plus accentués que pour d'autres matières premières. Les amplitudes peuvent s'élever à 1000 $ le megawatt-heure. Ce phénomène n'est pas observé sur les autres marchés, comme le gaz et le pétrole. Ceci est expliqué en partie à cause de l'impossibilité du stockage. D'un point de vue économique, ceci s'explique par le fait que l'équilibre entre l'offre et la demande doit être satisfait à tout instant et que l'électricité ne peut être stockée. Une interruption même momentanée du courant entraîne une chute brutale de l'offre, ce qui se répercute instantanément sur les prix. Ce n'est pas le cas pour les autres marchés où il existe des capacités de stockage. Ces caractéristiques énoncées, les contrats à privilégier sur ces marchés sont les contrats forward et futures.

1.1.2 Les contrats forwards

Un contrat forward est un actif dérivé simple. C'est un engagement entre deux parties à acheter ou vendre un actif (appelé sous-jacent) à une date donnée pour un prix donné. Il se distingue d'un contrat au comptant (spot) dans lequel la transaction est réalisée immédiatement. Un contrat forward est échangé le plus souvent entre deux établissements financiers ou entre un établissement financier et un client. La partie qui s'engage à acheter l'actif prend une position dite longue, alors que celle qui s'engage à le vendre prend une position dite courte. Les contrats forwards sont très prisés sur les marchés des changes.

1.1.3 Les contrats futures

Un contrat future est comme un contrat forward, un contrat entre deux parties pour acheter ou vendre une certaine quantité d'actif donné, le sous-jacent, à une date future pour un prix convenu à l'avance. Ce prix d'exercice est appelé *strike*. Il est possible de déboucler son opération avant l'échéance en revendant son contrat au prix du marché. C'est l'évolution du

prix spot en fonction du prix future qui détermine les stratégies des vendeurs et des acheteurs. Les contrats engagent irrévocablement autant d'acheteurs que de vendeurs à respecter le contrat qui sera dénoué soit à l'échéance par livraison et règlement (pour un actif physique), soit par règlement en cash de l'écart du prix spot et du prix future, soit à tout moment avant l'échéance du contrat par cession de la position longue ou courte, au prix du marché. Il s'agit dans ce dernier cas d'une clôture de position et non de la fin du contrat qui existe jusqu'à son échéance, même en passant par plusieurs mains.

Contrairement aux contrats forwards, les futures s'échangent sur des marchés organisés, qui respectent les caractéristiques communes suivantes :

- Les contrats futures sont très standardisés, réglementés et rigides.
- Les contrats futures sont la plupart du temps des contrats liquides, la liquidité étant assurée par les teneurs de marché (*market makers*).
- Les cotations de ces contrats font l'objet d'une large diffusion auprès des organismes de contrôle et de la presse spécialisée.
- Les risques de défaut de paiement sont assurés par une chambre de compensation : celle-ci exige des donneurs d'ordres un dépôt de garantie, le deposit, à verser dès l'ouverture du contrat. Le deposit est systématiquement constitué par des appels de marge et est restitué lors de la clôture du contrat.

Les différences majeures entre les deux types de contrats sont résumées dans le tableau (1.1). Les marchés de contrats futures les plus importants sont, aux États-Unis, le Chicago Board of Trade (CBOT) et le Chicago Mercantile Exchange (CME), et en Europe le London International financial futures and options exchange (LIFFE) et l'european exchange (Eurex). Pour son caractère très réglementé et encadré, nous privilégierons au cours de notre analyse l'utilisation des contrats futures.

Contrat Forward	Contrat Future
Négocié sur un marché gré à gré	Négocié sur un marché organisé
Non standardisé	Contrat standardisé
Une date de livraison	Une période de livraison
Un seul flux à la fin du contrat	Appels de marge (marking to market)
Livraison ou dénouement en cash	Positions le plus souvent dénouées avant l'échéance
Existence d'un risque de crédit	Absence de risque de crédit (ou risque de contrepartie)

TAB. 1.1 – Comparaison des contrats futures et forwards

1.2 Produits dérivés sur matières premières

Les options vanilles sur futures (*call* et *put* sur futures) sont naturellement traitées sur les marchés précédemment cités ; leur spécificités sont décrites dans l'annexe (F.1). D'autres produits plus complexes sont présentés dans les paragraphes suivants.

1.2.1 Les options bermudéennes

Les options bermudéennes correspondent à un intermédiaire entre une option européenne et une option américaine. Il est possible d'exercer son option à divers instants t_k, le nombre d'instants étant considéré comme fini.

$$t_0, t_1, ..., t_k, ..., t_n \in [0, T] \quad \text{souvent } t_k = \frac{kT}{n}$$

On obtient une option américaine lorsque $n \to \infty$. Nous valoriserons une telle option dans la section 6.2.

1.2.2 Les swaps

Les swaps sont, avec les contrats à terme forwards et futures, les instruments dérivés les plus courants sur les matières premières. Présentons leur principe à travers un exemple : une compagnie aérienne s'approvisionne tous les jours de carburant et souhaite éliminer l'incertitude quant à son coût, en payant un prix fixe. Elle va donc entrer dans un swap d'une durée d'un an pendant laquelle, à la fin de chaque mois et pour un volume fixé :

- elle paie un prix fixe (jambe fixe) ;
- elle reçoit une partie flottante (jambe flottante) correspondant à la moyenne journalière, réalisée au cours du mois, d'un indice de prix spot du carburant. En effet, comme il s'agit d'un approvisionnement journalier, l'entreprise sera plus intéressée de se couvrir contre le prix moyen.

Comme pour les swaps de taux, la valeur du swap est la différence entre les valeurs actualisées de la jambe flottante et de la jambe fixe. Déterminer le prix d'un swap, c'est donner un prix pour la jambe fixe. Il existe ainsi une structure à terme (dépendance du prix en la maturité du contrat) des swaps correspondant aux prix de la jambe fixe pour les différents mois de paiement.

1.2.3 Les options sur spread

Le risque de spread est important pour les matières premières. On distingue plusieurs catégories de spreads :

- **Spread calendaire** : différence entre deux prix de contrats à terme sur le même produit, de maturités différentes. Une entreprise de stockage est typiquement exposée à ce risque.
- **Spread géographique (locational spread)** : différence entre les prix d'un même produit livré en deux points géographiques distincts. Une entreprise de transport est soumise à ce risque.
- **Spread inter matières premières** : différence entre les prix de deux produits différents. En général, ces deux produits possèdent un lien physique, l'un résultant de la transformation de l'autre. Sur le pétrole, un *crack spread* correspond à la différence entre le prix du brut et celui d'un ou plusieurs produits issus de son raffinage (*cracking*). Un *frac spread* correspond a la différence entre les prix du gaz naturel et du propane. Les entreprises de raffinage sont des exemples d'intervenants soumis à ce type de risque.

Il existe ainsi de nombreux acteurs exposés au risque de spread, d'où une demande pour les options sur spread.

1.2.4 Les options asiatiques (moyenne arithmétique)

Les options asiatiques sont des options dont le payoff dépend du prix moyen de l'actif sous-jacent, calculé sur une partie de la vie de l'option. Le payoff d'un *call* sur moyenne de prix s'écrit donc :

$$(A(t) - K)^+ \text{ avec } A(T) = \frac{S(t_1)+S(t_2)+...+S(t_n)}{n} \text{ et } t_i \text{ des dates contractuelles.}$$

Elles ont historiquement été inventées pour lutter contre la manipulation des cours du sous-jacent au voisinage de l'échéance de l'option. On peut affirmer que de telles options répondent mieux que les options vanilles usuelles à un certain nombre de besoins des trésoriers d'entreprise. Nous valoriserons une telle option dans la section 6.1.

1.2.5 Les options barrières

Ce sont des options dont le payoff dépend du niveau du sous-jacent par rapport à un niveau contractuel (la barrière). De nombreuses options barrières sont échangées sur les marchés de gré à gré. Leur succès auprès de certains acteurs de marché tient au fait qu'elles sont moins coûteuses que les options traditionnelles correspondantes. Il y a deux catégories d'options : les *knock-out*, qui cessent d'exister une fois que le prix du sous-jacent atteint un certain seuil, la barrière, et les *knock-in*, qui ne commencent à exister qu'une fois la barrière atteinte par le prix du sous-jacent. Par ailleurs, ces options barrières sont structurées comme des *puts* ou *calls* européens. Par exemple :

- Un DOC *down-and-out call* de *strike* K, de barrière H et de maturité T est l'option d'achat du sous-jacent au prix K au temps T si le sous-jacent ne descend jamais en-dessous de H.
- Un UOC *up-and-out call* possède les mêmes caractéristiques, mais la barrière est montante.
- Un DIC *down-and-in call* est activé si le sous-jacent passe au-dessous de la barrière.
- Un UIC *up-and-in call* est activé si le sous-jacent passe au-dessus de la barrière.

L'intérêt pour de telles options provient du fait qu'elles sont moins chères que les options classiques équivalentes.

1.2.6 Les options swing

Le marché des options exotiques sur les matières premières reste encore assez restreint. Une originalité de ce marché est l'existence de contrats comportant une clause optionnelle sur les prix et le volume ; de telles options sont rassemblées sous le terme générique de *swing options* ou options *Take-or-pay (TOP)*. Elles permettent à son détenteur d'exercer de manière répétée le droit de recevoir une quantité plus faible ou plus importante du sous-jacent.

Si $t = 0$ est la date à laquelle le contrat est écrit, l'option prend effet sur la période $[T_1, T_2]$. Durant cette période la *swing option* nous permet d'exercer le droit jusqu'à N fois. Ces dates d'exercice appartiennent un ensemble de dates discrètes $\{\tau_1, ..., \tau_2\}$. Le contrat stipule un temps d'attente entre deux dates d'exercice appelé temps de réfraction. (En particulier, on ne peut réaliser deux exercices le même jour).

Les deux classes de ces contrats dépendent de la durée de l'effet de l'exercice :

- effet local : l'exercice ne modifie le volume de livraison que pour la date présente d'exercice.
- effet global : l'exercice modifie le volume de livraison pour les dates ultérieures (le niveau exercé écrase le précédent jusqu'à la prochaine date d'exercice).

En général, l'exercice à une date donnée permet au porteur de l'option de recevoir une variation de volume du sous-jacent (positive si il la reçoit, négative si il la livre). Cette variation de volume est soumise à contrainte. En effet un exercice à la date τ_j, $1 \leq j \leq n$, doit appartenir à un intervalle de la forme $\left[l_j^1, l_j^2\right] \cup \left[l_j^3, l_j^4\right]$. Ces bornes sont spécifiées dans le contrat et vérifient : $l_j^1 \leq l_j^2 \leq 0 \leq l_j^3 \leq l_j^4$.

Le montant total délivré sur la période de l'option $[T_1, T_2]$ est lui aussi limité selon les termes du contrat. Une violation de cette clause est permise moyennant une pénalité. Cette pénalité est ou bien déterminée à la signature du contrat ou dépend d'une valeur aléatoire observable à la maturité (prix spot à $t = T_2$, $\max_{[T_1,T_2]} S_t$ ou encore sa moyenne).

Nous allons spécifier cette fonction de pénalité sur un exemple simple : pour un contrat où le volume total V délivré appartient à un intervalle de la forme $[Min, Max]$, on définit une pénalité fixe C_1 si V est inférieur à Min et une pénalité P_{T_2} par unité de sous-jacent délivrée en sus.

$$\boxed{\phi(V) = \begin{cases} C_1 & \text{si} \quad V \leq Min \\ 0 & \text{si} \quad Min \leq V \leq Max \\ P_{T_2}(V - Max) & \text{si} \quad Max \leq V \end{cases}}$$

Dans le cas où la contrainte de livraison est absolue, on affecte des coûts infinis à la fonction de pénalité.

Afin de conclure sur la présentation des *swing options*, on doit définir un prix d'exercice auquel une unité de matière première sera échangée à la date τ_i d'exercice. La détermination de ce *strike* varie elle aussi d'un contrat à l'autre : il peut être prédéterminé à la date $t = 0$ ou observable à la date T_1 (cotation en T_1, du future de maturité T_2).

La *swing option* se situe "entre" un swap et une série d'options classiques. Mais la valorisation de ce type d'instrument est complexe et constitue un domaine de recherche actif. Le lecteur pourra se référer à [12] et [21].

Chapitre 2

Analyse statistique des données

L'objectif de cette partie est d'analyser les données des marchés de l'énergie afin d'en identifier leurs spécificités (retour à la moyenne, distribution, stationnarité, saisonnalité...). Cela permet de choisir les modèles les plus pertinents en fonction des marchés et d'adapter les procédures de calibration.

2.1 Données sur le marché du gaz

Les données utilisées sont des données du Henry Hub. C'est un point de livraison des contrats à terme sur le gaz naturel traités sur le NYMEX. C'est un point de convergence en Louisiane de neuf pipelines. Les prix spot et les prix des futures sont cotés en $/mmbtu (millions of British Thermal Units) et sont considérés comme la référence de prix du marché nord américain. On dispose de nombreuses cotations sur des futures calendaires (maturité fixée dans le temps) et sur des futures génériques (durée de contrat fixe ou ténor fixe). Après avoir vérifié qu'il n'y avait pas d'effet particulier d'un contrat à un autre, on décide d'étudier les contrats 1, 6 et 12 mois sur trois périodes : 1990-1992, 1996-1998 et 2005-2007.

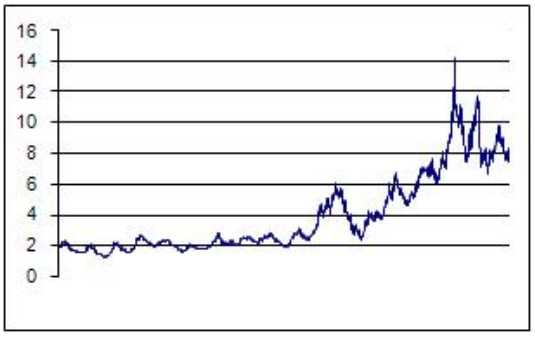

FIG. 2.1 – Evolution du prix future 6 mois entre 1991 et 2007

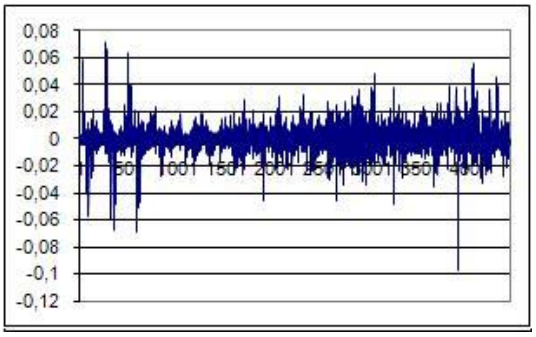

FIG. 2.2 – Evolution des logarithmes des rendements quotidiens du prix future 6 mois entre 1991 et 2007

2.1.1 Indicateurs standards

On réalise une étude de statistique descriptive sur les rendements quotidiens des futures génériques sur une période de 2 ans. La série temporelle $u(t) = ln\left(\frac{S_{t_{i+1}}}{St_i}\right)$ est étudiée pour chacun de ces trois contrats et pour les trois périodes. La moyenne des logarithmes des

rendements est proche de 0 (voir paragraphe suivant) ; par ailleurs nous observons un excès de kurtosis, défini comme le rapport entre le moment centré d'ordre 4 et le carré du moment centré d'ordre 2, qui vaut 8 parfois même 20 au lieu de 3 pour une distribution gaussienne traduisant l'épaisseur plus importante des queues de distribution en comparaison avec une loi normale.

2.1.2 Analyse du drift

On désire tester la nullité du drift de la variation quotidienne des futures et la nullité du drift du rendement quotidien des futures. On calcule la moyenne de ces écarts sur des périodes variables comprises entre 6 mois et 10 ans. On peut rejeter l'hypothèse de nullité du drift pour des périodes courtes (inférieures à 5 ans) antérieures à 2003. En effet, nous remarquons un drift positif très net sur ces dernières années.

2.1.3 Analyse de la distribution

On teste l'adéquation à une loi normale de la série temporelle $u(t)$. On met en œuvre trois tests de normalité (Kolmogorov-Smirnov, Cramer von Mises, Anderson-Darling). Ces tests sont décrits dans l'annexe (A.2). Les résultats obtenus conduisent à rejeter l'hypothèse de normalité des logarithmes des rendements pour différentes maturités.

Test	Statistique	p-value
Kolmogorov-Smirnov	0,053893	< 0,0100
Cramer-Von Mises	0,618437	< 0,0050
Anderson-Darling	3,949528	< 0,0050

TAB. 2.1 – Tests de normalité d'une série quotidienne de contrats futures de durée 6 mois.

2.1.4 Analyse de la volatilité

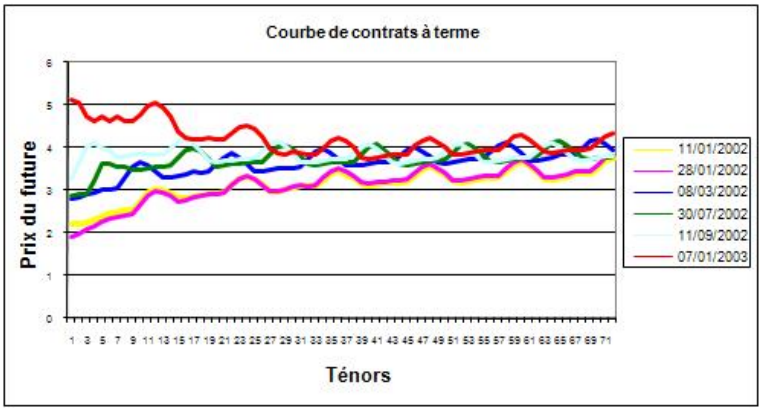

FIG. 2.3 – Mise en évidence de l'effet Samuelson

Effet Samuelson Le graphique (2.3) représente les courbes de contrats à terme à différentes dates de l'année 2005. Nous remarquons que la *short end* (extrémité gauche des courbes) présente plus de volatilité que la *long end* (extrémité droite). Cet effet est appelé effet Samuelson ou effet maturité. Ceci s'explique par le fait que les acteurs de marché s'intéressent plus à

des gains de court terme. La multiplication des transactions à court terme entraîne une plus forte volatilité à court terme qu'à long terme. Ce phénomène se retrouve sur d'autres marchés comme celui des taux avec la courbe des zéro-coupon ou celui des dérivés de volatilité avec la structure à terme des *variance swaps*.

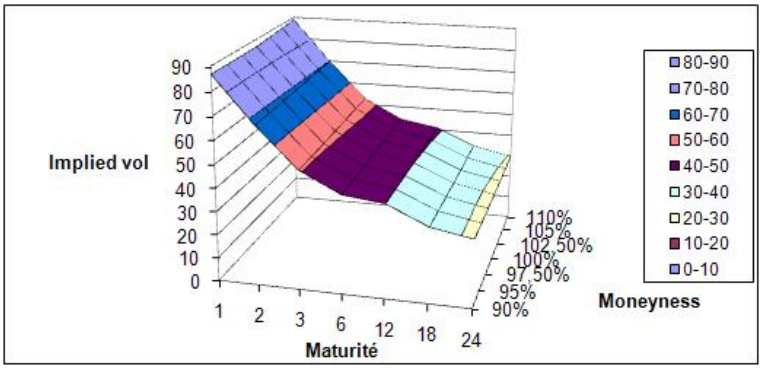

FIG. 2.4 – Surface de volatilité du contrat de maturité 6 mois le 12/09/2007

Analyse de la surface de la volatilité On retrouve l'effet Samuelson décrit précédemment selon lequel la volatilité est fonction décroissante de la maturité.
Pour une maturité fixée, la volatilité implicite augmente à mesure que le *strike* augmente. On observe ce qui est appelé *l'upside skew* (figure 2.4). Ceci met en évidence la plus grande aversion au risque du marché pour une hausse des prix des matières premières. Cet effet de levier inverse n'est pas surprenant étant donné l'impact négatif sur l'économie d'une hausse des prix des matières premières.

2.1.5 Analyse de la saisonnalité

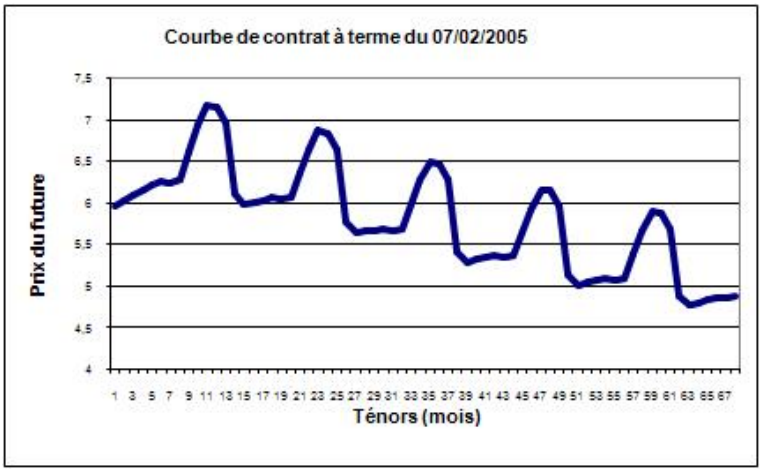

FIG. 2.5 – Courbe du contrat à terme du 07/02/2005

Le graphique (2.5) met en évidence une saisonnalité de période 12 mois de la courbe de contrat à terme. On vérifie cette propriété en recherchant les modes propres d'une série de données mensuelles sur une durée de 2 ans. On observe dans le graphique (2.6) un pic pour la valeur 12 qui correspond à une périodicité annuelle de la série temporelle.

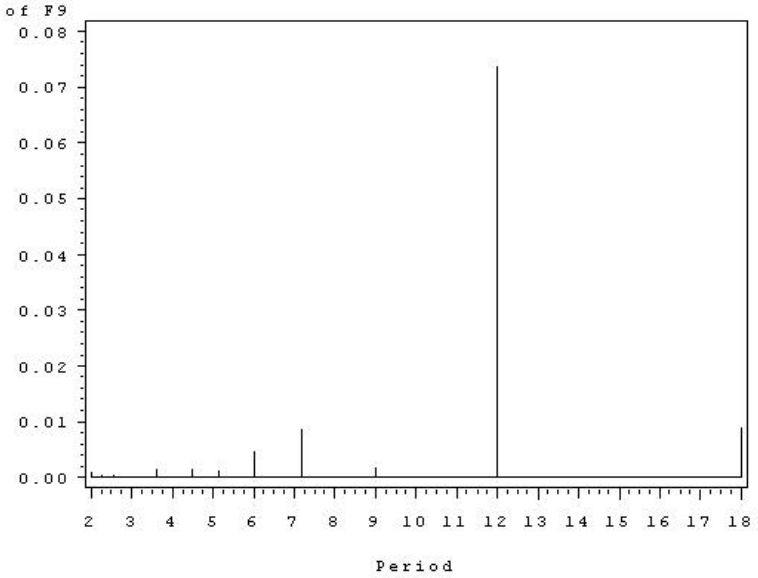

FIG. 2.6 – Densité spectrale de la série mensuelle du contrat future

2.1.6 Analyse de la stationnarité

La stationnarité est une hypothèse implicite de nombreuses méthodes d'analyse des séries temporelles. La question est de savoir si les propriétés de la série ne sont pas affectées par un changement de repère temporel : que l'on étudie au point t ou au point $t+k$, la série aura toujours le même comportement. Une première approche de l'étude de la stationnarité repose sur l'étude de l'auto-corrélogramme. On préfère une démarche plus rigoureuse. La démarche rigoureuse consiste à tester la non stationnarité à l'aide des tests de racine unité. Il s'agit donc de tester la présence d'une racine unité dans la série temporelle par un test de Dickey-Fuller augmenté (voir annexe B). Ce test consiste à effectuer la régression suivante :

$$\Delta Y_t = d_t + (\rho - 1)Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \gamma_i \Delta Y_{t-i} + \epsilon_t$$

avec Y_t la valeur de la série temporelle à l'instant t.

Il s'agit de tester la significativité du coefficient $\rho - 1$ à l'aide des seuils de MacKinnon, qui sont donnés dans les tables de Dickey Fuller. $d_t = a + bt$ est la partie déterministe de la série, a et b pouvant être nuls. Selon les valeurs de a et b, on obtient les différentes versions du test de Dickey Fuller augmenté.

Le principe du test est donc le suivant :

- $H_0 : \rho - 1 = 0$ (présence d'une racine unité, non stationnarité)
- contre $H_1 : \rho - 1 < 0$ (série stationnaire)
- statistique de test : statistique de Student du coefficient $\rho - 1$
- rejet de H_0 : seuils de MacKinnon dans les tables de Dickey-Fuller

Le niveau de sensibilité des tests sera pris égal à 5 % par défaut. Le nombre maximum de retards utilisés dans le test de Dickey Fuller augmenté sera égal à 8 par défaut. Les tests de stationnarité sont effectués sur trois contrats génériques de maturité 1 mois, 6 mois et 12 mois. Les tests sont effectués sur les logarithmes des rendements et pour chaque contrat, trois tests de Dickey Fuller augmenté sont effectués, soit un test simple, soit en ajoutant une constante ($a \neq 0, b = 0$), soit en ajoutant une tendance linéaire ($a \neq 0, b \neq 0$). Les lags représentent les retards, variant de 0 à 8. La stationnarité est décelable, mais pas toujours évidente surtout pour la première période d'analyse. Elle est très claire lorsqu'on n'ajoute aucune tendance. En revanche, en présence d'une tendance affine, les résultats sont plus mitigés.

2.1.7 Analyse de l'effet de retour à la moyenne

Dans les industries où la technologie change rapidement, comme c'est le cas de la production de gaz, d'électricité ou bien l'extraction de pétrole, il n'est pas facile d'identifier ce que sera le coût marginal de production à long terme. Pourtant à moyen terme, les prix de l'énergie ont tendance à avoir un comportement de retour à la moyenne (la *mean reversion*). L'estimation des effets du retour à la moyenne peut être faite de différentes manières et dépend bien sûr du choix du modèle et de la présence ou non de sauts et de volatilité stochastique. Ici, on utilise un test simple fondé sur une volatilité constante sans autocorrélation.

Considérons le modèle suivant, constitué par une simple régression décalée de 1.

$$X_t = a + bX_{t-1} + \sigma_t \epsilon_t$$

avec X la variable prix.

Puisqu'il n'y a pas de volatilité stochastique, $\sigma_t = \sigma$. L'estimation du coefficient de retour à la moyenne est donné par $\mu = b - 1$. Pour que le modèle ne soit pas explosif, on peut ajouter la condition selon laquelle $b - 1 < 0$, soit $b < 1$.

La régression donne finalement :

$$\Delta x_t = a + \mu x_{t-1} + \sigma \epsilon_t$$

On retrouve donc un cas particulier de l'analyse de la stationnarité, avec un test de Dickey-Fuller et un retard pris égal à 0. Le retour à la moyenne correspond donc au cas où le retard vaut lag0. Les résultats sont probants, car sur la dernière période (2005-2007), le retour à la moyenne apparaît clairement dans les tests de Dickey-Fuller, quelque soit le type de test.

2.1.8 Récapitulatifs

Les modèles usuels de type Black-Scholes, quoique instructifs, ne sont pas acceptables à cause de l'hypothèse de normalité des logarithmes des rendements. Cependant on peut profiter de propriétés statistiques fortes comme la stationnarité, le retour à la moyenne et la saisonnalité. Par ailleurs, le modèle doit mettre en évidence une *smile* de volatilité et l'effet Samuelson. Le tableau (2.2) résume quelques unes de ces propriétés.

	1 mois			6 mois			12 mois		
	90-92	96-98	05-07	90-92	96-98	05-07	90-92	96-98	05-07
Moyenne$*10^4$	0,4584	-5,109	3,5508	-2,825	1,1303	3,4101	5,1629	2,1468	2,5665
Ecart-type	0,029	0,041	0,036	0,022	0,0169	0,025	0,0224	0,012	0,019
Skewness	0,752	-0,171	0,624	-0,228	-0,385	-0,229	-1,119	0,546	-2,483
Kurtosis	14,758	2,940	4,2895	24,854	3,297	11,732	27,207	6,878	23,180
Test de normalité	Non			Non			Non		
Retour à la moyenne	Oui			Oui			Oui		
Stationnarité	Oui			Oui			Oui		

TAB. 2.2 – Tests de normalité d'une série quotidienne de contrats futures de durée 1, 6 et 12 mois

2.2 Données sur le marché du Brent

Les données utilisées sont des données du marché NYMEX. Les principaux contrats à terme pétroliers y sont cotés. Contrairement au marché du gaz, le marché du pétrole est globalisé avec des transactions internationales. On adoptera la même démarche que pour le gaz car ces deux marchés présentent de nombreuses similitudes. On dispose d'un historique sur des futures génériques (ténor fixe).

FIG. 2.7 – Evolution du prix future 6 mois entre 2003 et 2007

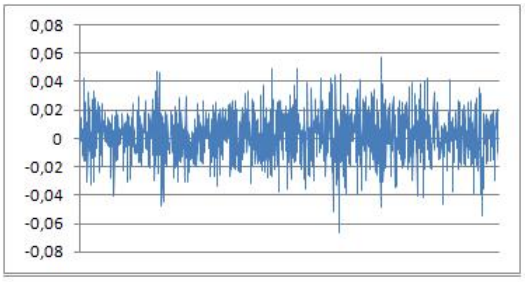

FIG. 2.8 – Evolution des logarithmes des rendements quotidiens du prix future entre 2003 et 2007

2.2.1 Indicateurs standards

On réalise une étude des statistiques descriptives sur les rendements quotidiens des futures génériques sur une période de cinq ans. On obtient à nouveau une moyenne proche de zéro et un excès de kurtosis traduisant l'épaisseur des queues en comparaison avec une loi normale. Toutes ces données sont présentées dans le tableau récapitulatif.

Concernant le drift, on retrouve les même résultats relatifs au rejet de l'hypothèse de nullité du drift sur des périodes courtes. On observe un drift très clairement positif sur ces dernières années.

2.2.2 Analyse de la distribution

On teste l'adéquation à une loi normale de la série des logarithmes des rendements quotidiens. Les trois tests employés nous permettent de rejeter l'hypothèse de normalité des logarithmes des rendements.

Test	Statistique	p-value
Kolmogorov-Smirnov	0,062437	< 0,0050
Cramer-Von Mises	0,735272	< 0,0050
Anderson-Darling	5,519264	< 0,0050

TAB. 2.3 – Tests de normalité d'une série quotidienne de contrats futures de maturité 6 mois

2.2.3 Analyse de la volatilité

L'effet Samuelson reste une propriété du marché pétrolier. Cet effet est visible sur les deux graphes ci-dessous. D'un coté on observe des prix plus volatils pour des futures de

maturités courtes et d'un autre coté un *smile* décroissant de la volatilité implicite en fonction de la maturité des options.

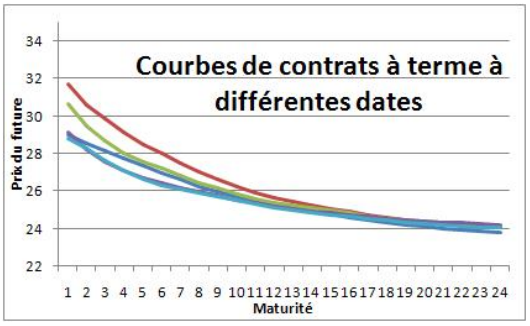

FIG. 2.9 – Courbes de contrats à terme à différentes dates

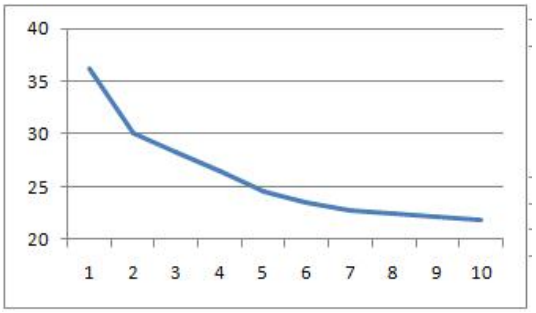

FIG. 2.10 – Volatilité implicite à la monnaie pour différentes maturités (en mois)

2.2.4 Analyse des propriétés statistiques

- Le marché du pétrole ne présente pas de propriété saisonnière particulière. Ceci a été vérifié en calculant les modes propres de la série mensuelle des contrats futures.
- Comme pour le gaz, on retrouve la propriété de stationnarité. Cependant les tests sont moins probants pour des périodes récentes.
- L'effet de retour à la moyenne est décelable pour des périodes antérieures à 2003. Nous n'avons pas pu le révéler sur des données plus récentes. On peut supposer que l'importance du drift positif masque ou même annule ce retour à la moyenne sur des périodes plus récentes.

2.2.5 Analyse de la corrélation

Les courbes de contrats à terme nous paraissant très corrélées, nous avons donc décidé d'entreprendre une analyse de la corrélation de ces données. Tout d'abord la corrélation des rendements est supérieure à 80% pour tout croisement des contrats.

	CL1	CL2	CL3	CL4	CL6	CL10	CL14	CL18	CL20	CL24
CL1[1]	100%									
CL2	98%	100%								
CL3	97%	100%	100%							
CL4	96%	99%	100%	100%						
CL6	94%	98%	99%	100%	100%					
CL10	91%	95%	97%	100%	100%	100%				
CL14	88%	92%	94%	96%	100%	100%	100%			
CL18	84%	89%	91%	93%	95%	100%	100%	100%		
CL20	83%	88%	90%	92%	93%	100%	100%	100%	100%	
CL24	80%	85%	87%	89%	91%	96%	98%	99%	100%	100%

[1] CLX correspond au contrat future de maturité X mois. On a donc livraison du sous-jacent dans X mois.

TAB. 2.4 – Corrélation entre les rendements des contrats à termes

On a aussi mis en évidence une structure de corrélation positive importante dans la volatilité avec une frontière à 80% pour les contrats à terme de maturité adjacente inférieure à 12 mois ($\pm$ 6 mois).

2.2.6 Analyse en composantes principales (ACP)

Après avoir interprété l'état de la courbe de prix à terme à une date donnée, nous cherchons à expliquer ses variations journalières. L'analyse est similaire à celle traditionnellement effectuée sur les courbes de taux d'intérêts. Afin d'extraire les facteurs de risques explicatifs des mouvements de la courbe, on effectue une analyse en composante principale (ACP). Cette approche permet de tenir compte de corrélations non négligeables entre variables de marché. Lorsque de nombreuses variables (les contrats de maturités différentes dans cette étude) sont corrélées, il est intéressant de construire, par combinaison linéaire de variables initiales, un plus faible nombre de variables non corrélées qui expliqueront les valeurs de la courbe. Les exemples porteront en plus des données du Henry Hub sur le pétrole brut coté sur le NYMEX, sur les deux premières années de maturités de la courbe et sur un historique de deux ans.
L'ACP d'une série temporelle consiste à étudier la matrice de corrélation de chocs successifs. Son but est d'expliquer le comportement de variables observables en utilisant un ensemble plus restreint de variables explicatives. D'un point de vue mathématique, on transforme un ensemble de m variables corrélées en un ensemble plus petit de variables orthogonales reproduisant l'information initiale. On choisit K variables (prix des futures pour K maturités différentes) et N observations journalières. On considère les variations journalières : $\Delta F(t,T_i) = F(t+1,T_i) - F(t,T_i)$ et on procède à une ACP sur les données centrées réduites, ce qui permet de donner un poids identique aux différentes variables :

$$\Delta F = (\Delta F_{ti})_{\substack{1 \leq t \leq N \\ 1 \leq i \leq K}} = \left(\frac{\Delta F(t,T_i) - \overline{\Delta F(.,T_i)}}{\sqrt{N}\sigma_{\Delta F(.,T_i)}} \right)_{\substack{1 \leq t \leq N \\ 1 \leq i \leq K}}$$

L'étude de l'ACP permet d'écrire l'approximation suivante :

$$\Delta F(t,T_i) \approx \overline{\Delta F(.,T_i)} + \sum_{j=1}^{p} \sigma_{ij} C_t^j$$

où $C_1, ..., C_p$ sont les composantes explicatives, d'écart-type normalisé.
On relève les résultats de l'ACP sur les différentes séries de données dans le tableau (2.5) :

Matière première - Période	Plage et nombre de contrats future	% de variance expliquée [1]
Gaz Henry Hub 96/98	1M-18M (9 contrats)	40,7/29,2/9,4
Gaz Henry Hub 99/01	1M-24M (11 contrats)	69,7/10,1/8,3
Brut NYMEX 93/97	1M-18M (9 contrats)	93,5/5,2
Brut NYMEX 98/02	1M-24M (11 contrats)	55,8/21,1/15,4
Brut NYMEX 03/07	1M-24M (11 contrats)	89,3/8,3/2,1

[1]Par exemple 40.7/29.2/9.4 signifie que le premier facteur explique 40,7 % de la déformation de la courbe de contrats à termes, le second 29,2 % et le troisième 9,4 %.

TAB. 2.5 – Résultats des analyses en composantes principales

On constate que les deux premières composantes expliquent toujours plus de 70 % des variations journalières.

Nous donnons aussi le tableau des coordonnées des vecteurs propres obtenus pour les données du Brut NYMEX de 1994 à 1998 dont les deux premiers axes expliquent plus de 98 % de l'inertie.

Contrat[1]	F1	F2	F3
NG1	0,323	0,669	0,620
NG2	0,350	0,405	-0,313
NG4	0,361	0,149	-0,439
NG6	0,364	-0,024	-0,314
NG8	0,363	-0,143	-0,129
NG10	0,361	-0,242	0,041
NG12	0,356	-0,327	0,197
NG15	0,348	-0,423	0,412

[1] NGX correspond au contrat future de maturité X mois. On a donc livraison du sous-jacent dans X mois.

TAB. 2.6 – Coordonnées des vecteurs propres du Brut Nymex de 1994 à 1998

- La première composante (figure 2.11) s'interprète comme un facteur de niveau, contribuant à faire varier le prix de manière parallèle (mais à des amplitudes différentes selon les volatilités). En effet la fonction $\theta_k \to \sigma_{1k}$ est quasiment constante

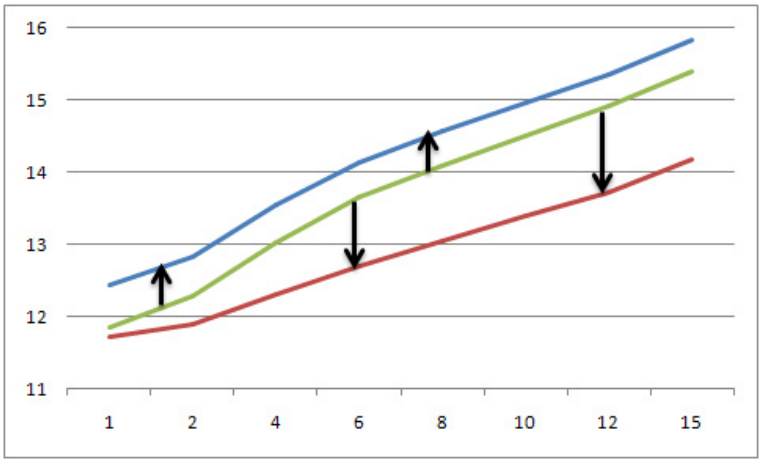

FIG. 2.11 – Influence du premier facteur sur la courbe des contrats

- La deuxième composante (figure 2.12) est un facteur d'inversion de courbe (faisant varier les deux extrémités de la courbe dans des directions opposées). Il provoque les mouvement d'aplatissement ou de pentification de la courbe des contrats. En effet la fonction $\theta_k \to \sigma_{2k}$ est soit croissante soit décroissante.
- La troisième (figure 2.13) s'interprète comme un facteur de courbure ou de déformation. Il provoque les changements de concavité de la courbe des contrats.

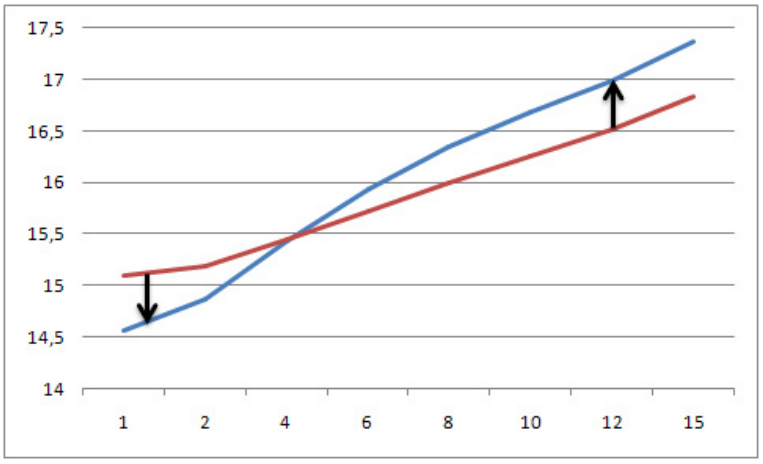

FIG. 2.12 – Influence du second facteur sur la courbe des contrats

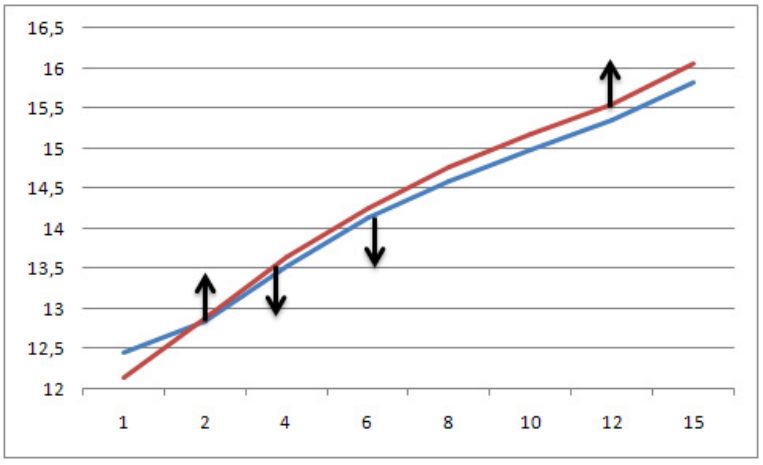

FIG. 2.13 – Influence du troisième facteur sur la courbe des contrats

Afin de mieux visualiser cette interprétation nous représentons la sensibilité de la courbe de contrat à terme pour chacun des trois facteurs où nous retrouvons ce qui est expliqué ci-dessus.

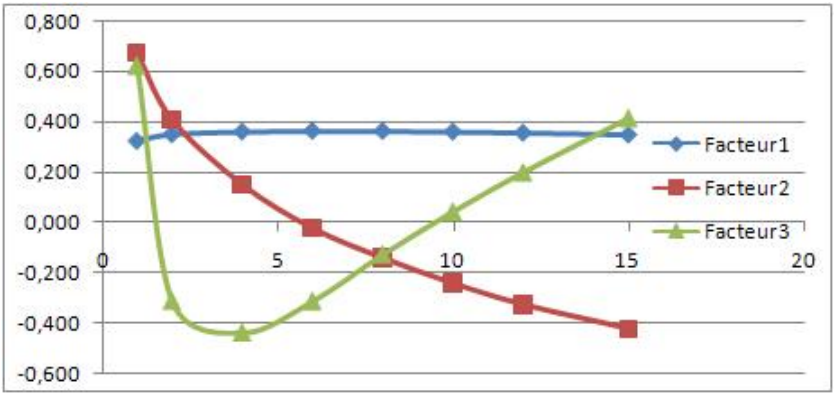

FIG. 2.14 – Sensibilité de la déformation de la courbe suite à un choc pour chacun des facteurs

2.2.7 Récapitulatifs

On retrouve des propriétés semblables à celles du marché du gaz (stationnarité, retour à la moyenne, *smile* de volatilité et effet Samuelson). Les données récentes du pétrole semblent refléter un climat géopolitique qui dépasse largement le cadre de notre modélisation. Le tableau (2.7) résume quelques unes de ces propriétés.

	6 mois			12 mois		
	93-97	98-02	03-07	90-92	96-98	05-07
Moyenne$*10^4$	-0,718	2,761	1,837	-3,316	0,983	4,387
Ecart-type	0,012	0,075	0,025	0,042	0,022	0,032
Skewness	0,235	0,532	-0,414	-0,224	0,569	-0,114
Kurtosis	9,436	3,428	5,243	11,342	8,435	18,341
Test de normalité	Non			Non		
Retour à la moyenne	Oui			Oui		
Stationnarité	Oui			Oui		

TAB. 2.7 – Tests de normalité d'une série quotidienne de contrats futures de durées 6 et 12 mois

Chapitre 3

Modélisation des marchés des matières premières par modèle spot

La littérature de la modélisation des marchés de matières premières a tendance à emprunter des modèles issus des taux d'intérêt. Il existe trois principales familles de modèles :

- *Modèles spot* : ils modélisent le prix au comptant du produit physique et le rendement d'opportunité instantané, impliquant ainsi la courbe de prix à terme.
- *Modèles de courbe de prix* : ils spécifient directement, dans un cadre HJM (démarche utilisée dans le monde des taux d'intérêt), l'évolution des prix à contrats à terme.
- *Modèles de type GARCH* : ce sont des modèles de séries temporelles à volatilité stochastique que nous ne traiterons pas dans cette étude.

Pour cette étude des modèles spot, nous partons d'un modèle déjà existant dans la section (3.1). Nous poursuivrons par deux extensions que nous proposons dans les sections (3.2) et (3.3). Le développement mathématique de ces extensions n'existe pas à notre connaissance. Nous prendrons soin dans la description de ces modèles d'expliciter des formules fermées pour les futures et les options vanilles qui constituent les instruments de base de la calibration et de la couverture.

3.1 Modèle spot à deux facteurs : Schwartz-Smith

3.1.1 Introduction

La diffusion du processus stochastique régissant le prix des matières premières joue un rôle déterminant pour le pricing des produits qui lui sont liés. L'utilisation de processus avec retour à la moyenne semble rassembler l'adhésion des praticiens. Intuitivement, lorsque le prix d'une matière première est supérieur à une moyenne de long terme (prix d'équilibre), l'offre pour cette matière première va s'intensifier, résultant de l'entrée sur le marché d'intervenants avec des coûts de production parfois importants. Réciproquement, lorsque les prix sont bas, l'offre baissera puisque les intervenants avec des coûts de production lourds sortiront du marché. Comme ces entrées et sorties d'agents ne sont pas instantanées, les prix peuvent être relativement hauts ou bas mais ils présenteront une propriété de retour vers le prix d'équilibre. Le modèle décrit ci-dessous répond à ces exigences.

Le prix d'équilibre suit une diffusion classique selon un mouvement brownien géométrique et un drift. Cette tendance générale haussière ou baissière (drift) reflète les progrès

techniques, la découverte ou l'épuisement des denrées ou bien encore l'inflation et les mesures politiques de long terme.

Les déviations de court terme (définies comme étant la différence entre le prix spot et le prix d'équilibre) suivent un processus de retour à la moyenne nulle (processus de type Ornstein-Uhlenbeck). Ces déviations de court terme reflètent des distorsions dans l'équilibre offre-demande de court terme résultant de variations climatiques ou la décision de certains acteurs d'augmenter le niveau des réserves en matières premières.

Ces deux quantités ne sont pas directement observables sur le marché. Cependant on comprend aisément que les changements sur les prix de futures de longue maturité nous informent sur les changements du prix d'équilibre. De même des changements dans la différence entre les prix futures longue maturité/courte maturité informent sur les déviations de court terme.

3.1.2 Description du modèle d'après [32]

Soit S_t le prix spot d'une matière première au temps t. On décompose le prix spot comme somme de deux termes stochastiques. $ln(S_t) = \chi_t + \xi_t$. La variable d'état χ_t fait référence à la déviation de court terme et ξ_t le prix d'équilibre. La déviation de court terme suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec retour vers 0.

$$\boxed{\begin{cases} d\chi_t = -\kappa\chi_t dt + \sigma_\chi dW_\chi \\ d\xi_t = \mu_\xi dt + \sigma_\xi dW_\xi \end{cases}} \tag{3.1}$$

Les deux mouvements browniens sont corrélés de telle sorte que $d < W_\chi, W_\xi >= \rho dt$. Le taux de retour à la moyenne κ mesure la vitesse à laquelle la déviation de court terme va être absorbées.

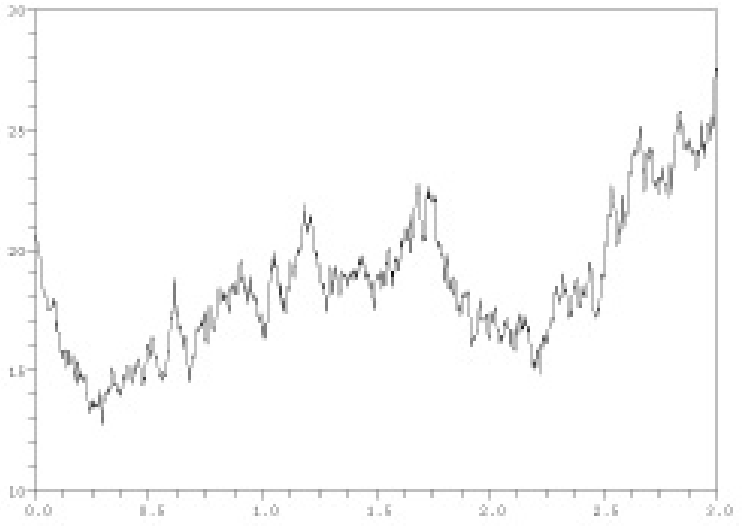

FIG. 3.1 – Trajectoire du prix spot dans le modèle de Schwartz et Smith

3.1.2.a Loi du prix spot

La résolution de (3.1) donne :

$$\chi_t = \chi_0 e^{-\kappa t} + \sigma_\chi \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW_\chi(s) \tag{3.2}$$

$$\xi_t = \xi_0 + \mu_\xi t + \sigma_\xi W_\xi(t) \tag{3.3}$$

D'après leur expression (Intégrale de Wiener pour la première et brownien pour la seconde), les deux variables d'état sont jointement normalement distribuées. En notant $X_t = \begin{pmatrix} \chi_t \\ \xi_t \end{pmatrix}$

Nous trouvons $\mathbb{E}[X_t] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}\left[\chi_0 e^{-\kappa t} + \sigma_\chi \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW_\chi(s)\right] \\ \mathbb{E}\left[\xi_0 + \mu_\xi t + \sigma_\xi W_\xi(t)\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_0 e^{-\kappa t} \\ \xi_0 + \mu_\xi t \end{pmatrix}$

Par ailleurs l'isométrie d'Itô donne :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \sigma_\chi e^{-\kappa(t-s)} dW_\chi(s)\right)^2\right] = \int_0^t e^{-2\kappa(t-s)} \sigma_\chi^2 ds = (1 - e^{-2\kappa t}) \frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa}$$

De même :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma_\chi e^{-\kappa(t-s)} dW_\chi(s) \int_0^t \sigma_\xi dW_\xi(s)\right] = \int_0^t \rho \sigma_\xi \sigma_\chi e^{-\kappa(t-s)} ds = (1 - e^{-\kappa t}) \frac{\rho \sigma_\xi \sigma_\chi}{\kappa}$$

Nous en déduisons que :

$$\boxed{X \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \chi_0 e^{-\kappa t} \\ \xi_0 + \mu_\xi t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (1 - e^{-2\kappa t}) \frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} & (1 - e^{-\kappa t}) \frac{\rho \sigma_\xi \sigma_\chi}{\kappa} \\ (1 - e^{-\kappa t}) \frac{\rho \sigma_\xi \sigma_\chi}{\kappa} & \sigma_\xi^2 t \end{pmatrix}\right)} \tag{3.4}$$

Le prix spot suit alors une distribution log-normale. La transformée de Laplace donne le prix espéré :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_t] &= exp\left(\mathbb{E}[ln(S_t)] + \tfrac{1}{2}\mathbb{V}[ln(S_t)]\right) \\ &= exp\left(\chi_0 e^{-\kappa t} + \xi_0 + \mu_\xi t + \tfrac{1}{2}\left((1 - e^{-2\kappa t}) \tfrac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} + 2(1 - e^{-\kappa t}) \tfrac{\rho \sigma_\xi \sigma_\chi}{\kappa} + \sigma_\xi^2 t\right)\right) \end{aligned}$$

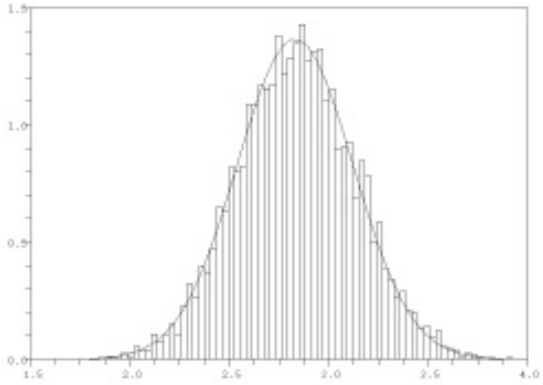

FIG. 3.2 – Distribution du log spot à 3 ans et comparaison avec la distribution normale

3.1.2.b Evaluation risque-neutre

Changement de mesure de probabilité Déterminer la probabilité risque-neutre est un problème incontournable de la modélisation en mathématiques financières. Du fait de l'aversion au risque, la probabilité historique est différente de la probabilité risque-neutre. Sous la probabilité risque-neutre, le prix d'un produit dérivé est l'espérance (sous cette probabilité) du flux terminal actualisé.
Le théorème de Girsanov assure que sous la probabilité risque neutre, dW_χ^* et dW_ξ^* sont les accroissements de browniens usuels vérifiant : $d < W_\chi^*, W_\xi^* >= \rho dt$. Le processus de la déviation court terme sous la probabilité risque neutre est toujours un processus d'Ornstein-Uhlenbeck retourné vers la moyenne $-\lambda_\chi/\kappa$. Le processus du prix d'équilibre est toujours un brownien géométrique avec une nouvelle dérive : $\mu_\xi^* := \mu_\xi - \lambda_\xi$.

Loi du prix spot sous la probabilité risque-neutre Un calcul élémentaire de moments donne :

$$X \overset{*}{\sim} \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \chi_0 e^{-\kappa t} - (1-e^{-\kappa t})\lambda_\chi/\kappa \\ \xi_0 + \mu_\xi^* t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (1-e^{-2\kappa t})\frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} & (1-e^{-\kappa t})\frac{\rho\sigma_\xi\sigma_\chi}{\kappa} \\ (1-e^{-\kappa t})\frac{\rho\sigma_\xi\sigma_\chi}{\kappa} & \sigma_\xi^2 t \end{pmatrix}\right) \tag{3.5}$$

Le prix spot suit alors une distribution log-normale. La transformée de Laplace donne le prix espéré :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^*[S_t] = exp\left(\mathbb{E}^*[ln(S_t)] + \tfrac{1}{2}\mathbb{V}^*[ln(S_t)]\right) \\ &= exp\left(\chi_0 e^{-\kappa t} + \xi_0 + \mu_\xi^* t - (1-e^{-\kappa t})\lambda_\chi/\kappa + \frac{1}{2}\left((1-e^{-2\kappa t})\frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} + 2(1-e^{-\kappa t})\frac{\rho\sigma_\xi\sigma_\chi}{\kappa} + \sigma_\xi^2 t\right)\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

3.1.2.c Evaluation de produits dérivés

Evaluation des contrats futures Le cadre de l'évaluation risque-neutre nous permet d'affirmer que le prix d'un contrat future est égal à l'espérance du prix spot en T sous la probabilité risque-neutre.

La formule (3.6) nous donne directement :

$$\begin{aligned} ln(F^T(t)) &= \chi_t e^{-\kappa(T-t)} + \xi_t + \mu_\xi^*(T-t) - (1-e^{-\kappa(T-t)})\lambda_\chi/\kappa \\ &+ \frac{1}{2}\left((1-e^{-2\kappa(T-t)})\frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} + 2(1-e^{-\kappa(T-t)})\frac{\rho\sigma_\xi\sigma_\chi}{\kappa} + \sigma_\xi^2(T-t)\right) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Evaluation des options européennes On cherche à déterminer le prix d'une option d'achat européenne à la date t sur un future de maturité T. La maturité de l'option est notée T_1. Y est distribué, sous la probabilité risque-neutre, selon une loi normale : $Y \overset{*}{\sim} \mathcal{N}(\mu_\phi, \sigma_\phi^2)$.

Avec $\mu_\phi(t, T_1, T) = \chi_t e^{-\kappa(T-t)} + \xi_t + \mu_\xi^* T_1 + A(T - T_1)$

et $\sigma_\phi^2(t, T_1, T) = e^{-2\kappa(T-T_1)}(1-e^{-2\kappa(T_1-t)})\frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} + \sigma_\xi^2(T_1-t) + 2e^{-\kappa(T-T_1)}(1-e^{-\kappa(T_1-t)})\frac{\rho\sigma_\xi\sigma_\chi}{\kappa}$

Comme le prix des contrats futures est distribué, sous la probabilité risque-neutre, selon une loi log-normale, on obtient des formules fermées pour l'évaluation d'options vanille (*call* et *put*) européennes dont le sous-jacent est le contrat future.(voir annexe C.7).

$$\begin{aligned} C(F^T(T_1), t, K, \sigma_\phi) &= e^{-r(T_1-t)}\mathbb{E}^* \left[\left(F^T(T_1) - K\right)^+ \right] \\ &= e^{-r(T_1-t)} \left(F^T(t)\mathcal{N}(d) - K\mathcal{N}\left(d - \sigma_\phi\left(t, T_1, T\right)\right)\right) \end{aligned} \tag{3.8}$$

avec $d = \frac{ln(F^T(T_1)/K)}{\sigma_\phi(t,T_1,T)} + \frac{1}{2}\sigma_\phi(t, T_1, T)$

La formule d'évaluation de ces options est analogue à la formule de Black-Scholes évaluant des options non pas sur futures mais sur actions ne payant pas de dividende. Dans notre cas le stock représenterait la valeur actualisée du future $e^{-r(T_1-t)}F^T(T_1)$ et la volatilité annualisée équivalente serait $\frac{\sigma_\phi(t,t_1,T)}{\sqrt{T_1-t}}$.

3.1.3 Analogie avec le modèle de Gibson - Schwartz

Ce modèle court terme/long terme se révèle être en fait équivalent à un modèle à rendement d'opportunité stochastique tel que celui développé par Gibson et Schwartz. Le rendement d'opportunité (δ) est défini comme le bénéfice associé à la détention du produit physique entre deux dates t et T. Il peut s'interpréter comme le revenu tiré du prêt du produit physique. Les paramètres et les facteurs d'un modèle peuvent être exprimés comme combinaison linéaire des facteurs de l'autre.

Description du modèle Si δ_t est le rendement d'opportunité à l'instant t et X_t le logarithme du prix spot au temps t, le modèle à rendement d'opportunité stochastique suppose la diffusion de ces deux variables d'état selon les processus suivants :

$$\boxed{\begin{cases} dX_t = (\mu - \delta_t - \frac{1}{2}\sigma_1^2)dt + \sigma_1 dW1 \\ d\delta_t = \kappa(\alpha - \delta_t)dt + \sigma_2 dW_2 \end{cases}} \tag{3.9}$$

où W_1 et W_2 sont des browniens géométriques de corrélation ρ. Le rendement d'opportunité suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec retour au niveau d'équilibre α au taux κ. Ce rendement d'opportunité intervient de manière décroissante dans la dérive du log-spot. En effet, le rendement d'opportunité payé au porteur de la matière première est analogue à un dividende payé au porteur d'une action. L'identification des variables et des paramètres dans ces deux modèles nous donne le tableau d'analogies (3.1).

Une extension de ce modèle est de rajouter un terme saisonnier. Nous le proposons dans la section suivante en y développant tous les calculs utiles.

Modèle court terme/long terme Symbole	Description	Modèle à rendement d'opportunité stochastique Paramètre équivalent
κ	Taux de retour à la moyenne court terme	κ
σ_κ	Volatilité court terme	σ_2/κ
dW_χ	Incréments du processus court terme	dW_2
μ_ξ	Dérive du prix d'équilibre	$\mu - \alpha - \frac{1}{2}\sigma_1^2$
σ_ξ	Volatilité long terme	$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2/\kappa^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2/\kappa}$
$dW\xi$	Incréments du processus long terme	$\frac{\sigma_1 dW_1 - (\sigma_2/\kappa)dW_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2/\kappa^2-2\rho\sigma_1\frac{\sigma_2}{\kappa}}}$
$\rho_{\xi\chi}$	Corrélation dans les incréments	$\frac{\rho\sigma_1-\sigma_2/\kappa}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2/\kappa^2-2\rho\sigma_1\sigma_2/\kappa}}$
λ_χ	Prime de risque court terme	λ/κ
$\lambda\xi$	Prime de risque long terme	$\mu - r - \lambda/\kappa$

TAB. 3.1 – Relations entre les paramètres des différents modèles

3.2 Modèle spot à deux facteurs avec saisonnalité

Dans cette section, on suit la même démarche dans le cadre d'un modèle 2-facteurs de type Gibson-Schwartz. Nous proposons l'ajout d'un terme saisonnier. Notre extension réside dans le fait que les différents articles étudiés ne fournissent pas de formules fermées pour le future et les options vanilles. On propose donc ces formules dans le cadre élargi de coefficients non pas constants mais dépendant du temps.

3.2.1 Modélisation

$$f(t) = b + \sum_{i=1}^{i=N} \beta_i cos\left(\frac{2\pi it}{P}\right) + \beta_i^* sin\left(\frac{2\pi it}{P}\right)$$

$$\nu(t) = \sum_{i=1}^{i=K} \gamma_i cos\left(\frac{2\pi it}{P}\right) + \gamma_i^* sin\left(\frac{2\pi it}{P}\right)$$

On introduit deux fonctions saisonnières f et ν, de telles manières que les variables d'états S et δ suivent les dynamiques suivantes :

$$\begin{cases} dS_t = S_t\left[\left(r - \delta_t + \lambda_S e^{\nu(t)}\sigma_S\right)dt + e^{\nu(t)}\sigma_S dW_{1,t}\right] \\ d\delta_t = \left(f(t) - \beta\delta_t + \lambda_\delta\sigma_\delta e^{\nu(t)}v_t\right)dt + \sigma_\delta e^{\nu(t)}dW_{2,t} \end{cases}$$

où β, λ_S, λ_δ,σ_S σ_δ ainsi que la corrélation sont des paramètres constants à estimer. $f(t)$ et $\nu(t)$ sont des fonctions déterministes du temps rendant compte du phénomène de saisonnalité. Les termes λ_S, λ_δ sont les primes de risques associées à chacune des variables d'états, liées au fait que la probabilité historique ne soit pas une probabilité risque-neutre. On fait l'hypothèse qu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage et que le marché est complet, ce qui implique l'existence et l'unicité d'une probabilité risque-neutre de telle manière que le prix d'un actif contingent soit égal à l'espérance, sous la probabilité risque-neutre, du flux terminal actualisé. Sous cette probabilité risque-neutre, le système est décrit de la manière suivante :

$$\boxed{\begin{cases} dS_t = S_t\left[(r - \delta_t)\,dt + \sigma_S e^{\nu(t)}dW_{1,t}^Q\right] \\ d\delta_t = (f(t) - \beta\delta_t)\,dt + \sigma_\delta e^{\nu(t)}dW_{2,t}^Q \end{cases}} \tag{3.10}$$

3.2.2 Loi du prix spot

En notant $X = ln(S_t)$, l'application du lemme d'Itô donne sous la probabilité risque-neutre

$$dX_t = \left(r - \delta_t - \frac{1}{2}\sigma_S^2 e^{2\nu(t)}\right)dt + \sigma_S e^{\nu(t)}dW_{1,t}^Q$$

L'intégration de l'expression précédente donne :

$$X(T) = X(t) + \int_t^T \left[r - \delta(u) - \frac{1}{2}\sigma_S^2 e^{2\nu(u)}\right]du + \int_t^T \sigma_S e^{\nu(u)}dW_{1,u}^Q$$

En intégrant et en prenant l'espérance sous la probabilité risque-neutre on obtient :

$$\mathbb{E}_t^*[X_T] = ln(S_t) + r(T-t) - \int_t^T \mathbb{E}_t^*[\delta(u)]du - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_S^2 e^{2\nu(u)}du \tag{3.11}$$

or

$$\delta(u) = \int_t^u e^{-\beta(u-s)} f(s)ds + \delta(t)e^{-\beta(u-t)} + \int_t^u \sigma_\delta e^{\nu(s)} e^{-\beta(u-s)} dW_{2,s}^Q$$

En substituant l'espérance de cette quantité dans l'expression (3.11), on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{E}_t^*[X_T] &= ln(S_t) + r(T-t) - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_S^2 e^{2\nu(u)} du \\ &- \int_t^T \left[\left(\int_t^u e^{-\beta(u-s)} f(s)ds\right) + \delta(t)e^{-\beta(u-t)}\right] du \end{aligned} \quad (3.12)}$$

De même :

$$\mathbb{V}_t^*[X_T] = \mathbb{V}_t^*\left[\int_t^T \delta(u)du\right] + \int_t^T \sigma_S^2 e^{2\nu(u)} du - 2\mathbb{C}ov\left[\int_t^T \delta(u)du, \int_t^T \sigma_S e^{\nu(u)} dW_{1,u}^Q\right]$$

Soit

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_t^*[X_T] &= \int_t^T \sigma_\delta^2 e^{2\nu(s)} \left(\int_s^T e^{-\beta(u-s)} du\right)^2 ds + \int_t^T \sigma_S^2 e^{2\nu(u)} du \\ &- 2\rho_{12}\sigma_S\sigma_\delta \int_t^T e^{2\nu(s)} \left(\int_s^T e^{-\beta(u-s)} du\right) ds\end{aligned}$$

En notant $H(s,T) = \int_s^T e^{-\beta(u-s)} du = \frac{1-e^{-\beta(T-s)}}{\beta}$ on en déduit que :

$$\boxed{\mathbb{V}_t^*[X_T] = \int_t^T \sigma_\delta^2 e^{2\nu(s)} H^2(s,T)ds + \int_t^T \sigma_S^2 e^{2\nu(u)} du - 2\rho_{12}\sigma_S\sigma_\delta \int_t^T e^{2\nu(s)} H(s,T)ds} \quad (3.13)$$

3.2.3 Evaluation de produits dérivés

3.2.3.a Evaluation des contrats futures

A partir des deux encadrés (3.12) et (3.13), nous en déduisons le prix du contrat future :

$$\boxed{\mathbb{E}^*[S_t] = exp\left(\mathbb{E}^*[ln(S_t)] + \frac{1}{2}\mathbb{V}^*[ln(S_t)]\right)} \quad (3.14)$$

3.2.3.b Evaluation des options européennes

On cherche à déterminer le prix d'une option d'achat européenne à la date t sur un future de maturité T_1. La maturité de l'option est notée T. Comme les prix des contrats futures sont distribués, sous la probabilité risque-neutre, selon une loi log-normale, nous obtenons des formules fermées pour l'évaluation d'options vanilles (*call* et *put*) européennes dont le sous-jacent est le contrat future.

$$\begin{aligned}C(F_1^T(T), t, K, \sigma_\phi) &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^*\left[(F_1^T(T) - K)^+\right] \\ &= e^{-r(T-t)}\left(F_1^T(t)\mathcal{N}(d) - K\mathcal{N}(d - \sigma_\phi(t,T,T_1))\right)\end{aligned} \quad (3.15)$$

avec $d = \frac{ln(F_1^T(0)/K)}{\sigma_\phi(t,T,T_1)} + \frac{1}{2}\sigma_\phi(t,T,T_1)$

$$\text{où } \sigma_\phi^2(t,T,T_1) = \int_t^T \sigma_S^2 e^{2\nu(s)} ds + \int_t^T \left[\frac{\sigma_\delta e^{\nu(s)}}{\beta}(1-e^{-\beta(T-s)})\right]^2 ds$$
$$- \int_t^T \frac{2\sigma_\delta \sigma_S \rho_{12}}{\beta} e^{2\nu(s)}(1-e^{-\beta(T_1-s)})ds$$

Cette modélisation fait toujours l'hypothèse d'une volatilité déterministe, hypothèse que nous relâcherons dans la section suivante un proposant un modèle 3 facteurs que l'on peut mettre en œuvre en s'inspirant du modèle à volatilité stochastique de Heston [18].

3.3 Modèle spot à trois facteurs (volatilité stochastique et saisonnalité)

Nous proposons dans cette partie une extension en considérant une volatilité stochastique et en s'inspirant de [18]. Contrairement au monde des dérivés actions où le prix spot est négativement corrélé avec la volatilité, les nappes de volatilité étudiées dans l'étude statistique présentent un *upside skew*. Par conséquent la corrélation pour le marché de matières premières entre la volatilité et le prix spot sera positive.

3.3.1 Modélisation

On généralise le modèle précédent en considérant une volatilité stochastique.

Soit $W = (W_1, W_2, W_3)$ un mouvement brownien tri-dimensionnel défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nous ferons l'hypothèse que la matrice de corrélation du mouvement brownien Σ est constante de terme général ρ_{ij}. Avec des notations semblables à la section précédente, la dynamique des variables d'état (S, δ, v) est la suivante.

$$\begin{cases} dS_t = S_t\left[\left(r - \delta_t + \lambda_S e^{\nu(t)} v_t\right) dt + e^{\nu(t)}\sqrt{v_t} dW_{1,t}\right] \\ d\delta_t = \left(f(t) - \beta\delta_t + \lambda_\delta \sigma_\delta e^{\nu(t)} v_t\right) dt + \sigma_\delta e^{\nu(t)}\sqrt{v_t} dW_{2,t} \\ dv_t = \left(\theta - \kappa v_t + \lambda_v \sigma_v v_t\right) dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dW_{3,t} \end{cases}$$

où β, κ, θ, λ_S, λ_δ, λ_v, σ_δ, σ_v ainsi que la matrice de corrélation sont des paramètres constants à estimer. $f(t)$ et $\nu(t)$ sont des fonctions déterministes du temps rendant compte du phénomène de saisonnalité. Les termes λ_S, λ_δ, λ_v sont les primes de risques associées à chacune des variables d'états, liées au fait que la probabilité historique ne soit pas une probabilité risque-neutre. Nous faisons l'hypothèse que le marché est complet impliquant l'existence et l'unicité d'une probabilité risque-neutre de telle manière que le prix d'un actif contingent soit égal à l'espérance, sous la probabilité risque neutre, du flux terminal actualisé. Sous cette probabilité risque neutre, le système est décrit de la manière suivante :

$$\boxed{\begin{cases} dS_t = S_t\left[(r - \delta_t) dt + e^{\nu(t)}\sqrt{v_t} dW_{1,t}^Q\right] \\ d\delta_t = (f(t) - \beta\delta_t) dt + \sigma_\delta e^{\nu(t)}\sqrt{v_t} dW_{2,t}^Q \\ dv_t = (\theta - \kappa v_t) dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dW_{3,t}^Q \end{cases}} \tag{3.16}$$

3.3.2 Evaluation de produits dérivés

3.3.2.a Contrats futures

La valorisation d'un contrat future s'effectue de la même manière que précédemment. Le prix à l'instant t d'un contrat future délivrant le sous-jacent à la date $T > t$ est $F^T(t) = \mathbb{E}^Q[S_T \mid \mathcal{F}_t]$. Comme $F^T(t)$ est une Q-martingale, la formule d'Itô appliquée à la fonction $F^T(t) = F(S_t, \delta_t, v_t, t; T)$ donne, en annulant le terme en dt :

$$\frac{1}{2}e^{2\nu(t)}vS^2\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\sigma_\delta^2 e^{2\nu(t)}v\frac{\partial^2 F}{\partial \delta^2} + \frac{1}{2}\sigma_v^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \rho_{12}\sigma_\delta e^{2\nu(t)}vS\frac{\partial^2 F}{\partial S\partial_\delta} + \rho_{13}\sigma_v e^{\nu(t)}vS\frac{\partial^2 F}{\partial S\partial v}$$

$$+\rho_{23}\sigma_\delta\sigma_v e^{\nu(t)}v\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial_\delta} + (r-\delta)S\frac{\partial F}{\partial S} + (f(t)-\beta\delta)\frac{\partial F}{\partial \delta} + (\theta-\kappa v)\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (3.17)$$

où la condition terminale est $F(S, \delta, v, T; T) = S$

Pour une date d'expiration fixée T, la solution de l'équation aux dérivées partielles est donnée par :

$$F(S, \delta, v, t, T) = Se^{A(t,T)+B(t,T)v+D(t,T)\delta} \quad (3.18)$$

où $D(t,T) = -\frac{1}{\beta}\left(1 - e^{-\beta(T-t)}\right)$, $A(t,T)$ et $B(t,T)$ sont solutions des équations différentielles suivantes :

$$\frac{1}{2}\sigma_\delta^2 e^{2\nu(t)}D^2(t,T) + \rho_{12}\sigma_\delta e^{2\nu(t)}D(t,T) + \frac{1}{2}\sigma_v^2 B^2(t,T)$$

$$+\left(\rho_{13}\sigma_v e^{\nu(t)} + \rho_{23}\sigma_\delta\sigma_v e^{\nu(t)}D(t,T) - \kappa\right)B(t,T) + B'(t,T) = 0$$

avec la condition terminale $B(T,T) = 0$

$$r + f(t)D(t,T) + \theta B(t,T) + A'(t,T) = 0$$

avec la condition terminale $A(T,T) = 0$

3.3.2.b Options vanilles

Nous considérons des options sur future. En appliquant la formule d'Itô à l'expression (3.18), la dynamique du prix du future sous la probabilité risque-neutre Q est donnée par :

$$dF^T(t) = F^T(t)\sqrt{v_t}\left[e^{\nu(t)}dW_{1,t}^Q + \sigma_\delta e^{\nu(t)}D(t,T)dW_{2,t}^Q + \sigma_v B(t,T)dW_{3,t}^Q\right] \quad (3.19)$$

Notons $C(t,T)$ le prix d'une option européenne de maturité τ sur un future livré en T vérifiant $t < \tau < T$.

$$C_t = \mathbb{E}^Q\left[e^{-r(\tau-t)}(F^T(\tau) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right]$$

Comme $e^{-r(T-t)}C_t$ est une Q-martingale, la formule d'Itô appliquée à la fonction $e^{-r(T-t)}C_t = C(F_t, v_t, t)$ prouve que la fonction $C(.)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\frac{1}{2}\sigma_F^2(t,T)vF^2\frac{\partial^2 C}{\partial F^2} + \frac{1}{2}\sigma_v^2 v\frac{\partial^2 C}{\partial v^2} + \sigma_{F_v}(t,T)vF\frac{\partial^2 C}{\partial F\partial v} + (\theta-\kappa v)\frac{\partial C}{\partial v} + \frac{\partial C}{\partial t} - rC = 0 \quad (3.20)$$

où

$$\sigma_F^2(t,T) = e^{2\nu(t)} + \sigma_v^2 B^2(t,T) + \sigma_\delta^2 e^{2\nu(t)} D^2(t,T) + 2\rho_{13}\sigma_v e^{\nu(t)} B(t,T)$$
$$+2\rho_{12}\sigma_\delta e^{2\nu(t)} D(t,T) + 2\rho_{23}\sigma_\delta\sigma_v e^{\nu(t)} B(t,T)D(t,T)$$

et

$$\sigma_{F_v(t,T)} = \rho_{13}\sigma_v e^{\nu(t)} + \sigma_v^2 B(t,T) + \rho_{23}\sigma_\delta\sigma_v e^{\nu(t)} D(t,T)$$

avec la condition terminale que : $C(F,v,\tau) = (F-K)^+$. $\sigma_F(t,T)$ décrit la volatilité du prix du future alors que $\sigma_{F_v}(t,T)$ mesure le degré de covariance instantanée entre le processus de volatilité stochastique et le prix du future.

On retrouve l'équation différentielle étudiée dans le modèle à volatilité stochastique de Heston à ceci près qu'il ne le traite que lorsque les coefficients de volatilité sont constants. Nous suivrons cependant une méthode de résolution similaire. Par analogie avec la formule de Black-Scholes, nous cherchons le prix d'un *call* européen sous la forme :

$$C(F,v,t) = e^{-r(\tau-t)}\left[FP_1 - KP_2\right] \tag{3.21}$$

La résolution de ce problème est semblable à celui résolu par Heston en 1993 dans son modèle à volatilité stochastique [18].

Pour $j = 1, 2$

$$\begin{cases} P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty Re[\frac{e^{-i\phi\ln(K)} f_j(x,v_t,t,\phi)}{i\phi}]d\phi \\ x = ln(F_t^T) \\ f_j(x,V_t,t,\phi) = e^{a_j(t)+b_j(t)v_t+ix\phi} \end{cases} \tag{3.22}$$

où $a_j(t)$ et $b_j(t)$ sont solutions des équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} b_j'(t) = \left(\frac{1}{2}\phi^2 - u_j i\phi\right)\sigma_F^2(t,T) + \left(k_j(t) - i\phi\sigma_{F_v}(t,T)\right)b_j(t) - \frac{1}{2}\sigma_v^2 b_j^2(t) \\ b_j(\tau) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_j'(t) = -\theta b_j(t) \\ a_j(\tau) = 0 \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} u_1 = 1/2 \\ u_2 = -1/2 \\ k_1(t) = \kappa - \sigma_{F_v}(t,T) \\ k_2(t) = \kappa \end{cases}$$

3.4 Conclusion

Cette classe de modèles présente un inconvénient majeur pour la grande majorité des matières premières : les variables modélisées (prix spot, prix court terme, prix long terme, rendement d'opportunité) ne sont en général pas observables (sauf pour certains produits comme l'or). Le prix spot est en effet plus une notion théorique car très peu de produits sont délivrables le jour même ; les prix réellement observés sont ceux des contrats à terme. Ce type de modèle permet une extrapolation des prix et une identification des opportunités de placements.

Chapitre 4

Modélisation des marchés des matières premières par modèle de courbe

Nous étudions dans ce chapitre les modèles de courbe qui consistent à spécifier directement l'évolution des prix des contrats en terme avec la particularité de prendre comme données de marché la courbe de contrat à terme aujourd'hui. L'analyse en composantes principales effectuée dans la section (2.2.6) justifie cette approche en montrant qu'un seul facteur explique déjà une grande partie des mouvements de la courbe.

Pour cette étude des modèles de courbes, nous partons d'un modèle déjà existant dans la section (4.1). Nous poursuivrons par deux extensions que nous proposons dans les sections (4.2) et (4.3). Le développement mathématique de ces extensions n'existe pas à notre connaissance. Nous prendrons soin dans la description de ces modèles d'expliciter des formules fermées pour les options vanilles qui constituent un instrument de base de la calibration et de la couverture.

4.1 Modèle de courbe à un facteur

Le modèle 1-facteur de Schwartz suppose que la courbe de prix à terme suit la diffusion HJM (Heath, Jarrow, Morton) inspirée du modèle de la courbe des taux. La variation de la courbe des futures est expliquée par un facteur, le prix du future lui-même.
La dynamique du future est donnée par :

$$dF(t,T) = \sigma e^{-\alpha(T-t)} F(t,T) dW_t \tag{4.1}$$

où W_t est un mouvement brownien géométrique sous la probabilité risque-neutre qui rend les futures martingales (une démonstration rigoureuse dans le cas discret et une idée de preuve pour le cas continu sont fournies dans [34]). Dans tout ce qui suit, on se place sous cette probabilité.

On cherche dans un premier temps la dynamique du spot. D'après le lemme d'Itô, on déduit l'unique solution de l'équation différentielle stochastique (4.1) :

$$F(t,T) = F(0,T) exp\left(\int_0^t \sigma e^{-\alpha(T-u)} dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 e^{-2\alpha(T-u)} du\right) \tag{4.2}$$

Pour trouver le prix spot, il suffit de remarquer qu'en $t = T$, on a livraison immédiate du sous-jacent, donc :

$$S(t) = F(t,t) = F(0,t)exp\left(\int_0^t \sigma e^{-\alpha(t-u)}dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 e^{-2\alpha(t-u)}du\right)$$

L'expression se simplifie :

$$S(t) = e^{ln(F(0,t)) - \frac{\sigma^2}{4\alpha}[e^{-2\alpha(t-u)}]_0^t + \int_0^t \sigma e^{-\alpha(t-u)}dW_u}$$

D'où $S(t) = exp\left(ln(F(0,t)) - \frac{\sigma^2}{4\alpha}(1-e^{-2\alpha t}) + \int_0^t \sigma e^{-\alpha(t-u)}dW_u\right)$

S n'est plus qu'une fonction du temps, il n'y a donc aucun problème de dérivation. En posant $X = ln(S)$, on trouve :

$$X = ln\left(F(0,t)\right) - \frac{\sigma^2}{4\alpha}(1-e^{-2\alpha t}) + \int_0^t \sigma e^{-\alpha(t-u)}dW_u$$

On rappelle la formule d'intégration par parties pour deux processus stochastiques.

$$d(X_tY_t) = Y_tdX_t + X_tdY_t + d < X_t, Y_t >$$

Si l'une des fonctions est déterministe, alors le troisième terme est nul.

On a

$$dX = \left[\frac{\partial ln(F(0,t))}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}e^{-2\alpha t} - \sigma\alpha e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha u}dW_u\right]dt + \sigma dW_t$$

soit , en substituant dans l'expression de X :

$$dX = \left[\frac{\partial ln(F(0,t))}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}e^{-2\alpha t} - \alpha X + \alpha ln(F(0,t)) - \frac{\sigma^2}{4}(1-e^{-2\alpha t})\right]dt + \sigma dW_t$$

De plus, d'après le lemme d'Itô, on a :

$$dX = d(lnS) = \frac{dS}{S} - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

On obtient :

$$\frac{dS}{S} = \left[\frac{\partial ln(F(0,t))}{\partial t} - \alpha X + \alpha ln(F(0,t)) - \frac{\sigma^2}{4}(1+e^{-2\alpha t}) + \frac{1}{2}\sigma^2\right]dt + \sigma dW_t$$

On pose donc

$$g(t) = ln(F(0,t)) + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial ln(F(0,t))}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{4\alpha}(1-e^{-2\alpha t})$$

On obtient alors :

$$\boxed{dS_t = \alpha[g(t) - ln(S_t)]S_tdt + \sigma S_t dW_t} \tag{4.3}$$

L'équation (4.3) régit la dynamique du spot, le terme $g(t)$ est destiné à prendre en compte la tendance. Le modèle prend en compte la *mean reversion*, ce qui en fait un modèle acceptable, au moins théoriquement.

Pricing des options vanilles

On a

$$ln\left[\frac{F(t,T)}{F(0,T)}\right] = \int_0^t \sigma e^{-\alpha(T-u)}dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 e^{-2\alpha(T-u)}du$$

ce qui entraîne que :

$$ln\left[\frac{F(t,T)}{F(0,T)}\right] \sim \mathcal{N}\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 e^{-2\alpha(T-u)}du, \int_0^t \sigma^2 e^{-2\alpha(T-u)}du\right)$$

Donc, les prix des futures suivant des lois log-normales, on peut donc d'après (C.7.1) appliquer la formule de Black pour les *calls* et les *puts* européens (voir annexe C.7). (Pour simplifier, on suppose que l'on cherche un prix en $t = 0$). On obtient :

$$\boxed{c = e^{-rT}\left(F(0,T_1)\mathcal{N}(d_1) - K\mathcal{N}(d_2)\right)} \tag{4.4}$$

$$\boxed{p = e^{-rT}\left(K\mathcal{N}(-d_2) - F(0,T_1)\mathcal{N}(-d_1)\right)} \tag{4.5}$$

avec

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{F(0,T_1)}{K}\right) + \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2 e^{-2\alpha(T_1-u)}du}{\sqrt{\int_0^T \sigma^2 e^{-2\alpha(T_1-u)}du}}$$

et

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\int_0^T \sigma^2 e^{-2\alpha(T_1-u)}du}$$

En simplifiant, on obtient :

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{F(0,T_1)}{K}\right) + \frac{1}{4\alpha}\sigma^2(e^{2\alpha(T-T_1)} - e^{-2T_1})}{\sqrt{\sigma^2(e^{2\alpha(T-T_1)} - e^{-2\alpha T_1})}}$$

et

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\sigma^2(e^{2\alpha(T-T_1)} - e^{-2\alpha T_1})}$$

Avec
- K le *strike* de l'option
- T la maturité de l'option
- T_1 la maturité du future
- $\mathcal{N}$ la loi cumulative gaussienne

On obtient donc les formules fermées (4.4) et (4.5) pour les *calls* et les *puts* européens qui dépendent de deux facteurs temporels : la maturité du future, c'est-à-dire du sous-jacent, et de la maturité de l'option considérée.

4.2 Modèle de courbe à un facteur avec extension déterministe dépendant du temps

L'utilisation du modèle précédent est limité à quelques options. En effet, il ne fait qu'approcher la structure à terme de la volatilité implicite. L'extension que nous proposons consiste à supposer que la volatilité n'est plus constante, mais dépendante du temps. La dynamique des prix futures se réécrit alors :

$$dF(t,T) = \sigma_t e^{-\alpha(T-t)} F(t,T) dW_t \tag{4.6}$$

où W_t est un mouvement brownien sous la probabilité risque-neutre. L'équation (4.6) est à nouveau intégrée, ce qui donne l'expression :

$$F(t,T) = F(0,T) exp\left(\int_0^t \sigma_u e^{-\alpha(T-u)} dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_u^2 e^{-2\alpha(T-u)} du\right) \tag{4.7}$$

En $t = T$, on en déduit le prix spot, soit :

$$S(t) = F(t,t) = F(0,t) exp\left(\int_0^t \sigma_u e^{-\alpha(t-u)} dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_u^2 e^{-2\alpha(t-u)} du\right)$$

En posant $X = ln(S)$, $X = lnF(0,t) + e^{-\alpha t}\int_0^t \sigma_u e^{\alpha u} dW_u - e^{-2\alpha t}\int_0^t \sigma_u^2 e^{2\alpha u} du$

On obtient par différenciation :

$$dX = \left[\frac{\partial ln(F(0,t))}{\partial t} - \alpha\int_0^t \sigma_u^{-\alpha(t-u)} dW_u + \alpha\int_0^t \sigma_u^2 e^{-2\alpha(t-u)} du - \frac{\sigma_t^2}{2}\right] dt + \sigma_t dW_t$$

Soit avec l'expression de X :

$$-\alpha\int_0^t \sigma_u e^{-\alpha(t-u)} dW_u = -\alpha X + \alpha ln(F(0,t)) - \frac{\alpha}{2}\int_0^t \sigma_u^2 e^{-2\alpha(t-u)} du$$

D'où :

$$dX = \left[\frac{\partial ln(F(0,t))}{\partial t} - \alpha X + \alpha ln(F(0,t)) + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \sigma_u^2 e^{-2\alpha(t-u)} du - \frac{\sigma_t^2}{2}\right] dt + \sigma_t dW_t$$

Par application du lemme d'Itô, on obtient :

$$dX = d(lnS) = \frac{dS}{S} - \frac{1}{2}\sigma_t^2 dt$$

$$\boxed{dS_t = \alpha[h(t) - ln(S_t)]S_t dt + \sigma_t S_t dW_t} \tag{4.8}$$

avec

$$h(t) = lnF(0,t) + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial lnF(0,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_u^2 e^{-2\alpha(t-u)} du$$

Pricing des options vanilles

Le raisonnement est le même que précédemment, on peut donc appliquer la formule de Black pour les *call* et les *puts* européens. (Pour simplifier, on suppose que l'on cherche un prix en $t = 0$) On obtient :

$$\boxed{c = e^{-rT}(F(0,T_1)\mathcal{N}(d_1) - K\mathcal{N}(d_2))} \tag{4.9}$$

$$\boxed{p = e^{-rT}(K\mathcal{N}(-d_2) - F(0,T_1)\mathcal{N}(-d_1))} \tag{4.10}$$

avec

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{F(0,T_1)}{K}\right) + \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_u^2 e^{-2\alpha(T_1-u)}du}{\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 e^{-2\alpha(T_1-u)}du}}$$

et

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 e^{-2\alpha(T_1-u)}du}$$

4.3 Modèle de courbe à un facteur avec extension déterministe et prise en compte du smile

La présence de *smile* (dépendance de la volatilité implicite avec le *strike*) sur les marchés des matières premières nous a incités à trouver un processus de diffusion qui permette d'expliquer ce phénomène. L'objectif est double : il s'agit de pouvoir donner un prix à des payoffs où la réplication statique n'est pas envisageable mais aussi de mieux se couvrir. Afin de mettre en évidence le risque de modèle sur ces payoffs fortement dépendant du *skew* nous prendrons l'exemple suivant de l'option digitale.

Nous considérons une option digitale (binaire) sur future qui paie 1 si le prix du sous-jacent à la maturité T est supérieur au *strike* et 0 sinon. Ce produit peut-être valorisé comme la limite d'un *call spread* (achat d'un *call* de *strike* K_1 et vente d'un *call* de *strike* K_2) dont la différence entre les deux prix d'exercice tend vers 0. Nous représentons le payoff de ces deux produits dérivés en fonction du *strike* dans la figure (4.1).

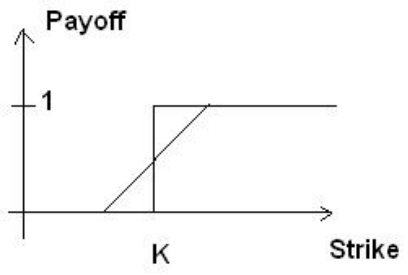

FIG. 4.1 – Payoffs d'une option binaire et d'un *call* spread.

$$D(K,T) = -\frac{\partial C(K,T)}{\partial K}$$

où $C(K,T)$ est le prix d'un *call* européen sur future de *strike* K et de maturité d'option T.

Afin de se convaincre que le prix est très sensible au *skew* (pente de la volatilité implicite), nous réécrivons ce prix en fonction de la volatilité implicite Black-Scholes $\sigma_{BS}(K,T)$.

$$D(K,T) = -\frac{\partial C_{BS}(K,T,\sigma_{BS}(K,T))}{\partial K}$$

$$= -\frac{\partial C_{BS}}{\partial K} - \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma_{BS}(K,T)} \frac{\partial \sigma_{BS}(K,T)}{\partial K}$$

$$\boxed{D(K,t) = e^{-rT}\mathcal{N}(d_2) - Vega * skew} \tag{4.11}$$

Pour se faire une idée du risque de modèle et de l'impact du *skew* en pratique, nous considérons un marché ne versant pas de dividendes avec un taux d'intérêt nul. Nous valorisons une option digitale à la monnaie de maturité 1 an. Nous supposons que la volatilité à la monnaie est de 25% et le *skew* de 3% pour un changement de 10% dans le *strike*.

$$\begin{aligned} D(1,1) &= -\tfrac{\partial C_{BS}}{\partial K} - \tfrac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma_{BS}(K,T)} \tfrac{\partial \sigma_{BS}(K,T)}{\partial K} \\ &= \mathcal{N}(-\tfrac{\sigma}{2}) - Vega * skew \\ &= \mathcal{N}(-\tfrac{\sigma}{2}) + \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \times 0,3 \\ &\approx \mathcal{N}(-\tfrac{\sigma}{2}) + 0,4 \times 0,3 \end{aligned} \tag{4.12}$$

En ignorant la contribution du *skew*, nous commettons une erreur égale à 12% du notionnel. Cette exemple prouve l'importance de proposer un modèle pour les produits dépendants du *skew*.

Nous écartons la possibilité de travailler avec la volatilité locale de Dupire [10], à cause des instabilités connues de cette approche. De plus, l'analyse statistique ayant mis en évidence un *smile* monotone (croissant), un simple décalage dans la diffusion (4.6) permettra de prendre en compte le risque de *smile*.

On propose donc l'extension suivante où W_t est un brownien sous la probabilité risque-neutre associée à la maturité T. Sous cette probabilité le prix du future est martingale. La diffusion s'écrit donc :

$$dF(t,T) = \sigma_t e^{-\alpha(T-t)}(F(t,T)+k)dW_t \tag{4.13}$$

avec σ_t une fonction déterministe, k une constante.

L'équation de diffusion (4.13) peut également s'écrire :

$$dF(t,T) = q\tilde{\sigma}dW_t + (1-q)F(t,T)\tilde{\sigma}dW_t$$

Cette diffusion peut donc s'interpréter comme une combinaison linéaire d'un modèle normal et d'un modèle log normal.

Soit encore

$$\frac{dF(t,T)}{F(t,T)} = \sigma_{loc}(F(t,T))dW_t$$

avec

$$\sigma_{loc}(F(t,T)) = \sigma_t e^{-\alpha(T-t)} \frac{F(t,T)+k}{F(t,T)}$$

Pricing des options vanilles

Nous pouvons nous ramener rapidement au cas précédent en posant :

$$L_t^T = F(t,T) + k$$

On a de plus :

- $L_T^T = S_T + k$
- $\frac{dL_t}{L_t} = \sigma_t e^{-\alpha(T-t)} dW_t$
- $C_t = e^{-rT}\mathbb{E}[(F(T,T_1)-K)^+|\mathcal{F}_t] = e^{-rT}\mathbb{E}[(L_T^{T_1} - (K+k))^+|\mathcal{F}_t]$

et donc :

$$\boxed{c = e^{-rT}\left[(F(0,T_1)+k)\mathcal{N}(d_1) - (K+k)\mathcal{N}(d_2)\right]} \tag{4.14}$$

$$\boxed{p = e^{-rT}\left[(K+k)\mathcal{N}(-d_2) - (F(0,T_1)+k)\mathcal{N}(-d_1)\right]} \tag{4.15}$$

avec

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{F(0,T_1)+k}{K+k}\right) + \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_u^2 e^{-2\alpha(T_1-u)}du}{\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 e^{-2\alpha(T_1-u)}du}}$$

et

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 e^{-2\alpha(T_1-u)}du}$$

Par ailleurs, une bonne approximation des volatilités implicites est donnée dans [15] :

$$\sigma_{BS}(K,T) = \sigma_{loc}\left(\frac{F(0,T)+K}{2}\right)\left[1 + \frac{1}{24}\frac{\sigma''_{loc}\left(\frac{F(0,T)+K}{2}\right)}{\sigma_{loc}\left(\frac{F(0,T)+K}{2}\right)}(F(0,T)-K)^2\right]$$

4.4 Modèle de courbe à deux facteurs

Dans cette section, nous allons proposer d'étendre notre modèle. Jusqu'à présent, la dynamique du prix spot obtenue d'après l'expression des futures à différentes maturités était de la forme :

$$ln(S_t) = Y_t + f(t)$$

avec $f(t)$ une fonction déterministe du temps et

$$dY_t = -\lambda Y_t dt + \sigma_t dW_t$$

On souhaite donc faire le lien entre un modèle de courbe à deux facteurs où l'on écrit :

$$dF(t,T) = \sigma_1(t)F(t,T)dW_t^1 + \sigma_2(t)F(t,T)dW_t^2$$

avec le modèle spot à deux facteurs de Gibson-schwartz où plus généralement un modèle spot à deux facteurs où la dynamique du prix spot est la suivante :

$$ln(S_t) = Y_t + X_t + f(t)$$

et

$$\begin{cases} dX_t = -\lambda_1 X_t dt + \sigma_1(t) dW_t^1 \\ dY_t = -\lambda_2 Y_t dt + \sigma_2(t) dW_t^2 \end{cases} \tag{4.16}$$

avec deux mouvements browniens corrélés de taux de corrélation instantanée ρ.

On suppose donc que la dynamique des futures est donnée par :

$$dF(t,T) = \sigma_1(t)F(t,T)dW_t^1 + \sigma_2(t)F(t,T)dW_t^2 \tag{4.17}$$

On obtient donc par le lemme d'Itô :

$$F(t,T) = F(0,T)exp\left(\int_0^t \sigma_1(u)dW_u^1 + \int_0^t \sigma_u dW_u^2 - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_1(u)^2 du - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_2(u)^2 du\right)$$

La dynamique des prix est obtenue avec les mêmes principes de calcul que dans la section précédente :

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{S(t)} = \Bigg[& \frac{\partial ln(F(0,T))}{\partial t} - \int_0^t \sigma_1(u,t)\frac{\partial \sigma_1(u,t)}{\partial t}du - \int_0^t \sigma_1(u,t)\frac{\partial \sigma_1(u,t)}{\partial t}du \\ & + \int_0^t \frac{\partial \sigma_1}{\partial t}dW_u^1 + \int_0^t \frac{\partial \sigma_2}{\partial t}dW_u^2 \Bigg] dt + \sigma_1(t,t)dW_t^1 + \sigma_2(t,t)dW_t^2 \end{aligned}$$

D'après [31], les expressions suivantes des volatilités permettent de revenir au modèle de Gibson-Schwartz :

$$\sigma_1(t,T) = \sigma_1 - \rho\sigma_2\frac{1-e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}$$

$$\sigma_2(t,T) = -\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\frac{1-e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}$$

Ce modèle autorise une gamme de structures de volatilités plus large que les modèles à un facteur. Il permet aussi des mouvements de la courbe des futures plus variés.

Chapitre 5

Calibration, synthèse et choix du modèle

Ce chapitre a pour but d'expliquer les techniques de calibration, d'analyser les résultats de calibration des différents modèles et de synthétiser le tout dans un tableau récapitulatif qui nous permettra de décider quel modèle utiliser pour l'évaluation d'un dérivé donné.

5.1 Caractéristiques d'un bon modèle

Nous proposons quatre critères caractérisant un bon modèle inspirés de Hunt, Kennedy et Pellser (1998).

- Il doit respecter l'absence d'opportunité d'arbitrage. On ne peut pas se permettre de se faire arbitrer par un autre agent sur la courbe de contrat à terme ou sur le champ de la volatilité.
- Sa calibration doit être rapide et stable pour assurer une couverture bon marché. En effet si les paramètres ne sont pas stables alors la couverture sera difficile en raison de la grande variabilité des paramètres.
- Ses paramètres doivent être facilement interprétables ou présenter un lien direct entre les paramètres du modèle et les grandeurs de marché.
- L'implémentation doit être aisée et rapide (critère de parcimonie crucial en salle de marché).

5.2 Méthodes de calibration

L'approche par maximum de vraisemblance consiste à choisir les valeurs des paramètres qui maximisent la vraisemblance du modèle. C'est une méthode efficace d'estimation lorsque la densité de probabilité du processus stochastique peut être écrite analytiquement. Les estimateurs du maximum de vraisemblance sont des estimateurs non biaisés de variance minimale. Supposons que la dynamique du prix future (ou son logarithme comme c'est le cas dans le modèle de Schwartz Smith) se traduit par une densité de probabilité $f(\theta, X_t)$, avec θ le vecteur de paramètres à estimer.

Étant donné un ensemble d'observations (ici ce sont les prix des contrats futures), le logarithme de la fonction de vraisemblance est donné par :

$$l_n(\theta, \{X\}_{t=1}^n) = \sum_{t=1}^{n} ln\left(f(\theta, X_t)\right)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance des paramètres est obtenu en maximisant l_n, soit :

$$\hat{\theta} = argmax_{\theta \in \mathbb{R}^k} l_n(\theta, \{X_t\}_{t=1}^n)$$

Cette méthode ne peut être appliquée la plupart du temps pour une simple raison d'identifiabilité (dans le cas d'une loi normale, seulement deux paramètres peuvent être identifiés). C'est pourquoi nous présenterons dans cette section d'autres techniques de calibration. Tout d'abord, deux techniques relativement connues : la méthode quadratique dans la section (5.2.1) et la méthode par filtration de Kalman dans la section (5.2.2). Enfin, nous proposerons une méthode de calibration (n'existant pas à notre connaissance) dans la section (5.2.3).

5.2.1 Méthode quadratique

Le principe de calibration par méthode quadratique est une méthode graphique qui consiste à optimiser tout les paramètres afin de reproduire la courbe des contrats à terme où celle de la volatilité implicite. Dans ce second cas, on compare les volatilités implicites : celle qui est perçue par les opérateurs de marché et la volatilité implicite que l'on obtient en inversant la formule de Black-Scholes à partir des prix des *calls* européens calculés par le modèle choisi.

On cherche à obtenir la valeur de la volatilité implicite telle que le prix du *call* européen obtenu par le modèle choisi est égal au prix obtenu par la formule de Black-Scholes avec cette même volatilité.

Il faut donc résoudre une équation à une inconnue par procédé itératif qui converge vers la valeur exacte de σ. Le principe de cette fonction est basée sur la méthode de Newton Raphson, qui permet de résoudre des équations non linéaires du type $f(y) = 0$. Elle débute en estimant une première possibilité, et en construisant une suite $y_1, y_2, ..., y_n$ définie par :

$$y_{i+1} = y_i - \frac{f(y_i)}{f'(y_i)}$$

On remarque enfin que le prix du *call* par rapport à la volatilité est exactement le Véga, que nous calculons également avec une fonction Excel. Notre processus itératif s'arrête lorsque l'erreur relative entre les prix Black-Scholes et Schwartz-Smith vaut moins de 1 %

Cette méthode se révèle très instable en raison du grand nombre de paramètres à optimiser.

5.2.2 Méthode par filtres de Kalman

Les filtres de Kalman sont une procédure récursive pour des variables d'état inobservables, comme c'est notamment le cas dans le modèle de Schwartz-Smith. La méthode est basée sur les observations qui dépendent des variables d'état. Il s'agit tout d'abord de discrétiser le modèle et de définir de nouvelles équations qui régissent l'évolution de ces variables d'état ainsi que la relation entre ces mêmes variables et les prix qui sont observés sur le marché (futures, options ou spot). La filtration de Kalman nous permet d'estimer les variables

d'état et de calculer la vraisemblance du modèle étant donné un ensemble d'observations et un jeu de paramètres particulier. En faisant varier les paramètres, on peut obtenir les valeurs qui maximisent la vraisemblance du modèle.

L'évolution des variables d'état est régie par une équation, dite *équation de transition*, qui se déduit de la discrétisation de la dynamique du sous-jacent, pour $t = 1...n$:

$$\boxed{x_t = T_t x_{t-1} + c_t + R_t \eta_t} \tag{5.1}$$

avec n le nombre de jours de cotation

η_t est un vecteur $(2, 1)$ de variables gaussiennes telles que $\mathbb{E}[\eta_t] = 0$ et $\mathbb{V}[\eta_t] = Q_t$ Le terme d'erreur de l'équation de transition a donc une matrice de variance-covariance égale à $R_t Q_t R_t'$. $\Delta\, t$ est la taille du pas de temps, n est le nombre de périodes dans l'échantillon de données, donc le nombre de jours de cotation.

L'équation de mesure décrit la relation entre les variables d'état et les prix observés.
On peut écrire cette équation sous la forme, pour $t = 1...n$:

$$\boxed{y_t = d_t + Z_t x_t + \epsilon_t} \tag{5.2}$$

Avec y_t un vecteur de taille $(1, n')$ où n' est le nombre de contrats observés (options de maturité ou de *strike* différents).

Avec $\mathbb{E}[\epsilon_t] = 0$ et $\mathbb{C}ov[\epsilon_t, \epsilon_t'] = H_t$.

Cette erreur ϵ_t peut être interprétée comme les écarts bid/ask dans les prix de marché.
Nous ajoutons cinq autres hypothèses nécessaires à l'utilisation des filtres de Kalman :

$\mathbb{E}[x_0] = X_0$ et $\mathbb{V}[x_0] = P_0$

$\mathbb{E}[\epsilon_t \eta_s'] = 0, \forall (t, s) \in [0, ..., n']^2$, ce qui signifie que les erreurs sont non corrélées.

$\mathbb{E}[\epsilon_t x_0'] = 0\ \mathbb{E}[\eta_t x_0'] = 0$

Le principe des filtres de Kalman est basé sur l'écriture d'un estimateur optimal X_t des variables d'état non directement observables à la date t, obtenues à partir des informations disponibles à cette même date t, donc la valeur de l'estimateur à la date $t - 1$, mais aussi les données de marché à la date t. Après leur mise en œuvre, on peut montrer que c'est l'estimateur qui minimise au mieux l'erreur de mesure.

En considérant les deux équations de mesure et de transition, on note X_{t-1} l'estimateur optimal de x_{t-1}, basé sur toutes les observations depuis y_0 à y_{t-1}. On définit une nouvelle matrice de variance-covariance et qui ainsi définie se rapporte à l'erreur d'estimation :

Soit :

$$P_{t-1} = \mathbb{E}[(x_{t-1} - X_{t-1})(x_{t-1} - X_{t-1})']$$

Étant donné X_{t-1} et P_{t-1}, l'estimateur de x_t conditionnellement aux observations est :

$$\boxed{X_{t|t-1} = T_t X_{t-1} + c_t} \tag{5.3}$$

La matrice de variance-covariance d'erreur d'estimation est :

$$\boxed{P_{t|t-1} = T_t P_{t-1} T_t' + R_t Q_t R_t'} \tag{5.4}$$

pour $t \in [1, ..., n]$

Ces deux équations sont appelées *équations de prédiction*.

Dès que la nouvelle donnée de marché est disponible, l'estimateur de x_t, $X_{t|t-1}$ peut être mis à jour.
Les *équations de mise à jour* sont données par :

$$X_t = X_{t|t-1} + P_{t|t-1} Z_t' F_t^{-1} (y_t - Z_t X_{t|t-1} - d_t)$$

et

$$P_t = P_{t|t-1} - P_{t|t-1} Z_t' P_{t|t-1}$$

Avec pour $t = [1, ..., n]$

$$F_t = Z_t P_{t|t-1} Z_t' + H_t$$

Les équations de prédiction et de mise à jour sont les filtres de Kalman. On peut montrer que X_t est le meilleur estimateur des variables d'état x_t dans la classe des estimateurs sans biais.

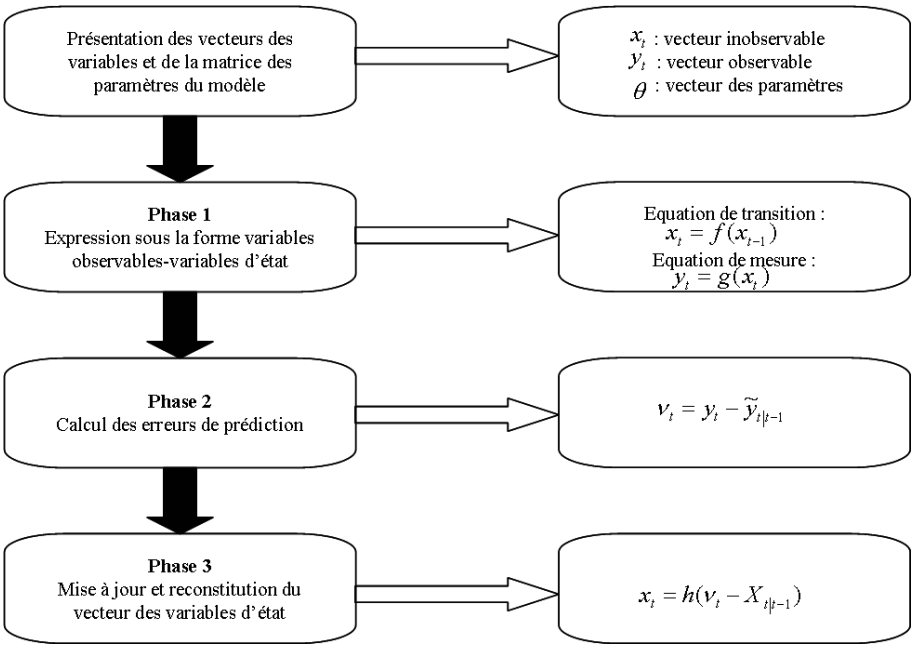

FIG. 5.1 – Principe de la filtration par filtres de Kalman

Les filtres de Kalman correspondent à l'utilisation récursive de ces deux équations, en commençant par une distribution a priori sur les valeurs initiales des variables d'état. La précision avec lesquelles les variables d'état peuvent être estimées dépend de la qualité de l'information observée. Il est impossible de savoir si le changement sur le prix spot (ou bien le prix futures) est dû à une variation de court terme ou bien de long terme. A chaque période, nous utilisons l'observation y_t et les précédentes valeurs de l'estimateur pour calculer le nouvel estimateur X_t des variables d'état, d'abord en calculant la valeur de l'estimateur sachant les données précédentes avec les équations de prédiction, puis en mettant à jour la valeur de l'estimateur en ajoutant un terme d'erreur qui est dû à l'erreur de prédiction. Le principe de la filtration est résumé dans la figure (5.1).

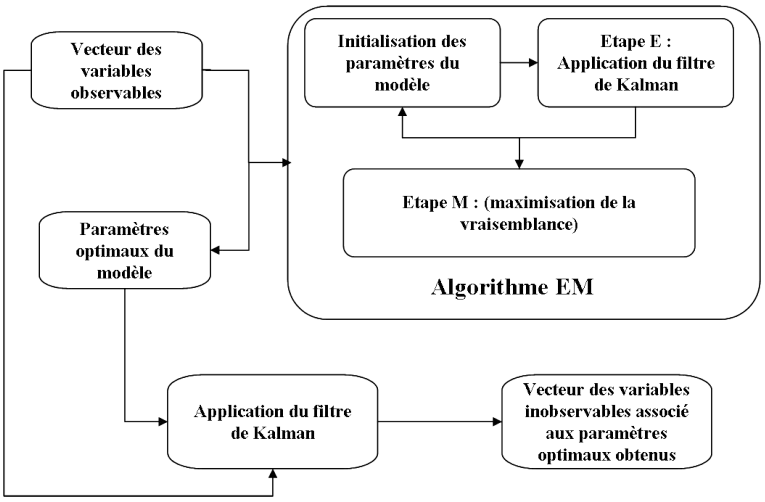

FIG. 5.2 – Principe de la calibration par filtres de Kalman

La théorie classique du maximum de vraisemblance est basée sur le fait que les n observations de marché sont indépendantes et identiquement distribuées. La vraisemblance s'écrit alors

$$L(y;\Theta) = \prod_{t=1}^{n} p(y_t)$$

où $p(y_t)$ est la densité de probabilité jointe d'un ensemble de n observations. La caractéristique principale de notre modèle est que les observations ne sont pas indépendantes (ce qui est vrai pour tout modèle à séries temporelles). Nous réécrivons la vraisemblance avec les lois de probabilité conditionnelles, soit :

$$L(y;\Theta) = \prod_{t=1}^{n} p(y_t \mid Y_{t-1})$$

avec $p(y_t \mid Y_{t-1})$ la distribution de y_t condionnellement aux observations des temps précédents, soit $Y_{t-1} = \{y_{t-1}, ..., y_1\}$.

Comme la distribution initiale des vecteurs d'état est une distribution normale dans le modèle de Schwartz-Smith et que les perturbations seront également supposées normales, en itérant les filtres de Kalman, conditionnellement à Y_t, x_t (vecteur des variables d'état) est normalement distribué avec une espérance de $X_{t\,|t-1}$ et une matrice de variance-covariance

égale à $P_{t\,|t-1}$.

L'équation de mesure peut-être réécrite sous la forme :

$$y_t = d_t + Z_t x_t + Z_t(x_t - X_t) + \epsilon_t$$

La distribution de y_t conditionnellement aux observations antérieures est une distribution normale avec une espérance

$$\mathbb{E}(y_{t\,|t-1}) = \tilde{y}_{t\,|t-1} = Z_t A_{t\,|t-1} + d_t$$

et sa matrice de variance-covariance vaut F_t.

Le modèle ainsi conditionné est un modèle gaussien et la vraisemblance à maximiser peut être écrite sous la forme :

$$\boxed{LogL = -\frac{NT}{2} log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} log\,|F_t| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \nu_t' F_t^{-1} \nu_t} \tag{5.5}$$

Le vecteur $\nu_t = y_t - \tilde{y}_{t\,|t-1}$ peut être interprété comme une erreur de prédiction. Le principe de calibration par filtre de Kalman est résumé dans la figure (5.2).

La méthode par filtre de Kalman présente l'avantage de prendre en compte l'historique des données. L'inconvénient qui lui va de pair est la lourdeur en terme de temps de calcul.

5.2.3 Méthode implicite (paramètre par paramètre)

Nous proposons une méthode de calibrage rapide qui permet, dans le cas du modèle Schwartz-Smith 2-facteurs, de trouver tous les paramètres les uns après les autres. Cette méthode consiste à exploiter les caractéristiques de certaines courbes générées par ce modèle (courbe de contrat à terme, courbe de volatilité instantanée et leur comportement asymptotique). Nous présentons la méthode employée dans le cas du modèle précité :

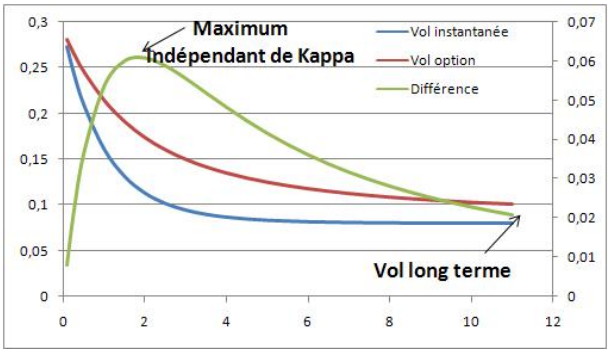

FIG. 5.3 – Structure à terme des volatilités instantanée et implicite

1. Dans un premier temps, on remarque que la variance instantanée de $F^T(0)$ est indépendante des variables d'état. En effet $\mathbb{V}[ln(F^T(0)] = e^{-2\kappa T}\sigma_\chi^2 + \sigma_\xi^2 + 2e^{-\kappa T}\rho\sigma_\chi\sigma_\xi$. En calculant la structure par terme de la volatilité instantanée, on peut déduire $\boxed{\sigma_\xi}$ de l'asymptote horizontale pour les grandes maturités. Par ailleurs il sera utile de comparer la volatilité instantanée à la volatilité annualisée d'une option maturant à l'échéance

du contrat à terme (i.e. $T_1 = T$). On trouve $Vol_{opt} = (1 - e^{-2\kappa T})\frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa T} + \sigma_\xi^2 + 2(1 - e^{-\kappa T})\frac{\rho\sigma_\chi\sigma_\xi}{\kappa T}$. Ces volatilités prennent la même valeur en 0 et en $+\infty$. Le maximum de la différence étant indépendant de κ, cette équation complète le système à deux équations (maximum de la différence et niveau en 0) et deux inconnues permettant de trouver $\boxed{\sigma_\chi}$ et $\boxed{\rho}$. Une fois les paramètres de volatilité et de corrélation connus, on en déduit $\boxed{\kappa}$ avec une des deux pentes à l'origine.

2. On étudie maintenant la courbe de contrat à terme. Tout d'abord remarquons que l'asymptote a pour pente $\mu_\xi^* + \frac{1}{2}\sigma_\xi^2$ ce qui permet de trouver la valeur de $\boxed{\mu_\xi^*}$. L'ordonnée à l'origine de cette asymptote nous donne la valeur de la variable d'état $\boxed{\xi_0}$. Connaissant le prix spot, on trouve directement $\boxed{\chi_0}$ car $\chi_0 + \xi_0 = ln(S_0)$. En calculant la dérivée en 0 de la courbe de contrat à terme on obtient :

$$\frac{\partial ln(F^T(0))}{\partial T}_{T=0} = -\kappa\chi_0 + \mu_\xi^* - \lambda_\chi + \frac{1}{2}\mathbb{V}[ln(F^T(0))]_{T=0}$$

Ce qui permet de trouver le dernier paramètre $\boxed{\lambda_\chi}$.

5.3 Calibration des modèles

Dans cette section, nous appliquons les diverses méthodes présentées dans (5.2) à la calibration des différents modèles des chapitres 3 et 4.

5.3.1 Calibration du modèle de Schwartz-Smith 2-facteurs

5.3.1.a Par filtre de Kalman

Nous avons mis en œuvre la calibration par filtre de Kalman en élaborant notre propre outil de calibration sous Matlab (filtration et optimisation). Dans le cas du modèle spot 2-facteurs, les deux variables d'états sont les déviations de court terme χ et de long terme ξ. Nous notons le vecteur des variables d'états

$$x_t = \begin{pmatrix} \chi_t \\ \xi_t \end{pmatrix}$$

$$c_t = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_\xi \Delta t \end{pmatrix}$$

$$T_t = \begin{pmatrix} e^{-\kappa\Delta t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans le chapitre 3, nous avions obtenu les prix d'un contrat future selon (3.7), soit :

$$\begin{aligned} ln(F^T(0)) &= \chi_0 e^{-\kappa T} + \xi_0 + \mu_\xi^* T - (1 - e^{-\kappa T})\lambda_\chi/\kappa \\ &+ \frac{1}{2}\left((1 - e^{-2\kappa T})\frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} + 2(1 - e^{-\kappa T})\frac{\rho\sigma_\xi\sigma_\chi}{\kappa} + \sigma_\xi^2 T\right) \end{aligned} \tag{5.6}$$

On pose :

$$A(T) = \mu_\xi^* T - (1 - e^{-\kappa T})\lambda_\chi/\kappa + \frac{1}{2}\left((1 - e^{-2\kappa T})\frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} + 2(1 - e^{-\kappa T})\frac{\rho\sigma_\xi\sigma_\chi}{\kappa} + \sigma_\xi^2 T\right)$$

$y_t = \begin{pmatrix} ln(F(T(1))) \\ ... \\ ln(F(T(n'))) \end{pmatrix}$, un vecteur $(1, n')$ des logarithmes des prix futures observés sur le marché. n' est donc le nombre de contrats observés, soit le nombre de maturités différentes $T(1)...T(n')$ observées sur le marché.

$$d_t = \begin{pmatrix} A(T(1)) \\ \vdots \\ A(T(n')) \end{pmatrix}$$

$$Z_t = \begin{pmatrix} e^{-\kappa T1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ e^{-\kappa Tn'} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\epsilon_t = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon'_n \end{pmatrix}$$

Pour notre calibration, on disposera d'un jeu de données initial, on calculera les différentes matrices utiles pour l'estimation des variables d'état, puis on calculera la vraisemblance pour un jeu de paramètres donné, valeur que l'on maximisera afin d'obtenir la valeur des paramètres. Dans notre modèle court terme/long terme, il y a 7 paramètres à estimer $(\kappa, \sigma_\xi, \mu_\xi, \sigma_\xi, \rho_{\xi\kappa}, \lambda_\chi, \mu^*_\kappa)$.

Nous n'avons pas obtenu de résultats concluant pour cette méthode. En effet nos résultats de calibration sont instables (fortement dépendants des valeurs initiales choisies et des contraintes introduites dans la routine de maximisation de la vraisemblance). Notre programmation de la filtration des données ne semble pas être remise en cause. En effet nous avons voulu filtrer nos données avec les paramètres trouvés par la méthode implicite (décrite dans la section suivante). La figure (5.4) montre le résultat de cette filtration dans laquelle nous représentons le prix d'équilibre et le prix spot.

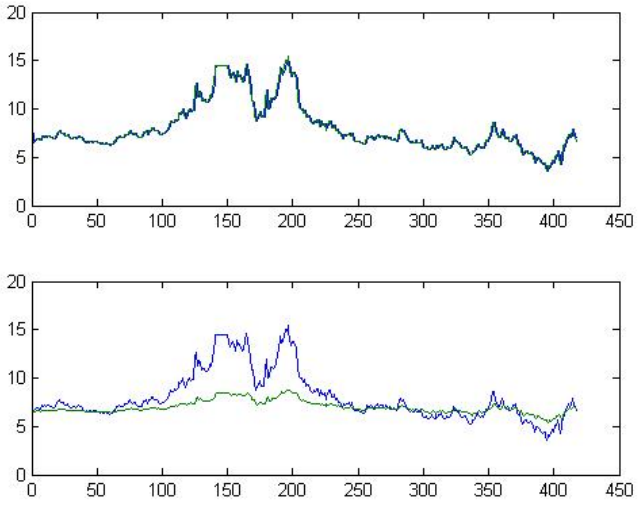

FIG. 5.4 – Résultat de la filtration et comparaison du prix spot et du prix d'équilibre

Comme prévu, nous observons que le prix d'équilibre est beaucoup moins volatil que le prix spot. Il reflète d'ailleurs assez bien le niveau de prix. Les décisions de court terme (augmentation de la production) n'impactent pas le prix spot traduisant le fait que les acteurs de marché ne considèrent pas cette modification comme durable.

5.3.1.b Par méthode implicite (paramètre par paramètre)

Nous mettons en œuvre notre méthode sur les données du pétrole. Afin de vérifier la stabilité des paramètres on réalise une calibration quotidienne pendant un mois durant (juin 2002). Les paramètres les plus significatifs sont stables comme le prouve le tableau ci-dessous (nous rassemblons seulement les principaux paramètres et les deux variables d'état) :

	Paramètres				Variables d'état	
Dates	κ	σ_ξ	σ_χ	$\rho_{\xi\chi}$	χ_t	ξ_t
28/06/2002	0,544	0,283	0,412	0,169	0,084	3,221
26/06/2002	0,544	0,281	0,416	0,169	0,072	3,221
24/06/2002	0,539	0,274	0,423	0,170	0,059	3,227
20/06/2002	0,545	0,263	0,443	0,171	0,031	3,232
18/06/2002	0,559	0,277	0,440	0,173	0,037	3,218
14/06/2002	0,538	0,263	0,438	0,170	0,040	3,233
12/06/2002	0,571	0,271	0,456	0,176	0,007	3,213
10/06/2002	0,580	0,268	0,463	0,178	-0,008	3,213
06/06/2002	0,567	0,273	0,451	0,175	0,014	3,213
04/06/2002	0,570	0,287	0,431	0,173	0,048	3,202

Ces données nous permettent de représenter l'évolution de la valeur des paramètres en réponse à une variation du prix spot. En d'autres termes, il s'agit d'étudier la stabilité des paramètres et leur évolution, ce qui revient à s'interroger sur le prix de sa couverture. Par exemple, des paramètres peu stables vont impliquer une couverture très coûteuse.
On obtient un comportement attendu pour la volatilité de court terme qui augmente lorsque le prix spot diminue (5.5).

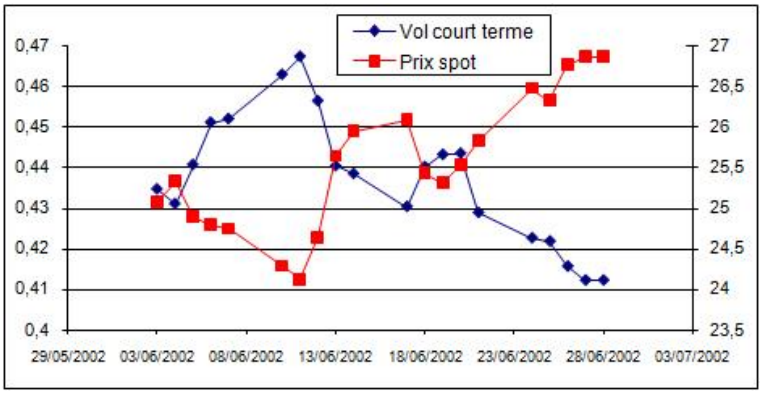

FIG. 5.5 – Evolution de la volatilité court terme et du prix spot au cours du mois de juin 2002

De même le prix de court terme (sensé capturer les variations de court terme) suit le prix spot contrairement au prix de long terme qui reste stable (figure 5.6).

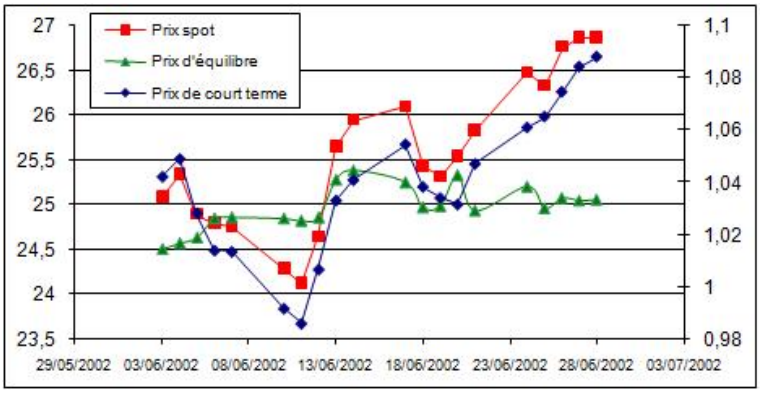

FIG. 5.6 – Evolution du prix de court terme et du prix spot au cours du mois de juin 2002

L'écart du à la modélisation est compris dans l'écart bid/ask. Ceci prouve que la concordance entre le modèle et le marché est satisfaisante pour la cotation du pétrole (figure 5.7).

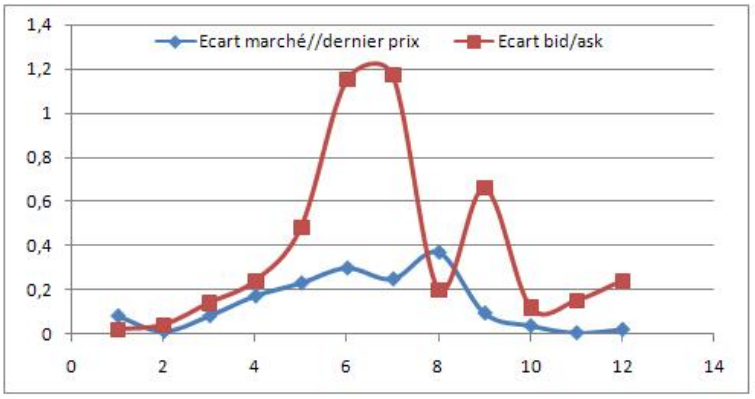

FIG. 5.7 – Ecart entre la structure à terme modélisée et celle traitée, en comparaison avec l'écart bid/ask en pourcentage

Nous mettons en garde l'utilisateur de ce modèle pour des marchés plus saisonniers comme celui du gaz où nous n'arrivons pas à capturer la structure à terme des futures.

Ce modèle présente un intérêt évident quant à l'interprétation des paramètres. Cependant il peut se montrer insuffisant pour capturer des structures à termes saisonnières, créant alors un arbitrage sur la courbe des prix des contrats à termes ou sur la structure à terme de la volatilité. Les résultats de la calibration sont assez satisfaisants pour cette méthode. Ce modèle et cette méthode de calibration stable et rapide semblent adéquats pour les *back tests* et pour les interpolations afin de mettre en évidence des opportunités d'arbitrages résultant d'aberrances du marché.

5.3.2 Calibration du modèle de courbe 1-facteur

Dans cette partie, nous calibrons le modèle de courbe à un facteur tel qu'il est décrit au chapitre 5 par volatilité implicite. Nous disposons de données du Brent correspondant aux prix des contrats à terme. Nous appliquons dans un premier temps les formules fermées des *calls*, puis nous nous calculons la volatilité implicite en inversant la formule de Black-Scholes. Nous optimisons sur les deux paramètres α et σ, et ce pour plusieurs dates afin

d'étudier la stabilité de ce modèle. Cette optimisation nous permet d'obtenir les deux valeurs des paramètres, ce qui nous permet de tracer, pour chaque date de cotation, la courbe de volatilité des contrats à terme donnée par les valeurs de marché et la courbe de volatilité des contrats à terme obtenus avec les valeurs ainsi calibrées.

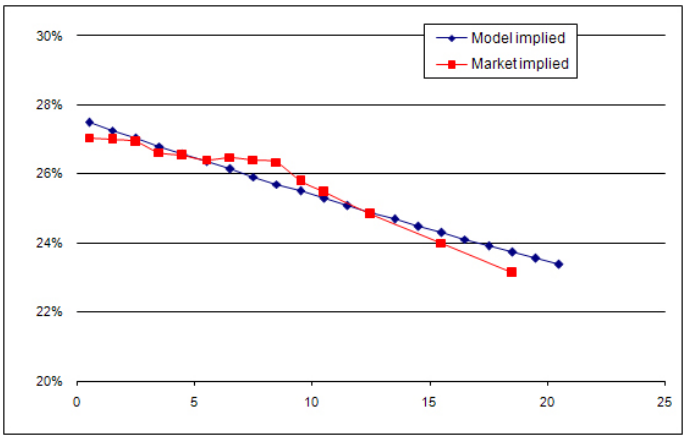

FIG. 5.8 – Structure de volatilité issue de la calibration au 11 avril 2007

Les résultats sont concluants : en effet on peut minimiser la fonction critère (définie comme la somme des carrés des différences de volatilité) jusqu'à moins de 0,01 %. Les structures de volatilité sont correctement répliquées, sauf pour les très courtes maturités (1 mois) et pour les maturités beaucoup plus longues (supérieures à 15 mois) du fait du manque de données fournies par Bloomberg. Il y a donc arbitrage car sur toutes les maturités, il n'y a pas de reconstitution exacte.

Stabilité de l'algorithme

Pour s'assurer de la cohérence des résultats, il faut démontrer que l'algorithme utilisé est stable, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas des valeurs initiales. On réalise donc plusieurs calibration pour une même date. Ci-dessous on donne un tableau de résultats qui montre la stabilité de l'algorithme d'optimisation : (σ_o et α_0 sont les valeurs initiales au début de la calibration, les bornes de variations ont été prises de 0 à 60 % pour σ, de 0 à 80 % pour α)

	Paramètres			
Date	σ_0	α_0	σ	α
19/12/2007	10%	20%	30,6%	80,0%
19/12/2007	20%	30%	30,6%	80,0%
19/12/2007	50%	10%	30,6%	80,0%
05/01/2007	10%	20%	37,7%	60,9%
05/01/2007	20%	30%	37,7%	60,9%
05/01/2007	50%	10%	37,7%	60,9%
24/11/2006	10%	20%	29,5%	32,7%
24/11/2006	20%	30%	29,5%	32,7%
24/11/2006	50%	10%	29,5%	32,7%

Stabilité du modèle

Pour vérifier si le modèle est stable, il faut étudier l'évolution de α et σ obtenus au cours du temps. Pour une meilleure lecture visuelle, on met en regard l'évolution de ces deux paramètres ainsi que l'évolution des courbes des futures de différentes maturités en fonction du temps.

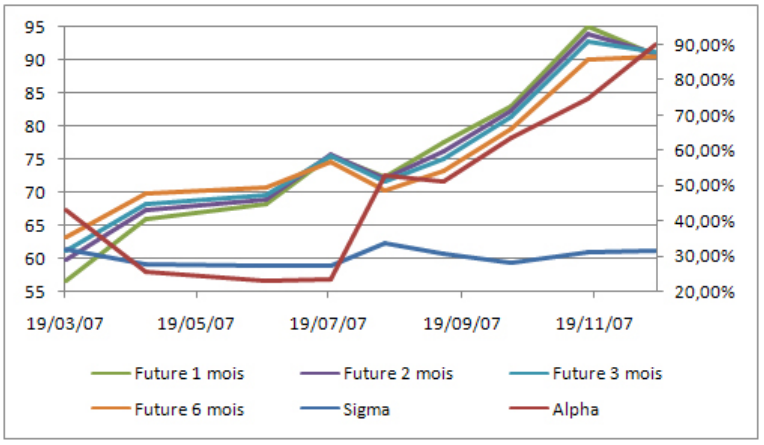

FIG. 5.9 – Evolution des paramètres et des contrats futures de mars à décembre 2007

Cette interprétation graphique nous permet de conclure à la stabilité du paramètre σ, dont les valeurs obtenues ont une moyenne de 30 % avec un écart-type de 4,3 %. Ce paramètre est donc à comparer avec une volatilité constante dans un modèle de Black-Scholes et avec les volatilités implicites données par le marché. Cette moyenne de 30 % reflète un marché assez volatil, ce qui confirme ce qui a été obtenu par les modèles spot.

Le paramètre α est quant à lui très volatil. Sur l'année 2007, les valeurs obtenues ont une moyenne de 49 %, mais avec un écart-type significatif de 24 %. L'évolution de ce paramètre au cours des jours de cotation est étroitement corrélée à l'augmentation dans le même temps des contrats futures, quelque soient les maturités considérées : elles passent de 63 $ à 90 $ le baril sur l'année 2007, soit une augmentation de plus de 44 %.

Nous pouvons conclure à la stabilité du paramètre σ : il n'est pas nécessaire de le recalibrer fréquemment. En revanche, α doit être constamment recalibré, son évolution étant corrélée à celle des prix des futures.

Ce modèle ne présente pas d'arbitrage sur la courbe des prix à terme mais un éventuel arbitrage sur l'ensemble de la surface de volatilité ; tant sur la structure à terme (dépendance en T) que sur le *smile* (dépendance en K).

5.3.3 Calibration du modèle de courbe 1-facteur étendu

Dans cette section, on utilise les résultats obtenus précédemment afin de déterminer les différentes valeurs de σ_t, puisque σ n'est plus une fonction constante du temps. On rappelle ici la formule fermée d'un *call* :

$$c = e^{-rT}(F(0,T_1)\mathcal{N}(d_1) - K\mathcal{N}(d_2))$$

avec

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{F(0,T_1)}{K}\right) + \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_u^2 e^{-2\alpha(T_1-u)}du}{\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 e^{-2\alpha(T_1-u)}du}}$$

et

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 e^{-2\alpha(T_1-u)}du}$$

Le principe de cette calibration est de considérer σ_t comme une fonction constante par morceaux, les intervalles étant bornés par les maturités des options considérées. Cette méthode présente l'avantage de simplifier les calculs tout en faisant varier σ.

On donne les données de marché que sont les volatilités implicites. Elle sont reliées à notre modèle par la relation :

$$\sigma^2_{implT_1-\delta}(T_1-\delta) = \int_0^{T_1-\delta} \sigma_1^2 e^{-2\alpha(T_1-\delta-u)}du$$

Où $T_1 - \delta$ est la maturité de l'option sur un future délivrant un sous-jacent à la date T_1 (l'origine des temps étant prise à $t = 0$). σ_1 est la valeur de σ sur l'intervalle $[0; T_1 - \delta]$. On obtient alors :

$$\sigma^2_{implT_1-\delta} = \frac{\sigma_1^2}{T_1-\delta}\frac{e^{-2\alpha(T_1-\delta)}}{2\alpha}[e^{2\alpha(T_1-\delta)} - 1]$$

Cette relation nous donne accès à σ_1
On considère maintenant une option sur un future de maturité T_2. On a :

$$\sigma^2_{implT_2-\delta}(T_2-\delta) = \int_0^{T_2-\delta} \sigma_u^2 e^{-2\alpha(T_2-\delta-u)}du$$

Si on note σ_2 la valeur de σ sur l'intervalle $[T_1 - \delta; T_2 - \delta]$, on obtient :

$$\sigma^2_{implT_2-\delta}(T_2-\delta) = \int_0^{T_1-\delta} \sigma_1^2 e^{-2\alpha(T_2-\delta-u)}du + \int_{T_1-\delta}^{T_2-\delta} \sigma_2^2 e^{-2\alpha(T_2-\delta-u)}du$$

Soit :

$$\sigma^2_{implT_2-\delta}(T_2-\delta) - e^{2\alpha(T_1-\delta-T_2+\delta)}\int_0^{T_1-\delta} \sigma_1^2 e^{-2\alpha(T_1-\delta-u)}du = \int_{T_1-\delta}^{T_2-\delta} \sigma_2^2 e^{-2\alpha(T_2-\delta-u)}du$$

Et d'après l'expression obtenue précédemment, puisque $T_1 - \delta - T_2 + \delta = -1$ mois (les données sont des contrats de maturités mensuelles) on a :

$$\sigma^2_{implT_2-\delta}(T_2-\delta) - e^{2\alpha(-\frac{1}{12})}\sigma^2_{implT_1-\delta}(T_1-\delta) = \int_{T_1-\delta}^{T_2-\delta} \sigma_2^2 e^{-2\alpha(T_2-\delta-u)}du$$

Soit, après calculs :

$$\sigma_2^2 = \frac{2\alpha\left[\sigma^2_{implT_2-\delta}(T_2-\delta) - e^{-\frac{\alpha}{6}}\sigma^2_{implT_1-\delta}(T_1-\delta)\right]}{1 - exp(-\frac{\alpha}{6})}$$

On généralise donc notre raisonnement si on note σ_i la valeur de σ sur l'intervalle $[T_{i-1}-\delta; T_i-\delta]$, on obtient, pour $i > 1$:

$$\boxed{\sigma_i^2 = \frac{2\alpha\left[\sigma^2_{implT_i-\delta}(T_i-\delta) - e^{-\frac{\alpha}{6}}\sigma^2_{implT_{i-1-\delta}}(T_{i-1}-\delta)\right]}{1-exp(-\frac{\alpha}{6})}} \tag{5.7}$$

On obtient un procédé itératif qui permet d'obtenir les valeurs de σ_t de proche en proche.

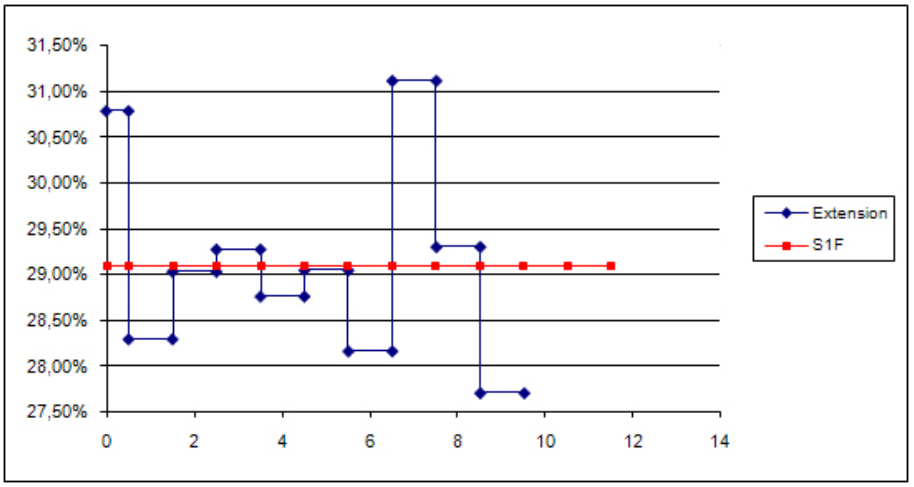

FIG. 5.10 – Variation de σ_t en fonction de la maturité au 04/09/2007

Cette méthode présente l'avantage de pouvoir être implémentée facilement à l'aide d'une feuille Excel et permet d'affiner l'évaluation de σ en fonction de la maturité d'option considérée. Le graphique nous montre que la valeur initialement obtenue par calibration apparaît comme une moyenne des valeurs obtenues par extension. De plus cette méthode est toujours stable puisqu'explicite, tant que l'on fournit une valeur acceptable de σ_1 au départ du calcul.

Ce modèle ne présente pas d'arbitrage sur la courbe des prix à terme ni sur la structure à terme de la volatilité mais un éventuel arbitrage sur le *smile* (*skew*) demeure.

5.3.4 Calibration du modèle de courbe 1-facteur log décalé : extension 2

Une première idée pour calibrer un modèle prenant en compte le risque de smile serait de le calibrer sur deux séries d'options vanilles de *strikes* proches. On préfère à cette méthode une approche plus astucieuse reposant sur la valorisation d'une option simple dépendante du *skew*, comme les options digitales. Dans notre modèle le prix d'une option digitale s'exprime comme :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}\mathbb{I}_{F(T,T_1)\geq K}|\mathcal{F}_t] = e^{-rT}\mathcal{N}(d_{logdcal})$$

avec $d_{logdcal} = \frac{ln\left(\frac{F(0,T)+k}{K+k}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2_{logdcal}(T)}{\sqrt{\sigma^2_{logdcal}(T)}}$ et $\sigma^2_{logdcal}(T) = \int_0^T \sigma_u^2 e^{-2\alpha(T-u)}du$

Comme nous l'avons vu dans (4.11), le prix de marché d'une telle option est :

$$e^{-rT}\mathcal{N}(d_2(\sigma_{BS}(K,T))) - \mathcal{V}ega(\sigma_{BS}(K,T)) * skew$$

En égalisant ces deux expressions, et en composant l'égalité par l'inverse de la fonction de répartition de la normale centrée réduite, on trouve :

$$\Phi^{-1}[\underbrace{\mathcal{N}(d_2(\sigma_{BS}(K,T))) - e^{rT}\mathcal{V}ega(\sigma_{BS}(K,T)) * skew}_{Market(K,T)}] = \frac{ln\left(\frac{F(0,T)+k}{K+k}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2_{logdcal}(T)}{\sqrt{\sigma^2_{logdcal}(T)}}$$

$$ln\left(\frac{F(0,T)+k}{K+k}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2_{logdcal}(T) = \sqrt{\sigma^2_{logdcal}(T)}\Phi^{-1}(Market(K,T))$$

En élevant l'égalité au carré, on obtient une équation du second degré que l'on résout en retenant la racine positive.

$$\sigma^2_{logdcal}(T) = f(k, \sigma_{BS}(K,T))$$

On trouve donc comme dans l'expression (5.7) la fonction σ_t déterministe constante par morceaux. En notant K_0 le *strike* de référence nous trouvons k, le paramètre minimisant la fonction critère suivante :

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{ln(\frac{F(0,T)+k}{K_i+k}) + \frac{1}{2}f(k,\sigma_{BS}(K_0,T))}{\sqrt{f(k,\sigma_{BS}(K_0,T))}} - \Phi^{-1}(Market(K_i,T))\right)^2$$

En pratique nous calibrons notre modèle sur deux *strike*s (le *strike* de référence et un autre proche). Ce *strike* de référence est prix à 102,5 % du prix des futures. Tout autre *strike* pourrait être retenu tant que le *strike* n'est pas égale à 100 % du prix du future car dans ce dernier cas, il n'y a plus de dépendance en k.

La méthode mise en œuvre implique le calcul des différents *skews* à partir des données de marché. Plutôt que d'utiliser des méthodes graphiques, qui seraient plus compliquées à mettre en œuvre, pour calculer la pente de la courbe de volatilité en fonction du *strike*, nous utilisons l'approximation suivante où :

$$skew(K_i,T) = \frac{1}{2}\frac{\sigma(K_{i-1},T) - \sigma(K_i,T)}{K_{i-1} - K_i} + \frac{1}{2}\frac{\sigma(K_i,T) - \sigma(K_{i+1},T)}{K_i - K_{i+1}}$$

Cette dernière approximation provient d'un schéma de différences finies centré, les valeurs empiriques du *skew* pouvant varier en fonction du type de schéma d'approximation utilisé. En pratique les traders imposent eux-mêmes leur niveau de *skew* ou pratiquent à un lissage de la volatilité. Les données de marché vont pouvoir nous donner accès à notre expression de $Market(K,T)$, pour chaque *strike* K et chaque maturité T à une date donnée. L'approximation du *skew* nous limite sur les calculs des *skew* aux valeurs extrêmes, ce qui réduit à 5 le nombre de *strike* différents (de 95 % à 105 % par tranche de 2,5 %). L'équation précédemment obtenue nous donne par résolution d'une équation du second degré $\sigma^2_{logdcal}(T) = f(k,\sigma_{BS}(K,T))$. La minimisation du critère nous donne enfin accès à une valeur de k à chaque date de cotation.

La stabilité de l'algorithme est immédiatement vérifiée en prenant des valeurs initiales de k différentes pour une même calibration. Ce test s'avère positif dans tous les cas. Afin de déterminer la stabilité de la calibration nous calibrons le modèle sur plusieurs dates : nous prenons ici la période d'un an de novembre 2006 à novembre 2007. Les valeurs obtenues sont

relativement stables, elles oscillent entre 8,73% et 20,63 % pour une valeur moyenne de 13,9 % et un écart-type de 3,91 %. Nous pouvons conclure à la stabilité du paramètre k : il n'est pas nécessaire de le recalibrer fréquemment. C'est un chiffre de l'ordre de 1 % à 2 % des prix des contrats, ce qui n'est pas négligeable si on veut une calibration précise. Il est intéressant de suivre l'évolution du paramètre au regard des prix des contrats futures mais également de la volatilité selon les courbes (5.11) et (5.12).

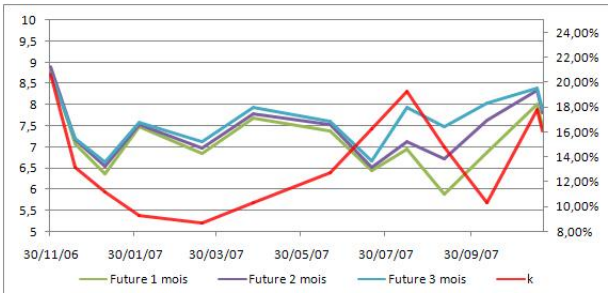

FIG. 5.11 – Stabilité de k et évolution des contrats futures

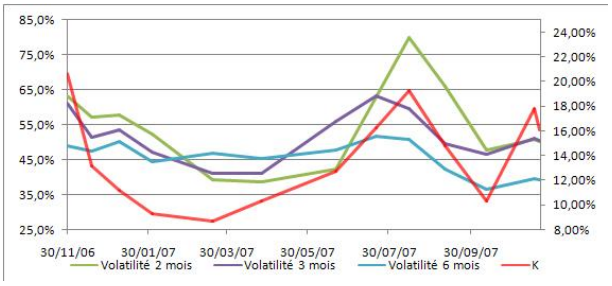

FIG. 5.12 – Stabilité de k et évolution des volatilité

Pour s'assurer du bien-fondé de cette calibration, il faut vérifier les conditions d'un non-arbitrage autour de la valeur du *strike* de référence, ici prise à 102,5 % en *moneyness*, mais qui peut être changée grâce à l'outil de pricing mis en place dans le cadre de cette étude. Nous cherchons donc à comparer les valeurs de la volatilité de marché à une date et une maturité données ainsi que les valeurs de la volatilité implicite du modèle obtenues avec la valeur de k optimale. Nous revenons donc à l'équation

$$\Phi^{-1}[\underbrace{\mathcal{N}(d_2(\sigma_{BS}(K,T))) - e^{rT}\mathcal{V}ega(\sigma_{BS}(K,T)) * skew}_{Market(K,T)}] = \frac{ln\left(\frac{F(0,T)+k}{K+k}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2_{logdcal}(T)}{\sqrt{\sigma^2_{logdcal}(T)}}$$

où il nous faut trouver la valeur de la volatilité implicite σ_{BS}. Une résolution par solveur numérique sous Excel nous permet d'avoir accès à cette valeur.

Cette étude graphique nous montre qu'au voisinage du *strike* de référence, le modèle donne des valeurs satisfaisantes de la volatilité implicite (niveau) et du *skew* (pente). Au delà, (plus de 10 % de *moneyness*) il faut recalibrer le paramètre k en changeant le *strike* de référence. L'arbitrage en volatilité est donc résolu par cette méthode simple et rapide à implémenter. Ces résultats étant satisfaisants, un test supplémentaire serait de vérifier si cette calibration du *skew* reste valable pour différentes maturités.

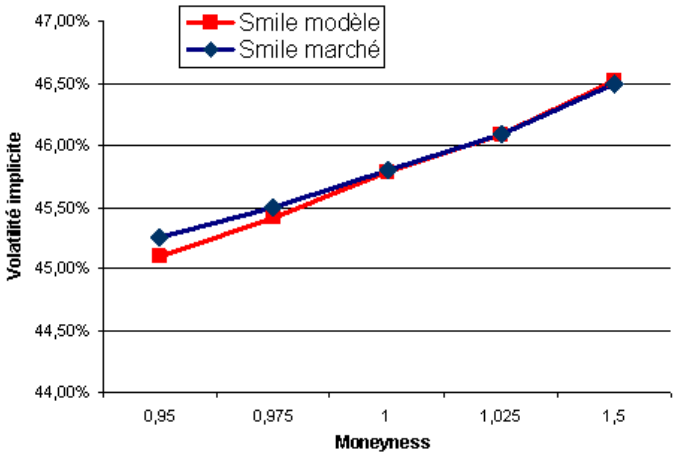

FIG. 5.13 – Comparaison des volatilités implicites (maturité 6 mois) du modèle et du marché au 7 juin 2006

Ce modèle ne présente pas d'arbitrage sur la courbe des prix à terme. Elle reproduit par construction la structure à terme de la volatilité implicite et son *skew* pour un *strike* donné et les avoisine pour un *strike* voisin. Les modèles de courbes ont l'inconvénient d'accaparer toute l'information. Ils prennent en compte toutes les données de marché en les assimilant même si elles sont aberrantes et laisseraient place à un arbitrage.

5.4 Synthèse des modèles

Modèle	Section	Formules fermées		Statistique			Calibration		Recommandations
		Future	Options	Sam[1]	Sai[2]	MR[3]	Futures	Options	
Spot 2-facteurs	3.1	(3.7)	(3.8)	✓	∅	✓	++	++	Modèle à utiliser pour les back tests et pour la détection d'opportunités de placements. Permet une extrapolation pour les prix futures non cotés.
Spot 2-facteurs + saisonnalité	3.2	(3.14)	(3.15)	✓	✓	✓			Modèles prenant en compte la saisonnalité. Utilisation possible pour le gaz.
Spot 3-facteurs	3.3	(3.18)*	(3.21)*	✓	✓	✓			
Courbe 1-facteur	4.1	Input	(4.4)	✓	✓	✓	+++	+	Pas d'arbitrage sur la courbe des contrats à terme, à employer pour la valorisation de produits monostrike faiblement path-dependent.
Courbe 1-facteur extension 1	4.2	Input	(4.9)	✓	✓	✓	+++	++	Absence d'arbitrage sur la courbe des contrats à terme et sur la structure à terme de la volatilité. A employer pour la valorisation de produits path-dependent mais indépendants du skew.
Courbe 1-facteur extension 2	4.3	Input	(4.14)	✓	✓	✓	+++	+++	Absence d'arbitrage sur la courbe des contrats à terme et sur la structure à terme de la volatilité et le smile. A employer pour la valorisation de produits path-dependent et skew-dependent.
Courbe 2-facteurs	4.4	Input			✓	✓			Ajoute un facteur de risque qui permet de valoriser des produits de corrélation comme les spreads calendaires décrits dans le chapitre 1.

* : si la formule est semi fermée (i.e. : sous forme d'intégrale ou solution d'une équation différentielle ordinaire à coefficients dépendants du temps).
[1] : Met en évidence l'effet Samuelson.
[2] : Prend en compte la saisonnalité.
[3] : Le prix spot présente un effet de retour à la moyenne.
■ : A déterminer dans le cadre d'un approfondissement de cette étude.

Chapitre 6

Valorisation de produits exotiques

Nous allons dans cette section appliquer cette étude en exploitant le tableau (5.4). Afin de mettre en évidence la démarche à adopter et de présenter des méthodes usuelles d'évaluation (simulation Monte-Carlo et arbre recombinant), on décide de traiter deux produits exotiques largement répandus sur le marché des produits dérivés sur matières premières.

- Une option d'achat asiatique de *strike* 95%, de maturité 2 ans. La moyenne s'opère sur les valeurs hebdomadaires (valeur de fermeture du marché en fin de semaine) des 6 derniers mois de la vie de l'option.
- Une option bermudéenne de *strike* 95% et de maturité 2 ans. Les dates d'exercice possible sont le premier de chaque mois de la seconde année de vie de l'option.

6.1 Option asiatique

6.1.1 Evaluation par méthode de Monte-Carlo

6.1.1.a Mise en œuvre de la méthode

Une option asiatique est typiquement ce que l'on appelle une option *path-dependent* dans le sens où le payoff dépend non seulement de la valeur terminale du sous-jacent mais aussi de la trajectoire qu'il a eue tout le long de la vie de l'option. Une méthode numérique utilisée pour valoriser de telles options est une méthode de type Monte-Carlo reposant sur la loi des grands nombres. La moyenne arithmétique d'une fonction d'une variable aléatoire convergeant en probabilité vers son espérance, il nous suffit de générer bon nombre de scenarii afin d'approcher le prix de l'option. A partir du tableau (5.4), nous décidons pour cette valorisation de comparer les modèles de courbes 1-facteur (section 4.1) et 1-facteur avec extension déterministe dépendant du temps (section 4.2).

A partir de (4.3) et de (4.8), les dynamiques du prix spot sous la probabilité risque-neutre, nous pouvons simuler les trajectoires en discrétisant par un schéma d'Euler [1] ces dynamiques.

Nous obtenons alors :

$$S(t_{i+1}) - S(t_i) = \alpha \left[h(t_i) - ln\left(S(t_i)\right)\right] S(t_i)\Delta t + \sigma\left(S(t_i)\right) S(t_i)\sqrt{\Delta t}\mathcal{N}(0,1)$$

L'implémentation d'une telle trajectoire implique la connaissance de la fonction suivante à tout les instants :

$$h(t) = lnF(0,t) + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial lnF(0,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_u^2 e^{-2\alpha(t-u)} du$$

[1] La loi du prix spot étant connue, il nous serait possible d'utiliser un schéma de simulation exacte.

Nous avons donc recours à une interpolation de la courbe de contrats à terme par polynômes d'Hermite : PCHIP (Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial) dont une description est fournie dans l'annexe (D). Cette interpolation à l'avantage de fournir une courbe $\mathcal{C}^1$ comme le montre la figure (6.1).

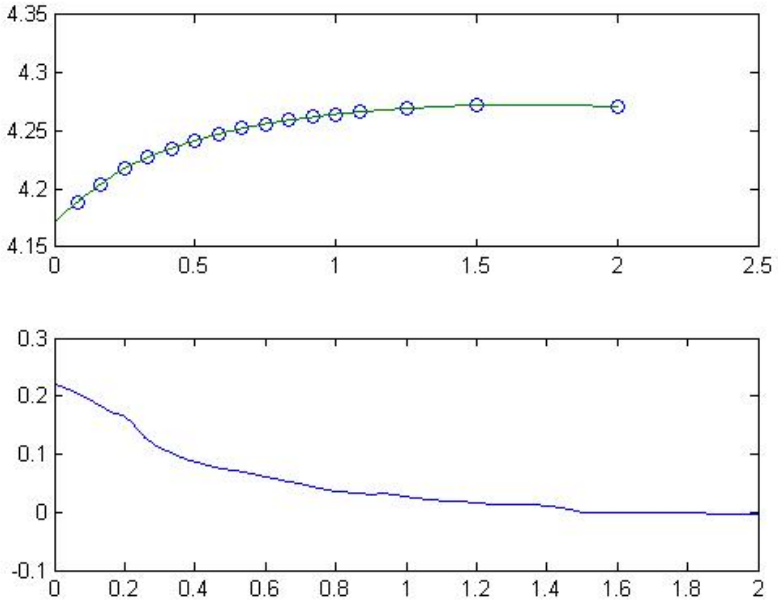

FIG. 6.1 – Interpolation par PCHIP de la courbe des logarithmes des contrats à terme et sa dérivée (6 juin 2007)

Une fois les trajectoires simulées, on calcule le payoff à la maturité de l'option et on actualise la moyenne de ces observations. (voir annexe (F.4) pour le code).

6.1.1.b Résultats numériques

Dans un premier temps, nous énoncerons des résultats généraux sur l'évolution du prix selon la variation des paramètres. Les résultats sont rassemblés dans les tableaux (6.1) et (6.2) :

Volatilité	15%	25%	35%
Prix[1]	7.70	10.17	12.42

[1] :modèle 1-facteur (4.1) utilisé
Moneyness=100%

TAB. 6.1 – Evolution de la prime en fonction de la volatilité

Toutes choses égales par ailleurs, nous remarquons que le prix du *call* asiatique est :
- fonction décroissante du *strike*
- fonction décroissante du coefficient de retour à la moyenne
- fonction croissante de la volatilité

Retour à la moyenne \ Moneyness	75%	95%	110%
0,0001	21,66	13,59	9,16
0,1	21,40	12,54	7,83
0,15	21,31	12,23	7,56
0,25	21,06	12,11	6,95
0,5	20,20	10,26	5,52

Modèle 1-facteur étendu (4.2) utilisé

TAB. 6.2 – Evolution de la prime en fonction du *strike* et du coefficient de retour à la moyenne

Nous représentons dans la figure (6.2) le prix du *call* asiatique obtenu par une méthode de Monte-Carlo et l'intervalle de confiance à 95% correspondant en fonction du nombre de simulations. Cette intervalle de confiance résulte de l'application du théorème centrale limite. En effet, la suite des flux actualisés est une suite de N variables aléatoires indépendantes de même loi, de carré intégrable, d'espérance V_0 et d'écart-type σ. Alors le théorème centrale limite assure que pour tout intervalle $I \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\overline{fluxact} - nV_0}{\sqrt{n\mathbb{V}(fluxact)}} \in I\right) \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \int_I g(x)dx$$

où $g(x)$ est la densité gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$. En consultant les tables de la loi normale centrée réduite, on déduit facilement l'intervalle de confiance symétrique à 95% :

$$V_0 \in \left[\overline{fluxact} - \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{fluxact} + \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Il est possible d'améliorer cet algorithme en utilisant les méthodes de réduction de variance (visant à diminuer l'amplitude de l'intervalle de confiance pour un même niveau de confiance donnée). Nous fournissons dans l'annexe (E) un aperçu général de cette méthode. Une application dans le cas des options asiatiques est disponible dans [24].

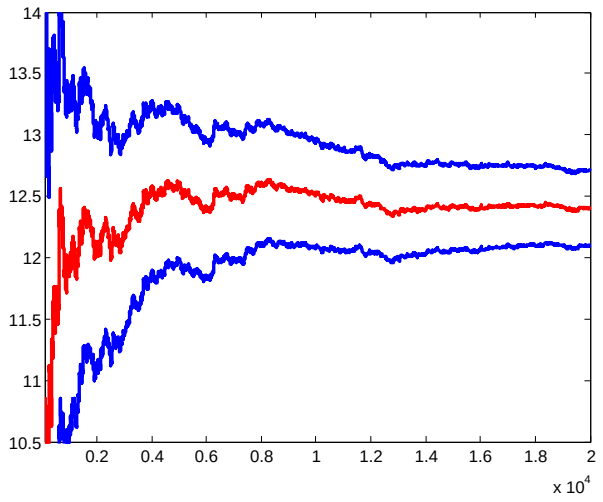

FIG. 6.2 – Prix de l'option asiatique avec son intervalle de confiance à 95%

6.1.1.c Comparaison des deux modèles

Avec les données du 6 juin 2007, nous réalisons la valorisation d'une option d'achat asiatique de maturité 2 ans, de *strike* 95% du prix spot initial. Comme nous l'avons mentionné auparavant, les termes de contrat précisent la manière de calculer la moyenne. Dans notre cas, la moyenne se calcule sur les valeurs hebdomadaires des 6 derniers mois de la vie de l'option.

En suivant les démarches décrites dans les sections (5.3.2) et (5.3.3), nous calibrons les deux modèles (modèle 1-facteur et 1-facteur étendu) sur les données de marché du 6 juin 2007.

Pour une simulation de Monte-Carlo comprenant 20000 scenarii et un pas de discrétisation de 1 jour$= 1/252$ année, nous obtenons les résultats suivants :

Modèle 1-facteur (4.1)	**Modèle 1-facteur étendu (4.2)**
11.65	12.71

TAB. 6.3 – Comparaison des deux modèles pour la valorisation d'un call asiatique

Ces résultats prouvent que notre extension du modèle de courbe 1-facteur (4.2) répond mieux à la valorisation de cette option. En effet la table (6.1) montre la grande importance de la volatilité. Notre extension reproduit la structure à terme de la volatilité implicite (i.e. les valeurs de la volatilité implicite tout le long de la vie de l'option *path-dependent*). Le simple modèle 1-facteur (4.1) aura tendance à sous-estimer la valeur d'une telle option si l'aire entre la structure à terme de volatilité de marché et celle générée est négative. Une telle erreur peut (dans le cas de surestimation) éloigner les clients ou (dans le cas de sous-estimation) exposer la banque qui n'aura pas demandé à l'investisseur une prime suffisante pour se couvrir.

6.1.2 Couverture

Dans la mesure où nous ne disposons pas de formules fermées pour cette option, il se pose un problème pour la couverture du risque de variation du prix du sous-jacent. Nous proposons une méthode pour obtenir le delta (dérivé du prix de l'option par rapport au sous-jacent) afin de fournir une couverture. Nous utilisons une méthode de différences finies et approchons la tangente par la pente de la corde $[A, B]$ comme le montre la figure (6.3) :

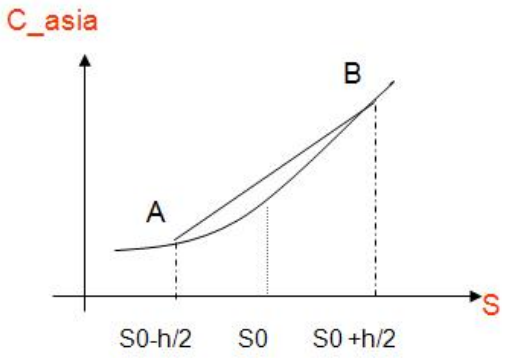

FIG. 6.3 – Prix de l'option asiatique en fonction du prix spot initial

En prenant h de l'ordre de $S_0/100$, nous obtenons une bonne approximation du delta :

$$delta^{As} \approx \frac{C^{As}\left(S_0 + \frac{h}{2}\right) - C^{As}\left(S_0 - \frac{h}{2}\right)}{h}$$

Notons que par cette méthode, nous cumulons trois erreurs. Les deux premières lors de la valorisation par méthode de Monte Carlo et la dernière en approchant la tangente par la corde. Nous comprendrons facilement que ces erreurs deviennent de plus en plus importantes lorsqu'il faudra calculer le gamma (dérivée seconde du prix de l'option par rapport au prix spot initiale, autrement dit dérivé première du delta, permettant de mesurer la fréquence de rebalancement du portefeuille de couverture).

6.2 Option bermudéenne

La méthode qui est employée ici est celle du pricing par arbre trinomial recombinant issu des taux d'intérêts, d'après le modèle de Hull et White décrit dans [20]. Les modèles à un facteur (4.3) et à un facteur étendu (4.8) sont très similaires au modèle de Black et Karasinski qui ont proposé une formulation n'autorisant pas l'obtention d'un taux d'intérêt négatif et qui pose :

$$dln(r) = [\theta(t) - a(t)ln(r)]dt + \sigma(t)dW_t$$

La variable $ln(r)$ suit une loi gaussienne, ce qui en fait un modèle log-normal. On réécrit l'équation de la diffusion du prix spot en posant : $X = ln(S)$.

On obtient alors sous la probabilité risque-neutre :

$$dX = [\theta(t) - \alpha X]dt + \sigma dW$$

Il s'agit de la réécriture de l'équation (4.3) avec volatilité σ constante pour le prix spot. Le cas d'un modèle 1-facteur étendu est plus délicat à traiter car la relation de stabilité du schéma est dépendante du temps. Le lecteur pourra se référer aux calculs développés dans [2].

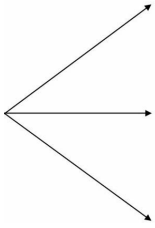

FIG. 6.4 – Nœud symétrique

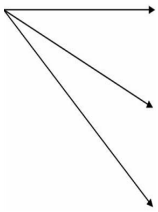

FIG. 6.5 – Nœud descendant

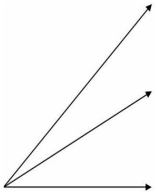

FIG. 6.6 – Nœud montant

Nous allons calculer les valeurs de X à différents instants de la forme $i\Delta t$. Pour ce faire, on utilise un arbre trinomial qui permet, à chaque point $(j\Delta X, i\Delta t)$ d'associer les probabilités de monter à un état $((j+1)\Delta X, (i+1)\Delta t)$, de descendre à un état $((j-1)\Delta X, (i+1)\Delta t)$, ou bien de rester à une valeur constante $(j\Delta X, (i+1)\Delta t)$ selon la figure (6.4). L'arbre trinomial associe à un nombre de pas de temps donné, c'est-à-dire à un nombre de nœuds donnés (caractérisés par un instant $i\Delta t$ et valeur de la forme $j\Delta X$), les probabilités pour le sous-jacent de monter, de descendre ou bien de rester à une valeur constant. De plus, il existe deux autres alternatives pour le branchement d'un nœud à trois nœuds suivants. Le

prix spot peut avoir soit deux possibilités pour monter et une possibilité pour rester à une valeur constante (selon la figure 6.5), soit deux possibilités pour descendre et une possibilité pour rester à une valeur constante (selon la figure 6.6). Ainsi, pour un nombre de pas de temps donné n, on peut retracer la diffusion du prix spot jusqu'à un instant donné. Puis, par induction arrière, on peut évaluer le prix d'un option bermudéenne. Pour ce faire, on calculera le prix de l'option à l'instant final pour tous les états possibles de X, puis par évaluation risque-neutre, on peut calculer le prix à l'instant précédent, et ce jusqu'à l'instant initial.

Discrétisation de la diffusion du spot Le principe d'un arbre recombinant correspond à une une multiplicité des trajectoires de X pour une même valeur finale. En effet, il est identique pour le sous-jacent de monter entre les instants $i\Delta t$ et $(i+1)\Delta t$ et de descendre entre les instants $(i+1)\Delta t$ et $(i+2)\Delta t$ que de descendre dans un premier temps puis de monter dans un second. Il est plus réaliste d'utiliser un arbre trinomial plutôt qu'un arbre binomial, accordant un degré de liberté supplémentaire.

La première étape de la construction de l'arbre d'évaluation consiste à discrétiser l'équation de la diffusion de X. Pour simplifier les calculs, on commence par construire l'arbre de X^*, qui suit le même processus de X, à ceci près que $\theta(t) = 0$ et que la valeur initiale est nulle.

Ainsi, la dynamique de X^* est donnée par :

$$dX^* = -\alpha X^* dt + \sigma dW_t$$

On a alors, en posant la différence

$$\beta(t) = X(t) - X^*(t)$$

Par différenciation de cette expression, on obtient une équation différentielle du premier ordre. La solution est donnée, avec la condition initiale $X^*(0) = 0$, par :

$$\beta(t) = e^{-\alpha t}[X(0) + \int_0^t \theta(u)e^{\alpha u}du]$$

En traçant l'arbre trinomial recombinant de X^*, on peut donc remonter à la valeur de X, et donc à la diffusion du sous-jacent S. Pour calculer β à tous les instants de la forme $i\Delta t$, on décompose $\theta(t)$ en deux termes :

$$\theta(t) = a(t) + b(t)$$

avec :

$$a(t) = \frac{\partial ln(F(0,t))}{\partial t} + \alpha ln(F(0,t))$$

et

$$b(t) = -\frac{\sigma^2}{2}e^{-2\alpha t} - \frac{\sigma^2}{4}(1 - e^{-2\alpha t})$$

$\int_0^t b(u)e^{\alpha u}du$ s'obtient par intégration numérique par quadrature de Gauss-Lobatto.
$\int_0^t a(u)e^{\alpha u}du$ s'approxime avec une somme de Rieman [2] :

[2] L'expression peut s'obtenir également par intégration de la fonction interpolée d'après l'annexe (D)

$$\int_0^t a(u)e^{\alpha u}du \approx \sum_{i=0}^{n} a(\frac{it}{n})e^{\alpha\frac{it}{n}}\frac{t}{n} \text{ avec } \frac{t}{n} = \Delta t$$

Nous traitons du cas relatif au schéma 6.4, les deux calculs pour les deux autres types de branchement s'effectuent de manière similaire. La dynamique de X^* nous permet de procéder à une évaluation discrétisée. La variable $X^*(t+\Delta t) - X^*(t)$ suit une loi normale aux moments suivants :

$$\mathbb{E}[X^*(t+\Delta t) - X^*(t)] = -\alpha X^*(t)\Delta t$$
$$\mathbb{V}[X^*(t+\Delta t) - X^*(t)] = \sigma^2\Delta t$$

On note $\Delta X = \sigma\sqrt{3\Delta t}$, ce qui est un bon choix pour assurer la stabilité du schéma de discrétisation en différences finies.

Notons (i, j) un nœud où $t = i\Delta t$ et $X^* = j\Delta X$ (i est un entier naturel et j un entier relatif). On choisit un branchement de nœuds avec une valeur inférieure (probabilité p_d), une valeur intermédiaire (probabilité p_m) et une valeur supérieure (probabilité p_u). Les probabilités risque-neutre à un nœud donné doivent vérifier :

$$\begin{cases} p_u\Delta X - p_d\Delta X = -\alpha\Delta X\Delta Xt \\ p_u\Delta X^2 + p_d\Delta X^2 = \sigma^2\Delta t + \alpha^2 j^2\Delta X^2\Delta t^2 \\ p_u + p_m + p_d = 1 \end{cases} \tag{6.1}$$

La solution du système s'écrit donc pour un branchement de type figure (6.4) :

$$\begin{cases} p_u = \frac{1}{6} + \frac{\alpha^2 j^2\Delta t^2 - \alpha j\Delta t}{2} \\ p_m = \frac{2}{3} - \alpha^2 j^2\Delta t^2 \\ p_u = \frac{1}{6} + \frac{\alpha^2 j^2\Delta t^2 + \alpha j\Delta t}{2} \end{cases} \tag{6.2}$$

Ces probabilités nous donnent accès à un arbre recombinant dès que l'on spécifie un pas de temps et un temps d'évaluation. L'expression de β nous permet de revenir à l'arbre de X, puis à l'arbre de S en prenant l'exponentielle des valeurs obtenues.

Pour un branchement de type figure(6.5), on a :

$$\begin{cases} p_u = \frac{7}{6} + \frac{\alpha^2 j^2\Delta t^2 - 3\alpha j\Delta t}{2} \\ p_m = -\frac{1}{3} - \alpha^2 j^2\Delta t^2 + 2\alpha j\Delta t \\ p_u = \frac{1}{6} + \frac{\alpha^2 j^2\Delta t^2 - \alpha j\Delta t}{2} \end{cases} \tag{6.3}$$

Pour un branchement de type figure(6.6), on a :

$$\begin{cases} p_u = \frac{1}{6} + \frac{\alpha^2 j^2\Delta t^2 + \alpha j\Delta t}{2} \\ p_m = -\frac{1}{3} - \alpha^2 j^2\Delta t^2 - 2\alpha j\Delta t \\ p_u = \frac{7}{6} + \frac{\alpha^2 j^2\Delta t^2 + 3\alpha j\Delta t}{2} \end{cases} \tag{6.4}$$

Le choix du type de branchement à un nœud donné doit laisser les probabilités positives sur les trois branches. La mise en œuvre informatique avec un Δt égal à $\frac{1}{252}$ montre que le branchement de la figure (6.4) convient en tout point de l'arbre. Lorsque j est suffisamment grand (Hull et White montrent que j_{max} est le plus petit entier supérieur à $\frac{0{,}184}{\alpha\Delta t}$), il faut passer de la figure (6.4) à la figure (6.5). De même lorsque j est négatif et suffisamment petit en valeur absolue, il faut passer de la figure (6.4) à la figure (6.6).

Pricing de l'option bermudéenne La procédure consiste à calculer la valeur sur chaque nœud de l'arbre par induction arrière. En partant de l'échéance et en revenant vers la date initiale, on teste au nœud de l'exercice s'il est optimal d'exercer prématurément l'option. La valeur de l'option sur les nœuds terminaux à date d'échéance sont les payoffs de l'option à échéance, c'est-à-dire $max[0, S_T - K]$. Sur les nœuds précédents, la valeur de l'option dépend du nœud considéré :

- Si l'on est à une date d'exercice possible (dans notre exemple, il s'agit du début de chaque mois de la deuxième année), alors la valeur de l'option est donnée par le maximum des deux quantités suivantes :
  1. La valeur donnée par l'équation de l'espérance des flux actualisés au taux sans risque avec les probabilités obtenues par schéma de discrétisation sur chaque nœud.
  2. Le payoff procuré par l'exercice anticipé de l'option.
- Si l'on est à une autre date, la valeur de l'option est donnée par l'espérance actualisée au taux sans risque calculée avec les probabilités du nœud.

Le schéma ci-dessous résume le principe de pricing par arbre trinomial (en rouge sont les instants où l'on exerce) :

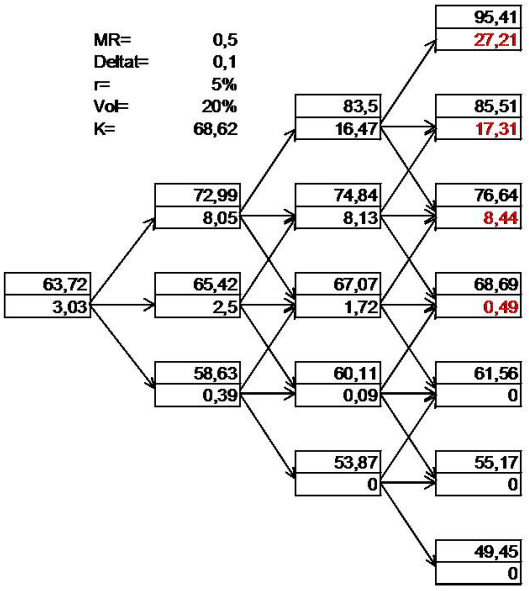

FIG. 6.7 – Arbre trinomial pour 4 périodes

Volatilité	15%	25%	35%
Bermudéenne	**9,86**	**12,45**	**15,29**
Européenne	8,61	10,32	12,28
Américaine	10,05	12,94	16,10

Moneyness=100%

TAB. 6.4 – Evolution de la prime en fonction de la volatilité

Dans nos différents tests, on comparera la valeur de l'option bermudéenne considérée à une option européenne où l'on peut uniquement exercer à la date d'échéance de l'option et à une option américaine discrétisée où l'on peut exercer sur chaque nœud. Le prix de l'option bermudéenne doit se situer entre ces deux options. Comme pour la valorisation de l'option asiatique, nous allons tout d'abord étudier la variation du prix de l'option en fonction des divers paramètres.

Toutes choses égales par ailleurs, nous remarquons que le prix du *call* bermudéen est :
- fonction décroissante du *strike*
- fonction croissante du coefficient de retour à la moyenne (à la différence du call asiatique)
- fonction croissante de la volatilité d'après 6.4

Retour à la moyenne \ **Moneyness**	75%	95%	110%
0,0001	21,17	12,04	7,23
0,1	21,71	12,27	7,19
0,15	22,02	12,4	7,19
0,25	22,62	12,68	7,2
0,5	23,93	13,36	7,28

Modèle 1-facteur (4.1) utilisé

TAB. 6.5 – Evolution de la prime en fonction du *strike* et du coefficient de retour à la moyenne

Ces différents résultats confirment que le prix d'une option bermudéenne se situe entre une option américaine et une option européenne, ce qui traduit bien le fait que l'on paie plus pour obtenir plus de possibilités d'exercer, et donc de maximiser son payoff. De plus, les valeurs du prix du *call* bermudéen son très sensibles aux variations de la volatilité et du coefficient de retour à la moyenne, ce qui confirme l'importance de la calibration et de la couverture pour le vendeur du produit. Le pricing par arbre trinomial est une approximation de plus en plus précise de la réalité lorsque Δt tend vers 0, qui devient donc un modèle continu. L'intérêt de cette méthode repose sur la rapidité du calcul (quelques secondes avec Matlab) et la relative facilité d'implémentation (voir l'annexe (F.5)).

Conclusion

Ce mémoire d'actuariat permet de dresser une typologie des modèles liés aux valeurs énergétiques en offrant une analyse des avantages et inconvénients des différentes méthodes employées. Nous avons adopté une approche à la fois théorique et pratique afin de résoudre la problématique énoncée.

Les modèles spot étudiés sont inspirés de Schwartz-Smith [32] dont le principe est de décomposer le logarithme du prix en deux composantes de court et de long terme. Ces modèles reproduisent les propriétés essentielles des prix des matières premières et permettent, si on peut les estimer, l'interprétation des deux variables d'état cachées. Les filtres de Kalman, avant d'être une méthode possible de calibration, permet d'estimer ces variables à partir d'un jeu de paramètres initiaux. Nous avons proposé deux extensions plus complexes de ces modèles, la première en considérant une composante de saisonnalité et la seconde en y ajoutant une volatilité stochastique.

Les modèles de courbe spécifient directement la famille des processus stochastiques des contrats à terme. Les études préliminaires des données montrent qu'un seul facteur peut expliquer plus de 95 % des mouvements de la courbe des contrats à terme dans le cas du Brent, ce qui justifie l'utilisation de tels modèles. Les extensions 1 et 2 permettent de prendre en compte la structure de la nappe de volatilité, d'une part en spécifiant une volatilité déterministe mais constante par morceaux en fonction de la maturité du contrat, et d'autre part en reproduisant *l'upside skew* au voisinage d'un *strike* donné. Les extensions proposées répondent particulièrement aux contraintes de rapidité et facilité de mise en œuvre pour une entreprise qui souhaite valoriser un produit, empêchant ainsi toute possibilité d'arbitrage sur *le smile* de volatilité.

Une large partie de cette étude consiste en la mise en œuvre de techniques de calibration. Les méthodes implicites par étude de courbes constituent la démarche la plus heuristique car elles sont fondées sur les propriétés particulières des modèles. L'étude des courbes de contrats à terme et de volatilité qui permet d'obtenir tous les paramètres dans le modèle Schwartz-Smith en est un exemple. La méthode par volatilité implicite est répandue dans les salles de marché et permet de minimiser un critère simple. Il s'agit d'adapter les paramètres du modèles aux valeurs de la volatilité telle qu'elle est perçue par les opérateurs de marché. L'étude par filtres de Kalman est une méthode puissante d'estimation de paramètres d'état d'un modèle, qu'il soit financier ou non. Elle permet, à chaque nouvelle mesure de prix d'un contrat future, de prédire la valeur du nouvel estimateur du vecteur des paramètres d'état, qui permet l'obtention d'un modèle de prédiction de loi normale, auquel on peut appliquer la méthode du maximum de vraisemblance. Sa mise en œuvre est plus délicate et nécessiterait une recherche plus approfondie pour obtenir une meilleure stabilité des paramètres étudiés.

Cette étude a permis de dresser un panorama aussi complet que possible des modèles liés aux valeurs énergétiques. La tableau (5.4) rend compte du travail de recherche et de mise en œuvre des modèles au cours des huit mois qui ont précédé le rendu de ce mémoire. L'aspect pratique de l'implémentation informatique, de la résolution des problèmes numériques et de l'optimisation des temps de calcul a constitué une part importante de ce projet. La modélisation des valeurs énergétiques et la valorisation des produits dérivés constituent un domaine actif de la recherche tant les marchés se développent et les produits se banalisent.

Il existe des pistes d'exploration pour enrichir et approfondir cette étude.

- Il s'agirait tout d'abord de calibrer les modèles spot avec saisonnalité (3.2) et volatilité stochastique (3.3) inspirée du modèle de Heston [18]. Un travail similaire serait à effectuer avec les modèles de courbe à deux facteurs (4.4).
- Il faudrait étudier les stratégies de couverture autofinançantes qui permet à un agent de se couvrir lorsqu'il élabore et valorise un produit dérivé pour un investisseur. Il serait particulièrement utile de s'intéresser à la couverture d'options plus complexes que nous avons valorisées comme des asiatiques ou des barrières.
- Enfin, il faudrait chercher et élaborer des modèles plus complexes répondant plus fidèlement aux propriétés d'autres matières premières. Des pics et des sauts peuvent être modélisés dans des modèles facilement implémentables pour l'électricité, mais il faudrait élargir les champs de recherche à l'or ou à d'autres métaux.

Ces études doivent être menées pour anticiper les profonds changements qui vont s'opérer sur le marché. La libéralisation du secteur de l'énergie en Europe se met en place malgré la réticence de certains pays qui souhaitent conserver ce secteur stratégique au sein du secteur public afin notamment de garantir le respect de la notion de service public. Tous les prix répondront désormais à une loi de l'offre et de la demande à l'échelle macroéconomique avec des caractéristiques spécifiques que l'on a soulignées. Les effets attendus sont multiples et visent à faire baisser le prix de l'énergie en Europe par l'accroissement de la compétitivité des entreprises concernées grâce au libre fonctionnement du marché.

Au delà de l'aspect financier, des gains spéculatifs exceptionnels engendrés par les récentes hausses du pétrole, nul ne doit oublier que l'aspect énergétique ne se joue pas seulement sur les places financières. Il se réalise aussi dans les laboratoires de physique et de chimie afin de trouver de nouvelles formes d'énergies renouvelables et respectueuses de la planète.

Bibliographie

[1] Ben Bader M., *Modèles de prix à terme et contrats sur bruts pétroliers,* Université du Québec, Montréal, 2003.

[2] Benninga S. & Wienner Z., *Binomial Term Structure Models,* Tel-Aviv University, Mathematica in education and research, 1998.

[3] Berger V., *Introduction à la valorisation des produits financiers,* Université d'Evry Val d'Essonne, 2005.

[4] Bjork T. & Landén C., *On the term structure of futures and forward prices,* document de travail, 2000.

[5] Black F., *The pricing of Commodity Contracts,* Journal of Financial Economics, 1976.

[6] Bühler W. & Korn O. & Schöbel R., *Pricing and hedging of oil futures, a unifying approach* , OCFAI University Press, 2006.

[7] Cont R., *Statisticals properties of financial time series*, notes de cours, 1999.

[8] Crosby J., *A multi-factor jump-diffusion model for commodities,* Document de travail, 2006.

[9] Deng S., *Stochastic models of energy commodity prices and their applications :mean-reversion with jumps and spikes,* document de travail, 1998.

[10] Dupire B., *Pricing with a smile,* Risk 7(1),18- 20, 1994.

[11] Geman H., *Commodities and commodity derivatives*,Wiley finance, 2005.

[12] Genest S. & Huth., *Valorisation des options swing par quantification optimale*, document de travail, 2008.

[13] Gibson R. & Schwartz E., *Stochastic Convenience yield and the pricing of oil contingent claims,* Journal of finance, 1990.

[14] Grégoir S., *Processus et estimation*, notes de cours, 2006.

[15] Hagan P. & Kumar D. & Lesniewski A.& Woodward D., *Managing smile risk,* Wilmott magazine, 2004.

[16] Harvey A., *Forecasting structural time series models and the Kalman filter ,* Cambridge University Press, 1990.

[17] Heath D. & Jarrow R. & A.Morton , *Bond pricing ant the term structure of interest rates : a new methodology for contingent claims valuation,* Econometrica,vol.60, no.1., 1992.

[18] Heston S., *A closed form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options* Review of financial studies, 1993.

[19] Hilliard J.E & Reis J., *Valuation of commodity futures prices and options under stochastic convenience yields, interest rates, and jump diffusions in the spot* Journal of financial and quantitative analysis, 1998.

[20] Hull J., *Options, futures, and other derivatives*, 2003.

[21] Jaillet P., *Valuation of Commodity-based swing options,* document de travail, 2001.

[22] Jamieson Bolder D., *Affine Term-Structure Models : Theory and Implementation,* document de travail, 2001.

[23] Ladiray D., *Analyse exploratoire des données, Analyse des séries temporelles*, document de macro SAS, 2002.

[24] Lapeyre B. & Temam E. *Competitive Monte Carlo methods for the pricing of Asian options*, The Journal of Computational Finance, 5(1), 2001.

[25] Lebart L. & Fénelon J.P, *Statistique et informatique appliquées*, Dunod, 1975.

[26] Martellini L. & Priaulet P., *Produits de taux d'intérêt*, Economica, 2004.

[27] Martellini L. & Priaulet P., *Fixed-income securities*, Wiley finance, 2003.

[28] Mrad M. & Priaulet P., *Modèles de la courbe des taux*, Univesrité d'Evry, polycopié de cours.

[29] Percebois J., *Les perspectives d'approvisionnement de l'Europe en gaz naturel*, Université de Montréal, 2006.

[30] Racicot F.-E. & Théorêt R., *Les modèles HJM et LMM revisités et leurs versions étendues*, Université de Montréal, 2007.

[31] Rouveyrollis N., *Vers la modélisation du prix spot de l'électricité ,* Note bibliographique, CERNA, 2004.

[32] Schwartz E. & Smith J.E, *Short-term variations and long-term dynamics in commodity prices,* Management Science, vol.46, no.7., 2000.

[33] Schwartz E. & Miltersen K.R., *Pricing of options on commodity prices with stochastic term structure of convenience yield and interest rates,* Journal of Financial and quantitative analysis, 1998.

[34] Shreve S., *Stochastic calculus for finance. Continuous-time models* Springer, 2004.

[35] Xu Z., *Stochastic Model for Gas Prices ,* Department of Mathematics and statistics, 2004.

Annexe A

Rappels de statistique

A.1 Principe d'un test

Le principe des tests d'hypothèse est de poser une hypothèse de travail, notée H_0 et de prédire les conséquences de cette hypothèse pour l'échantillon que l'on souhaite tester. On compare ces prédictions avec les observations et l'on conclut en acceptant ou en rejetant l'hypothèse H_0 à partir de règles de décisions objectives. Un test statistique implique que l'on prenne en compte les observations, l'hypothèse testée H_0 et une hypothèse alternative H_1. Le problème consiste, à partir de ces éléments, à décider à l'avance quels sont les résultats possibles x de l'observation qui conduiront à rejeter l'hypothèse H_0. Un test est une règle de décision basée sur les observations. A un test est associé une région critique, en général notée W, définie comme l'ensemble des réalisations des observations conduisant à prendre la décision "H_1 est vraie".

Dans la pratique, les tests statistiques conduisent à deux types d'erreurs :

- Le rejet à tort de l'hypothèse H_0 : erreur de première espèce.
- L'acceptation à tort de l'hypothèse H_0 : erreur de seconde espèce.

Si f et g sont les densités de probabilité du point observé x sous H_0 et H_1 respectivement et si W (région critique) est l'ensemble des points conduisant à rejeter H_0, alors la probabilité de première espèce est égale à

$$\alpha = \int_W f d\mu$$

Et la probabilité de l'erreur de seconde espèce est égale à :

$$\beta = 1 - \int_W g d\mu$$

Neyman propose comme principe de choix d'un test (ou, ce qui est équivalent, principe de choix d'une région critique) : fixer α à une valeur faible choisie a priori (seuil du test) et rendre β minimum. En pratique, une région critique s'écrit souvent :

$$W = \{x : \xi > k\}$$

où ξ (fonction implicitement de x) est une statistique de test, qui prend des valeurs élevées lorsque H_0 est peu vraisemblable.

A.2 Tests de normalité

A.2.1 Test de Kolmogorov-Smirnov

En statistique, le test de Kolmogorov-Smirnov est un test d'hypothèse utilisé pour déterminer si un échantillon suit bien une loi donnée connue par sa fonction de répartition continue, ou bien si deux échantillons suivent la même loi.

Ce test repose sur les propriétés des fonctions de répartition empirique : si $(x_1, ..., x_n)$ est un échantillon de n variables aléatoires indépendantes à valeurs réelles, alors la fonction de répartition empirique de cet échantillon est définie par :

$$n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i \leq x} \text{ avec } \delta_{x_i \leq x} = \begin{cases} 1 \text{ si } \mathrm{x_i} \leq \mathrm{x} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

La fonction de répartition empirique est un processus qui prend ses valeurs dans l'espace des fonctions croissantes comprises entre 0 et 1. Grâce à ses propriétés, on a la convergence suivante :

$$\mathbb{P}\left[sup_x \left|F_n(x) - F(x)\right| > \frac{c}{\sqrt{n}}\right] \overset{n\to\infty}{\to} \alpha(c) = 2\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}exp(-2r^2c^2)$$

pour toute constante $c > 0$. Le terme $\alpha(c)$ vaut 0.05 pour $c = 1.36$. Remarquons que la limite à droite ne dépend pas de F. Il est ainsi facile de proposer un test d'hypothèse pour décider si un échantillon provient bien d'une loi donnée, ou si deux échantillons ont la même loi, lorsque leur fonction de répartition sont continues.

A.2.2 Test de Cramer- Von Mises

Le test de Cramer von Mises introduit l'écart quadratique suivant :

$$W^2 = \int_{\infty}^{\infty}(F(x) - F_n(x))^2 dF(x)$$

Si $(x_1, ..., x_n)$ est un échantillon de n variables aléatoires indépendantes à valeurs réelles, il est possible de montrer que :

$$T = nW^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2i-1}{2n} - F(x_i)\right]^2$$

Si la valeur de la statistique est supérieur à celle de la table alors nous rejetons l'hypothèse selon laquelle l'échantillon est tiré selon la distribution $F(.)$.

A.2.3 Test d'Anderson-Darling

Le test de Anderson-Darling est une troisième alternative pour tester l'adéquation d'un échantillon à une distribution spécifique. Cette alternative donne plus de poids aux queues de distribution que pour le test de Kolmogorov-Smirnov.

Nous calculons la statistique $A^2 = -N - S$ où $S = \sum_{i=1}^{N}\frac{2i-1}{N}\left[lnF(Y_i) + ln\left(1 - F(Y_{N+1-i})\right)\right]$.

F est la fonction de répartition de la distribution spécifiée et les Y_i sont ordonnés. Afin de conclure au rejet ou non de l'hypothèse nulle nous comparons la valeur de la statistique aux tables disponibles.

A.3 Interprétation de la p-value

Il est alors possible de contrôler α, l'erreur de première espèce :

- Si p-value < α : On rejette H_0.
- Si p-value > α : On accepte H_0.

La p-value est le niveau significatif le plus bas où l'hypothèse nulle peut-être rejetée ainsi donc si p-value > α (niveau du test, souvent égale à 5 %), alors on ne rejette pas l'hypothèse nulle.

Annexe B

Rappels d'analyse des séries temporelles

Tests de racines unité (tests de Dickey-Fuller et Dickey-Fuller augmenté)

La pratique des tests de racine unitaire repose sur la modélisation d'une série par un processus $AR(p)$:

$$y_t = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i} + \epsilon_t$$

Le cas le plus simple est celui d'une marche aléatoire :

$$y_t = \rho y_{t-1} + \epsilon_t$$

Quand $\rho < 1$, le processus est stationnaire, explosif si $\rho > 1$ et intégré dans le cas $\rho = \pm 1$. Il est essentiel de déterminer a priori si les séries temporelles présentent une racine unitaire. Pour ce faire, divers tests existent. Le test de Dickey-Fuller a pour hypothèses $H_0 : = 1$ et $H_1 : < 1$. Sous l'hypothèse H_0, on peut réécrire $\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = \epsilon_t$, et donc en régressant Δy_t sur y_{t-1} dans $\Delta y_t = d_t + \alpha y_{t-1} + \epsilon_t$, on doit trouver un estimateur $\hat{\alpha}$ proche de zéro. d_t contient les termes déterministes :

- soit zéro
- soit une constante
- soit une tendance linéaire

Soit :

$$d_t = \begin{cases} 0 \\ a \\ a + bt \end{cases}$$

Malheureusement, le test de Student associé ne suit pas une distribution habituelle. Il faut donc se reporter aux tables de Fuller, mais les valeurs dépendent des composantes de d_t.

Le test de Dickey-Fuller : c'est le cas le plus simple de marche aléatoire avec ou sans tendance déterministe.

Le test de Dickey-Fuller augmenté (souvent noté ADF) : c'est le test utilisé dans la macro SAS. Il permet de prendre en compte l'autocorrélation possible de la série différenciée via une correction utilisant les valeurs retardées, sur la base du test :

$$\Delta y_t = d_t + \alpha y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i \Delta y_{t-i} + \epsilon_t$$

Le test de Phillips-Perron : il s'agit d'une procédure de correction non-paramétrique (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de modélisation de l'autocorrélation). Ce test est plus robuste vis-à-vis des erreurs de spécification, en revanche il est moins précis que le Dickey-Fuller augmenté quand le modèle correspond à la réalité.

Annexe C

Rappels de calcul stochastique

C.1 Processus stochastique

Un processus stochastique $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ est une suite de variables aléatoires. Nous interprétons t comme une date et appelons X_t l'état du processus au temps t. Si $\mathbb{T}$ est défini par un ensemble dénombrable, le processus stochastique sera à temps discret sinon il sera à temps continu. Nous définissons la trajectoire comme étant la réalisation de X.

C.2 Processus de Wiener

L'un des processus stochastiques les plus important est le processus de Wiener (couramment appelé mouvement brownien). Celui-ci est défini comme un processus stochastique en temps continu vérifiant les propriétés suivantes :

1. $W_0 = 0$
2. $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ pour tout $t \geq 0$
3. Tout les incréments non recouvrants sont indépendants. $\forall 0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$, $W_{t_2} - W_{t_1}$ est indépendant de $W_{t_4} - W_{t_3}$
4. La trajectoire de W_t est une fonction continue de t.

C.3 Intégrale d'Itô

Supposons que la variable aléatoire $\sigma(X_t, t)$ est non-anticipative, dans le sens où elle est indépendante du futur, et non explosive i.e. $\mathbb{E}\left[\int_0^T \sigma(X_t, t)^2 dt\right] < \infty$, alors l'intégrale d'Itô,

$$\int_0^T \sigma(X_t, t) dW_t,$$

est définie par

$$lim_{\delta\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sigma(X_{\tau_k,\tau_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

où $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T, \tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$ et $\delta = max_k \{t_{k+1} - t_k\}$. Il y a convergence en probabilité.

C.4 Processus d'Itô et équation différentielle stochastique

Un processus d'Itô X_t est régi par une équation différentielle stochastique (EDS) de la forme suivante :

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t$$

L'intégration de cette équation donne :

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^{t} a(X_s, s)ds + \int_{t_0}^{t} b(X_s, s)dW_s$$

où W_t est un processus de Wiener et $\int_{t_0}^{t} b(X_s, s)dW_s$ est une intégrale d'Itô. Le terme $a(X_t, t)$ est un terme de tendance (on emploie souvent le terme anglais drift) et $b(X_t, t)$ un terme de diffusion ou de volatilité.

C.5 Lemme d'Itô

Le lemme d'Itô est un outil fondamental pour l'étude des processus stochastiques. Il faut comprendre la formule d'Itô comme une nouvelle formule de Taylor adaptée aux processus stochastiques. Soit $V(X, t)$ une fonction suffisamment régulière ($C^{2,b}$), alors :

$$dV_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + a(X_t, t)\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{1}{2}b^2(X_t, t)\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}\right)dt + b(X_t, t)\frac{\partial V}{\partial X}dW_t$$

C.6 Quelques EDS spécifiques

Passons en revue les dynamiques couramment utilisées dans la modélisation stochastique.

C.6.1 Processus de Wiener généralisé

L' EDS la plus simple correspond au cas où les termes de tendance et de diffusion sont indépendants de l'information reçue au cours du temps :

$$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

où W_t est un mouvement brownien, μ et σ deux constantes. Ce modèle n'est pas utilisé en pratique pour modéliser directement des actifs car elle peut générer des valeurs négatives de S_t.

C.6.2 Le mouvement brownien géométrique

Cette dynamique a d'abord été proposée par Samuelson puis exploitée par Black, Scholes et Merton. Elle est la plus répandue pour la modélisation d'actifs financiers. Sa dynamique est la suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

où W_t est un mouvement brownien, μ et σ deux constantes.

En définissant $X_t = ln(S_t)$, le lemme d'Itô donne :

$$dX_t = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dW_t$$

Ceci implique que $X_t \sim \mathcal{N}\left(X_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma^2 t\right)$.

S_t suit une loi log normale capturant la positivité d'un actif financier.

C.6.3 Le processus racine carré

Un modèle proche du précédent est la dynamique racine carré :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma\sqrt{S_t} dW_t$$

où W_t est un mouvement brownien, μ et σ deux constantes. Dans cette dynamique, la variance croît proportionnellement à S_t et non $\sqrt{S_t}$.

C.6.4 Les processus de retour à la moyenne

Dans un marché de matières premières, les prix fluctuent autour de la tendance. Les modèles présentés dans ce paragraphe capturent cet effet de retour à la moyenne. Le processus d'Itô décrivant cette dynamique s'écrit sous la forme :

$$dS_t = \alpha^*(L^* - S_t)dt + \sigma^* dW_t$$

α^* mesure la vitesse de retour à la moyenne vers le niveau de long terme L^*. σ^* est le terme de diffusion qui gouverne l'amplitude du bruit. Ces trois termes peuvent être constants, dépendants du temps ou aléatoires, ce qui offre une grande variété de modèles. Ci-dessous, on donne les dynamiques les plus utilisées :

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

$$dS_t = \alpha(L - S_t)dt + \sigma dW_t$$

Le processus de Cox-Ingersoll-Ross

$$dS_t = \alpha(L - S_t)dt + \sigma\sqrt{S_t} dW_t$$

Le processus de Dixit-Pindyck

$$dS_t = \alpha(L - S_t)S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

C.7 Le modèle de Black-Scholes

On rappelle les hypothèses du modèle de Black-Scholes :

- Les marchés sont efficients.
- Il n'y a pas de coûts de transaction.
- Il n'y a pas de restrictions sur le volume de transactions.
- Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage.
- Les rendements du sous-jacent sont gaussiens, stationnaires et indépendants :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

- Le placement à la banque est sans risque et le taux d'intérêt r est constant.

L'équation différentielle stochastique précédente admet une unique solution donnée par :

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

C.7.1 Options sur action

Les formules de Black et Scholes permettent de calculer, à une date t, la valeur d'un *call* européen ou d'un *put* européen sur une action qui ne verse pas de dividendes. Le prix d'un *call* de maturité T et de *strike* K est :

$$C_t = S_t \mathcal{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2)$$

Avec $\mathcal{N}$ la fonction de repartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, $d1$ et $d2$ donnés par :

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

La formule de parité *call put* s'écrit :

$$C_t - P_t = S_t - K e^{-r(T-t)}$$

Et donc le prix du *put* est donné par :

$$P_t = K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(-d_2) - S_t \mathcal{N}(-d_1)$$

C.7.2 Options sur futures

Les options européennes sur futures peuvent être évaluées en étendant les résultats précédents, comme l'a montré Fisher Black dans [5]. L'hypothèse sous-jacente est que les prix des futures suivent des lois log-normales, hypothèse déjà posée pour le prix des actions. Sous la probabilité risque-neutre, si la dynamique du prix futures F peut s'écrire :

$$dF_t = \sigma F_t dW_t$$

alors on obtient :

$$C_t = e^{-r(T-t)}(F_t \mathcal{N}(d_1) - K\mathcal{N}(d_2))$$

et

$$P_t = e^{-r(T-t)}(K\mathcal{N}(-d_2) - F_t \mathcal{N}(-d_1))$$

où

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{F_t}{K}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Lorsque le coût de détention et le rendement d'opportunité ne varient qu'en fonction du temps, on peut montrer que la volatilité du prix futures est la même que celle de l'actif sous-jacent. On notera que le modèle de Black n'impose pas que l'échéance de l'option soit la même que celle du future.

Annexe D

Problème d'interpolation en dimension 1

On appelle spline cubique de Hermite, une spline de degré 3, nommée ainsi en hommage à Charles Hermite, et dont chaque polynôme $P_i(x)$ appartient à l'espace vectoriel suivant :

$$P_i \in Vect\{h_{00}, h_{10}, h_{01}, h_{11}\}$$

avec

$$\begin{cases} h_{00}(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ h_{10}(t) = t^3 - 2t^2 + t \\ h_{01}(t) = -2t^3 + 3t^2 \\ h_{11}(t) = t^3 - t^2 \end{cases} \tag{D.1}$$

afin de construire le polynôme suivant :

$$\mathbf{p}(t) = h_{00}(t)\mathbf{p}_0 + h_{10}(t)\mathbf{m}_0 + h_{01}(t)\mathbf{p}_1 + h_{11}(t)\mathbf{m}_1$$

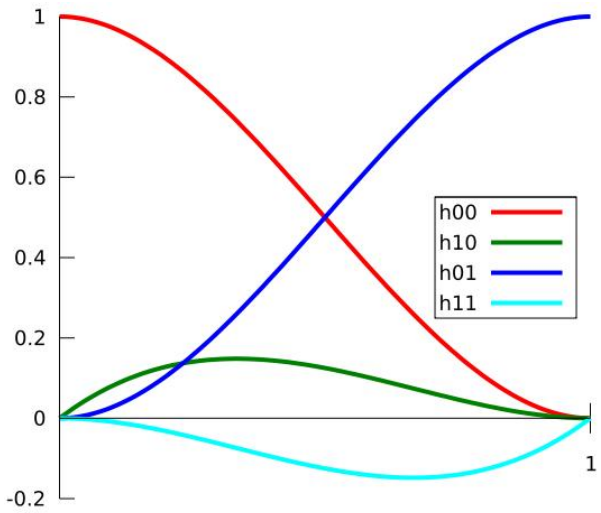

FIG. D.1 – Les quatre fonctions formant la base d'Hermite

Sous cette écriture, il est possible de montrer que le polynôme $\mathbf{p}$ vérifie :

$$\begin{cases} p(0) = \mathbf{p}_0 \\ p(1) = \mathbf{p}_1 \\ p'(0) = \mathbf{m}_0 \\ p'(1) = \mathbf{m}_1 \end{cases} \tag{D.2}$$

Les splines cubiques de Hermite sont donc une manière commode de construire un polynôme de degré le plus bas possible interpolant une fonction en 2 points avec ses tangentes.

Interpolation sur (x_k, x_{k+1})

Interpoler x sur (x_k, x_{k+1}) devient possible à l'aide de la formule suivante :

$$\mathbf{p}(t) = h_{00}(t)\mathbf{p}_0 + h_{10}(t)h\mathbf{m}_0 + h_{01}(t)\mathbf{p}_1 + h_{11}(t)h\mathbf{m}_1$$

avec $h = x_{k+1} - x_k$ et $t = \frac{x - x_k}{h}$.

Annexe E

Réduction de variance

Le principe de la méthode de réduction de variance consiste à simuler une variable aléatoire de même espérance que la variable initiale mais de variance moindre.

Pour cela, nous calculons la quantité $e^{-rT}A(T) - \delta(S_T - \mathbb{E}[S_T|\mathcal{F}_0])$ avec un certain réel δ déterministe, au lieu de $e^{-rT}A(T)$. D'une part nous remarquons que la complexité de l'algorithme est inchangé ; d'autre part les deux termes ont même espérance. En effet : $\mathbb{E}\left[S_T - \mathbb{E}[S_T|\mathcal{F}_0]\right] = 0$. Par ailleurs la variance de la seconde variable aléatoire est un polynôme du second degré en δ admettant un minimum en $\hat{\delta}$.
Démonstration :
Soit X et Y deux variables aléatoires telles que Y soit d'espérance nulle.
Alors

$$\mathbb{V}[X - \delta Y] = \mathbb{V}(X) + \delta^2\mathbb{V}(Y) - 2\delta\mathbb{C}ov(X, Y)$$

atteint son minimum en

$$\hat{\delta} = \frac{\mathbb{C}ov(X, Y)}{\mathbb{V}(Y)}$$

la variance calculée est donc inférieure à la variance initiale (cas où $\delta = 0$).
Ainsi la moyenne empirique $\overline{e^{-rT}A(T) - \delta(S_T - \mathbb{E}[S_T|\mathcal{F}_0])}$ converge toujours vers V_0 mais avec une erreur absolue moindre puisque proportionnelle à un écart type plus faible.

Nous constatons sur la figure(E.1) que la réduction de variance pour le modèle de Black-Scholes est très efficace car elle permet d'obtenir un gain en précision de l'ordre de 2.

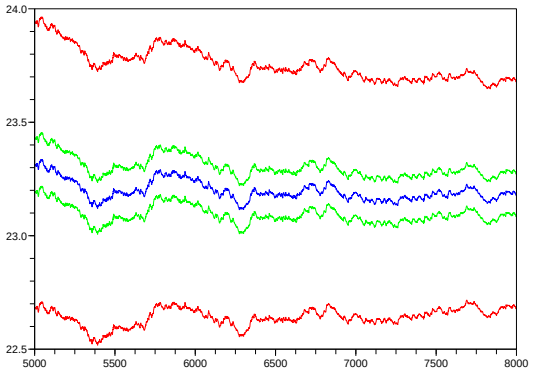

FIG. E.1 – Intervalles de confiance à 95% pour le prix d'un *call* de *moneyness* 90% pour un nombre de simulation appartenant à $[5000; 8000]$

Annexe F

Outils utilisés

F.1 Impression d'écran Bloomberg

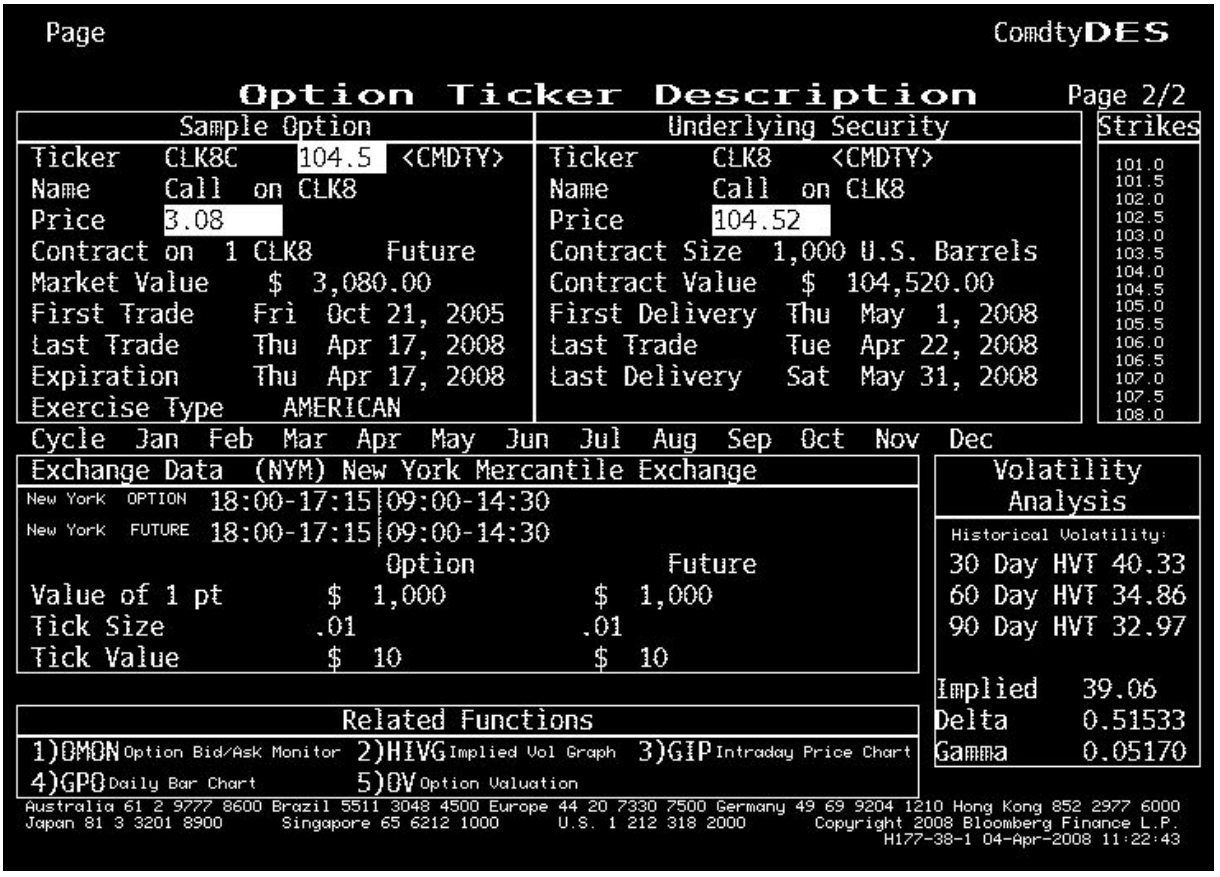

FIG. F.1 – Impression d'écran Bloomberg : option sur contrat future maturant en mai 2008

Ci-dessus voici l'écran d'affichage Bloomberg pour une option sur contrat future de maturité Mai 2008 ayant lui-même comme sous jacent le pétrole Brent.

- La zone Nord-Ouest correspond à la description de l'option. Il s'agit ici d'une option d'achat sur future. On obtient son nom, son ticker et son prix. La date de maturité de cette option est le 17 avril 2008, date à laquelle on entre dans un contrat future avec livraison à terme du sous-jacent. On peut noter que le type d'option considérée est de

type américain, avec une période d'exercice, mais ceci n'altère pas nos calculs puisque nous calibrons sur des valeurs de volatilités, dont les valeurs sont identiques qu'il s'agit d'option américaines ou européennes.

- La zone Nord-Est est la description du sous-jacent, c'est-à-dire du contrat future. Il s'agit d'un baril de pétrole qui vaut, à ce jour de cotation, 104,52 $. Il n'existe pas de date fixe de livraison, mais une période, située entre le 1 mai 2008 et la 31 mai 2008. Le dernier jour de cotation de ce contrat future est le 22 avril 2008.
- La zone inférieure de l'écran donne des informations sur les jours de cotation, les variations historiques de la volatilité, et les lettres grecques Delta et Gamma.

F.2 Priceur modèle de courbe (Excel)

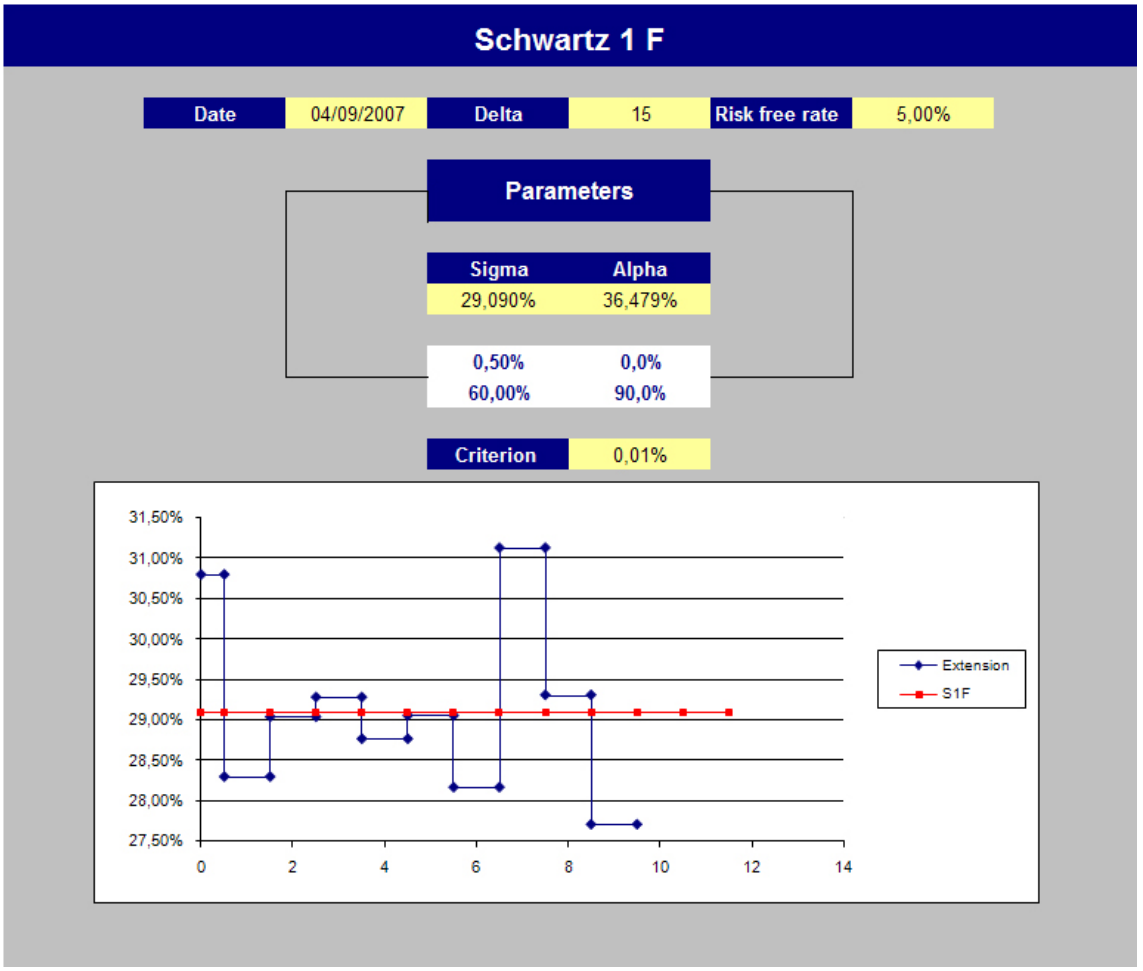

FIG. F.2 – Priceur Excel modèle de courbe 1-facteur et extension

Ce priceur construit grâce à une feuille de calcul Excel et un code Visual Basic permet de pricer une option d'achat sur future d'après les modèles de courbe à un facteur (4.4) et son extension (4.9). Nous n'avons fait apparaître que la feuille principale de sélection des données, qui sont stockées dans d'autres feuilles du même fichier. La cellule date permet de sélectionner selon un menu déroulant la date de cotation selon les données obtenues sur Bloomberg que sont les volatilités de marché d'une telle option. La case Delta permet de donner le nombre de jours entre l'expiration de l'option et la livraison du sous-jacent. Comme

il est expliqué dans l'annexe (F.1), il existe une période de livraison du sous-jacent. Si on note Delta le nombre de jours entre l'expiration de l'option et l'échéance du contrat future, c'est-à-dire la livraison du sous-jacent, alors Delta peut varier de 0 à 30 jours (au jour de cotation près). Nous avons pris une valeur moyenne de 15 jours, mais cette valeur peut être ajustée. Le taux sans risque a été fixé à 5 % mais sa valeur peut-être changée. Les paramètres sont optimisés à l'intérieur d'intervalles fixes, de 0 à 60 % pour Sigma et 0 à 90 % pour Alpha. Le critère correspond à la somme des carrés des différences entre les volatilités de marché données par Bloomberg et les volatilités implicites de modèle. C'est ce critère qui est minimisé à l'aide du solveur Xnumbers.

F.3 Code calibration par filtres de Kalman (Matlab)

```
function Kalman2last()
deltat=1/365; y=[ ];
nobs=size(y,1);

%%%set up model
Z=ones(nobs,2); d=zeros(nobs,1); R=[1 0; 0 1];
R=kron(vecr(R)',ones(nobs,1));
a0=[0.08; 3.22]; P0=0; H=0; Q=0; c=0;
T=0;

%%%     set up optimization
%%%%   kappa sichi  sixi  rho muxi

beta0=[ 0.54   0.41  0.28  0.16  0.21 ];
lb=[  0.1 0.1  0 0.001-2];
ub=[ 1 0.7     0.5   0.5    2 ];
beta0=beta0';
lb=lb'; ub=ub';

options=optimset('Diagnostics','on','Display','iter',...
                 'MaxfunEvals',5000,'MaxIter',80);
[beta,stderr1,vc,logl]=Max_lik(@ml,beta0,'Hessian',[],[],[],[],lb,ub,...
[],options,y,Z,d,T,c,R,a0,P0,H,Q,1);


%%% optimization done with beta: best estimate
beta=beta0; c=ones(nobs,2)*[0 0;0 beta(5)*deltat];
T=[exp(-beta(1)*deltat) 0; 0 1 ]; T=kron(vecr(T)',ones(nobs,1));

H = kron(0,ones(nobs,1)); P0=[
(1-exp(-2*beta(1)*deltat))*beta(2)^2/(2*beta(1))
(1-exp(-beta(1)*deltat))*beta(4)*beta(2)*beta(3)/beta(1) ;
(1-exp(-beta(1)*deltat))*beta(4)*beta(2)*beta(3)/beta(1)
beta(3)^2*deltat ];

Q= kron(vecr(P0)',ones(nobs,1));
```

```
%%% run kalman filter and smoothing with best estimate
[y_cond,v,a,a_cond,P,P_cond,F,logl]=Kalman_filter(y,Z,d,T,c,R,a0,P0,H,Q,1);


%% plots
s=1:nobs; subplot(2,1,1);
%a_cond=a_cond(:,1)+a_cond(:,2);
plot(s,exp(a_cond(:,2)+a_cond(:,1)),s,exp(y)); subplot(2,1,2);
plot(s,exp(y),s,exp(a_cond(:,2)));

disp('Hit a key to continue'); pause; [y_prev,a_prev,P_prev,MSE] =
Kalman_Forecasting(y,Z,d,T,c,R,a0,P0,H,Q,1,floor(size(y,1)/2));

subplot(2,1,1); plot(s,exp(y),s,exp(y_prev))

subplot(2,1,2); plot(s,a,s,a_prev)

%*****************************************************

function logl=ml(beta,y,Z,d,T,c,R,a0,P0,H,Q,xx); chi0=1/2; xi0=1/2;
a0=[chi0; xi0]; deltat=1/365; nobs=size(y,1); H =
kron(0,ones(nobs,1)); c=ones(nobs,2)*[0 0;0 beta(5)*deltat];

 T=[exp(-beta(1)*deltat) 0; 0 1 ];
 T=kron(vecr(T)',ones(nobs,1));


 P0=[ (1-exp(-2*beta(1)*deltat))*beta(2)^2/(2*beta(1))...
  (1-exp(-beta(1)*deltat))*beta(4)*beta(2)*beta(3)/beta(1) ;...
  (1-exp(-beta(1)*deltat))*beta(4)*beta(2)*beta(3)/beta(1)...
    beta(3)^2*deltat ];
 Q= kron(vecr(P0)',ones(nobs,1));
[y_cond, v, a, a_cond, P,...
P_cond,F,logl]=Kalman_filter(y,Z,d,T,c,R,a0,P0,H,Q,xx);
```

F.4 Code pricing option asiatique

```
%%Montecarlo pour modèle de courbe un facteur avec extension deterministe
%%(prendre \sigma contante pour retrouver le modèle de courbe 1 facteurs
%%sans extension)

function[PrixAsia,PrixAsiath]=Asian()
parametres;

%%Pricing d'une option de maturité 2 ans avec une part Asian de 6 mois
%%weekly. Strike K à 95% de la monnaie. Pas de la discretisation daily
```

```
newdate=linspace(0,max(datefut),max(datefut)*252+1);
%date en pourcentage d'année t=0 aujourd'hui
logfut=interp1(datefut,log(futurecurve),newdate,'pchip');
%logfut est le vecteur interpolé de pas deltat
dlogfut=diff(logfut)./diff(newdate);
%dérivé de logfut: vecteur avec une ligne en moins

subplot(2,1,1);
plot(datefut,log(futurecurve),'o',newdate,logfut)
subplot(2,1,2);
plot(newdate(1:max(datefut)*252),dlogfut)


for l=1:floor(min(max(datefut)/deltat,max(datevol)/deltat))
h(l)=logfut(l)+1/MR*dlogfut(l)+MR/2*exp(-2*MR*l*deltat)...
    *quadl(@int1,0,l*deltat);
end

S(1)=S0;
for j=1:Nsimul
%Simulation de la trajectoire sur une période de deux ans
%par un schema de discretisation de Euler
    for t=1:N
    S(t+1)=S(t)+MR*(h(t)-log(S(t)))*S(t)*deltat+cpm(t*deltat,sigma,datevol).
    *S(t)*sqrt(deltat)*normrnd(0,1);
    end

%%Valeur du payoff de l'option asiatique
As=S(375);

for k=1:26
As=As+S(375+k*5);
end

Asia(j)=max(0,1/26*As-K);
end

%Prix de l'option Asiatique maturité 2 ans
PrixAsia=exp(-r*2)*mean(Asia);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function[fct]=cpm(t,constantes, dates)
n=max(size(constantes));
dates=[dates;dates(n)*10];

if t<=dates(1)
    fct=constantes(1);
```

```
end

for i=1:n-1
    if dates(i)<t & t<=dates(i+1)
        fct=constantes(i+1);
    end
end
```

F.5 Code pricing option bermudéenne

```
function[]=Bermudean()
clear all
parametres;

%inputs

newdate=linspace(0,max(datefut),max(datefut)*252+1);
logfut=interp1(datefut,log(futurecurve),newdate,'pchip');
dlogfut=diff(logfut)./diff(newdate);                        %

%création des matrices S
%et des matrices de de probabilités u (montée) m (milieu) et d(descente).

S=zeros(2*N-1,N);
u=zeros(2*N-1,N);
m=zeros(2*N-1,N);
d=zeros(2*N-1,N);
for i=1:N
for j=floor((2*N-1)/2-i+1)+1:floor((2*N-1)/2+i-1)+1
S(j,i)=(-j+floor((2*N-1)/2)+1)*vol*sqrt(3*deltat);

if (-j+floor((2*N-1)/2)+1)<0.184/(MR*deltat)+1 & ...
   (-j+floor((2*N-1)/2)+1)>-0.184/(MR*deltat)-1

u(j,i)=1/6+(MR^2*((-j+floor((2*N-1)/2)+1))^2*deltat^2...
           -MR*((-j+floor((2*N-1)/2)+1))*deltat)/2;
m(j,i)=2/3-MR^2*((-j+floor((2*N-1)/2)+1))^2*deltat^2;
d(j,i)=1/6+(MR^2*((-j+floor((2*N-1)/2)+1))^2*deltat^2...
          +MR*((-j+floor((2*N-1)/2)+1))*deltat)/2;
end
if (-j+floor((2*N-1)/2)+1)==floor(0.184/(MR*deltat))+1
u(j,i)=7/6+(MR^2*((-j+floor((2*N-1)/2)+1))^2*deltat^2...
          -3*MR*((-j+floor((2*N-1)/2)+1))*deltat)/2;
m(j,i)=-1/3-MR^2*((-j+floor((2*N-1)/2)+1))^2*deltat^2...
            +2*MR*(-j+floor((2*N-1)/2)+1)*deltat;
d(j,i)=1/6+(MR^2*((-j+floor((2*N-1)/2)+1))^2*deltat^2...
          -MR*((-j+floor((2*N-1)/2)+1))*deltat)/2;
```

```
end
if (-j+floor((2*N-1)/2)+1)==floor(-0.184/(MR*deltat));
u(j,i)=1/6+(MR^2*((-j+floor((2*N-1)/2)+1))^2*deltat^2...
          +MR*((-j+floor((2*N-1)/2)+1))*deltat)/2;
m(j,i)=-1/3-MR^2*((-j+floor((2*N-1)/2)+1))^2*deltat^2...
          -2*MR*(-j+floor((2*N-1)/2)+1)*deltat;
d(j,i)=7/6+(MR^2*((-j+floor((2*N-1)/2)+1))^2*deltat^2...
          +3*MR*((-j+floor((2*N-1)/2)+1))*deltat)/2;
end
end
end

%Création de la matrice X, liée à S par la relation X(t)=bbeta(t)+S(t)
%Création de la matrice bbeta
for i=1:N
    a=quadl(@int2,0,i*deltat);
    b=0;
    for j=1:i
        b=b+exp(MR*j*deltat)*deltat*(dlogfut(j)+MR*logfut(j));
    end
    c(i)=a+b;
    bbeta(i)=exp(-MR*i*deltat)*(c(i)+log(S0));
end

for i=1:N

    for j=floor((2*N-1)/2-i+1)+1:floor((2*N-1)/2+i-1)+1
        X(j,i)=exp(S(j,i)+bbeta(i));
end
end

%Evaluation de l'option par backward valuation
%Pour une européenne

%Création de la matrice E, valeur de l'option
E=zeros(2*N-1,N);
%Dernière valuation

E(:,N)=max(0,X(:,N)-K);

for i=N-1:-1:1
   for j=floor((2*N-1)/2-i+1)+1:floor((2*N-1)/2+i-1)+1
       E(j,i)=exp(-r*deltat)*(u(j,i)*E(j-1,i+1)+m(j,i)*E(j,i+1)...
       +d(j,i)*E(j+1,i+1));
   end
end
E(floor((2*N+1)/2),1)

%Pour une bermudéenne, 1 année pas d'exercice possible,
```

```
% 2ème année exercice 1 fois par mois (12 exercices possibles)

%Création de la matrice B, valeur de l'option
B=zeros(2*N-1,N);
%Dernière valuation

B(:,N)=max(0,X(:,N)-K);

for i=N-1:-1:1
   if i>floor(N/2) & mod (i,floor(252/12))==0
    for j=floor((2*N-1)/2-i+1)+1:floor((2*N-1)/2+i-1)+1
       B(j,i)=max(exp(-r*deltat)*(u(j,i)*B(j-1,i+1)...
       +m(j,i)*B(j,i+1)+d(j,i)*B(j+1,i+1)),X(j,i)-K);
   end
else
    for j=floor((2*N-1)/2-i+1)+1:floor((2*N-1)/2+i-1)+1
       B(j,i)=exp(-r*deltat)*(u(j,i)*B(j-1,i+1)+m(j,i)*B(j,i+1)...
       +d(j,i)*B(j+1,i+1));
end
end
end
B(floor((2*N+1)/2),1)

%Pour une américaine

%Création de la matrice A, valeur de l'option
A=zeros(2*N-1,N);
%Dernière valuation

A(:,N)=max(0,X(:,N)-K);

for i=N-1:-1:1
   for j=floor((2*N-1)/2-i+1)+1:floor((2*N-1)/2+i-1)+1
       A(j,i)=max(exp(-r*deltat)*(u(j,i)*A(j-1,i+1)+m(j,i)*A(j,i+1)...
       +d(j,i)*A(j+1,i+1)),X(j,i)-K);
   end
end
A(floor((2*N+1)/2),1)
```

Table des figures

1.1 Principaux flux gaziers dans le monde, source : BP statistical review 7
1.2 Principaux flux pétrole dans le monde, source : BP statistical review 9

2.1 Evolution du prix future 6 mois entre 1991 et 2007 15
2.2 Evolution des logarithmes des rendements quotidiens du prix future 6 mois entre 1991 et 2007 15
2.3 Mise en évidence de l'effet Samuelson 16
2.4 Surface de volatilité du contrat de maturité 6 mois le 12/09/2007 17
2.5 Courbe du contrat à terme du 07/02/2005 17
2.6 Densité spectrale de la série mensuelle du contrat future 18
2.7 Evolution du prix future 6 mois entre 2003 et 2007 21
2.8 Evolution des logarithmes des rendements quotidiens du prix future entre 2003 et 2007 21
2.9 Courbes de contrats à terme à différentes dates 22
2.10 Volatilité implicite à la monnaie pour différentes maturités (en mois) 22
2.11 Influence du premier facteur sur la courbe des contrats 24
2.12 Influence du second facteur sur la courbe des contrats 25
2.13 Influence du troisième facteur sur la courbe des contrats 25
2.14 Sensibilité de la déformation de la courbe suite à un choc pour chacun des facteurs 25

3.1 Trajectoire du prix spot dans le modèle de Schwartz et Smith 28
3.2 Distribution du log spot à 3 ans et comparaison avec la distribution normale . 29

4.1 Payoffs d'une option binaire et d'un *call* spread. 42

5.1 Principe de la filtration par filtres de Kalman 49
5.2 Principe de la calibration par filtres de Kalman 50
5.3 Structure à terme des volatilités instantanée et implicite 51
5.4 Résultat de la filtration et comparaison du prix spot et du prix d'équilibre . . 53
5.5 Evolution de la volatilité court terme et du prix spot au cours du mois de juin 2002 54
5.6 Evolution du prix de court terme et du prix spot au cours du mois de juin 2002 55
5.7 Ecart entre la structure à terme modélisée et celle traitée, en comparaison avec l'écart bid/ask en pourcentage 55
5.8 Structure de volatilité issue de la calibration au 11 avril 2007 56
5.9 Evolution des paramètres et des contrats futures de mars à décembre 2007 . . 57
5.10 Variation de σ_t en fonction de la maturité au 04/09/2007 59
5.11 Stabilité de k et évolution des contrats futures 61

5.12 Stabilité de k et évolution des volatilité 61
5.13 Comparaison des volatilités implicites (maturité 6 mois) du modèle et du marché au 7 juin 2006 62

6.1 Interpolation par PCHIP de la courbe des logarithmes des contrats à terme et sa dérivée (6 juin 2007) 65
6.2 Prix de l'option asiatique avec son intervalle de confiance à 95% 66
6.3 Prix de l'option asiatique en fonction du prix spot initial 67
6.4 Nœud symétrique 68
6.5 Nœud descendant 68
6.6 Nœud montant 68
6.7 Arbre trinomial pour 4 périodes 71

D.1 Les quatre fonctions formant la base d'Hermite x

E.1 Intervalles de confiance à 95% pour le prix d'un *call* de *moneyness* 90% pour un nombre de simulation appartenant à $[5000; 8000]$ xii

F.1 Impression d'écran Bloomberg : option sur contrat future maturant en mai 2008 xiii
F.2 Priceur Excel modèle de courbe 1-facteur et extension xiv

Liste des tableaux

1.1 Comparaison des contrats futures et forwards 11

2.1 Tests de normalité d'une série quotidienne de contrats futures de durée 6 mois. 16
2.2 Tests de normalité d'une série quotidienne de contrats futures de durée 1, 6 et 12 mois 20
2.3 Tests de normalité d'une série quotidienne de contrats futures de maturité 6 mois 21
2.4 Corrélation entre les rendements des contrats à termes 22
2.5 Résultats des analyses en composantes principales 23
2.6 Coordonnées des vecteurs propres du Brut Nymex de 1994 à 1998 24
2.7 Tests de normalité d'une série quotidienne de contrats futures de durées 6 et 12 mois 26

3.1 Relations entre les paramètres des différents modèles 32

6.1 Evolution de la prime en fonction de la volatilité 65
6.2 Evolution de la prime en fonction du *strike* et du coefficient de retour à la moyenne 66
6.3 Comparaison des deux modèles pour la valorisation d'un call asiatique 67
6.4 Evolution de la prime en fonction de la volatilité 71
6.5 Evolution de la prime en fonction du *strike* et du coefficient de retour à la moyenne 72