ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE
3, avenue Pierre Larousse-92245 Malakoff CEDEX, FRANCE

Mémoire d'actuariat - Promotion 2008

Modélisation des marchés de matières premières, valorisation de ses dérivés

Louis MARGUERITTE
Jean-Baptiste NESSI

MOTS-CLÉS : matières premières, future, structure à terme, volatilité implicite, skew

---

1 Contexte de l'étude

1.1 Un sujet d'actualité

Les matières premières sont aujourd'hui au centre de toutes les spéculations économiques, géopolitiques et financières. Tous les grands quotidiens évoquent régulièrement un baril de pétrole brut à des sommets de prix jamais atteints auparavant ($+100$ % en un an), la baisse soudaine de l'offre dans certains pays producteurs ou l'augmentation significative de la demande dans les pays émergents dont la croissance semble forte et régulière.

1.2 Problématique retenue

La crise énergétique, accentuée par l'augmentation de la demande mondiale entraîne une modification significative de la variation des prix spots (prix au comptant) et de leurs produits dérivés : futures et forwards (contrats à terme avec livraison d'un sous-jacent à une date de maturité et un prix fixés contractuellement), options sur spot et sur future, produits exotiques. Les méthodes de valorisation et les modèles financiers doivent pouvoir reproduire ces comportements. Les propriétés particulières des matières premières les distinguent des autres actifs financiers comme les actions et doivent également être intégrées dans nos modèles. Il n'est pas réaliste de modéliser les sous-jacents par un modèle de Black-Scholes à volatilité constante, car l'étude des moments des séries temporelles (logarithmes des rendements) montrent des queues de distribution plus épaisses que dans le cas normal. De plus, les tests statistiques effectués sur les données de prix spot et de contrats futures montrent une propriété importante de retour à la moyenne : les actifs ont tendance à osciller autour d'une valeur moyenne. Par ailleurs, on observe une volatilité plus importante à court terme qu'à long terme, c'est l'effet Samuelson. Enfin, les données du gaz traité sur le marché américain Henry Hub montrent un fort effet de saisonnalité, expliquée par une demande accrue en période hivernale. Ce mémoire d'actuariat a pour objet de dresser une typologie des modèles employés dans la modélisation des marchés de matières premières et la valorisation de ses produits dérivés. Il existe deux types de modèles traités dans cette étude :

- modèles spot : ils modélisent le prix au comptant du produit physique et le rendement d'opportunité instantané, impliquant ainsi la courbe de prix à terme.
- modèles de courbe de prix : ils spécifient directement, dans un cadre HJM (démarche utilisée dans le monde des taux d'intérêt), l'évolution de la courbe des prix de contrats à terme. Les études que nous avons réalisées montrent qu'un seul facteur peut expliquer 95 % des mouvements de la courbe, ce qui justifie l'utilisation de tels modèles avec un faible nombre de facteurs. Nous proposons plusieurs extensions ainsi que diverses méthodes de calibration mises en œuvre dans des outils de pricing.

2 Modélisation par modèle spot

Cette classe de modèles consiste à spécifier une famille de processus pour la diffusion du prix spot. Notre étude met en lumière le modèle de Schwartz-Smith, qui décompose le logarithme du prix en deux composantes : une déviation de court terme de dynamique Ornstein-Uhlenbeck avec retour à la moyenne zéro et une déviation de long terme de dynamique normale. Les calculs permettent d'obtenir des formules fermées pour les contrats futures et les options vanilles. Deux extensions sont proposées qui n'existent pas à notre connaissance dans la littérature : la première consiste à ajouter une composante de saisonnalité applicable au cas du gaz, et la seconde une volatilité stochastique en s'inspirant du modèle de Heston. Dans ces deux cas, on obtient des formules fermées pour les futures et les options qui constituent les instruments de base de la couverture. Cette classe de modèles présente l'avantage de modéliser tous les comportements retenus lors des tests statistiques, mais certaines variables sont inobservables. De plus, les prix réellement observés sont ceux des contrats à terme, une matière première ne pouvant être immédiatement livrée, ce qui rend le prix spot difficilement interprétable sur un tel marché.

3 Modélisation par modèle de courbe

Ces modèles consistent à spécifier directement l'évolution de la courbe des prix des contrats à terme en prenant comme donnée de marché la courbe des futures aujourd'hui (prix des contrats en fonction de leur maturité). L'étude reprend un modèle de courbe à un facteur donnant la dynamique de la courbe, suivant une loi log-normale. Les options sur futures sont valorisables grâce à la formule de Black. La dynamique du prix spot s'en déduit en écrivant que la livraison à lieu immédiatement à l'instant d'évaluation (la maturité est nulle dans ce cas). Nous proposons deux extensions nouvelles qui permettent de prendre en compte l'ensemble de la nappe de volatilité. La première extension résout le problème du smile (volatilité implicite) sur sa dépendance en la maturité. La méthode propose de considérer une volatilité constante par morceaux sur chacun des intervalles bornés par les maturités des contrats futures. Cette méthode empêche un arbitrage sur la structure à terme du smile après calibration. La seconde extension prend en compte le skew de volatilité, c'est-à-dire sa dépendance en fonction du strike. Un modèle à logarithme décalé, issu de la précédente extension, permet de prendre en compte cette dépendance monotone, ce qui élimine toute possibilité d'arbitrage sur l'ensemble du smile. Enfin, un modèle de courbe à deux facteurs est proposé, dont la mise en œuvre pourrait constituer une extension de l'étude.

4 Calibration

Un opérateur de marché, souvent une banque d'investissement, doit valoriser un produit répondant à des besoins spécifiques d'un investisseur et doit calculer sa couverture pour transférer son risque au marché financier. Pour ce faire, celui-ci doit estimer les paramètres des modèles étudiés et analyser leur stabilité afin de minimiser le coût de sa couverture. Nous avons répertorié les différentes méthodes de calibration possibles. Pour chaque type de modèle, nous avons privilégié un mode de calibration. Dans chaque cas, nous étudions la stabilité de l'algorithme : nous partons de différentes valeurs initiales des paramètres et nous observons si la valeur finale obtenue après itérations est la même. Puis, nous étudions la stabilité des paramètres à chaque date de cotation au regard de la variation des données de marché.

Le principe du maximum de vraisemblance présente l'avantage de minimiser une fonction simple, mais n'est plus utilisable lorsque le nombre de paramètres à évaluer est trop important, ce qui est le cas pour les modèles spot à deux facteurs de Schwartz-Smith.

4.1 Méthode quadratique

C'est la méthode couramment employée par les opérateurs de marché. Elle consiste à comparer les volatilités implicites telles qu'elles sont perçues sur le marché et la volatilité implicite que l'on obtient en inversant la formule de Black-Scholes. Cette méthode peut être instable si le nombre de paramètres est trop important.

4.2 Méthodes par filtre de Kalman

Les filtres de Kalman sont une méthode récursive d'évaluation de paramètres d'état dans un modèle, qu'il soit financier ou non. Le principe est de calculer la valeur de l'estimateur des variables d'état, qui sont dans le modèle Schwartz-Smith, les déviations de court et de long terme et de mettre à jour la valeur à chaque nouvel instant de cotation, c'est-à-dire dès que l'on a accès à un nouveau prix de marché. La comparaison entre cet estimateur et la valeur issue du modèle permet d'écrire un modèle de loi gaussienne dont on peut maximiser la vraisemblance. Cette méthode est théoriquement efficace et permet d'obtenir les valeurs de tous les paramètres. En revanche, elle est lourde en temps de calculs et dépend du codage de l'algorithme d'optimisation final.

4.3 Méthode implicite d'exploitation de la courbe

Cette méthode consiste à exploiter les caractéristiques de certaines courbes générées par le modèle considéré. Dans le cas du modèle de Schwartz-Smith, il s'agit d'exploiter les courbes de contrats à terme ainsi que la structure à terme de la volatilité. Le comportement des courbes aux dates $t = 0$ et $t = +\infty$ permettent d'obtenir tous les paramètres.

5 Synthèse des modèles

Modèle	**Calibration**		**Recommandations**
	Futures	Options	
Spot 2-facteurs	++	++	Modèle à utiliser pour les back tests et pour la détection d'opportunité de placements. Permet une extrapolation pour les prix futures non cotés.
Spot 2-facteurs + saisonnalité			Modèles prenant en compte la saisonnalité. Utilisation possible pour le gaz.
Spot 3-facteurs			
Courbe 1-facteur	+++	+	Pas d'arbitrage sur la courbe des contrats à terme, à employer pour la valorisation de produits monostrike faiblement path-dependent.
Courbe 1-facteur extension 1	+++	++	Absence d'arbitrage sur la courbe des contrats à terme et sur la structure à terme de la volatilité. A employer pour la valorisation de produits path-dependent mais indépendants du skew.
Courbe 1-facteur extension 2	+++	+++	Absence d'arbitrage sur la courbe des contrats à terme et sur la structure à terme de la volatilité et le smile. A employer pour la valorisation de produits path-dependent et skew-dependent.
Courbe 2-facteurs			Ajoute un facteur de risque qui permet de valoriser des produits de corrélation.

6 Conclusions et extensions possibles

Le choix du modèle et de la calibration dépendent du produit que l'on souhaite valoriser et du besoin en couverture de l'opérateur de marché. A titre d'exemple, nous avons valorisé une option asiatique et une option bermudéenne et mis en évidence les risques de modèles. La modélisation des matières premières doit être réalisée avec prudence tant certains comportements sont spécifiques et tant les spéculations sont nombreuses. La récente dérégulation des marchés européens et la crainte d'une pénurie de pétrole brut implique des rendements importants, ce qui ne valide pas, au moins sur les périodes les plus récentes, le modèle spot de Schwartz-Smith. Il faut donc rester attentif à la stabilité des paramètres et de tester régulièrement les hypothèses sous-jacentes.

Nous suggérons diverses extensions de notre étude. Il s'agirait tout d'abord de calibrer les modèles spot avec saisonnalité et volatilité stochastique inspirée du modèle de Heston. Un travail similaire serait à effectuer avec les modèles de courbe à deux facteurs. Par ailleurs, une étude des stratégies de couverture permettant à un agent de se couvrir au mieux lorsqu'il fait face à un risque spécifique serait envisageable. Il serait particulièrement utile de s'intéresser à la couverture d'options plus complexes que nous avons valorisées comme les options asiatiques ou bermudéennes. Enfin, il faudrait chercher et élaborer des modèles plus complexes répondant plus fidèlement aux propriétés d'autres matières premières. Des pics et des sauts peuvent être introduits dans la modélisation du cours de l'électricité, mais il faudrait élargir ces champs de recherche à l'or ou à d'autres métaux.