Table des matières

Les questions soulevées par les problématiques de la finance, et de façon plus récente, par celles de l'assurance, sont nombreuses tant sur le plan de la méthodologie, propre à ces champs d'étude particuliers, qu'au point de vue mathématique. D'autre part, depuis quelques années déjà, et ce de façon de plus en plus importante, le développement des marchés financiers et de leur technicité a conduit à la création et à l'enrichissement du domaine des mathématiques financières. Celui-ci a stimulé en partie une renaissance des études classiques en théorie des processus. Cela concerne notamment les processus de Lévy, souvent utilisés pour modéliser la dynamique des différents actifs, les représentations de martingales utiles en théorie du portefeuille notamment, ou encore les martingales-mesure équivalentes indispensables pour l'évaluation de tout actif contingent, en marché complet ou incomplet....

Dans cette thèse, ces deux types de problématique sont abordés : la première partie (chapitre 1 à chapitre 7) est consacrée à la caractérisation d'une méthodologie adaptée pour une nouvelle classe de contrats financiers à mi-chemin entre finance et assurance. Différents domaines de la théorie des probabilités sont alors utilisés, notamment la théorie générale du filtrage (chapitres 4 et 5).
Les trois autres chapitres ($8-9-10$) s'intéressent plus à l'aspect probabiliste de certains problèmes de finance. Dans le chapitre 9 en particulier, une classe importante de fonctions harmoniques espace-temps pour certains processus de Lévy est mise en évidence. D'autre part, la représentation de Lévy-Khintchine est largement utilisée dans le dernier chapitre de cette thèse pour étudier le moment optimal de prise de décision dans un cadre d'options américaines.

De façon plus détaillée, ce travail de thèse comporte trois parties. Chacune d'elles a fait l'objet d'un travail séparé et indépendant. Toutes trois sont consacrées à l'étude de problèmes très différents les uns des autres mais ayant au moins le point commun de s'intéresser à des questions de mathématiques appliquées à des domaines de finance.

- La *première partie* est consacrée à la détermination de la structure optimale d'un contrat financier illiquide et/ou dépendant d'une source de risque non-financière. Les six premiers chapitres de cette thèse en constituent les étapes essentielles. Le septième chapitre est une illustration.

  Ainsi, nous présentons rapidement, dans le premier chapitre, le phénomène récent et de grande ampleur de convergence entre les mondes de l'assurance et de la finance : l'apparition d'une nouvelle classe de produits, de structure financière classique, mais de logique très proche de celle des contrats d'assurance, a été la motivation première de ce travail.

  Le deuxième chapitre est consacré à l'introduction des notations et hypothèses générales communes aux différentes études.

  Les quatre chapitres suivants sont consacrés à l'étude de la structure optimale d'un contrat illiquide pour différentes approches :

  Le chapitre 3 s'intéresse à la situation très simple où le risque sous-jacent du contrat est le seul risque de l'univers. Puis, un marché financier est introduit et les agents déterminent de façon a priori leur stratégie d'investissement sur ce marché. Celles-ci ne sont donc pas du tout influencées par l'existence de l'autre source de risque.

Le chapitre 4 sert d'introduction au chapitre 5. Ainsi, nous présentons certains résultats classiques de la théorie du filtrage, puis le cadre de l'étude suivante, lorsque l'information prise en compte par les agents économiques est réduite aux prix de marché qu'ils observent.

Les chapitres 5 et 6 considèrent la situation où toutes les décisions se prennent simultanément : les agents déterminent, en même temps, leur stratégie d'investissement sur le marché et la structure optimale du contrat. Dans le chapitre 5, les agents conditionnent leur choix d'investissement sur le marché financier par l'information contenue dans les prix de marché qu'ils observent. Des arguments de la théorie du filtrage sont alors nécessaires. Cela permet de dissocier les deux sources de risque : le contrat, dont la structure est à déterminer, ne dépend que de la source de risque non-financière alors que l'investissement sur le marché ne dépend que du risque de marché. Notons bien-sûr que cela n'empêche pas ces deux sources de risque d'être corrélées.

Le chapitre 6 étend cette étude au cas où une telle distinction entre les deux investissements et les deux sources de risque est moins claire a priori. Les agents prennent en compte toute l'information disponible (y compris celle provenant de la source de risque non-financière) pour déterminer leur stratégie d'investissement sur les marchés.

Le chapitre 7 vient en annexe de cette première partie. Il correspond à la première étude menée d'un point de vue chronologique. Même s'il s'agit d'un cas particulier des chapitres précédents, nous avons choisi de le faire figurer dans cette thèse car il représente une bonne illustration de ces résultats.

– La *seconde partie* de cette thèse regroupe deux études Markoviennes particulières. Le chapitre 8 s'intéresse ainsi à des fonctionnelles additives du mouvement Brownien avec drift (mais également des processus de Bessel), tandis que le chapitre 9 donne des exemples de martingales fonctionnelles additives.

  Dans un premier temps (chapitre 8), nous nous intéressons au comportement asymptotique de la densité de Hartman-Watson. Cette densité intervient aussi bien dans l'étude de la loi du nombre de tours du mouvement Brownien plan en un temps fixe que dans l'évaluation des options asiatiques, produits financiers dépendant de la moyenne arithmétique d'un actif, dont la dynamique est supposée suivre un mouvement Brownien géométrique. Or, de gros problèmes numériques surviennent lorsque l'on tente de simuler ces prix. Ces difficultés apparaissent lorsque le paramètre de temps est petit. L'idée est alors de trouver un équivalent de la densité de Hartman-Watson lorsque t tend vers 0, ou au moins de connaitre son comportement asymptotique. Pour ce faire, plusieurs méthodes classiques sont envisagées : la théorie des grandes déviations, permettant de "zoomer" sur une zone extrême, les théorèmes Taubériens, donnant des relations entre le comportement asymptotique de la transformée de Laplace d'une variable et celui de sa fonction de répartition, ou encore la méthode du col, permettant de contourner une difficulté en changeant le chemin d'intégration. Pourtant, aucune de ces méthodes, généralement utilisées pour la résolution de problèmes de ce type, ne semble fonctionner ici. Mais, c'est précisément cette absence de résultat qui devient intéressante en soi !

Le chapitre 9 est consacré à l'obtention d'une "formule de Taylor stochastique", faisant intervenir les itérés de générateurs infinitésimaux, dans le cas de subordinateurs. Un résultat classique de la théorie de la combinatoire et des polynômes binômiaux est alors obtenu par des arguments probabilistes. Cette étude fait intervenir différentes notions dépassant le champ classique de la théorie des probabilités, comme les fonctions harmoniques, les nombres de Stirling ou les polynômes orthogonaux. Nous les définissons et rappelons certaines de leurs principales propriétés dans une section préliminaire.

– La *troisième partie* étudie l'impact d'une crise financière sur les décisions d'investissement. Nous utilisons pour cela une modélisation de l'opportunité d'investissement à l'aide des options réelles. Celle-ci est ainsi représentée comme une option américaine perpétuelle détenue par l'entreprise, qui peut entreprendre le projet, et dont le sous-jacent est lié aux flux de ce projet. Les propriétés du temps optimal d'investissement sont étudiées dans le cas où le processus sous-jacent est représenté à l'aide d'une diffusion mixte dont les sauts sont d'amplitude négative de façon à traduire les crises potentielles du marché. L'impact de la méconnaissance des paramètres liés aux sauts sur la décision d'investissement est analysé à travers différentes études portant sur la robustesse des résultats, lorsqu'il réside une incertitude quant au choix de ces paramètres ou même quant à la structure discontinue du modèle. De plus, quelques notions clé relatives aux options américaines sont rappelées en annexe.

Pour terminer cette introduction, j'indique le statut actuel des différents chapitres de cette thèse, en ce qui concerne leur publication éventuelle :

a) De la première partie de cette thèse sont issus différents papiers co-signés avec Nicole El Karoui. Ainsi, le chapitre 3 a fait l'objet d'un article "Optimal design of derivatives in illiquid markets ", publié en 2002 dans Quantitative Finance, volume 2, p. 1-8. Les chapitres 5 et 6 vont très prochainement faire l'objet d'une prépublication, intitulée "Optimal security design and diversification in financial markets with non-tradeable risks". L'étude portant sur les obligations climatiques, "Reinsuring climatice risk using optimally designed weather bonds", présentée dans le chapitre 7 de cette thèse a été acceptée pour publication aux Geneva Papers - Risk and Insurance Theory.

Enfin, une note intitulée " Structuration optimale de produits financiers et diversification en présence de sources de risque non-négociables" a été soumise pour publication aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Il s'agit d'un travail ne figurant pas directement dans cette thèse mais étant une suite logique des chapitres 5 et 6.

b) Le chapitre 8 devrait faire l'objet d'une Prépublication co-signée avec Alain Rouault et Marc Yor. Le chapitre 9 fait l'objet d'un document de travail, sous le format d'un article, co-écrit avec Wim Schoutens et Marc Yor. Il a beaucoup bénéficié des remarques de Jim Pitman qui nous a fourni les références venant du domaine de la combinatoir. En conséquence, nous n'envisageons pas la publication de cet article.

c) Enfin, du chapitre 10 sera prochainement tirée une prépublication à l'Université d'Evry-Val d'Essonne, co-écrite avec Nadine Bellamy, intitulée "What about the impact of a market crisis on real options ?".

Première partie

Détermination de la structure optimale d'un produit illiquide

Depuis quelques années sont apparus sur les marchés financiers de nouveaux instruments dépendant de sources de risque non-financières et plus traditionnellement considérées comme du ressort du secteur de l'assurance. On peut citer, entre autres, des contrats météorologiques, catastrophiques... dont les flux sont contingents à l'occurence de certains événements météorologiques, catastrophiques....
Comme nous le soulignons dans le premier chapitre de cette partie, ce phénomène est à rapprocher d'une convergence beaucoup plus générale entre les mondes de la finance et de l'assurance.

Mais la rencontre de ces deux univers ne va pas sans soulever de nombreuses questions, concernant tant la classification de ces nouveaux produits, que leur évaluation et leur gestion. Le problème de la caractérisation de leur prix est, notamment, très intéressant puisqu'il conduit à s'interroger sur la logique même de ces contrats. En effet, les techniques classiques d'évaluation de contrats financiers, utilisant entre autres le principe de réplication, ne sont plus valides compte tenu des spécificités du risque sous-jacent.

La première partie de cette thèse comporte une étude générale menée suivant différentes approches. Nous nous intéressons ainsi à la caractérisation de la structure optimale d'un contrat dépendant d'une source de risque non-financière et/ou de façon plus générale très illiquide, ainsi qu'à son évaluation. Des arguments proches de ceux de l'assurance sont utilisés et les choix des différents agents économiques sont modélisés à l'aide de fonctions d'utilité. Nous présentons dans le chapitre 2 les principales notations et hypothèses ainsi que le cadre général des différentes approches, qui sont successivement analysées dans les chapitres suivants.
Ainsi, plus formellement, nous nous intéressons à la situation où une banque, notée agent B, a une exposition a priori $X(\Theta)$ à une date future T envers une source de risque non-financière Θ. La banque veut transférer une partie de son exposition par l'intermédiaire d'un produit structuré sur le marché. Pour ce faire, elle fait appel à un investisseur, noté agent I, et lui vend un contrat dont les flux dépendent de Θ. La structure d'un tel produit (i.e. la somme de ses flux capitalisés) est notée $F(\Theta)$. En 0, l'investisseur, dont la richesse initiale x est supposée strictement positive, verse le prix π du contrat à l'agent B. En échange, il reçoit $F(\Theta)$ en T. La date T est considérée comme l'horizon. Chacun des flux est capitalisé jusqu'en T et β_i représente le facteur de capitalisation entre les dates i et T.

Alors, pour résumer, les flux capitalisés liés à la F-transaction, si celle-ci a lieu, peuvent s'écrire pour chacun des deux agents comme :

$$\begin{aligned} \text{Pour l'agent } B \quad &: \quad X(\Theta) - F(\Theta) + \pi\beta_0 \\ \text{Pour l'agent } I \quad &: \quad F(\Theta) + (x - \pi)\beta_0 \end{aligned}$$

Par contre, si aucune transaction entre les deux agents ne survient :

$$\begin{array}{rcl} \text{Pour l'agent } B & : & X(\Theta) \\ \text{Pour l'agent } I & : & x\beta_0 \end{array}$$

Les deux agents sont supposés averses au risque. L'attitude de chacun d'entre eux est modélisée à l'aide d'une fonction d'utilité exponentielle. De façon évidente, la banque et l'investisseur n'ont pas les mêmes objectifs : la banque cherche à couvrir son exposition $X(\Theta)$ et l'investisseur peut "l'aider" dans sa démarche en acceptant une partie de ce risque, sous la forme d'une structure F qu'il peut acquérir pour un prix π. La relation entre ces deux agents est fondamentalement une relation d'assurance. Ainsi, comme dans une relation d'assurance classique (cf. par exemple, A. Raviv [62]), les deux agents n'ont pas les mêmes comportements :
L'agent B, "l'assuré", souhaite maximiser son utilité espérée, tandis que l'agent I, "l'assureur", est supposé passif au sens où il peut seulement décider de faire ou non cette transaction. Pour prendre sa décision, il acceptera toute transaction dont l'utilité espérée est supérieure à celle associée au fait de ne rien faire.

Chacun des trois chapitres suivants est consacré à l'étude de cette situation, et tout particulièrement à la détermination de la structure optimale F et à son évaluation, mais avec des approches très différentes.

Concernant le Chapitre 3

Dans le chapitre 3, nous nous intéressons au cas où seule cette source de risque non-financière Θ est prise en compte par la banque et l'investisseur. Ainsi, d'après ce qui précède, le programme d'optimisation caractérisant la relation entre les deux agents s'écrit dans ce cas comme :

$$\min_{F,\pi} \mathbb{E}\left[\exp\left(-\gamma_B\left(X(\Theta) - F(\Theta) + \pi\beta_0\right)\right)\right]$$

$$s.c. \quad \mathbb{E}\left[\exp\left(-\gamma_I\left(F(\Theta) - \pi\beta_0\right)\right)\right] \leq 1$$

où $s.c.$ désigne "sous la contrainte".
Nous montrons alors que la structure optimale et son prix sont donnés par :

$$F^*(\Theta) = \frac{\gamma_B}{\gamma_B + \gamma_I} X(\Theta) \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

$$\pi^*\beta_0 = -\frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E}\left[\exp\left(-\gamma_I F^*(\Theta)\right)\right]$$

D'autre part, si les deux agents ont des vues et des anticipations différentes concernant Θ, alors la divergence des vues est prise en compte dans la structure optimale en modifiant l'exposition initiale de la banque, qui devient :

$$X^{B,I}(\Theta) = X(\Theta) - \frac{1}{\gamma_B} Y_{B,I}(\Theta)$$

où $Y_{B,I}(\Theta)$ désigne la log-vraisemblance des vues de la banque relativement à celles de l'investisseur. L'évaluation de la structure optimale se fait dans ce cas sous la mesure de probabilité propre aux anticipations de l'investisseur.

Dans un second temps, un marché financier est introduit. Désormais, chacun des deux agents a également la possibilité d'investir la totalité de sa richesse résiduelle sur le marché dans un portefeuille qu'il aura choisi optimalement. Chaque agent détermine de façon a priori sa stratégie d'investissement sur les marchés financiers. Celle-ci ne dépend donc pas de la structure F, ni du risque Θ. $V_B(z)$ désigne la valeur en T de l'investissement de l'agent B lorsqu'il a investi un montant z en 0 et suivi une stratégie autofinançante ; $V_I(z)$ désigne la valeur en T de l'investissement de l'agent I, lorsqu'il a investi un montant z en 0 sur les marchés financiers.
Le programme d'optimisation caractérisant la relation entre les deux agents s'écrit :

$$\min_{F,\pi} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma_B\left(X(\Theta) - F(\Theta) + V_B(\pi)\right)\right)\right]$$

$$s.c. \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma_I\left(F(\Theta) + V_I(x-\pi)\right)\right)\right] \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma_I V_I(x)\right)\right]$$

alors la structure optimale et son prix sont donnés par :

$$F^*(\Theta) = \frac{\gamma_B}{\gamma_B + \gamma_I} X(\Theta) \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

$$\pi^* \beta_0 = -\frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}\left[\exp\left(-\gamma_I F^*(\Theta)\right)\right]$$

où $\mathbb{Q}_T$ est la probabilité forward-neutre associée à la date T. Elle est caractérisée par la densité de Radon-Nikodym :

$$\frac{d\mathbb{Q}_T}{d\mathbb{P}} = H_T \beta_0$$

où H_T correspond à la densité des prix d'état de la date T.
Comme dans l'étude précédente, si les deux agents ont des vues et des anticipations différentes concernant Θ, alors la divergence des vues est prise en compte dans la structure optimale en modifiant

l'exposition initiale de la banque, qui devient :

$$X^{B,I}(\Theta) = X(\Theta) - \frac{1}{\gamma_B} Y_{B,I}(\Theta)$$

L'évaluation de la structure optimale se fait dans ce cas sous la mesure de probabilité "forward-neutre" propre aux anticipations de l'investisseur.

Enfin, nous présentons en annexe de ce chapitre une extension de ces résultats concernant les fonctions d'utilité puissance.

Dans les trois chapitres suivants, nous généralisons cette étude au cas où les agents investissent toute leur richesse résiduelle dans une stratégie d'investissement sur le marché financier qu'ils choisissent de façon simultanée avec la détermination de la structure optimale dépendant de la source de risque non-financière. Les notations suivantes sont alors utilisées : $\xi_B(z)$ désigne la valeur en T de l'investissement de l'agent B lorsqu'il a investi un montant z en 0 et suivi une stratégie autofinançante ; $\xi_I(z)$ (resp. $\eta_I(z)$) désigne la valeur en T de l'investissement de l'agent I, lorsqu'il a investi un montant z en 0 sur les marchés financiers et suivi une stratégie autofinançante, mais alors qu'il est également intervenu sur l'actif illiquide (resp. alors qu'il est uniquement intervenu sur les marchés financiers). Deux situations sont alors envisagées :

Concernant les Chapitres 4 et 5

Ces deux chapitres sont fortement reliés. En effet, le chapitre 4 présente quelques résultats mathématiques de la théorie générale du filtrage puis introduit le cadre de l'étude du chapitre suivant. Ainsi, nous supposons désormais qu'il existe un actif financier, noté S_t, dont la dynamique est fortement liée à la source de risque non-financière Θ :

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \mu(t, S_t, \Theta_t)\,dt + \sigma(t, S_t)\,dW_t^{(2)} \\ S_0 &= \xi_0 \end{aligned}$$

Dans la théorie classique du filtrage, $(S_t)_{t\geq 0}$ est *l'observation* et $(\Theta_t)_{t\geq 0}$ *le signal.*
De plus, le $(\mathbb{P}-\Im_t)$-mouvement Brownien $\left(W_t^{(2)}\right)_{t\geq 0}$ et $(\Theta_t)_{t\geq 0}$sont indépendants.
La filtration engendrée par les prix des actifs de marché, i.e. :

$$\Im_t^S = \sigma(S_s; 0 \leq s \leq t)$$

correspond à la seule information à laquelle un investisseur a accès. *Nous supposons que la valeur* *terminale des portefeuilles de marché de chacun des deux agents doit être $\Im_T^S$-mesurable.* Cette hypothèse traduit le cadre d'information partielle de cette étude. Des arguments de la théorie du filtrage sont alors utilisés. Il y a une véritable séparation entre l'investissement sur le marché financier et celui dans l'actif non-financier. Les deux portefeuilles sont distincts.

Nous montrons que le S-marché est complet, conditionnellement à $\Im^S$. Ainsi, toute variable $\Im_T^S$-mesurable peut être répliquée à l'aide d'un portefeuille autofinançant. Chaque variable $\Im_T^S$-mesurable satisfait donc une contrainte de budget, conditionnellement à $\Im_T^S$, qui la caractérise entièrement. Pour cette raison, il est nécessaire de travailler avec les dynamiques de S et de H conditionnellement à l'information disponible pour chaque agent à chaque instant t, i.e. $\Im_t^S$. Ces dynamiques conditionnelles sont déterminées dans la première section. Le programme d'optimisation caractérisant la relation entre la banque et l'investisseur s'écrit alors :

$$\max_{\substack{F,\pi \\ \xi_B \in \Im_T^S}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[-\exp\left(-\gamma_B \left(X(\Theta) - F(\Theta) + \xi_B(\pi) \right) \right) \right]$$

$$s.c. \quad \max_{\xi_I \in \Im_T^S} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[-\exp\left(-\gamma_I \left(F(\Theta) + \xi_I(x-\pi) \right) \right) \right] \geq \max_{\eta_I \in \Im_T^S} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[-\exp\left(-\gamma_I \eta_I(x) \right) \right]$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\widehat{H}_T \xi_B(\pi) \right] & \leq \pi \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\widehat{H}_T \xi_I(x-\pi) \right] & \leq x - \pi \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\widehat{H}_T \eta_I(x) \right] & \leq x \end{cases}$$

Les trois dernières contraintes sont des contraintes de budget. Elles permettent de caractériser les variables correspondant aux valeurs terminales des portefeuilles autofinançants ξ_B, ξ_I et η_I.

Nous montrons alors que la structure optimale est donnée par :

$$F^*(\Theta) = \frac{\gamma_B}{\gamma_B + \gamma_I} X(\Theta) \qquad \mathbb{P}\ p.s.$$

et son prix est calculé sous la probabilité forward-neutre restreinte à $\Im_T^S$, notée $\widehat{\mathbb{Q}}_T$, par :

$$\pi^* \beta_0 = -\frac{1}{\gamma_I} \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T} \left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\exp\left\{ -\gamma_I F^*(\Theta) \right\} / \Im_T^S \right) \right]$$

D'autre part, les valeurs terminales des portefeuillles de marché sont données explicitement.

Concernant le Chapitre 6

Dans le chapitre 6, la distinction entre les deux investissements est moins claire. Les agents prennent en compte toute l'information, y compris celle provenant de la source de risque non-financière, pour déterminer leur stratégie d'investissement sur le marché financier. Ainsi, leur portefeuille de marché peut dépendre des deux sources de risque. De la même façon, le contrat dépendant du risque non-financier peut également dépendre du risque de marché. Le programme d'optimisation s'écrit alors comme :

$$\max_{F,\pi,\xi_B} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[-\exp\left(-\gamma_B\left(X\left(\Theta\right)-F\left(\Theta\right)+\xi_B\left(\pi\right)\right)\right)\right]$$

$$s.c. \quad \max_{\xi_I}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[-\exp\left(-\gamma_I\left(F\left(\Theta\right)+\xi_I\left(x-\pi\right)\right)\right)\right] \geq \max_{\eta_I}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[-\exp\left(-\gamma_I\eta_I\left(x\right)\right)\right]$$

La résolution de ce programme utilise les résultats de l'article de N. El Karoui et R. Rouge [23]. La structure optimale est donnée, à un actif réplicable près, par :

$$F^*\left(\Theta\right) = \frac{\gamma_B}{\gamma_B+\gamma_I} X\left(\Theta\right) \quad \mathbb{P}\ p.s.$$

et son prix est donné par :

$$\pi^*\beta_0 = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}}\left\{-\frac{1}{\gamma_I}h\left(\mathbb{Q}/\mathbb{P}\right)\right\} - \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}}\left\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(-F^*\left(\Theta\right)\right)-\frac{1}{\gamma_I}h\left(\mathbb{Q}/\mathbb{P}\right)\right\}$$

où $h\left(\mathbb{Q}/\mathbb{P}\right)$ désigne l'entropie relative de la mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ par rapport à la mesure $\mathbb{P}$ et où $\mathcal{Q}$ est l'ensemble des mesures de probabilité "risque-neutre", i.e. mesures équivalentes à $\mathbb{P}$, sous laquelle l'actif de marché actualisé est une martingale (locale). De plus, la valeur forward des investissements de marché est donnée de façon explicite et dynamique, ainsi que les poids des portefeuilles associés.
D'autre part, nous prouvons que l'approche où les stratégies d'investissement ne sont pas contraintes est meilleure que celle où des contraintes liées à l'information disponible sont imposées, au sens de l'utilité exponentielle. Toutefois, ce résultat ne tient pas compte d'éventuels coûts (financiers ou d'effort) liés à l'aquisition de l'information supplémentaire pour mener à bien ces stratégies non-conditionnées. Il faudrait alors comparer le gain d'utilité a priori et la perte d'utilité liée à l'aquisition d'information ou à l'effort pour obtenir de l'information.

Concernant le Chapitre 7

Le chapitre 7 constitue les annexes de cette première partie. Il s'agit d'un cas particulier des études précédentes. En effet, nous nous intéressons à la question de la structuration optimale d'une obligation climatique, dont les coupons sont sujets à un risque météorologique. Nous déterminons conjointement le prix de cette obligation ainsi que le montant optimal de coupon à risque.

Commentaires sur les résultats obtenus

Les résultats de cette étude générale sont extrêmement robustes, et ce de façon réellement surprenante. En effet, alors que le cadre de cette étude reste très général, la structure optimale du contrat dépendant de la source de risque non-financière est la même, et ce pour toutes les approches étudiées : il s'agit d'une proportion de l'exposition du vendeur de ce produit envers cette source de risque. Le coefficient de proportionalité est constant et correspond à l'aversion relative du vendeur pour le risque par rapport à celle de l'acheteur du contrat. Ce résultat ne dépend ni de la modélisation des stratégies d'investissement sur le marché financier, ni de la distribution de cette source de risque non-financière. Le théorème de Borch, fondamental en assurance, est ici étendu au cas où un marché financier cohabite avec une source de risque non-financière.

L'interprétation de ce résultat est forte : la logique sous-jacente à cette nouvelle classe d'actifs est bien une logique d'assurance et non une logique spéculative. En effet, un agent non exposé à ce risque non-financier n'aura pas intérêt à vendre un tel contrat. La vente d'un contrat a pour objectif la couverture d'une exposition envers une source de risque non-financière.

L'impact du marché financier apparaît dans la règle d'évaluation du contrat. La forme du prix est la même quelle que soit l'approche : il s'agit en effet d'un prix d'indifférence ou de réserve. Mais la probabilité d'évaluation varie en fonction de l'approche choisie.

Chapitre 1

Convergence des mondes de la finance et de l'assurance

1.1 Quelques grands principes de l'assurance et de la finance

Dans cette section, nous évoquons quelques grands principes relatifs aux marchés financiers et au marché de l'assurance. Après avoir souligné certains caractères communs, nous nous attachons à quelques différences fondamentales, concernant notamment leur approche même du risque.

1.1.1 Les marchés financiers

Dans toute économie, certains agents ont une épargne disponible alors que d'autres ont besoin de ressources afin de financer un projet (de consommation ou d'investissement). Un intermédiaire est nécessaire afin "d'acheminer les fonds des prêteurs vers les emprunteurs" : c'est ainsi qu'est généralement défini le marché financier (cf. par exemple, la définition de "marché financier" dans l'Encyclopédie Universalis, vol. 14, p. 506). Celui-ci comprend deux compartiments principaux : le premier s'intéresse aux échanges à court-terme, c'est le marché monétaire. Le second concerne les échanges à long-terme, c'est le marché des capitaux.

Le rôle central du marché est d'assurer la "transformation" i.e. l'adéquation entre les préférences des uns et des autres et l'harmonisation entre les structures de prêt et d'emprunt. Deux catégories principales de titres s'échangent sur les marchés de capitaux : il s'agit des obligations (titres de créance permettant une levée de dette) et des actions (titres de participation permettant une levée de fonds propres).

A cela s'ajoute un second aspect pour les marchés financiers : la gestion du risque de prix inhérent à la vie économique. Il s'agit du marché des produits dérivés, comme les contrats à terme ou les options. Ces instruments permettent à tout agent soit de cristalliser un paramètre aléatoire dans le futur à un niveau donné, soit de se protéger contre des variations de prix qui lui seraient défavorables, tout en profitant de mouvements favorables.

1.1.2 Le marché de l'assurance

"To study insurance without first studying risk and uncertainty is much the same as studying medecine without understanding anatomy" (J.D. Hammond [38]).

D'après la définition du dictionnaire "Le Petit Robert", l'assurance est un "contrat par lequel un assureur garantit à l'assuré, moyennant une prime ou une cotisation, le paiement d'une somme convenue en cas de réalisation d'un risque déterminé". Cette définition souligne quelques aspects clés de l'assurance : la présence de deux contreparties, l'assureur et l'assuré, le paiement d'une prime avant l'occurence potentielle du sinistre, la prédétermination des sinistres concernés par le contrat et, lors de l'occurence d'un de ces risques, le versement d'une indemnité, dont la règle de paiement a été prédéterminée.
Toutefois, comme le soulignent, entre autres, D. Henriet et J.C. Rochet ([40]), une telle définition ne mentionne pas le mécanisme fondamental de l'assurance : la compensation des risques. En effet, si les risques menacent tous les biens ou toutes les personnes, ils ne se réalisent, en définitive, que sur quelques uns. Il est donc possible de répartir la charge des dommages qui surviendront grâce au versement préalable par chacun d'une contribution modérée. L'assureur utilise deux théorèmes fondamentaux de la théorie des probabilités : la loi des grands nombres, qui l'aide à déterminer un montant pour la prime nécessaire afin de permettre le versement des indemnités, et le théorème central limite, qui lui permet de fixer un montant de réserves nécessaire pour maintenir sa probabilité de ruine au delà d'un certain seuil.

Ce principe de "mutualité" est présent dans toute société humaine sous forme de solidarité et d'entraide face à l'adversité. La forme récente de l'assurance trouve ses origines dans l'Antiquité avec les "contrats d'emprunt" et les "contrats de change maritime", garantissant le transport de marchandise.

1.1.3 Liens entre les marchés de l'assurance et de la finance

D'après les définitions précédentes et comme le souligne H. Loubergé ([53]), *"les marchés des assurances et le marché financier partagent une fonction d'allocation des risques relatifs à la richesse future des agents économiques"*. Toutefois, si ils concernent la gestion des risques, les marchés financiers et les marchés de l'assurance diffèrent dans leur approche même de ces risques.

En effet, sur les marchés financiers, celui qui cède le risque, i.e. le vendeur de risque n'a pas à subir de pertes pour que l'acheteur de risque le paie : par exemple, dans le cas d'une obligation catastrophe,

l'acheteur de l'obligation achète également le risque catastrophique sous-jacent. Pour cela, il paie un certain montant initial, le prix de l'obligation. L'émetteur, quant à lui, cède le risque. Il touche ce montant initial contre le versement certain et périodique de coupons. Le nominal est, quant à lui, sujet au risque, et l'émetteur le remboursera uniquement si le risque ne survient pas.
La situation est inverse sur les marchés de l'assurance : celui qui cède le risque paye une prime d'assurance à celui qui l'accepte. L'assureur lui versera une compensation si le risque survient. Les problèmes sont inversés, la vision du risque également.

Mais, ces distinctions sont de moins en moins vraies et la frontière entre le monde de l'assurance et celui de la finance est de moins en moins claire avec notamment l'apparition de nouveaux instruments hybrides.

1.2 Convergence des deux mondes : le transfert alternatif des risques

Faire des distinctions fondamentales entre finance et assurance est une tâche de plus en plus délicate. En effet, ces deux univers convergent peu à peu vers un objectif commun de gestion des risques. Comme nous le soulignons dans cette section, le phénomène récent de titrisation et de transfert alternatif des risques en est un des signes les plus visibles. Nous détaillons également les mécanismes d'un instrument à mi-chemin entre finance et assurance : les obligations catastrophe et évoquons les raisons possibles de leur succès. Enfin, nous présentons succintement les produits dérivés climatiques, qui apparaissent comme une extension logique de ces avancées.

1.2.1 Le phénomène de titrisation

La titrisation est un processus impliquant la création de titres et d'instruments échangeables sur les marchés de capitaux. Ce phénomène a tout d'abord concerné la création de titres fondés sur des actifs financiers, comme les crédits immobiliers (les premiers "Mortgage-Backed Securities" ont été créés dès 1977 aux Etats-Unis par Bank of America). Mais, désormais, des actifs non-financiers sont également concernés, comme des avions, des immeubles.... ou même de façon plus récente non plus des actifs mais des sources de risque non-financières, comme le risque climatique ou certains risques d'assurance....

Trois contreparties sont nécessaires dans ce processus : le détenteur initial de l'actif ou du risque, l'acheteur final du titre et un intermédiaire, appelé souvent "Trust". Nous détaillerons cette structure dans le cas très particulier des obligations catastrophe.

Lorsqu'il s'agit de la création de titres à partir d'une source de risque d'assurance, on parle généralement de transfert alternatif des risques ou "Alternative Risk Transfer" (A.R.T.)[1]. Le processus de titrisation implique dans ce cas précis deux éléments : la transformation des flux des contrats en titres financiers et le transfert des risques associés sur les marchés de capitaux grâce à l'échange de ces titres.

1.2.2 Développement d'un nouveau marché entre assurance et finance

Lorsque la possibilité de faire appel aux marchés de capitaux a été proposée aux compagnies d'assurance et de réassurance, celles-ci ont tout d'abord vu une menace pour leur secteur d'activité. Toutefois, cela apparaît désormais, de façon quasiment consensuelle, comme une évolution logique de l'assurance traditionnelle et comme un outil de gestion supplémentaire : dans cette évolution de l'intérêt des assureurs[2] pour l'A.R.T., plusieurs facteurs interviennent. Tout d'abord, les catastrophes naturelles du début des années 1990 ont induits des pertes sévères à l'industrie de l'assurance, mais on peut également citer le développement phénoménal des marchés des capitaux à la même période et la structure de plus en plus étroite du secteur de l'assurance, qui a connu de grandes fusions ... Nous reviendrons sur certains de ces faits dans le cas plus précis des "cat-bonds".

Alors que les produits dérivés de crédit ont offert aux banques une alternative aux fonds propres pour avoir un "bon" ratio Cooke, ces nouveaux instruments, appelés généralement produits dérivés d'assurance, peuvent permettre aux compagnies d'assurance et de réassurance, de se financer à moindre coût (avec, en plus, une certaine stabilité des coûts). Ainsi, aujourd'hui, bon nombre d'assureurs et de réassureurs les perçoivent comme une alternative peu coûteuse à la réassurance et la rétrocession (i.e. réassurance des réassureurs) ou à la constitution importante de fonds propres, légalement requise.

Exemple des obligations catastrophe

Dans cette partie, nous nous attachons à l'étude des produits dérivés d'assurance les plus populaires à l'heure actuelle i.e. les produits dérivés catastrophe[3]. La première obligation catastrophe a été émise en 1994, pour un montant nominal de 5 millions de dollars. Aujourd'hui, on compte une trentaine d'émissions, dont la moitié est encore en vie. Le montant nominal global est estimé à plus de 6 milliards de dollars. Environ 75% des transactions concernent les Etats-Unis. 45% couvrent des risques liés aux tremblements de terre et 55% des risques liés au vent. Mais, chose très importante, aucune obligation catastrophe n'a jamais été exercée. Le comportement du marché de ces produits, lorsqu'une

[1] En réalité, l'A.R.T. désigne tout financement de risque par des procédés autres que le marché traditionnel de l'assurance. La titrisation est donc seulement une des principales méthodes mais pas la seule (cf. le rapport de la Commission Européenne [1]).

[2] Nous nous concentrons surtout sur le marché américain de l'assurance, qui a vu naître en premier la titrisation de risque d'assurance.

[3] Rappelons qu'une catastrophe naturelle est habituellement définie aux Etats-Unis comme un événement naturel conduisant à plus de 5 milliards de dollars de pertes et affectant un nombre significatif d'assureurs et d'assurés.

catastrophe naturelle survient, n'est pas réellement connu...

Les ”*Nature-linked bonds*”, ou obligations dont le paiement des flux (coupons et/ou nominal) est rattaché à l'occurence d'un événement ”naturel” (catastrophe naturelle, événement météorologique...), sont des produits O.T.C. (Over The Counter i.e. de gré à gré) très développés à l'heure actuelle. Ces obligations peuvent être plus ou moins risquées en fonction de l'exposition partielle ou totale du principal et/ou des coupons au risque catastrophe ou météorologique. Elles sont très souvent comparées aux ”junk bonds”, le risque catastrophe et le risque météorologique ressemblant au risque de défaut. La plupart des banques d'investissement utilisent d'ailleurs les spreads de crédit des ”corporate bonds” pour évaluer les spreads des ”Nature-linked bonds”.

Prenons le cas d'une entreprise voulant se couvrir contre certains risques de catastrophes naturelles dans une certaine zone géographique pour une période de deux ans. Elle ne trouve pas de protection par les compagnies d'assurance et se tourne alors vers une banque d'investissement. Tout s'organise ensuite alors de la façon suivante :

Description du produit Si aucune catastrophe naturelle ne survient durant la vie de l'obligation, alors la structure des flux est la suivante :

Si, par contre, une catastrophe naturelle survient pendant la vie de l'obligation, alors deux flux supplémentaires apparaissent :

Les ”Nature-linked bonds” ont classiquement un taux de rendement supérieur à celui des ”T-bonds” (”Treasury bonds” : obligations émises par l'Etat Américain), ce qui est logique compte tenu du risque qu'ils incorporent. La période de deux ans (jusqu'à la maturité de l'obligation) est appelée période d'exposition.

Special Purpose Vehicle Le terme S.P.V. désigne "*Special Purpose Vehicle*". Cela ressemble fort aux "Mortgage Backed Securities" dans le cas des dettes fortement risquées. Ainsi, la banque d'investissement crée une S.P.V. permettant de regrouper puis de diviser le risque contre lequel l'entreprise se couvre. Puis elle le redistribue aux investisseurs par l'intermédiaire des "Nature-linked bonds".
Certains règles doivent être respectées concernant ces structures : une S.P.V. doit être solvable, sans risque de crédit. Un choix de réglementation ainsi que d'indice ou de valeur de référence doit être fait par les intervenants. La transparence doit, de plus, être respectée.
Certaines transactions ont été réalisées directement sans utiliser de S.P.V. (par exemple, transaction entre Sedgwick et SLF Re pour 57 millions de livres). Ces transactions soulignent la flexibilité de la titrisation mais on peut légitimement s'interroger sur la sécurité de ce type d'opération, notamment en ce qui concerne le risque de défaut.

Structure du produit L'argent reçu par la banque lui permet d'acheter des obligations d'Etat zéro-coupon et de maturité 2 ans, tandis que la prime d'assurance lui permet de garantir un taux de rendement plus fort que celui obligations d'Etat. Les investisseurs reçoivent alors les obligations zéro-coupon risquées à plus fort rendement mais s'engagent en cas de catastrophe à reverser une part du nominal. C'est ainsi que la banque sera en mesure de reverser des indemnités à l'entreprise. Le niveau de la prime versée par l'entreprise doit être suffisant pour garantir un taux de rendement des "Nature-linked bonds" attractif.

D'autres produits portant sur des événements sportifs[4] voire des produits de titrisation des risques habitation ou automobile sont également envisagés. Merryl Lynch évoque même la titrisation prochaine de risques relatifs à l'assurance-vie. Toutefois, comme le souligne le rapport de la Commission Européenne ([12]), les produits de l'A.R.T. sont hautement sophistiqués et bien souvent difficiles à comprendre même pour des spécialistes de l'assurance.

Intérêts pour ces nouveaux instruments

Le succès de ces nouveaux instruments est lié à plusieurs facteurs :

- Tout d'abord, les marchés financiers présentent une *formidable source potentielle de financement* pour le monde de l'assurance : leur capacité est évaluée à 13 trillions de dollars contre seulement 310 milliards de dollars pour les marchés de l'assurance. Les marchés financiers semblent dès lors suceptibles d'absorber, sans difficulté, les pertes consécutives à une catastrophe naturelle par exemple. Pour mémoire, aux Etats-Unis, une des catastrophes naturelles les plus importantes,

[4] Un contrat a été signé entre Albingia et la FIFA pour 3 milliards de dollars en juillet 1998 couvrant des pertes éventuelles lors des coupes du monde de football de 2002 et de 2006.

le cyclone Andrew, a causé plus de 70 milliards de dollars de pertes en Floride lors de son passage en 1992.

De plus, les structures diverses et variées des produits dérivés permettent aux assureurs et réassureurs d'avoir plus de flexibilité pour développer des produits sur-mesure afin de gérer un risque donné.

- D'autre part, les investisseurs "traditionnels" des marchés financiers voient, dans ces nouveaux produits, un *outil de diversification* pour leur portefeuille ainsi qu'une *source de rendement* important, compte tenu de leur performance attendue très intéressante. Ainsi les obligations catastrophe, ou "cat-bonds", ont un fort taux de rendement ainsi qu'une très bonne notation. En effet, toute émission d'obligation doit être notée par un organisme indépendant (comme Moody's ou Standard & Poor's). Cette note correspond à une certaine mesure du risque de crédit (en particulier de la probabilité de défaut) de l'émetteur du produit. Les meilleures notations correspondent à AAA (sans risque), c'est le cas des obligations émises par l'Etat Américain ou par l'Etat Français. Les émissions les plus risquées sont notées B ou C : il s'agit des "junk bonds". Or ces obligations catastrophe ne sont pas notées plus risquées que les "junk bonds", comme le tableau ci-dessous le souligne :

Merril Lynch AAA	Corporate bond index	$6,74\%$
USAA Class A-1	Hurricane bond (Aaa)	$8,41\%$
Swiss Re Class A-2	Earthquake bond (Baa3)	$8,65\%$
Swiss Re Class B	Earthquake bond (Ba1)	$10,49\%$
USAA Class A-2	Hurricane bond (Ba2)	$11,44\%$
Merril Lynch BB	Corporate bond index	$7,95\%$

Guy Carpenter[5] a mené une étude fictive comparant les performances des actions, "cat-bonds" et "T-bonds" de 1970 à 1994. Les "cat-bonds" ont, non seulement un rendement important, mais aussi une volatilité de rendement moindre que les actions et les obligations d'état (même avec des catastrophes majeures comme le cyclone Andrew). Leur rendement dépend beaucoup de la région des Etats-Unis considérée. D'autre part, l'occurence d'une catastrophe majeure comme Andrew a un impact moindre sur leur rendement que celui d'un crash boursier sur le rendement des actions. De plus, leur performance n'est pas liée à celle des autres actifs considérés (cf. par exemple K. Froot [31]).

- Enfin, du fait même de la structure juridique de ces produits, le *risque de crédit est quasiment inexistant*. Ceci rend le procédé de titrisation attractif pour les assureurs et les réassureurs, qui peuvent réellement "compter sur" leur couverture, ainsi que pour les investisseurs. En effet, la

[5]Guy Carpenter a beaucoup travaillé sur les produits catastrophe et a même créé un indice de pertes qui porte son nom. Cet indice sert de référence aux produits échangés sur le Bermuda Commodities Exchange.

protection d'assurance est collatérisée et investie dans une structure - Trust - à la naissance de la transaction. Les fonds permettant de couvrir le risque en cas de catastrophe sont donc disponibles dès l'émission.

Pour l'instant, la titrisation semble être une méthode permettant aux assureurs mais surtout aux réassureurs d'avoir une plus grande couverture de leur risque, c'est un complément aux fonds propres et à la rétrocession. Ainsi, lors de l'émission d'un "cat-bond", par exemple, il y a bien souvent une structure de couverture par tranches sous-jacente. Le réassureur supporte une partie des pertes grâce aux fonds propres, utilise la rétrocession sur une autre partie des pertes et la couverture liée au "cat-bond" pour une troisième partie. C'est une combinaison des trois méthodes qui permet d'avoir la couverture la plus optimale pour beaucoup d'intervenants. Le choix des "tranches" est primordial : leur niveau est déterminé par l'aversion au risque des actionnaires de la compagnie de réassurance ainsi que par le niveau des fonds propres de celle-ci. De façon consensuelle, un des spécialistes actuels de l'A.R.T., Chubb, estime que 55% des assureurs auront recours à ces produits dérivés dans les cinq prochaines années (jusqu'à 88% pour les plus grosses compagnies). A l'heure actuelle, 13% des assureurs y ont déjà eu recours. D'autre part, ce "nouveau marché" pourrait représenter jusqu'à 40% du marché traditionnel de l'assurance, représentant un montant notionnel de plus de 190 billions de dollars.

Un petit mot sur les produits dérivés climatiques

Les produits dérivés climatiques, produits dépendant de l'occurence d'un événement météorologique "normal" et non catastrophique, semblent s'inscrire dans cette même logique de titrisation de risque d'assurance, même si comme le soulignent Jane Locke et Don Stowers ([64]), il existe une grande différence entre ces produits dérivés et les contrats d'assurance classiques : en effet, ceux-ci concernent généralement des événements moyens ou normaux alors que l'assurance se préoccupe plus d'événements rares ou extrêmes. Toutefois, la nature du risque sous-jacent à ces contrats, n'étant pas un risque financier, combinée à une structure financière classique, tend logiquement à rapprocher les dérivés climatiques de ces produits dérivés d'assurance.

Aujourd'hui, les produits dérivés météo constituent un marché en plein essor aux Etats-Unis et commencent à apparaître en Europe. On estime la taille de ce marché à plus de 7 milliards de dollars et certains pensent qu'il va même atteindre facilement des trillions de dollars dans les années à venir. Ce marché est d'autant plus important que presque tous les acteurs de l'économie sont concernés par le risque météorologique. En effet, par exemple, selon W. Daley, ministre Américain de l'économie pendant la présidence Clinton, environ 80% des entreprises Américaines et plus de 1 trillion de dollars de l'économie (soit 25% du P.N.B. - Produit National Brut -) des Etats-Unis seraient concernés par le *risque météorologique*. De la même façon, plus de $1,25$ trillions de dollars de l'économie Européenne et 700 milliards de l'économie Japonaise seraient affectés. L'O.N.U. (Organisation des Nations Unies) évoque même que 17% de l'économie mondiale est susceptible d'être concernée par ce risque. Ce risque a un impact économique pouvant prendre trois formes principales :

- Il peut tout d'abord entraîner une *variabilité des revenus* d'une entreprise en ayant, par exemple, un impact sur les ventes : un exemple classique peut être celui du vendeur de parapluies, dont les ventes dépendent fortement du fait qu'il pleuve ou non.

- Il peut également conduire à une *variabilité des coûts* : par exemple, suite à un ouragan aux Etats-Unis, certains puits de pétrole ont été temporairement fermés par mesure de sécurité. L'offre se trouvant réduite, les prix du pétrole ont monté. On peut également penser à un fabricant de pâtes alimentaires, ayant de la semoule de blé dur comme matière première. Si le printemps est trop sec, les récoltes de blé sont peu abondantes et le coût des matières premières augmente.

- Enfin, il peut créer des *chocs négatifs sur la valeur de l'actif et du passif du bilan* de l'entreprise : ce risque peut augmenter la variance des flux et conduire à une explosion du ratio Sharpe.

D'autre part, les impacts de la météorologie sur l'activité d'une entreprise sont très souvent liés au volume. Ainsi, un fournisseur d'électricité devra faire face à une demande accrue, par exemple, pour le chauffage lors d'un hiver particulièrement rigoureux, et ce de façon quasiment indépendante du prix de l'électricité.

De plus, le risque météorologique comporte plusieurs spécificités par rapport aux risques standards en finance :

- Tout d'abord, il n'y a *pas de marché physique de météorologie* : il est impossible, en effet, d'acheter de la pluie ou du vent sur un marché donné.

- C'est aussi un *risque local*, sur le plan géographique : un jour donné, à une heure donnée, les conditions climatiques de Paris sont différentes de celles de Brest ou de Perpignan, voire de celles de la proche banlieue parisienne.

- D'autre part, la météorologie est *au delà de tout contrôle humain* : personne ne peut agir sur les conditions météorologiques futures.

- Enfin, les conditions météorologiques ont une *influence quasi-certaine* sur les activités humaines, comme l'agriculture, et par conséquent sur les prix. Par exemple, une gelée peut abimer les récoltes futures, qui s'en trouvent amoindries. La production est réduite et les prix augmentent.

Ainsi, les produits dérivés météo permettent à une entreprise de gérer ces risques liés aux conditions météorologiques. Ils lui offrent la possibilité de contrôler les effets des conditions climatiques sur la demande de ses produits, sur le coût des matières premières... Ils réduisent des revenus futurs très volatils à des "cash flows" plus prévisibles. Ce sont des produits extrèmement spécifiques, n'ayant pas l'utilisation classique des autres produits dérivés : en effet, comme la méteorologie ne peut pas être traitée directement sur les marchés, les produits dérivés météo ne sont donc pas utilisés pour couvrir les variations du cours du sous-jacent. Ils sont utilisés comme instruments de couverture contre d'autres risques dépendant des conditions météorologiques : par exemple, le risque que le prix de l'électricité augmente suite à une variation de températures.
D'autre part, le climat ayant surtout un impact sur le volume, plus que sur le prix, le rôle des produits dérivés météo, contrairement aux produits dérivés traditionnels, est plus lié à une couverture en volume qu'à une couverture en prix. Cette couverture en volume est très demandée, notamment par les producteurs d'énergie : en effet, la consommation d'énergie (comme pour le chauffage) est peu corrélée avec le prix de cette source d'énergie mais dépend fortement des conditions météorologiques.

1.3 Problème de classification de ces nouveaux instruments

Comme cela a été présenté dans la section précédente, de nouveaux instruments venant du monde de l'assurance sont apparus sur les marchés financiers. S'agit-il de produits d'assurance ou de produits financiers ? Cette question n'est pas une simple question de vocabulaire. En effet, de la réponse dépend le traitement comptable et fiscal de ces instruments.

Ainsi, certains produits dérivés d'assurance respectent plus particulièrement la logique de l'assurance et seront considérés comme contrats d'assurance. Ils seront alors régis par les lois de l'assurance. D'autres produits auront plus une logique financière et seront dès lors régis par les lois de la banque. D'ailleurs, beaucoup d'intervenants sur le marché des produits dérivés d'assurance tirent partie de ce manque de clarté et structurent les produits en fonction des avantages (fiscaux, juridiques...) proposés : ces produits peuvent être des contrats financiers dérivés, des contrats d'assurance ou même de réassurance.

Aux Etats-Unis, les différences de traitement sont multiples :

- De façon schématique, si un produit dérivé d'assurance est considéré comme une police d'assurance, cela signifie que tous les paiements seront potentiellement déductibles comme les primes d'assurance (Internal Revenue Code, I.R.C., §162) ou à hauteur d'un certain seuil (I.R.C. §165(d)). D'autre part, la prime pourra être amortie sur toute la vie du contrat et tous gains et pertes potentielles figureront aux "gains et pertes d'exploitation".

- Si, en revanche, le produit dérivé d'assurance est vu comme un contrat financier, tout est plus complexe dans son traitement comptable. En effet, le détenteur de ces produits doit avant tout déterminer si le contrat a une vocation de "couverture d'exposition ordinaire" : si tel est le cas, le montant de la prime pourra être déduit sous forme de pertes d'exploitation alors que, dans le cas contraire, le montant de la prime vient diminuer les gains en capitaux.

D'autre part, tout dépend également de la nature du contrat dérivé : s'il s'agit d'un contrat de gré à gré ou d'un contrat standardisé. Dans ce dernier cas, c'est la régulation $FASB133$ qui prévaut et les gains ou pertes non-réalisés doivent être enregistrés aux fonds propres du bilan comme "Comprehensive Income". S'il s'agit d'un contrat échangé sur le marché O.T.C., alors les gains et pertes sont inscrits à l'actif du bilan dans "Other Assets". La confusion la plus complète règne sur ce marché !

En Europe, tout est encore plus complexe, puisque les régulations varient d'un pays à l'autre : en France, Hollande et Suède, les produits d'assurance peuvent parfois être considérés comme des contrats sur matières premières. En Grande-Bretagne, ils sont régis par S.F.A. (Securities and Futures Authority). En Allemagne, Italie et Espagne, ils ne sont soumis à aucune régulation et en Pologne, ils sont même interdits !
Cette confusion réglementaire est un frein certain au bon développement de ce marché. En effet, cette question est délicate car la gestion purement comptable des dérivés d'assurance en dépend : en effet, alors que la prime d'un contrat d'assurance est immédiatement répertoriée dans la ligne "autres dépenses", la prime d'un produit dérivé doit être capitalisée et figurer au bilan comme actif. Ainsi, les changements de valeur d'un contrat d'assurance n'ont pas à être reportés mais ceux d'un dérivé doivent l'être impérativement (ligne "pertes et gains non réalisés"). Cela suppose une gestion quasi-dynamique du produit dérivé d'assurance !...

Beaucoup de réflexions doivent être menées sur ce domaine pour éviter les abus, clarifier les règles et favoriser l'accès à ce marché et par conséquent développer sa liquidité. Toutefois, cette tâche est d'autant plus délicate qu'il n'existe pas, à ce jour, de réglementation internationale standard tant dans le domaine de l'assurance que pour les marchés de capitaux. La seule restriction existante concerne les investisseurs dans le cas d'émission d'obligations : il doit s'agir de professionnels uniquement, afin d'éviter aux particuliers une trop forte exposition à une même source de risque.

Chapitre 2

Préliminaires à la structuration d'un produit illiquide

La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude de cette nouvelle classe de produits financiers, dont deux des caractéristiques majeures sont, comme cela a été souligné dans le premier chapitre, leur illiquidité importante et la nature non-financière de leur sous-jacent.

Nous nous intéressons ici à la structuration de ces produits illiquides et dépendant d'une source de risque non-financière ainsi qu'à leur évaluation. D'autre part, la structuration des contrats est dans ce cas un véritable enjeu. Une telle problématique n'est pas classique en finance, puisque la question standard est plus reliée à l'évaluation et à la gestion d'une structure donnée. Toutefois, dans le cas particulier de ces contrats dépendant d'une source de risque non-financière, le problème de la couverture de l'exposition au risque est cruciale pour au moins une des contreparties, puisque le marché sous-jacent est fortement illiquide, voire inexistant par nature. La logique de ces instruments est plus proche de celle d'un contrat d'assurance que de celle d'un simple produit dérivé,

Nous présentons dans ce chapitre le cadre général des différentes études réalisées dans cette première partie ainsi que les principales notations et hypothèses. Les chapitres suivants sont consacrés, quant à eux, à la détermination de la structure optimale du contrat présenté ci-dessous, dans différentes approches qui seront détaillées ultérieurement.

2.1 Hypothèses et notations

On considère un univers où les agents économiques sont exposés à une source de risque non-financière, notée Θ (par exemple, un risque météorologique....). L'incertitude est représentée par un espace de probabilité standard $(\Omega, \Im, \mathbb{P})$, où $\mathbb{P}$ est la probabilité prior[1] et $\Im$ est la tribu contenant toutes les sources de risque de l'univers. Cet espace est muni d'une filtration $(\Im_t)_{t \geq 0}$.

Une banque, notée agent B, a une exposition a priori $X(\Theta)$ à une date future T envers le risque Θ. Aucune contrainte spécifique n'est imposée sur le signe de $X(.)$. La banque veut transférer une partie de son exposition par l'intermédiaire d'un produit structuré sur le marché. Ainsi, elle fait appel à un investisseur, noté agent I et lui vend un contrat dont les flux dépendent de Θ. La structure d'un tel produit (i.e. la somme de ses flux capitalisés) est notée $F(\Theta)$. En 0, l'investisseur, dont la richesse initiale x est supposée strictement positive, verse le prix π du contrat à l'agent B. En échange, il reçoit $F(\Theta)$ en T [2]. Pour simplifier et clarifier cette étude, nous supposons que les coûts de transaction sont nuls.

La date T est considérée comme l'horizon. Il s'agit d'un temps fixe et non d'une maturité aléatoire. Chacun des flux est capitalisé jusqu'en T. β_i représente le facteur de capitalisation entre les dates i et T et plus généralement, $\beta_{i,t}$ représente le facteur de capitalisation entre les dates i et t $(i \leq t \leq T)$.

Alors, les flux capitalisés liés à la transaction[3], si celle-ci a lieu, peuvent s'écrire pour chacun des deux agents comme :

$$\begin{aligned} \text{Pour l'agent } B &\quad : \quad X(\Theta) - F(\Theta) + \pi\beta_0 \\ \text{Pour l'agent } I &\quad : \quad F(\Theta) + (x - \pi)\beta_0 \end{aligned}$$

Par contre, si aucune transaction entre les deux agents ne survient :

$$\begin{aligned} \text{Pour l'agent } B &\quad : \quad X(\Theta) \\ \text{Pour l'agent } I &\quad : \quad x\beta_0 \end{aligned}$$

La question est par conséquent de caractériser la structure optimale du contrat F et son prix π suivant un critère de choix donné.

2.2 Modélisation du critère de choix

Les deux agents sont supposés averses au risque. L'attitude de chacun d'entre eux est modélisée à l'aide d'une fonction d'utilité. Celle-ci est sensée représenter le niveau de satisfaction qu'un agent

[1] La probabilité prior désigne dans la suite la mesure de probabilité a priori de la théorie bayésienne. En finance, on parle généralement de probabilité historique. Elle ne dépend pas des vues et anticipations des différents agents économiques.
[2] $X(\Theta)$ et $F(\Theta)$ sont deux fonctions de la source de risque non-financière Θ.
[3] Le terme "transaction" désignera dans cette étude la transaction concernant la structure F.

économique donné retire d'une situation donnée. Ce niveau dépend bien-sûr de son aversion pour le risque. Dans cette étude, tous les agents sont supposés rationnels ; ainsi, ils souhaitent maximiser l'utilité qu'ils peuvent espérer d'une situation future (et incertaine). Un critère de choix pour un agent économique peut donc être la maximisation de son utilité espérée. Dans ce cadre rationnel, certaines conditions sur les fonctions d'utilité sont requises : elles doivent être continues, strictement croissantes et concaves.

Dans cette étude, par souci de simplicité, comme aucune contrainte particulière n'est imposée sur les différents flux capitalisés, les fonctions d'utilité des agents B et I, notées respectivement U_B et U_I, sont supposées être de type exponentiel, celles-ci ayant, en effet, la particularité d'être définies sur $\mathbb{R}$:

$$\forall z \in \mathbb{R}, \qquad U_i\left(z\right) = -\exp\left(-\gamma_i z\right) \qquad \text{for } i \in \{B; I\}$$

où γ_B et γ_I représentent les coefficients d'aversion pour le risque des agents B et I. Ces paramètres doivent être positifs. Ils caractérisent la sensibilité des deux agents envers le risque et ont un impact sur le critère d'utilité lui-même. D'autre part, les fonctions d'utilité exponentielle appartenant à la famille CARA (Constant Absolute Risk Aversion), γ_B et γ_I sont aussi les coefficients d'aversion absolue pour le risque.
Enfin, ces fonctions exponentielles permettent de jouer sur le critère suivant les valeurs prises par le coefficient d'aversion pour le risque. D'une part, lorsque celui-ci est suffisamment petit, maximiser l'utilité espérée est alors équivalent à un critère de type moyenne-variance. D'autre part, lorsque celui-ci est grand, le critère d'utilité espérée permet d'accorder plus d'importance aux pertes du fait de sa disymétrie.

Les deux agents n'ont pas les mêmes objectifs : la banque cherche à couvrir son exposition $X\left(\Theta\right)$ et l'investisseur peut "l'aider" dans sa démarche en acceptant une partie de ce risque, sous la forme d'une structure F qu'il peut acquérir pour un prix π. La relation entre ces deux agents est fondamentalement une relation d'assurance, même si les flux échangés font plutôt penser à une transaction financière classique : en effet, la banque qui veut s'assurer contre un certain risque va toucher une prime pour la transaction alors que dans un contrat d'assurance classique, elle devrait verser un montant initial. Toutefois, nous nous intéressons ici surtout à la logique sous-jacente à cette transaction. Ainsi, comme dans une relation d'assurance classique (cf. par exemple, A. Raviv [62]), les deux agents, B et I, n'ont pas les mêmes comportements :
Ainsi, l'agent B, "l'assuré", souhaite maximiser son utilité espérée, tandis que l'agent I, "l'assureur", est supposé passif au sens où il peut seulement décider de faire ou non cette transaction. Pour prendre sa décision, il acceptera toute transaction dont l'utilité espérée est supérieure à celle associée au fait

de ne rien faire.

2.3 Présentation succincte des différentes situations étudi ées

Dans les chapitres suivants, nous nous intéressons à l'impact de l'introduction d'un marché financier sur la structure optimale du contrat F et sur son prix ainsi qu'à l'impact de la structure F sur les décisions d'investissement des deux agents sur le marché financier. Plusieurs cas sont envisagés :

- Dans le chapitre 3, les agents déterminent a priori leur stratégie d'investissement sur le marché financier et ne la modifient pas avec l'apparition de la structure non-financière F.

- Dans les chapitres 4 et 5, les agents déterminent simultanément leur investissement sur le marché financier et la structure optimale F. Toutefois, leur stratégie d'investissement sur le marché est déterminée en ne prenant en compte que l'information donnée par les prix de marché observés.

- Dans le chapitre 6, les agents déterminent simultanément leur investissement sur le marché financier et la structure optimale F. Les stratégies d'investissement sur le marché peuvent dépendre des deux sources de risque (le risque non-financier Θ et le risque de marché purement financier).

Pour l'étude de ces différentes situations, certaines notations et hypothèses particulières sont nécessaires. Elles sont introduites dans les différents chapitres concernés.

Chapitre 3

Structuration d'un produit illiquide avec stratégie d'investissement a priori dans le numéraire de marché

Ce chapitre s'intéresse à la caractérisation de la structure optimale d'un produit illiquide ainsi qu'à son évaluation. Le cadre de l'étude et les notations sont ceux présentés dans le chapitre précédent.

Nous nous intéressons au cas où les agents peuvent uniquement intervenir sur la source de risque non-financière Θ. Puis, un marché financier est introduit. Les agents ont la possibilité d'intervenir sur ce marché, ils déterminent de façon a priori leur stratégie d'investissement et ne la modifie pas lorsqu'ils prennent en compte le risque non-financier. Dans ces deux situations, nous caractérisons la structure optimale F ainsi que son prix et étudions l'impact du marché financier sur cette structure.

Cette partie a fait l'objet d'une publication en 2002 dans Quantitative Finance, volume 2, p. 1-8 : "*Optimal design of derivatives in illiquid markets*" co-écrit avec Nicole El Karoui.

3.1 Une première approche simplifiée : Θ est la seule source de risque

En reprenant le cadre général de l'étude, détaillé dans le chapitre précédent, la première situation, où Θ est la seule source de risque prise en considération, est facilement représentable :

3.1.1 Caractérisation de la structure optimale

Programme d'optimisation

Lorsque Θ est la seule source de risque prise en compte par les deux agents, ceux-ci ne peuvent investir que dans le produit dépendant de ce risque, dont la structure F doit être déterminée, et dans l'actif sans risque. D'après le chapitre 2, les flux capitalisés des deux agents, si la transaction a lieu, sont

$$\begin{array}{rcl} \text{Pour l'agent } B & : & X(\Theta) - (F(\Theta) - \pi\beta_0) \\ \text{Pour l'agent } I & : & (F(\Theta) - \pi\beta_0) + x\beta_0 \end{array}$$

La question est alors la détermination jointe de la structure optimale F et de son prix, ou, plus précisément la détermination de l'écart $(F(\Theta) - \pi\beta_0)$, noté $\overline{F}(\Theta)$; nous reviendrons sur l'interprétation de $\overline{F}(\Theta)$ en termes de $F(\Theta) - \pi\beta_0$ par la suite.

Comme cela a été souligné dans le chapitre précédent, les deux agents, B et I, n'ont pas les mêmes comportements :
Ainsi, l'agent B, "l'assuré", souhaite maximiser son utilité espérée, tandis que l'agent I, "l'assureur", est supposé passif au sens où il peut seulement décider de faire ou non cette transaction. Pour prendre sa décision, il acceptera toute transaction dont l'utilité espérée est supérieure à celle associée au fait de ne rien faire. Par conséquent, le programme d'optimisation s'écrit :

$$\max_{\overline{F}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U_B\left(X(\Theta) - \overline{F}(\Theta)\right)\right]$$

$$s.c. \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U_I\left(\overline{F}(\Theta) + x\beta_0\right)\right] \geq U_I(x\beta_0)$$

où $s.c.$ désigne "sous la contrainte" et $U_I(x\beta_0)$ correspond au niveau d'utilité de l'agent I lorsque celui-ci investit toute sa richesse initiale dans un placement sans risque.

Plus simplement :

$$\begin{gathered} \min_{\overline{F}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma_B\left(X(\Theta) - \overline{F}(\Theta)\right)\right)\right] \\ s.c. \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma_I \overline{F}(\Theta)\right)\right] \leq 1 \end{gathered} \tag{3.1}$$

ou, en introduisant le multiplicateur de Lagrange, $\lambda_1 > 0$:

$$\inf_{\lambda_1} \min_{\overline{F}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma_B\left(X(\Theta) - \overline{F}(\Theta)\right)\right) + \lambda_1 \exp\left(-\gamma_I\left(\overline{F}(\Theta) + x\beta_0\right)\right)\right]$$

Notons que ce cas peut paraître trivial. Toutefois, son étude va jouer un rôle clé dans la suite, aussi nous allons la présenter de façon détaillée.

Ecart structure-prix optimal

La résolution du programme (3.1) donne l'écart $\overline{F}$ optimal :

Proposition 1 *Lorsque Θ est la seule source de risque prise en compte, l'écart optimal $\overline{F}^*(.)$ est donné par :*

$$\overline{F}^*(\Theta) = \frac{\gamma_B}{\gamma_B+\gamma_I} X(\Theta) + \frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp\left(-\frac{\gamma_I \gamma_B}{\gamma_B+\gamma_I} X(\Theta) \right) \right] \quad \mathbb{P} \ p.s.$$

Preuve :

Pour résoudre ce programme, des techniques de contrôle variationnel sont utilisées. L'argument clé est la conversion du problème d'optimisation en espérance en un problème d'optimisation trajectoriel :

$$\begin{aligned} J(\lambda_1) &\triangleq \min_{\overline{F}(.)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp\left(-\gamma_B\left(X(\Theta) - \overline{F}(\Theta)\right)\right) + \lambda_1 \exp\left(-\gamma_I\left(\overline{F}(\Theta) + x\beta_0\right)\right)\right] \\ &\geq \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\min_{\varphi} \left[\exp\left(-\gamma_B\left(X(\Theta) - \varphi\right)\right) + \lambda_1 \exp\left(-\gamma_I\left(\varphi + x\beta_0\right)\right)\right]\right] \\ &\geq \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp\left(-\gamma_B\left(X(\Theta) - \varphi^*\right)\right) + \lambda_1 \exp\left(-\gamma_I\left(\varphi^* + x\beta_0\right)\right)\right] \\ &\geq J(\lambda_1) \end{aligned}$$

où :

$$\varphi^* = \arg\min \left(\exp\left(-\gamma_B\left(X(\Theta) - \varphi\right)\right) + \lambda_1 \exp\left(-\gamma_I\left(\varphi + x\beta_0\right)\right)\right)$$

est caractérisé $\mathbb{P}$ $p.s.$ par :

$$\frac{\gamma_B}{\gamma_B+\gamma_I} X(\Theta) + cte(\lambda_1)$$

La constante est simplement déterminée en saturant la contrainte de l'agent I à l'optimum. D'où :

$$\overline{F}^*(\Theta) = \frac{\gamma_B}{\gamma_B+\gamma_I} X(\Theta) + \frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp\left(-\frac{\gamma_I \gamma_B}{\gamma_B+\gamma_I} X(\Theta) \right) \right] \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

Notons que l'optimalité vient directement de la concavité de la fonction d'utilité et de la condition du premier ordre. ■

Discussion sur la structure optimal et la règle d'évaluation

Du fait même de la définition de $\overline{F}$, il est évident qu'optimiser en $\overline{F}$ est équivalent à optimiser en F et π. La résolution du programme (3.1) donne un unique écart optimal $\overline{F}^*$, mais une infinité de structures optimales F^* et de prix optimaux π^*, tous deux définis à une constante près. Toutefois, il semble naturel de supposer que l'"indemnité" F^* est nulle si aucun risque ne survient. Aussi, la constante peut être considérée comme nulle. Ainsi :

$$\begin{aligned}
F^*(\Theta) &= \frac{\gamma_B}{\gamma_B+\gamma_I} X(\Theta) \quad \mathbb{P} \text{ p.s.} \\
\pi^* &= -\frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp\left(-\gamma_I F^*(\Theta)\right)\right]
\end{aligned}$$

La dépendance de la structure optimale F^* envers l'exposition initiale de la banque X est proportionnelle. Le coefficient de proportionalité, $\frac{\gamma_B}{\gamma_B+\gamma_I}$, peut être considéré comme l'aversion relative pour le risque de la banque. Ainsi, plus la banque est relativement averse au risque, plus elle va chercher à couvrir une large part de son exposition $X(.)$. De plus, la forme même de cette structure ne dépend pas de la distribution de Θ.

3.1.2 Extensions

Toutefois, il n'y a aucune raison pour que les deux agents B et I aient les mêmes vues Bayésiennes (cf., par exemple, Epstein [27] ou Quenez [61]). Dans cette sous-section, nous étendons les résultats précédents au cas où les deux agents diffèrent dans leurs "croyances" ou "anticipations". Ceci se traduit par l'existence de deux mesures de probabilité "prior" $\mathbb{P}_B$ et $\mathbb{P}_I$. Ces deux mesures de probabilité sont suposées être équivalentes à $\mathbb{P}$, qui reste la probabilité historique. Le programme d'optimisation s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
&\min_{\overline{F}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_B}\left[\exp\left(-\gamma_B\left(X(\Theta)-\overline{F}(\Theta)\right)\right)\right] \qquad (3.2) \\
&s.c. \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}_I}\left[\exp\left(-\gamma_I \overline{F}(\Theta)\right)\right] \leq 1
\end{aligned}$$

Du point de vue de la résolution, il est beaucoup plus efficace d'utiliser une de ces mesures de probabilité "prior", par exemple $\mathbb{P}_I$, comme probabilité de référence. Pour ce faire, il est nécessaire d'introduire la densité de Radon-Nikodym de $\mathbb{P}_B$ par rapport à $\mathbb{P}_I$, définie à une constante près par :

$$\frac{d\mathbb{P}_B}{d\mathbb{P}_I} = c.\exp\left(Y_{B,I}(\Theta)\right) \quad \text{où } c \text{ est une constante indépendante de } \overline{F}$$

$Y_{B,I}$ est la log-vraisemblance des vues de la banque relativement à celles de l'investisseur. Cette densité de Radon-Nikodym est Θ-mesurable[1].

[1] La log-vraisemblance relative $Y_{B,I}(\Theta)$ est déduite des log-vraisemblances $\ln\left(\frac{d\mathbb{P}_B}{d\mathbb{P}}\right)$ et $\ln\left(\frac{d\mathbb{P}_I}{d\mathbb{P}}\right)$.

Le critère de l'agent B se réécrit alors comme :

$$\min_{\overline{F}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_I} \left[\exp\left(-\gamma_B \left(X(\Theta) - \overline{F}(\Theta)\right)\right) \exp\left(Y_{B,I}(\Theta)\right)\right]$$

alors que la contrainte de l'agent I reste inchangée, i.e. $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_I}\left[\exp\left(-\gamma_I \overline{F}(\Theta)\right)\right] \leq 1$.

Très naturellement, l'exposition au risque modifiée, $X^{B,I}(\Theta)$ peut être introduite, de la façon suivante :

$$X^{B,I}(\Theta) = X(\Theta) - \frac{1}{\gamma_B} Y_{B,I}(\Theta)$$

Par conséquent, l'exposition de l'agent B peut être décomposée en deux termes : une partie objective $X(\Theta)$ et une partie "subjective" $Y_{B,I}(\Theta)$, qui prend en compte la divergence des vues des deux agents.

La résolution du programme (3.2) est immédiate en utilisant la Proposition 1. Les résultats suivants sont alors obtenus :

Proposition 2 *Lorsque Θ est la seule source de risque prise en compte et que les deux agents ont des vues Bayésiennes différentes, la divergence étant caractérisée par $Y_{B,I}(\Theta)$, la structure optimale $F^*(.)$ et son prix sont donnés par :*

$$F^*(\Theta) = \frac{\gamma_B}{\gamma_B + \gamma_I} X^{B,I}(\Theta) = \frac{\gamma_B}{\gamma_B + \gamma_I} X(\Theta) - \frac{1}{\gamma_B + \gamma_I} Y_{B,I}(\Theta) \quad \mathbb{P}\ p.s.$$

$$\pi^* \beta_0 = -\frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}_I}\left[\exp\left(-\gamma_I F^*(\Theta)\right)\right]$$

Commentaires :

i) La banque n'a pas la même qualité d'information sur son exposition "objective" $X(\Theta)$ et sur son exposition "modifiée" $X^{B,I}(\Theta)$. En effet, dans le second cas, elle supporte un risque supplémentaire lié à la difficulté d'identifier la log-vraisemblance $Y_{B,I}(\Theta)$. Comme cet effet est pondéré par $\frac{1}{\gamma_B}$, cette incertitude est d'autant plus faible que la banque est averse au risque.

ii) Notons que la banque doit connaitre la probabilité d'anticipation ou probabilité "prior" propre à l'investisseur. Dans l'étude précédente, elle ne devait connaitre que son aversion pour le risque. Une telle hypothèse peut paraître stricte. Toutefois, le contrat F n'est pas un contrat standard. Il est déterminé sur-mesure pour couvrir l'exposition de la banque. Mais il doit également convenir à l'investisseur. Pour le structurer et l'évaluer correctement, plusieurs négociations commerciales entre les deux agents doivent avoir lieu. Lors de ces réunions, de l'information ainsi que des points de vue personnels, incluant le degré d'aversion pour le risque et les anticipations concernant Θ, peuvent être échangés.

3.2 Introduction d'un marché financier

3.2.1 Cadre d'étude

Désormais, chacun des deux agents a également la possibilité d'intervenir sur les marchés financiers. On suppose que chacun d'entre eux investit la totalité de sa richesse résiduelle sur le marché dans un portefeuille qu'il aura choisi optimalement, suivant un critère qui sera décrit par la suite. Chaque agent détermine de façon a priori sa stratégie d'investissement sur les marchés financiers. Celle-ci ne dépend donc pas de la structure F, ni du risque Θ. $V_B(z)$ désigne la valeur en T de l'investissement de l'agent B lorsqu'il a investi un montant z en 0 et suivi une stratégie autofinançante ; $V_I(z)$ désigne la valeur en T de l'investissement de l'agent I, lorsqu'il a investi un montant z en 0 sur les marchés financiers.

Alors, les flux capitalisés, si la transaction se fait, peuvent s'écrire pour chacun des deux agents comme :

$$\begin{array}{rcl} \text{Pour l'agent } B & : & X(\Theta) - F(\Theta) + V_B(\pi) \\ \text{Pour l'agent } I & : & F(\Theta) + V_I(x - \pi) \end{array}$$

Par contre, si aucune transaction entre les deux agents ne survient :

$$\begin{array}{rcl} \text{Pour l'agent } B & : & X(\Theta) \\ \text{Pour l'agent } I & : & V_I(x) \end{array}$$

Notons que lorsque la transaction survient, chacun des deux agents supportent deux sources de risque, le risque Θ et le risque financier. Le problème de la caractérisation du marché financier et de ses liens avec le risque non-financier est alors primordial.

La question est de caractériser la structure optimale du contrat F et son prix suivant un critère de choix donné mais également d'analyser l'impact du marché financier sur cette structure optimale.

Par souci de simplicité, nous supposons ici que les deux agenst ont les mêmes vues concernant l'incertain. Par exemple, leurs croyances communes peuvent être représentées par la probabilité historique $\mathbb{P}$.

Utilisant la même logique, la banque veut maximiser son utilité espérée tandis que l'investisseur peut seulement décider s'il doit faire ou non faire la transaction, en regardant son utilité espérée. Toutefois, le critère doit désormais prendre en compte les portefeuilles de marché de chacun des agents. A priori, la contrainte de l'investisseur est plus complexe, puisqu'elle doit dépendre de sa richesse initiale x :

$$\min_{F,\pi} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(-\gamma_B \left(X \left(\Theta \right) - F \left(\Theta \right) + V_B \left(\pi \right) \right) \right) \right] \tag{3.3}$$

$$s.c. \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(-\gamma_I \left(F \left(\Theta \right) + V_I \left(x - \pi \right) \right) \right) \right] \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(-\gamma_I V_I \left(x \right) \right) \right]$$

3.2.2 Stratégies d'investissement sur le marché financier

Dans le cadre particulier de cette étude, les deux agents sont supposés avoir déterminé ex-ante la structure optimale de leur investissement sur le marché financier. Ces portefeuilles de marché sont appelés "portefeuilles de marché stratégiques". Ils sont optimaux par rapport à un critère d'utilité. Dans cette sous-section, nous rappelons simplement les résultats classiques de la théorie du portefeuille (cf., par exemple, R. Merton [54]) dans le cas des fonctions d'utilité exponentielles. Afin de donner les expressions des portefeuilles de marché stratégiques, il est nécessaire d'introduire un concept très pratique : celui de la "densité des prix d'état". Il s'agit de la densité de l'aléa associé au marché financier à une date future, t telle que $0 \leq t \leq T$. Celle-ci est notée H_t. Ainsi, il est possible de définir un processus $(H_t; 0 \leq t \leq T)$[2] et la propriété suivante est fondamentale :

$$\forall t \in [0,T] \qquad \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(H_t \right) = \frac{1}{\beta_{0,t}}$$

où $\beta_{0,t}$ est le facteur de capitalisation entre les dates 0 et t. En particulier, pour $t = T$:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(H_T \right) = \frac{1}{\beta_0}$$

Une famille de probabilités "forward-neutres", $(\mathbb{Q}_t; 0 \leq t \leq T)$, peut également être associée à ce processus de la façon suivante :

$$\forall t \in [0;T] \qquad \frac{d\mathbb{Q}_t}{d\mathbb{P}} = H_t \beta_{0,t}$$

et en particulier, pour $t = T$:

$$\frac{d\mathbb{Q}_T}{d\mathbb{P}} = H_T \beta_0$$

Nous rappelons brièvement que toute richesse terminale Ψ_T associée à un investissement initial z dans

[2] Une formulation classique de la dynamique de ce processus est :

$$\frac{dH_t}{H_t} = -r_t dt - \lambda_t dW_t$$

où $(r_t)_{t \geq 0}$ est le processus de taux court, $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ est le processus des primes de risque et W est un mouvement Brownien standard sous $\mathbb{P}$.

une stratégie autofinançante a la propriété suivante :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}(\Psi_T) = z\beta_0$$

En particulier, concernant la valeur terminale des portefeuilles de marché stratégiques des deux agents, les "contraintes de budget" suivantes prévalent :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}(V_B(\pi)) &= \pi\beta_0 \\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}(V_I(x-\pi)) &= (x-\pi)\beta_0\end{aligned}$$

Une telle notion est cruciale, puisque nous nous concentrons sur la richesse terminale des deux agents. La stratégie correspondante est obtenue comme le portefeuille répliquant cette quantité, en utilisant la règle d'évaluation classique.

Désormais, nous sommes en mesure de présenter le lemme suivant :

Lemma 3 *Soit U une fonction d'utilité exponentielle avec un coefficient d'aversion pour le risque γ :*

$$U(x) = -\exp(-\gamma x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

et H_T la densité des prix d'état, associée à la date future T. Le marché est supposé complet.
Si x désigne la richesse initiale et $V_T(x)$ la valeur en T de l'investissement dans le marché, choisi optimalement, lorsque x a été investi en 0, alors :

$$V_T(x) = -\frac{1}{\gamma}\ln H_T + \frac{1}{\gamma}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}(\ln H_T) + x\beta_0 \qquad \mathbb{P}\ p.s.$$

Remarques :
i) La problématique de ce Lemme est identique à celle de la Proposition 1. Les arguments de la preuve sont les mêmes.
ii) Notons que le portefeuille optimal est affine par rapport à la richesse initiale. Il n'y a aucune dépendance entre cette richesse ($x\beta_0$) et la partie aléatoire ($\delta_T(\gamma)$). Par souci de simplicité, les quantités suivantes sont introduites :

$$V_T(x) = \delta_T(\gamma) + x\beta_0 + c_T \qquad \mathbb{P}\ p.s.$$

où

$$\delta_T(\gamma) = -\frac{1}{\gamma}\ln H_T \quad \text{et} \quad c_T = \frac{1}{\gamma}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}(\ln H_T) = -\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}(\xi_T(\gamma))$$

iii) Enfin, notons que la partie aléatoire de $\gamma V_T(x)$ ne dépend pas de γ.

Par conséquent, revenant à notre problème, la valeur terminale des stratégies d'investissement sur les marchés des deux agents peuvent s'écrire :

$$V_B(z) = \delta_T(\widetilde{\gamma}_B) + c_T^B + z\beta_0 \quad \text{and} \quad V_I(z) = \delta_T(\widetilde{\gamma}_I) + c_T^I + z\beta_0 \tag{3.4}$$

si chacun d'entre eux a investi un montant z en 0 et si leurs coefficients d'aversion pour le risque sont respectivement $\widetilde{\gamma}_B$ et$\widetilde{\gamma}_I$.

Commentaires :

Il est relativement naturel de différencier le degré d'aversion pour le risque de marché et pour le risque non-financier Θ. En effet, ces deux sources de risque sont de natures différentes et l'accès à leur marché respectif n'est pas comparable. Dans la suite, $\widetilde{\gamma}_i$ désigne le coefficient d'aversion pour le risque de l'agent i envers le risque de marché, tandis que γ_i désigne son aversion pour le risque Θ.

3.2.3 Caractérisation de la structure optimale

Etant donné les expressions de V_B et V_I données par l'équation (3.4), le programme d'optimisation (3.3) peut se réécrire comme :

$$\min_{\overline{F}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma_B\left(X(\Theta) - \overline{F}(\Theta) + \delta_T(\widetilde{\gamma}_B)\right)\right)\right]$$

$$s.c. \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma_I\left(\overline{F}(\Theta) + \delta_T(\widetilde{\gamma}_I)\right)\right)\right] \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma_I \delta_T(\widetilde{\gamma}_I)\right)\right]$$

Notons que l'affinité de la valeur terminale de l'investissement dans le marché financier par rapport à la richesse initiale est primordiale. En effet, celle-ci nous permet de réécrire le programme en terme de l'écart $\overline{F}(\Theta)$, comme précédemment.

Réécriture technique du programme d'optimisation

Afin de revenir au cadre de notre analyse précédente, les deux critères doivent être réécrits en termes de Θ uniquement. Pour ce faire, les changements de probabilité suivants sont introduits :

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{Q}}_I}{d\mathbb{P}} = \frac{\exp\left(-\gamma_I \delta_T(\widetilde{\gamma}_I)\right)}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma_I \delta_T(\widetilde{\gamma}_I)\right)\right]}$$

La contrainte de l'agent I devient alors :

$$\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{Q}}_I}\left[\exp\left(-\gamma_I\left(\overline{F}(\Theta)\right)\right)\right] \leq 1$$

De la même façon, une mesure de probabilité spécifique à la banque peut être introduite :

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{Q}}_B}{d\mathbb{P}} = \frac{\exp\left(-\gamma_B \delta_T\left(\widetilde{\gamma}_B\right)\right)}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma_B \delta_T\left(\widetilde{\gamma}_B\right)\right)\right]}$$

Le critère de la banque devient :

$$\min_{\overline{F}} \mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{Q}}_B}\left[\exp\left(-\gamma_B\left(X(\Theta) - \overline{F}(\Theta)\right)\right)\right]$$

Ainsi, la résolution du programme (3.3) est équivalente à celle du programme (3.2) où Θ est la seule source de risque et où les deux agents ont des vues différentes. Toutefois, il convient de considérer la restriction des densités de Radon-Nikodym à la tribu engendrée par Θ, $\tau(\Theta)$. Alors, les mesures de probabilité $\mathbb{Q}_I$ et $\mathbb{Q}_B$, équivalentes à $\mathbb{P}$ sur $\tau(\Theta)$, respectivement "forward-neutre" pour l'agent I et l'agent B, sont introduites :

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{Q}}_I}{d\mathbb{P}}/_{\tau(\Theta)} \triangleq \frac{d\mathbb{Q}_i}{d\mathbb{P}} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma_i \delta_T\left(\widetilde{\gamma}_i\right)\right)/\Theta\right]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma_i \delta_T\left(\widetilde{\gamma}_i\right)\right)\right]} = k_i \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\left(H_T\right)^{\frac{\gamma_i}{\widetilde{\gamma}_i}}/\Theta\right] \qquad \text{pour } i \in \{B;I\}$$

où k_i est une constante strictement positive et :

$$\frac{d\mathbb{Q}_B}{d\mathbb{Q}_I} = c.\exp\left(Z_{B,I}(\Theta)\right) \quad \text{où } c \text{ est une constante indépendante de } \overline{F}.$$

D'où

$$Z_{B,I}(\Theta) = \ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\left(H_T\right)^{\frac{\gamma_B}{\widetilde{\gamma}_B}}/\Theta\right] - \ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\left(H_T\right)^{\frac{\gamma_I}{\widetilde{\gamma}_I}}/\Theta\right]$$

est la log-vraisemblance des vues conditionnelles de la banque relativement à celles de l'investisseur. Notons que $Z_{B,I}$ dépend de la distribution conditionnelle de H_T par rapport à Θ. Une telle dépendance mesure l'impact du risque non-financier Θ sur le marché financier (par exemple, impact de conditions climatiques sur la dynamique du marché). Toutefois, comme cela a été souligné précédemment, l'objectif de cette thèse n'est pas l'analyse de la distribution de Θ, ni celle de la dépendance entre ces deux sources de risque. Nous présentons seulement un exemple simple à la fin de ce chapitre.

Structure optimale et règle d'évaluation

Par conséquent, le programme d'optimisation (3.3) peut se réécrire comme :

$$\min_{\overline{F}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_I}\left[\exp\left(-\gamma_B\left(X(\Theta) - \overline{F}(\Theta)\right)\right)\exp\left(Z_{B,I}(\Theta)\right)\right]$$

$$s.c. \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_I}\left[\exp\left(-\gamma_I\left(\overline{F}(\Theta)\right)\right)\right] \leq 1$$

Très naturellement, l'exposition modifiée au risque $X^{B,I}(\Theta)$, relativement au marché, peut être introduite comme :

$$X^{B,I}(\Theta) = X(\Theta) - \frac{1}{\gamma_B} Z_{B,I}(\Theta)$$

Comme précédemment, l'exposition de la banque peut être décomposer en deux termes : une partie objective $X(\Theta)$ et une partie "subjective", $Z_{B,I}(\Theta)$, qui prend en compte la divergence des vues conditionnelles des deux agents, relativement à la mesure de probabilité "forward-neutre" de l'investisseur, $\mathbb{Q}_I$.

La résolution du programme (3.3) est par conséquent immédiate en utilisant les résultats précédents :

Proposition 4 *Lorsqu'un risque de marché est introduit et que les agents déterminent leur stratégie d'investissement de façon a priori, la structure optimale $F^*(.)$ et son prix sont donnés par :*

$$F^*(\Theta) = \frac{\gamma_B}{\gamma_B + \gamma_I} X^{B,I}(\Theta) = \frac{\gamma_B}{\gamma_B + \gamma_I} X(\Theta) - \frac{1}{\gamma_B + \gamma_I} Z_{B,I}(\Theta) \quad \mathbb{P}\ p.s.$$

$$\pi^* \beta_0 = -\frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_I} \left[\exp\left(-\gamma_I F^*(\Theta)\right) \right]$$

Remarques :

i) L'évaluation se fait sous la probabilité "forward-neutre" spécifique à l'investisseur. L'introduction d'un marché financier modifie les vues du risque Θ de chacun des deux agents.

ii) Une situation très particulière survient lorsque les agents ont la même aversion pour le risque de marché et pour le risque Θ :

$$\widetilde{\gamma}_i = \gamma_i \qquad \text{pour } i \in \{B; I\}$$

Les deux mesures de probabilité, $\mathbb{Q}_I$ et $\mathbb{Q}_B$, coïncident alors avec la probabilité forward-neutre conditionnelle et pour $i \in \{B; I\}$

$$\frac{d\mathbb{Q}_i}{d\mathbb{P}} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H_T/\Theta]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H_T]}$$

Commentaires :

Comme précédemment, la banque n'a pas la même qualité d'information sur son exposition objective $X(\Theta)$ et sur son exposition modifiée $X^{B,I}(\Theta)$. En effet, dans le second cas, elle supporte un risque supplémentaire lié à la difficulté d'identifier la log-vraisemblance conditionnelle $Z_{B,I}(\Theta)$. Comme cet effet est pondéré par $\frac{1}{\gamma_B}$, cette incertitude est d'autant plus faible que la banque est averse au risque. L'agent B cherche des informations sur les vues de l'agent I concernant la distribution conditionnelle du marché par rapport à Θ, au cours des négociations commerciales précédant la transaction.

3.2.4 Caractérisation dans le cadre gaussien

Même si la Proposition 4 donne une formule explicite de la structure optimale F^*, il est relativement difficile d'obtenir une expression simple dans un cadre général, puisque la log-vraisemblance conditionnelle peut être très complexe. Afin d'avoir une meilleure intuition de la structure F^*, nous présentons dans cette section, le cas gaussien, qui permet d'avoir une expression très simple de $Z_{B,I}$.

Cadre et structure optimale

Par souci de simplicité, les hypothèses suivantes sont faites : un couple gaussien (Θ, h) représente :

1. Le risque non-financier, Θ, qui est une variable gaussienne centrée réduite. Cette normalisation nous permet de simplifier les calculs.
2. Le marché financier est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire gaussienne centrée réduite h.
3. La dépendance entre ces deux sources de risque, Θ et le marché h, est donnée par :

$$h = \rho\Theta + \sqrt{1-\rho^2}\Theta^{\perp}$$

   où ρ est le coefficient de corrélation linéaire entre h et Θ,et $\Theta^{\perp}$ est indépendant de Θ.

Ces hypothèses sont moins restrictives qu'elles ne paraissent. En effet, ces hypothèses sont standard dans la littérature des taux d'intérêt (cf., par exemple, J. Hull et A. White [42]) satisfait ces conditions. Dans ce cas, la dynamique de la densité des prix d'état H est représentée par :

$$\frac{dH_t}{H_t} = -r_t dt - \lambda_t dW_t$$

où $(\lambda_s)_{s\geq 0}$ est un processus déterministe pour les primes de risque, $(W_s)_{s\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard sous $\mathbb{P}$ et $(r_s)_{s\geq 0}$ est un processus déterministe pour le taux court. D'où, pour tout $t \geq 0$:

$$H_t = \frac{1}{\beta_0} \exp\left\{ -\int_0^t \lambda_s dW_s - \int_0^t \frac{\lambda_s^2}{2} ds - \int_0^t r_s ds \right\}$$

Revenant à la densité des prix d'état H_T, elle est désormais caractérisée par :

$$H_T = \frac{1}{\beta_0} \exp\left(-kh - c\right)$$

où k et c sont deux constantes positives définies par :

$$\begin{aligned} k &= \left(\int_0^T \lambda_s^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ c &= \int_0^T \frac{\lambda_s^2}{2} ds + \int_0^T r_s ds \end{aligned}$$

Notons que, dans ce cadre d'étude[3], la dépendance entre les deux sources de risque réside dans le mouvement Brownien W.

Etant donnée la Proposition 4, la structure optimale $F^*(.)$ a toujours la composante $\frac{\gamma_B}{\gamma_B+\gamma_I} X(.)$. Aussi, nous étudions uniquement la différence entre ces deux termes, qui est égale à la log-vraisemblance conditionnelle : $-\frac{1}{\gamma_B+\gamma_I} Z_{B,I}(\Theta)$.

Etant donnée la structure gaussienne de cette partie, la loi conditionnelle de h sachant Θ est gaussienne de moyenne $\rho\Theta$ et de variance $\left(1-\rho^2\right)$. Pour $i \in \{B; I\}$, la quantité :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma_i \delta_T\left(\widetilde{\gamma}_i\right)\right)/\Theta\right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\frac{\gamma_i}{\widetilde{\gamma}_i} \ln H_T\right)/\Theta\right] \\ &= cte \times \exp\left(\frac{\gamma_i}{\widetilde{\gamma}_i} k\rho\Theta\right) \end{aligned}$$

est Θ-mesurable.

Finalement, après quelques calculs, la structure optimale est obtenue. La log-vraisemblance conditionnelle $Z_{B,I}(\Theta)$ est linéaire en Θ, et même en $\rho\Theta$, i.e. la restriction de h à $\tau(\Theta)$, et est donnée à une constante près par :

$$Z_{B,I}(\Theta) = k\left(\frac{\gamma_B}{\widetilde{\gamma}_B} - \frac{\gamma_I}{\widetilde{\gamma}_I}\right) \times \rho\Theta$$

Elle dépend de la corrélation linéaire entre Θ et le marché, mais également du ratio des différentes aversions pour le risque des agents, $\frac{\gamma_B}{\widetilde{\gamma}_B}$ et $\frac{\gamma_I}{\widetilde{\gamma}_I}$. Notons, que dans le cas particulier où les deux agents ont la même aversion pour le risque relative, $\frac{\gamma}{\widetilde{\gamma}}$, la log-vraisemblance conditionnelle est nulle et il n'y a aucune influence du marché financier sur la structure optimale F^*.

Extensions

Un cadre plus général a été développé par G. Constantinides ([13]). Dans son modèle, le processus des primes de risque est stochastique et la densité des prix d'état est représentée par l'exponentielle

[3] Les mêmes propriétés prévalent lorsque le couple (W, r) est un processus gaussien.

d'un processus gaussien au carré (cela correspond au cas quadratique gaussien) :

$$H_T = \frac{1}{\beta_0} \exp\left(-kh^2\right)$$

Comme précédemment, après quelques calculs, la structure optimale est obtenue. La log-vraisemblance conditionnelle $Z_{B,I}(\Theta)$ est linéaire en Θ^2, et même en $(\rho\Theta)^2$, i.e. le carré de la restriction de h à $\tau(\Theta)$, et est donnée à une constante près par :

$$Z_{B,I}(\Theta) = k\left(\frac{\gamma_B}{\tilde{\gamma}_B} - \frac{\gamma_I}{\tilde{\gamma}_I}\right) \times \left[1 - \frac{k}{2}\left(1-\rho^2\right)\left(\frac{\gamma_B}{\tilde{\gamma}_B} + \frac{\gamma_I}{\tilde{\gamma}_I}\right)\right] \times \rho^2\Theta^2$$

Elle dépend de la corrélation linéaire entre Θ et le marché, mais également du ratio des différentes aversions pour le risque des agents, $\frac{\gamma_B}{\tilde{\gamma}_B}$ et $\frac{\gamma_I}{\tilde{\gamma}_I}$. Notons, que, comme précédemment, dans le cas particulier où les deux agents ont la même aversion pour le risque relative, $\frac{\gamma}{\tilde{\gamma}}$, la log-vraisemblance conditionnelle est nulle et il n'y a aucune influence du marché financier sur la structure optimale F^*.

3.3 Quelques remarques de conclusion

La règle d'évaluation de la structure optimale est entièrement déterminée par l'investisseur, puisqu'elle est obtenue en saturant sa contrainte à l'optimum. Le prix est une fonction non-linéaire de la structure. Cette particularité vient directement de l'illiquidité du marché relatif au risque Θ. Notons que nous obtenons la même règle d'évaluation que celle du problème de réplication d'un flux terminal en utilisant un critère d'utilité (cf., par exemple S.D. Hodges et A. Neuberger [41] ou N. El Karoui et R. Rouge [23]). Il s'agit d'un prix d'indifférence ou prix de réserve. Ce résultat sera encore valable dans les autres approches présentées dans les chapitres 5 et 6.

Dans ce chapitre, nous avons étudié en détails l'impact d'une différence de vues entre les deux agents, mais également l'impact d'une différence entre leur niveau respectif d'aversion pour le risque de marché et pour le risque non-financier. Seule l'exposition initiale de la banque s'en trouve modifiée. Par conséquent, résoudre le problème avec différents coefficients d'aversion pour le risque de marché et pour le risque non-financier et/ou avec des vues différentes selon les deux agents revient simplement à résoudre le problème d'optimisation sous une même mesure d'anticipations, ou probabilité "prior", mais avec une exposition initiale de la banque modifiée correctement. Pour cette raison, nous nous intéressons, dans les chapitres suivants, uniquement à la situation où les deux agents partagent les mêmes anticipations et où ils ont le même degré d'aversion pour le risque de marché et pour le risque non-financier.

3.4 Annexe : Extensions aux fonctions d'utilité puissance

Dans cette partie, nous étendons l'étude menée dans ce chapitre aux fonctions d'utilité puissance. Pour ce faire, nous adoptons le même cadre d'étude que précédemment. Toutefois, l'attitude des deux agents, la banque et l'investisseur, face au risque est désormais caractérisée par une fonction d'utilité puissance avec seuil exogène. Ceci permet de tolérer un certain niveau de pertes. Ainsi :

$$\forall i \in \{B; I\} \qquad U_i(z) = \frac{(z+K_i)^{1-\gamma_i}}{1-\gamma_i} \times \mathbf{1}_{(z+K_i \geq 0)} \qquad \text{où } \gamma_i \in]0;1[$$

D'autre part, nous supposerons que lorsque $z + K_i < 0$, le niveau d'utilité est $-\infty$:

$$\forall i \in \{B; I\} \qquad U_i(z) = -\infty \qquad \text{si } z + K_i < 0$$

Ceci permet d'éviter toute transaction lorsque l'un des deux agents est dans une situation financière difficile[4].

Remarque : Le cadre des fonctions d'utilité puissance est relativement complexe. On doit en effet prendre complètement en compte la richesse initiale de l'investisseur. Pour limiter cet effet, on peut donner des valeurs particulières aux seuils. Par exemple :

$$K_B = 0 \text{ et } K_I = -x\beta_0$$

Ainsi, la richesse initiale de l'agent I n'interviendrait plus réellement.
Toutefois, une telle approche revient à masquer la particularité des fonctions d'utilité puissance, qui donne de l'importance aux richesses initiales...

3.4.1 Cadre de l'étude et programme d'optimisation

Nous supposons dans cette partie que Θ est la seule source de risque. Dans ce cas, les deux agents ne peuvent investir que dans un produit dépendant de Θ et dans l'actif sans risque. Comme précédemment, le programme d'optimisation s'écrit sous la forme suivante :

$$\max_{\overline{F}} \mathbb{E}\left[\frac{\left(X(\Theta) - \overline{F}(\Theta) + K_B\right)^{1-\gamma_B}}{1-\gamma_B} \mathbf{1}_{\left\{\left(X(\Theta)-\overline{F}(\Theta)+K_B\right)\geq 0\right\}}\right] \tag{3.5}$$

[4] Ainsi, avec les notations qui seront définies par la suite, si, par exemple, la banque a un problème de financement, i.e. si :

$$X(\Theta) + K_B < 0$$

le nouveau contrat financier $F(\Theta)$ représenterait une solution de financement pour elle. On aurait alors nécessairement $F^*(\Theta) < 0$. C'est ce type de situation que l'on cherche à éviter en supposant une utilité égale à $-\infty$ dans ce cas.

$$s.c.\quad \mathbb{E}\left[\left(\overline{F}(\Theta)+x\beta_0+K_I\right)^{1-\gamma_I}\mathbf{1}_{\left\{\left(\overline{F}(\Theta)+x\beta_0+K_I\right)\geq 0\right\}}\right]\geq\left(x\beta_0+K_I\right)^{1-\gamma_I}$$

où $(x\beta_0+K_I)^{1-\gamma_I}$ est le niveau d'utilité de l'agent I lorsque celui-ci ne fait pas de transaction avec la banque.

ou encore, en introduisant un multiplicateur de Lagrange $\lambda>0$:

$$\begin{aligned}&\inf_{\lambda}\max_{\overline{F}}\mathbb{E}\left[\begin{array}{c}\frac{\left(X(\Theta)-\overline{F}(\Theta)+K_B\right)^{1-\gamma_B}}{1-\gamma_B}\mathbf{1}_{\left\{\left(X(\Theta)-\overline{F}(\Theta)+K_B\right)\geq 0\right\}}\\ +\lambda\left(\overline{F}(\Theta)+x\beta_0+K_I\right)^{1-\gamma_I}\mathbf{1}_{\left\{\left(\overline{F}(\Theta)+x\beta_0+K_I\right)\geq 0\right\}}\end{array}\right]\\ \triangleq\;&\inf_{\lambda}\max_{\overline{F}}\mathbb{E}\left[\hat{U}\left(X(\Theta),\overline{F}(\Theta),x,\lambda\right)\right]\end{aligned}$$

où la fonction $\hat{U}$ est définie comme :

$$\hat{U}(a,b,c,\lambda)=U_B(a-b)+\lambda U_I(b+c)$$

Conditions du premier ordre

En utilisant des techniques classiques de contrôle variationnel et en notant $\overline{F}^*(.)$ la structure optimale du produit, on obtient la condition du premier ordre suivante :

$$\left[\begin{array}{c}\left(X(\Theta)-\overline{F}^*(\Theta)+K_B\right)^{-\gamma_B}\times\mathbf{1}_{\left(X(\Theta)-\overline{F}^*(\Theta)+K_B\geq 0\right)}\\ -\lambda\left(\overline{F}^*(\Theta)+x\beta_0+K_I\right)^{-\gamma_I}\times\mathbf{1}_{\left(\overline{F}^*(\Theta)+x\beta_0+K_I\geq 0\right)}\end{array}\right]=0\quad\mathbb{P}\text{ p.s.}\tag{3.6}$$

Preuve :

Soit $\overline{F}^*$ la structure optimale du contrat. Pour $\varepsilon>0$, on définit $\overline{F}^{\varepsilon}$ de la façon suivante :

$$\overline{F}^{\varepsilon}=\overline{F}^*+\varepsilon\left(\overline{F}-\overline{F}^*\right)\triangleq\overline{F}^*+\varepsilon\Delta\overline{F}$$

où $\overline{F}$ est une structure quelconque. Cela revient à perturber $\overline{F}^*$ par $\varepsilon\Delta\overline{F}$.
Par conséquent :

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\mathbb{E}\left[\hat{U}\left(X(\Theta),\overline{F}^{\varepsilon}(\Theta),x,\lambda\right)\right]\leq 0$$

ce qui revient à écrire, puisque les conditions d'intégrabilité sont satisfaites :

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial\hat{U}}{\partial\varepsilon}\left(X(\Theta),\overline{F}^{\varepsilon}(\Theta),x,\lambda\right)\right]\leq 0$$

Comme

$$\begin{array}{rl} & \hat{U}\left(X(\Theta),\overline{F}^{\varepsilon}(\Theta),x,\lambda\right) \\ = & \dfrac{\left(X(\Theta)-\overline{F}^{\varepsilon}(\Theta)+K_B\right)^{1-\gamma_B}}{1-\gamma_B}\times\mathbf{1}_{\left(X(\Theta)-\overline{F}^{\varepsilon}(\Theta)+K_B\geq 0\right)} \\ & +\lambda\dfrac{\left(\overline{F}^{\varepsilon}(\Theta)+x\beta_0+K_I\right)^{1-\gamma_I}}{1-\gamma_I}\times\mathbf{1}_{\left(\overline{F}^{\varepsilon}(\Theta)+x\beta_0+K_I\geq 0\right)} \end{array}$$

plusieurs cas peuvent se présenter :

- Tout d'abord, si $X(\Theta)-\overline{F}^{*}(\Theta)+K_B>0$ et $\overline{F}^{*}(\Theta)+x\beta_0+K_I>0$, ce qui revient à écrire :

$$-(x\beta_0+K_I)<\overline{F}^{*}(\Theta)<X(\Theta)+K_B$$

alors on peut perturber $\overline{F}^{*}$ par $\varepsilon\Delta\overline{F}$ avec $\Delta\overline{F}$ de signe quelconque. La dérivée par rapport à ε s'écrit :

$$\left[\begin{array}{l} \left(X(\Theta)-\overline{F}^{\varepsilon}(\Theta)+K_B\right)^{-\gamma_B}\times\mathbf{1}_{\left(X(\Theta)-\overline{F}^{\varepsilon}(\Theta)+K_B>0\right)} \\ -\lambda\left(\overline{F}^{\varepsilon}(\Theta)+x\beta_0+K_I\right)^{-\gamma_I}\times\mathbf{1}_{\left(\overline{F}^{\varepsilon}(\Theta)+x\beta_0+K_I>0\right)} \end{array}\right]\times\left(\overline{F}^{*}(\Theta)-\overline{F}(\Theta)\right)$$

Soit en prenant l'espérance :

$$\mathbb{E}\left[\left[\begin{array}{l} \left(X(\Theta)-\overline{F}^{\varepsilon}(\Theta)+K_B\right)^{-\gamma_B}\times\mathbf{1}_{\left(X(\Theta)-\overline{F}^{\varepsilon}(\Theta)+K_B>0\right)} \\ -\lambda\left(\overline{F}^{\varepsilon}(\Theta)+x\beta_0+K_I\right)^{-\gamma_I}\times\mathbf{1}_{\left(\overline{F}^{\varepsilon}(\Theta)+x\beta_0+K_I>0\right)} \end{array}\right]\times\left(\overline{F}^{*}(\Theta)-\overline{F}(\Theta)\right)\right]\leq 0$$

Or en $\varepsilon=0$, $\overline{F}^{\varepsilon}=\overline{F}^{*}$ et on peut réécrire l'inégalité précédente :

$$\mathbb{E}\left[\left[\begin{array}{l} \left(X(\Theta)-\overline{F}^{*}(\Theta)+K_B\right)^{-\gamma_B}\times\mathbf{1}_{\left(X(\Theta)-\overline{F}^{*}(\Theta)+K_B>0\right)} \\ -\lambda\left(\overline{F}^{*}(\Theta)+x\beta_0+K_I\right)^{-\gamma_I}\times\mathbf{1}_{\left(\overline{F}^{*}(\Theta)+x\beta_0+K_I>0\right)} \end{array}\right]\times\left(\overline{F}^{*}(\Theta)-\overline{F}(\Theta)\right)\right]\leq 0$$

- Puis, si $X(\Theta)-\overline{F}^{*}(\Theta)+K_B=0$ alors on ne peut plus perturber $\overline{F}^{*}$ par $\varepsilon\Delta\overline{F}$ avec $\Delta\overline{F}$ de signe quelconque. Il est indispensable que $-\varepsilon\Delta\overline{F}$ soit négatif, i.e. que $\Delta\overline{F}$ soit strictement positif. En effet, si $\Delta\overline{F}<0$, alors, $-\varepsilon\Delta\overline{F}>0$ et

$$X(\Theta)-\overline{F}^{\varepsilon}(\Theta)+K_B>0$$

Ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{\left(X(\Theta)-\overline{F}^{\varepsilon}(\Theta)+K_B\right)^{1-\gamma_B}}{1-\gamma_B}\mathbf{1}_{\left(X(\Theta)-\overline{F}^{\varepsilon}(\Theta)+K_B\geq 0\right)}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{\left(-\varepsilon\Delta\overline{F}\right)^{1-\gamma_B}}{1-\gamma_B}=\left(-\Delta\overline{F}\right)^{1-\gamma_B}\frac{\varepsilon^{-\gamma_B}}{1-\gamma_B}$$

Or

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\Delta\overline{F}\right)^{1-\gamma_B}\frac{\varepsilon^{-\gamma_B}}{1-\gamma_B}=+\infty$$

La condition du premier ordre ne peut pas être satisfaite. La seule perturbation possible pour $\overline{F}^*$ sur la frontière $\{X(\Theta)+K_B\}$ est $\Delta\overline{F}\ >\ 0$.

- Enfin, si $x\beta_0+\overline{F}^*(\Theta)+K_I=0$ alors on ne peut plus perturber $\overline{F}^*$ par $\varepsilon\Delta\overline{F}$ avec $\Delta\overline{F}$ de signe quelconque. Il est indispensable $\varepsilon\Delta\overline{F}$ soit négatif, i.e. que $\Delta\overline{F}$ soit strictement négatif. En effet, si $\Delta\overline{F}>0$, alors, $\varepsilon\Delta\overline{F}>0$ et

$$x\beta_0+\overline{F}^\varepsilon(\Theta)+K_I>0$$

Ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{\left(x\beta_0+\overline{F}^\varepsilon(\Theta)+K_I\right)^{1-\gamma_I}}{1-\gamma_I}\mathbf{1}_{\left(x\beta_0+\overline{F}^\varepsilon(\Theta)+K_I\geq 0\right)}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{\left(\varepsilon\Delta\overline{F}\right)^{1-\gamma_I}}{1-\gamma_I}=\left(\Delta\overline{F}\right)^{1-\gamma_I}\frac{\varepsilon^{-\gamma_I}}{1-\gamma_I}$$

Or

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\Delta\overline{F}\right)^{1-\gamma_I}\frac{\varepsilon^{-\gamma_I}}{1-\gamma_I}=+\infty$$

La condition du premier ordre ne peut pas être satisfaite. La seule perturbation possible pour $\overline{F}^*$ sur la frontière $\{-(x\beta_0+K_I)\}$ est $\Delta\overline{F}\ <\ 0$.

Toutefois, on peut facilement supposer que ces deux frontières ne sont pas chargées. Par exemple, si Θ est une variable aléatoire continue, cette hypothèse est toujours vraie. Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{F}^*(\Theta)=X(\Theta)+K_B\right)&=0\\ \mathbb{P}\left(\overline{F}^*(\Theta)=-(x\beta_0+K_I)\right)&=0\end{aligned}$$

La dérivée de $\mathbb{E}\left[\hat{U}\left(X(\Theta),\overline{F}^\varepsilon(\Theta),x,\lambda\right)\right]$ par rapport à ε peut alors s'écrire avec les inégalités larges sur les ensembles, puisque :

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{\left(X(\Theta)-\overline{F}^\varepsilon(\Theta)+K_B>0\right)}&=\mathbf{1}_{\left(X(\Theta)-\overline{F}^\varepsilon(\Theta)+K_B\geq 0\right)}\\ \mathbf{1}_{\left(\overline{F}^\varepsilon(\Theta)+x\beta_0+K_I>0\right)}&=\mathbf{1}_{\left(\overline{F}^\varepsilon(\Theta)+x\beta_0+K_I\geq 0\right)}\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c}\left(X(\Theta)-\overline{F}^\varepsilon(\Theta)+K_B\right)^{-\gamma_B}\times\mathbf{1}_{\left(X(\Theta)-\overline{F}^\varepsilon(\Theta)+K_B\geq 0\right)}\\ -\lambda\left(\overline{F}^\varepsilon(\Theta)+x\beta_0+K_I\right)^{-\gamma_I}\times\mathbf{1}_{\left(\overline{F}^\varepsilon(\Theta)+x\beta_0+K_I\geq 0\right)}\end{array}\right]\times\left(\overline{F}^*(\Theta)-\overline{F}(\Theta)\right)$$

Soit en prenant l'espérance :

$$\mathbb{E}\left[\left[\begin{array}{c}\left(X(\Theta)-\overline{F}^{\varepsilon}(\Theta)+K_B\right)^{-\gamma_B}\times\mathbf{1}_{\left(X(\Theta)-\overline{F}^{\varepsilon}(\Theta)+K_B\geq 0\right)}\\ -\lambda\left(\overline{F}^{\varepsilon}(\Theta)+x\beta_0+K_I\right)^{-\gamma_I}\times\mathbf{1}_{\left(\overline{F}^{\varepsilon}(\Theta)+x\beta_0+K_I\geq 0\right)}\end{array}\right]\times\left(\overline{F}^{*}(\Theta)-\overline{F}(\Theta)\right)\right]\leq 0$$

Or en $\varepsilon=0$, $\overline{F}^{\varepsilon}=\overline{F}^{*}$ et on peut réécrire l'inégalité précédente :

$$\mathbb{E}\left[\left[\begin{array}{c}\left(X(\Theta)-\overline{F}^{*}(\Theta)+K_B\right)^{-\gamma_B}\times\mathbf{1}_{\left(X(\Theta)-\overline{F}^{*}(\Theta)+K_B>0\right)}\\ -\lambda\left(\overline{F}^{*}(\Theta)+x\beta_0+K_I\right)^{-\gamma_I}\times\mathbf{1}_{\left(\overline{F}^{*}(\Theta)+x\beta_0+K_I>0\right)}\end{array}\right]\times\left(\overline{F}^{*}(\Theta)-\overline{F}(\Theta)\right)\right]\leq 0$$

■

Notons que pour avoir l'égalité (3.6), il est nécessaire que :

$$X(\Theta)+K_B\geq-(x\beta_0+K_I)\tag{3.7}$$

Sinon on aurait une contradiction (un terme strictement positif ou strictement négatif d'un côté et 0 de l'autre côté). Cette condition n'est pas absurde. En effet, $X(\Theta)+K_B+x\beta_0+K_I$ est la richesse globale du marché. Imposer $X(\Theta)+K_B\geq-(x\beta_0+K_I)$ revient à imposer qu'il y ait suffisamment de ressources dans le marché pour couvrir les pertes. Si la condition (3.7) n'est pas satisfaite, alors la condition du premier ordre (3.6) n'est jamais réalisée et il est optimal qu'aucune transaction ne se fasse entre les deux agents. En effet, "ne rien faire" est également solution du programme (3.5).

Alors sur l'ensemble $\{X(\Theta)+K_B\geq-(x\beta_0+K_I)\}$, où une transaction peut se faire (condition

(3.7)), on a une relation entre la structure optimale, notée ici[5] $Y(\Theta)$ et $X(.)$, x et les autres paramètres liés aux fonctions d'utilité :

$$(X(\Theta) - Y(\Theta) + K_B)^{-\gamma_B} = \lambda (Y(\Theta) + x\beta_0 + K_I)^{-\gamma_I} \quad \mathbb{P} \text{ p.s.} \tag{3.8}$$

Notons que, comme $\lambda < 0$, $-\lambda = |\lambda|$.

Cette équation est délicate à résoudre dans un cadre général. Nous étudions tout d'abord le cas particulier suivant :

3.4.2 Cas où les deux agents ont la même aversion pour le risque

Détermination de la structure optimale

Dans le cas particulier où la banque et l'investisseur ont la même aversion vis à vis du risque, $\gamma_B = \gamma_I \triangleq \gamma$, l'équation (3.8) s'écrit, en posant $\widehat{\lambda} = \lambda^{-\frac{1}{\gamma}} > 0$:

$$X(\Theta) - Y(\Theta) + K_B = \widehat{\lambda} (Y(\Theta) + x\beta_0 + K_I) \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

Par conséquent :

$$Y(\Theta) = \frac{X(\Theta) + K_B - \widehat{\lambda}(x\beta_0 + K_I)}{1 + \widehat{\lambda}} \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

soit :

$$\overline{F}^*(\Theta) = \left[\frac{1}{1+\widehat{\lambda}}(X(\Theta) + K_B) - \frac{\widehat{\lambda}}{1+\widehat{\lambda}}(x\beta_0 + K_I)\right] \times \mathbf{1}_{(X(\Theta)+K_B \geq -(x\beta_0+K_I))} \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

$$\overline{F}^*(\Theta) = [\alpha (X(\Theta) + K_B) + (1-\alpha)(-(x\beta_0 + K_I))] \times \mathbf{1}_{(X(\Theta)+K_B \geq -(x\beta_0+K_I))} \quad \mathbb{P} \text{ p.s} \tag{3.9}$$

où

$$\alpha \triangleq \frac{1}{1+\widehat{\lambda}} = \frac{1}{1+\lambda^{-\frac{1}{\gamma}}}$$

Comme $\widehat{\lambda}$ étant une fonction décroissante de λ, α est une fonction croissante de λ.

D'autre part, $\overline{F}^*(.)$ est une combinaison convexe des richesses (avec seuils) de la banque et de l'investisseur i.e. combinaison des bornes où la transaction est possible. Le partage du risque est linéaire entre les deux agents, lorsque ceux-ci ont la même aversion pour le risque.

[5] On note, en effet, pour simplifier :

$$Y(\Theta) = \overline{F}^*(\Theta)\, \mathbf{1}_{(X(\Theta)+K_B \geq -(x+K_I))}$$

Détermination de la valeur optimale du multiplicateur de Lagrange

Il reste alors à déterminer plus précisément la valeur optimale de λ, ou de façon équivalente de α. Pour cela, on utilise la contrainte de l'investisseur. On sait qu'à l'optimum $\overline{F}^*(.)$, cette contrainte est saturée :

$$\mathbb{E}\left[\frac{\left(\overline{F}^*(\Theta)+x\beta_0+K_I\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\times \mathbf{1}_{\left(\overline{F}^*(\Theta)+x\beta_0+K_I\geq 0\right)}\right]=\frac{(x\beta_0+K_I)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

Nous travaillons sur l'ensemble où une transaction est possible (équation (3.9)), donc $\overline{F}^*(\Theta)+x\beta_0+K_I\geq 0$. D'où :

$$\mathbb{E}\left[\left(\overline{F}^*(\Theta)+x\beta_0+K_I\right)^{1-\gamma}\right]=(x\beta_0+K_I)^{1-\gamma}$$

En remplaçant $\overline{F}^*(\Theta)$ dans la formule ci-dessus par l'expression donnée par (3.9), on obtient :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left(\left[\alpha\left(X(\Theta)+K_B\right)+(1-\alpha)\left(-\left(x\beta_0+K_I\right)\right)\right]\mathbf{1}_{(X(\Theta)+K_B\geq-(x\beta_0+K_I))}+x\beta_0+K_I\right)^{1-\gamma}\right]\\=\;&(x\beta_0+K_I)^{1-\gamma}\end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\begin{array}{c}\left[\alpha\left(X(\Theta)+K_B+x\beta_0+K_I\right)\right]^{1-\gamma}\mathbf{1}_{(X(\Theta)+K_B\geq-(x\beta_0+K_I))}\\+\left(x\beta_0+K_I\right)^{1-\gamma}\mathbf{1}_{(X(\Theta)+K_B<-(x\beta_0+K_I))}\end{array}\right]&=(x\beta_0+K_I)^{1-\gamma}\\ \alpha^{1-\gamma}\mathbb{E}\left[\left(X(\Theta)+K_B+x\beta_0+K_I\right)^{1-\gamma}\mathbf{1}_{(X(\Theta)+K_B\geq-(x\beta_0+K_I))}\right]&\\+\left(x\beta_0+K_I\right)^{1-\gamma}\mathbb{P}\left(X(\Theta)+K_B<-\left(x\beta_0+K_I\right)\right)&=(x\beta_0+K_I)^{1-\gamma}\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}&\alpha^{1-\gamma}\mathbb{E}\left[\left(X(\Theta)+K_B+x\beta_0+K_I\right)^{1-\gamma}\mathbf{1}_{(X(\Theta)+K_B\geq-(x\beta_0+K_I))}\right]\\=\;&(x\beta_0+K_I)^{1-\gamma}\,\mathbb{P}\left(X(\Theta)+K_B\geq-\left(x\beta_0+K_I\right)\right)\end{aligned}$$

D'où finalement, le paramètre α prend la valeur donnée par :

$$\alpha=\frac{x\beta_0+K_I}{\mathbb{E}\left[\left(X(\Theta)+K_B+x\beta_0+K_I\right)^{1-\gamma}/X(\Theta)+K_B\geq-\left(x\beta_0+K_I\right)\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}}\tag{3.10}$$

Cette expression peut également s'écrire sur l'ensemble $\{X(\Theta)+K_B\geq-(x\beta_0+K_I)\}$ où une transaction est possible :

$$\alpha=\frac{x\beta_0+K_I}{\mathbb{E}\left[\left(X(\Theta)+K_B+x\beta_0+K_I\right)^{1-\gamma}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}}$$

Par conséquent, puisque la fonction :

$$p \mapsto \mathbb{E}\left[Z^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

est croissante en p pour $p > 0$ et Z une variable aléatoire prenant ces valeurs dans $\mathbb{R}_+$, α est croissante en γ. Ainsi, plus l'aversion au risque de deux agents, représentée par le coefficient γ, est importante, plus l'agent B va chercher à se couvrir et moins l'agent I souhaite être exposé au risque Θ.
D'autre part, α est une fonction croissante en x, donc λ, multiplicateur de Lagrange, est également une fonction croissante de x, la richesse initiale de l'investisseur.

En utilisant la valeur de α trouvée dans (3.10) dans l'équation (3.9), on obtient finalement la proposition suivante :

Proposition 5 *La structure optimale (recentrée autour du prix), solution du programme (3.5) sur l'ensemble* $\{X(\Theta) + K_B \geq -(x\beta_0 + K_I)\}$, *lorsque les deux agents ont la même aversion pour le risque* γ, *est donnée par :*

$$(x\beta_0 + K_I)\left[\frac{(X(\Theta) + K_B) + (x\beta_0 + K_I)}{\mathbb{E}\left[(X(\Theta) + K_B + x\beta_0 + K_I)^{1-\gamma} / X(\Theta) + K_B \geq -(x\beta_0 + K_I)\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}} - 1\right] \quad \mathbb{P}\ p.s.$$

3.4.3 Cas où les deux agents n'ont pas la même aversion pour le risque

Dans un premier temps, on peut écrire, de façon générale, i.e. sans préciser le type de la fonction d'utilité, l'équation (3.6) précédente :

$$U_B'(X(\Theta) - Y(\Theta)) - \lambda U_I'(Y(\Theta) + x\beta_0) = 0 \tag{3.11}$$

où $Y(\Theta)$ désigne la structure optimale du produit $\overline{F}^*(\Theta)$, sur l'ensemble où une transaction peut avoir lieu, si restriction il y a.

En composant l'équation (3.11) par $U_B'^{-1}$, on obtient :

$$X(\Theta) - Y(\Theta) = U_B'^{-1}\left[\lambda U_I'(Y(\Theta) + x\beta_0)\right]$$

$Y(\Theta)$ est par conséquent déterminé de façon implicite par l'équation suivante :

$$Y(\Theta) = X(\Theta) - U_B'^{-1}\left[\lambda U_I'(Y(\Theta) + x\beta_0)\right] \tag{3.12}$$

De plus, à l'optimum, la contrainte de l'agent I est saturée :

$$\mathbb{E}\left[U_I(Y(\Theta) + x\beta_0)\right] = U_I(x\beta_0)$$

ce qui revient à dire que $x\beta_0$ est l'équivalent certain de $Y(\Theta) + x\beta_0$. Ainsi :

$$\mathbb{E}\left[U_I\left(Y\left(\Theta\right) + x\beta_0\right) - U_I\left(x\beta_0\right)\right] = 0 \tag{3.13}$$

Or, on peut écrire que, pour tout couple de réels (a, b) :

$$U_I(a) - U_I(b) = \int_0^1 U_I'\left[b - \delta(a-b)\right](a-b)\,d\delta$$

Alors, l'équation (3.13) s'écrit finalement comme :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^1 U_I'\left(x\beta_0 - \delta Y(\Theta)\right) Y(\Theta)\,d\delta\right] &= 0 \\
\mathbb{E}\left[Y(\Theta)^* \int_0^1 U_I'\left(x\beta_0 - \delta Y(\Theta)\right) d\delta\right] &= 0
\end{aligned}$$

Alors, $\frac{\int_0^1 U_I'(x\beta_0 - \delta Y(\Theta))d\delta}{\mathbb{E}\left[\int_0^1 U_I'(x\beta_0 - \delta Y(\Theta))d\delta\right]}$ peut définir une densité de Radon-Nikodym, caractérisant un changement de probabilité propre à l'agent I , noté $\frac{d\mathbb{Q}_I}{d\mathbb{P}}$:

$$\mathbb{E}\left[Y(\Theta)\int_0^1 U_I'\left(x\beta_0 - \delta Y(\Theta)\right) d\delta\right] = \mathbb{E}\left[Y^*(\Theta)\frac{\int_0^1 U_I'\left(x\beta_0 - \delta Y(\Theta)\right) d\delta}{\mathbb{E}\left[\int_0^1 U_I'\left(x\beta_0 - \delta Y(\Theta)\right) d\delta\right]}\right] = 0$$

soit

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_I}\left(Y(\Theta)\right) = 0$$

Ainsi, sous cette nouvelle probabilité $\mathbb{Q}_I$, la structure optimale du contrat financier $\overline{F}$ a une espérance nulle. Cette structure comportant tous les flux du contrat, y compris son prix, cette mesure de probabilité est en quelle sorte une probabilité "risque-neutre".

Existence et unicité du contrat optimal

On étudie la fonction suivante, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a,y) &\longrightarrow \Phi^{(\lambda)}(a,y) \\ \text{où } \Phi^{(\lambda)}(a,y) &= U_B'(a-y) - \lambda U_I'(y + x\beta_0) \end{aligned}$$

où $a \in \mathbb{R}$. Alors, d'après l'équation (3.8) :

$$\Phi^{(\lambda)}\left(X(\Theta), \overline{F}^*(\Theta)\right) = 0 \quad \mathbb{P}\ p.s.$$

Calcul des fonctions dérivées partielles de $\Phi^{(\lambda)}$ Les dérivées partielles de la fonction $\Phi^{(\lambda)}(a,y)$ s'écrivent :

- *Dérivée par rapport à y, notée $\Phi_y^{(\lambda)}$:*

$$\begin{aligned} \Phi_y^{(\lambda)}(a,y) &= -U_B''(a-y) - \lambda U_I''(y + x\beta_0) \\ &= -\left[U_B''(a-y) + \lambda U_I''(y + x\beta_0)\right] > 0 \end{aligned}$$

Comme $\Phi_y^{(\lambda)}(a,y) > 0$, alors $\Phi^{(\lambda)}(a,y)$ est strictement croissante en y.

- *Dérivée par rapport à λ, notée $\Phi_\lambda^{(\lambda)}(a,y)$:*

$$\Phi_\lambda^{(\lambda)}(a,y) = -U_I'(y + x\beta_0) < 0$$

Comme $\Phi_\lambda^{(\lambda)}(a,y) < 0$, alors $\Phi^{(\lambda)}(a,y)$ est strictement décroissante en λ.

- *Dérivée par rapport à a, notée $\Phi_a^{(\lambda)}(a,y)$:*

$$\Phi_a^{(\lambda)}(a,y) = U_B''(a-y) < 0$$

Comme $\Phi_a^{(\lambda)}(a,y) < 0$, alors $\Phi^{(\lambda)}(a,y)$ est strictement décroissante en a.

C'est la monotonie en y qui nous intéresse. Il reste à étudier la valeur que prend $\Phi^{(\lambda)}(a,y)$ aux bornes du domaine des valeurs possibles pour y. Nous revenons donc aux fonctions d'utilité puissance.

Retour aux fonctions d'utilité puissance Il s'agit d'un cas particulier de l'étude précédente. Dans ce cas, la fonction $\Phi^{(\lambda)}(a,y)$ s'écrit :

$$\Phi^{(\lambda)}(a,y) = (a+K_B-y)^{-\gamma_B} - \lambda\,(y+x\beta_0+K_I)^{-\gamma_I}$$

D'après la condition d'existence d'une transaction (3.7), y peut prendre des valeurs dans l'intervalle $]-(x\beta_0+K_I)\,;a+K_B[$. D'où, il est possible de calculer les valeurs prises par $\Phi^{(\lambda)}$ lorsque y tend vers les bornes :

$$\begin{aligned}
\lim_{y\downarrow-(x\beta_0+K_I)} \Phi^{(\lambda)}(a,y) &= \lim_{y\downarrow-(x\beta_0+K_I)} \left[(a+K_B-y)^{-\gamma_B} - \lambda\,(y+x\beta_0+K_I)^{-\gamma_I}\right] \\
&= (a+K_B+x\beta_0+K_I)^{-\gamma_B} - \lambda \lim_{y\downarrow-(x\beta_0+K_I)} (y+x\beta_0+K_I)^{-\gamma_I} \\
&= -\infty \qquad \text{car } \lambda>0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{y\uparrow a+K_B} \Phi^{(\lambda)}(a,y) &= \lim_{y\uparrow a+K_B} \left[(a+K_B-y)^{-\gamma_B} - \lambda\,(y+x\beta_0+K_I)^{-\gamma_I}\right] \\
&= \lim_{y\uparrow a+K_B} (a+K_B-y)^{-\gamma_B} - \lambda\,(a+K_B+x\beta_0+K_I)^{-\gamma_I} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Or $\Phi^{(\lambda)}$ est strictement croissante en y. Il existe donc une unique valeur y^* telle que $\Phi^{(\lambda)}(a,y^*)=0$. Le problème

$$\Phi^{(\lambda)}\left(X(\Theta), \overline{F}^*(\Theta)\right) = 0 \quad \mathbb{P}\ p.s.$$

a une solution unique (on peut en effet refaire ce raisonnement en remplaçant a par $X(\Theta)$. Les inégalités sont alors $\mathbb{P}$ $p.s.$).

Par conséquent :

Proposition 6 *Le programme d'optimisation (3.5) a une solution optimale $\overline{F}^*$ unique sur l'ensemble* $\{X(\Theta)+K_B \geq -(x\beta_0+K_I)\}$.

Multiplicateur de Lagrange λ

Il reste bien-sûr à déterminer la valeur prise par le multiplicateur de Lagrange, lié à la contrainte de l'investisseur :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[U_I\left(Y(\Theta)+x\beta_0\right)\right] &= U_I(x\beta_0) \\
\mathbb{E}\left[\frac{(x\beta_0+K_I+Y(\Theta))^{1-\gamma_I}}{1-\gamma_I}\right] &= \frac{(x\beta_0+K_I)^{1-\gamma_I}}{1-\gamma_I}
\end{aligned}$$

Comme à l'optimum :

$$\begin{aligned} U_B'\left(X(\Theta) - Y(\Theta)\right) - \lambda U_I'\left(Y(\Theta) + x\beta_0\right) &= 0 \\ \left(X(\Theta) + K_B - Y(\Theta)\right)^{-\gamma_B} &= \lambda\left(x\beta_0 + K_I + Y(\Theta)\right)^{-\gamma_I} \end{aligned}$$

on obtient finalement :

$$\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left[\left(X(\Theta) + K_B - Y(\Theta)\right)^{-\gamma_B}\left(x\beta_0 + K_I + Y(\Theta)\right)\right] = \left(x\beta_0 + K_I\right)^{1-\gamma_I}$$

D'où :

$$\lambda = \mathbb{E}\left[\frac{\left(X(\Theta) + K_B - Y(\Theta)\right)^{-\gamma_B}\left(x\beta_0 + K_I + Y(\Theta)\right)}{\left(x\beta_0 + K_I\right)^{1-\gamma_I}}\right]$$

λ est une fonction croissante de la richesse initiale de l'investisseur, x. Plus celui-ci est riche, plus la contrainte de l'investisseur a de poids dans le programme d'optimisation. D'autre part, d'après l'étude de la fonction $\Phi^{(\lambda)}(a, y)$, on a pu constater que la structure optimale du contrat, $Y^*(\Theta)$, est une fonction croissante de λ. C'est donc également une fonction croissante de x. Plus l'investisseur est riche initialement, plus il accepte de prendre des risques, à coefficient d'aversion pour le risque constant.

D'après l'équation (3.12), la structure optimale est définie sur $D = \{X(\Theta) + K_B \geq -(x\beta_0 + K_I)\}$, de façon implicite par :

$$\overline{F}^*(\Theta) = X(\Theta) - U_B'^{-1}\left[\lambda U_I'\left(\overline{F}^*(\Theta) + x\beta_0\right)\right]$$

On peut désormais remplacer le multiplicateur λ par sa valeur et obtenir une équation délicate mais avec une seule inconnue : $\overline{F}^*$.

Commentaires : Notons que l'extension des résultats précédents obtenus avec des fonctions d'utilité exponentielle est relativement lourde. Pour cette raison, nous nous limitons à l'étude de la situation où Θ est la seule source de risque.

Chapitre 4

Introduction au filtrage et information contenue dans les prix de marché

Nous présentons dans ce chapitre quelques résultats mathématiques importants de la théorie du filtrage. L'utilisation de cette théorie en finance est illustrée dans une deuxième section. Le cadre d'étude du chapitre suivant, où l'information prise en compte par les agents pour certaines de leurs décisions est partielle, y est également présenté.

4.1 Quelques résultats de la théorie générale du filtrage

Dans cette section, nous rappelons dans un cadre général, unidimensionnel, quelques grands résultats de la théorie du filtrage. Ceux-ci nous ont été utiles pour mieux comprendre et analyser le problème étudié dans le chapitre 5 de cette thèse : la structuration d'un produit illiquide lorsque les agents économiques prennent leurs décisions d'investissement sur le marché financier en ne considérant que l'information contenue dans les prix des actifs qu'ils observent.

Pour ces rappels, nous avons utilisé différents documents "classiques" de la théorie du filtrage. Il s'agit entre autres :

- des ouvrages de G. Kallianpur [43], de R.S. Lipster et A.N. Shiryayev [51], ou encore de L.C.G. Rogers et D. Williams [66] (chapitre 6, p. 319-332),

- et des articles de G. Kallianpur et C. Striebel [44], A.N. Krylov [47], de M. Fujisaki, G. Kallianpur et H. Kunita [32], H. Kunita [46], P.A. Meyer [55], E. Pardoux [59], S. Mitter [56], M. Yor [75]...

4.1.1 Cadre de l'étude et processus d'innovation

Nous considérons un espace de probabilité $(\Omega, \Im, \mathbb{P})$, muni d'une filtration $(\Im_t)_{t\geq 0}$. Par la suite, $\mathbb{E}$ désigne l'espérance sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}$. De plus, à tout processus $(\Pi_t; t \geq 0)$, on associe sa filtration naturelle $\left(\Im_t^{\Pi}; t \geq 0\right)$.

Seul le processus $(Y_t; t \geq 0)$ peut être observé. Il est défini comme :

$$Y_t = \widetilde{Z}_t + B_t$$

où $\left(\widetilde{Z}_t; t \geq 0\right)$ est un processus dont les trajectoires sont supposées continues (par souci de simplicité). Ce processus, non-observable directement, est le *signal*. D'autre part, B désigne un bruit. Il est assez souvent supposé indépendant du signal (mais ce n'est pas toujours le cas).

Le processus $(Y_t; t \geq 0)$ est $\Im_t$-adapté, il s'agit de l'*observation*. La filtration engendrée par le processus Y est notée $\left(\Im_t^Y\right)_{t\geq 0}$. $\Im_t^Y = \sigma\left(Y_s; 0 \leq s \leq t\right)$ correspond à l'information à laquelle on a accès à un instant t donné. Notons que, à chaque instant $t \geq 0$, $\Im_t^Y \subseteq \Im_t$ (mais cette inclusion est généralement stricte).

L'idée est alors d'estimer le signal à l'aide de l'observation.

Dans la littérature, le processus observé est souvent de la forme :

$$Y_t = \int_0^t h\left(Z_s\right) ds + B_t \tag{4.1}$$

avec $(B_t; t \geq 0)$ un $\Im_t$-mouvement Brownien issu de 0, et h une fonction telle que :

$$\forall T \geq 0, \qquad \mathbb{E}\left[\int_0^T h^2\left(Z_s\right) ds\right] < \infty$$

Ainsi, on :

$$\widetilde{Z}_t = \int_0^t h\left(Z_s\right) ds$$

Nous choisissons de présenter ce cadre classique dans cette introduction.

Notons que, d'après l'équation (4.1), il vient :

$$Y_0 = 0 \qquad \mathbb{P}\ p.s.$$

Definition 7 *Le processus* $(I_t; t \geq 0)$ *défini par :*

$$\begin{cases} I_t = Y_t - \int\limits_0^t \widehat{h(Z)_s} ds \\ I_0 = 0 \end{cases}$$

où :

$$\widehat{h(Z)_t} \triangleq \mathbb{E}\left[h(Z_t) / \Im_t^Y\right]$$

est le processus d'innovation.

Le processus $\left(\widehat{h(Z)_t}; t \geq 0\right)$ est défini comme la projection prévisible de $h(Z_t)$ sur la filtration $\Im_t^Y$. Comme le remarque R. Elliott ([24]), cette terminologie traduit le fait qu'entre deux instants t et $t+u$ (où $u > 0$), $I_{t+u} - I_t$ représente la "nouvelle" information sur $h(Z)$ obtenue à partir des observations.

Lemma 8 *Le processus d'innovation* $(I_t; t \geq 0)$ *est un* $\left(\mathbb{P}\text{-}\Im_t^Y\right)$*-mouvement Brownien.*

Preuve :

Notons tout d'abord que :

$$\langle I \rangle_t = t$$

Il suffit de montrer que $(I_t; t \geq 0)$ est une $\left(\mathbb{P}\text{-}\Im_t^Y\right)$-martingale. Sachant que :

$$I_t = B_t - \int\limits_0^t \left[h(Z_s) - \widehat{h(Z)_s}\right] ds$$

alors, si $\Gamma_s \in \Im_s^Y$, on a :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbf{1}_{\Gamma_s}(I_t - I_s)\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbf{1}_{\Gamma_s}(B_t - B_s)\right] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int\limits_s^t du \mathbf{1}_{\Gamma_s}\left(h(Z_u) - \widehat{h(Z)_u}\right)\right] = 0$$

puisque :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\left(h(Z_u) - \widehat{h(Z)_u}\right) / \Im_u^Y\right] = 0$$

Le résultat souhaité est alors immédiat. ■

4.1.2 Problème de filtrage non-linéaire

Filtre non-linéaire

Le problème du filtrage non-linéaire est d'estimer le signal, i.e. le processus $(Z_t; t \geq 0)$ (ou toute fonction de Z_t), qui ne peut pas être observé directement. En revanche, nous observons le processus

$(Y_t; t \geq 0)$, qui est lié à Z par une relation de la forme (4.1). La meilleure estimation (au sens géométrique) de $h(Z_t)$, conditionnellement à l'observation $\Im_t^Y$ disponible à l'instant t, est donnée par sa "projection" par rapport à cette information :

$$\widehat{h(Z)_t} \triangleq \mathbb{E}\left[h(Z_t) / \Im_t^Y\right]$$

Cette estimation est en général une fonction non-linéaire de l'observation. Elle est ainsi appelée "filtre non-linéaire". Toutefois, obtenir une formule explicite de $\widehat{h(Z)_t}$ n'est en général pas chose triviale ...

Représentation des $\Im^Y$-martingales et problème de filtrations

Afin d'analyser le "filtre non-linéaire" $\widehat{h(Z)_t}$, une approche par les martingales est généralement privilégiée. Un théorème de représentation des $\Im^Y$-martingales est alors nécessaire :

Theorem 9 *Toute $\Im^Y$-martingale, $(M_t; t \geq 0)$ de carré intégrable peut s'écrire sous la forme :*

$$M_t = M_0 + \int_0^t \varphi_s dI_s$$

où $(\varphi_t; t \geq 0)$ est un processus $\Im^Y$-mesurable tel que :

$$\forall t \geq 0 \qquad \int_0^t \mathbb{E} |\varphi_s|^2 ds < \infty$$

Pour la preuve de ce théorème, on pourra se référer par exemple au chapitre 8, page 299 de R.S. Lipster et A.N. Shiryayev [51].

Notons que le processus φ intervenant dans la représentation de la $\Im^Y$-martingale n'est pas mesurable par rapport à la filtration de l'innovation mais par rapport à celle de l'observation ; alors que la représentation se fait par le processus d'innovation.
La question de l'égalité des filtrations engendrées par l'innovation et l'observation se pose alors. Cette égalité :

$$\Im_t^I = \Im_t^Y \qquad \forall t \geq 0 \tag{4.2}$$

est appelée conjecture de Kailath.

On a bien-sûr l'inclusion :

$$\Im_t^I \subseteq \Im_t^Y \qquad \forall t \geq 0$$

Cette inclusion est "forte" (il s'agit même d'une immersion d'après la terminologie de M. Emery), car toute $(\Im^I)$-martingale est une $(\Im^Y)$-martingale. Toutefois, l'inclusion réciproque n'est pas vraie en général (cf. le contre-exemple proposé par B. Tsirel'son [74]).

Différents auteurs ont obtenu des conditions suffisantes sous lesquelles la conjecture de Kailath (4.2) est vraie. Ainsi :

- D. Allinger et S. Mitter ont prouvé dans [3] que si l'observation Y est un processus unidimensionnel et si le bruit B est indépendant du signal Z, alors la conjecture (4.2) est vraie.

- R.S. Lipster et A.N. Shiryayev ont montré que, dans le cas conditionnellement gaussien (voir Théorème 12.5, chapitre 12, page 29 de [51]), la conjecture (4.2) est vraie.

- A.N. Krylov a également prouvé la conjecture de Kailath dans un cadre beaucoup plus général, dans un article extrêmement complexe ([47]), que nous présentons rapidement par la suite.

4.1.3 Expression du filtre non-linéaire comme solution d'une Equation Différentielle Stochastique

Dans cette section, nous nous plaçons dans le cadre particulier où le signal Z et le bruit B sont indépendants et où Z s'écrit sous la forme :

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t f_s ds + M_t$$

On ne suppose pas a priori $(Z_t; t \geq 0)$ Markovien, même si ce cadre d'étude particulier est généralement adopté (cf. par exemple H. Kunita [46]).
$(M_t; t \geq 0)$ est une $\Im_t$-martingale de carré intégrable et :

$$\forall T \geq 0, \qquad \mathbb{E}\left[\int_0^T f_s^2 ds\right] < \infty$$

Deux approches sont alors possibles pour caractériser le filtre non-linéaire $\widehat{h(Z)_t}$. Nous les présentons rapidement dans les deux paragraphes suivants :

Approche en termes d'innovation : Equation de Kushner-Stratonovich

Dans le cas simple où le signal et le bruit sont deux processus indépendants, le filtre non-linéaire est solution de l'équation différentielle stochastique suivante, appelée équation de Kushner-Stratonovich :

$$\begin{aligned}
\widehat{h(Z)_t} &\triangleq \mathbb{E}\left[h(Z_t)/\Im_t^Y\right] \\
&= \mathbb{E}\left[h(Z_0)/\Im_0^Y\right] + \int_0^t \mathbb{E}\left[f_s/\Im_s^Y\right] ds + \int_0^t \left\{\mathbb{E}\left[Z_s h(Z_s)/\Im_s^Y\right] - \mathbb{E}\left[Z_s/\Im_s^Y\right]\mathbb{E}\left[h(Z_s)/\Im_s^Y\right]\right\} dI_s \\
&= \widehat{h(Z)_0} + \int_0^t \widehat{f}_s ds + \left[\int_0^t (\widehat{Zh(Z)})_s - \widehat{Z}_s \widehat{h(Z)_s}\right] dI_s \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

en utilisant des notations évidentes.
Pour une preuve de cette équation, se référer par exemple à la section 8.2 du Chapitre 8 de Lipster-Shiryayev [51].

Cette E.D.S. est de type "input-output", comme le fait remarquer S. Mitter ([56]) : les entrées sont les observations Y_t et la sortie est la distribution conditionnelle de $h(Z_t)$ par rapport à $\Im_t^Y$.

Approche non-normalisée : Equation de Zakai

Parallèlement à l'approche du problème de filtrage non-linéaire en terme d'innovation s'est développée une approche où la loi conditionnelle du signal par rapport à l'observation n'est pas normalisée. En effet, au lieu de considérer simplement :

$$\mathbb{E}\left[h(Z_t)/\Im_t^Y\right]$$

qui peut également s'écrire sous la forme[1] :

$$\mathbb{E}\left[h(Z_t)/\Im_t^Y\right] = \frac{\widetilde{\mathbb{E}}\left[D_t h(Z_t)/\Im_t^Y\right]}{\widetilde{\mathbb{E}}\left[D_t/\Im_t^Y\right]}$$

[1] On utilise le théorème de Bayes conditionnel avec :

$$D_t = \exp\left\{\int_0^t h(Z_s)\, dY_s - \frac{1}{2}\int_0^t |h(Z_s)|^2 ds\right\}$$

une ($\mathbb{P}$-$\Im_t$)-martingale, caractérisant le changement de probabilité :

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\widetilde{\mathbb{P}}}/\Im_t = D_t$$

on étudie directement :

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[D_t h\left(Z_t\right)/\Im_t^Y\right] \triangleq \rho_t\left(h\right)$$

En effet, il est parfois plus simple de mener les calculs de cette façon et de normaliser uniquement à la fin.

Remark 1 *D'autre part, l'idée de changer de mesure de probabilité et de considérer le ratio* $\frac{\widetilde{\mathbb{E}}\left[D_t h(Z_t)/\Im_t^Y\right]}{\widetilde{\mathbb{E}}\left[D_t/\Im_t^Y\right]}$ *au lieu de la projection iniale* $\mathbb{E}\left[h\left(Z_t\right)/\Im_t^Y\right]$ *a été développée initialement par G. Kallianpur et C. Striebel ([44]). Cette approche est généralement utilisée en filtrage non-linéaire, alors que travailler directement avec la projection initiale est surtout valable pour résoudre des problèmes de filtrage linéaire (comme dans le cas gaussien) où il est possible de régresser linéairement* $h\left(Z_t\right)$ *sur* $\Im_t^Y$*.*

De plus, si $\rho_t\left(h\right)$ est solution de l'équation de Zakai :

$$\rho_t\left(h\right) = \rho_0\left(h\right) + \int_0^t \rho_s\left(\widehat{f}\right) ds + \int_0^t \rho_s\left(Z_s h\right) dY_s \tag{4.4}$$

alors le processus normalisé, $\frac{\rho_t(h)}{\rho_t(0)}$, est solution de l'équation de Kushner-Stratonovich (4.3). Une preuve précise de ce résultat se trouve, par exemple, dans le chapitre 11 du livre de G. Kallianpur [43].

Notons que les deux approches sont équivalentes, la première fait intervenir des probabilités, tandis que la seconde utilise des mesures finies positives sur $\mathbb{R}$. La question est dans les deux cas ramenée à la résolution d'une E.D.S..

4.1.4 Conjecture de Kailath : présentation du résultat de A.N. Krylov

A.N. Krylov a montré en 1979, dans son article [47], que sous certaines conditions l'égalité entre les filtrations engendrée par l'innovation et par l'observation prévaut dans un cadre très général. Son article est relativement technique et les hypothèses faites peuvent paraître complexes. Il s'agit en fait de conditions de convergence d'une solution d'une équation différentielle stochastique vers la solution d'une autre équation différentielle stochastique, dans un cadre multi-dimensionnel et liant fortement l'observation et le signal.

Nous présentons ici uniquement le cadre et les hypothèses de A.N. Krylov. Mais la preuve de la conjecture n'est pas refaite (!).

Cadre de l'étude

Soit un espace de probabilité $(\Omega, \Im, \mathbb{P})$. On considère $X = \left(X^1, X^2, ..., X^{d_1}\right)$ un processus d_1-dimensionnel à valeurs dans $\mathbb{R}^{d_1}$, $Y = \left(Y^1, Y^2, ..., Y^{d_2}\right)$ un processus d_2-dimensionnel à valeurs dans

$\mathbb{R}^{d_2}$ et $W = \left(W^1, W^2, ..., W^{d_3}\right)$ un mouvement Brownien d_3-dimensionnel.
Soit $T > 0$ un horizon de temps donné. Toute l'étude se passe sur l'intervalle de temps $[0, T]$.
Les différents processus sont liés de la façon suivante, pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} dX_t = b_1(t, X_t, Y_t)\, dt + \sigma_1(t, X_t, Y_t)\, dW_t \\ X_0 = \xi_0 \end{cases} \tag{4.5}$$
$$\begin{cases} dY_t = b_2(t, X_t, Y_t)\, dt + \sigma_2(t, Y_t)\, dW_t \\ Y_0 = \eta_0 \end{cases}$$

Le processus X correspond au signal et le processus Y correspond à l'observation. Notons que le signal peut dépendre fortement de l'observation (ce qui n'était pas si clair dans les sections précédentes). Le cadre multi-dimensionnel adopté par A.N. Krylov lui permet de jouer avec la dépendance et de décrire différentes situations allant de l'indépendance à de multiples liaisons.
Les conditions initiales sont indépendantes du mouvement Brownien W, $b_i(t, x, y)$ désigne un vecteur de dimension d_i et $\sigma_i(t, x, y)$ désigne une matrice de dimension $d_i \times d_3$.

Par la suite, on note :

$$a_2(t, y) = \sigma_2(t, y)\, \sigma_2^*(t, y)$$

où σ_2^* désigne la transposée de σ_2.

Hypothèses et égalité des filtrations

Les hypothèses faites par A.N. Krylov sont de plusieurs types :

1. Pour assurer l'existence d'une solution unique au système (4.5), certaines hypothèses sont faites sur les coefficients :

   - b_i et σ_i sont supposés être des fonctions Boréliennes par rapport à t, satisfaisant une condition de Lipschitz en (x, y), avec des constantes indépendantes de t.

   - b_i et σ_i sont supposés être bornés.

2. D'autres hypothèses classiques du filtrage sont faites. Celles-ci permettent de normaliser par rapport aux paramètres de volatilité :

   - Il existe une constante $\mu > 0$, telle que :

$$\forall (y, \lambda, t) \in \mathbb{R}^{d_2} \times \mathbb{R}^{d_2} \times [0, T], \qquad \sum_{i,j=1}^{d_2} a_2^{ij}(t, y)\, \lambda^i \lambda^j \geq \mu\, |\lambda|^2$$

   Cette condition implique que la racine positive symétrique, $a_2^{\frac{1}{2}}$, de a_2 a un inverse, $a_2^{-\frac{1}{2}}$, qui est une fonction bornée de (t, y).

- D'autre part, $\forall\,(x, y, \lambda, t) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \times \mathbb{R}^{d_2} \times [0, T]$:

$$\left|\sigma_1^*(t, x, y)\,\lambda\right|^2 - \left|a_2^{-\frac{1}{2}}(t, y)\,\sigma_2(t, y)\,\sigma_1^*(t, x, y)\,\lambda\right|^2 \geq \mu\,|\lambda|^2$$

3. Enfin, certaines hypothèses spécifiques à cette étude sont ensuite faites :

- $\forall\,(y, t) \in \mathbb{R}^{d_2} \times [0, T]$, $\sigma_1(t, x, y)$ admet trois dérivées continues en x, bornées en (t, x, y). Les deux premières satisfont une condition de Lipschitz en y uniformément en (t, x).

- $\forall\,(y, t) \in \mathbb{R}^{d_2} \times [0, T]$, $b_1(t, x, y)$ et $b_2(t, x, y)$ admettent deux dérivées continues en x, bornées en (t, x, y). La première dérivée satisfait une condition de Lipschitz en y uniformément en (t, x).

- il existe une constante positive K et une fonction g dans $L^2\left(\mathbb{R}^{d_1}\right)$ telles que :

$$\forall\,(x, y, t) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \times [0, T] \qquad |b_2(t, x, y)| \leq g(x)$$

et :

$$\forall\,(y_1, y_2, t) \in \mathbb{R}^{d_2} \times \mathbb{R}^{d_2} \times [0, T] \qquad \int |b_2(t, x, y_1) - b_2(t, x, y_2)|^2\, dx \leq K^2\,|y_1 - y_2|^2$$

- La dernière condition concerne la distribution conditionnelle de ξ_0 sachant η_0. On suppose qu'elle a une densité continue π_0 telle que :

$$\pi_0 \in W_p^3\left(\mathbb{R}^{d_1}\right) \cap W_2^2\left(\mathbb{R}^{d_1}\right)$$

$$\mathbb{E}\,\|\pi_0\|_{W_2^2}^2 + \mathbb{E}\,\|\pi_0\|_{W_p^3}^p < \infty$$

où p est un réel supérieur strictement à d_1 et où $W_n^m(\mathbb{R})$ est l'espace de Sobolev de toutes les fonctions réelles à valeurs $\mathbb{R}^{d_1}$, qui, tout comme leur $k^{ième}$ dérivée généralisée ($|k| \leq m$), appartiennent à $L^n\left(\mathbb{R}^{d_1}\right)$.

Par conséquent, sous ces conditions, le système d'équations (4.5) a une unique solution (X_t, Y_t) et le processus d'innovation :

$$\overline{W}_t = \int_0^t a_2^{-\frac{1}{2}}(s, Y_s)\, dY_s - \int_0^t a_2^{-\frac{1}{2}}(s, Y_s)\,\mathbb{E}\left[b_2(s, X_s, Y_s) / \Im_s^Y\right] ds$$

est une $\left(\Im_t^Y\text{-}\mathbb{P}\right)$-martingale. D'autre part, la conjecture de Kailath est dans ce cas vérifiée :

$$\forall t \geq 0, \qquad \Im_t^Y = \Im_t^{\overline{W}, \eta_0}$$

4.2 Filtrage et finance

4.2.1 Problématique générale de l'information en finance

La question de l'information disponible et accessible pour un agent économique donné est de la plus haute importance. En effet, le degré d'information et de connaissance des différentes sources de risque de l'univers a un impact notable sur les décisions financières qu'un agent peut prendre. Sans aller jusqu'à parler de délit d'initié, considéré comme illégal, un agent ayant une information plus importante sur certains facteurs pouvant influencer le cours d'un actif donné prendra des décisions a priori plus pertinentes qu'un agent moins informé.

Beaucoup de chercheurs en finance s'intéressent à ces questions et tentent de modéliser le comportement d'un agent selon le degré d'information qu'il possède. Cela leur permet ensuite de mieux comprendre le mécanisme de formation des prix sur les marchés. Il s'agit de la théorie de la micro-structure. Différents auteurs se sont intéressés à l'efficience informationnelle des prix de marché et aux questions d'acquisition d'information : parmi eux, on peut citer notamment, S.J. Grossman ([35] et [36]), M. Hellwig ([39]), S.J. Grossman et J. Stiglitz ([37]) ou encore A.R. Admati et P. Pfleiderer ([1] et [2]). Les questions relatives au différentiel d'information et par conséquent au grossissement de filtration par acquisition d'information, sont alors extrêmement importantes, comme le souligne J. Amendinger dans sa thèse de doctorat ([4]).

De façon plus générale, sans classifier les agents selon leur niveau d'information, d'autres auteurs se sont intéressés à une problématique où le cours d'un actif financier dépend d'un facteur que l'on ne peut observer directement. Par exemple, H. Pham et M.C. Quenez ([60]) ont étudié le cas d'un actif, S, dont le paramètre de volatilité, σ, est stochastique et dépend d'une autre source de risque que l'actif lui-même :

$$dS_t = \mu_t dt + \sigma\left(t, S_t, Y_t\right) dW_t$$

Ils cherchent la stratégie d'investissement dans cet actif qui maximise un critère d'utilité donné. Pour cela, ils utilisent des techniques relatives au filtrage.

Dans le chapitre suivant, nous adoptons une approche semblable à celle-ci. Toutefois, nous supposons que l'actif non-financier a un impact sur le paramètre de dérive et non sur la volatilité de l'actif de marché, comme cela est précisé dans la section suivante. En ce sens, les cadres de ces deux études sont différents.

4.2.2 Cadre de l'étude du chapitre 5 : Densité des prix d'état et filtration des prix de marché

Cette section est consacrée à la présentation du cadre général du chapitre suivant. Nous précisons les hypothèses et notations qui seront utilisées, ainsi que les dynamiques des actifs conditionnelles à l'information des prix de marché, information à laquelle les différents agents ont accès.

Notations et hypothèses

Les actifs du modèle Dans l'univers général décrit au chapitre 2, nous supposons désormais que trois actifs évoluent de la façon suivante :

- Un actif sans risque, noté S_t^0, dont le taux de rendement instantané est le taux sans risque r :

$$\frac{dS_t^0}{S_t^0} = rdt$$

On peut également supposer que le taux sans risque est un processus déterministe.

- Un actif non financier, noté Θ, dont la dynamique[2] est :

$$\frac{d\Theta_t}{\Theta_t} = a\ dt + b\ dW_t^{(1)}$$
$$\Theta_0 = \eta_0$$

a et b sont deux paramètres supposés constants par souci de simplicité. Toutefois, ces coefficients pourraient également dépendre de t et/ou de la trajectoire de Θ jusqu'en t, $[\Theta]_t$, en restant mesurables par rapport à $\Im_t^\Theta \triangleq \sigma\left(\Theta_s; 0 \leq s \leq t\right)$, sans changer les résultats obtenus.

Dans la théorie classique du filtrage, Θ_t est le *signal*.

- Un actif financier, noté S_t, dont la dynamique est :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\left(t, S_t, \Theta_t\right) dt + \sigma\left(t, S_t\right) dW_t^{(2)}$$
$$S_0 = \xi_0$$

Dans la théorie classique du filtrage, S_t est l' *l'observation*. Certaines hypothèses sont faites sur

[2] La forme de la dynamique de Θ n'a que très peu d'importance pour l'obtention de résultats généraux. Seule l'indépendance de Θ et du mouvement Brownien intervenant dans la dynamique de S a de l'importance.

les coefficients de cette diffusion. Nous les désignerons par (H) dans la suite du papier :

$$\forall t \geq 0 \qquad \int_0^t |\mu(s, S_s, \Theta_s)|^2 \, ds < \infty \qquad \mathbb{P}\ p.s.$$

$$\forall t \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}_+ \qquad \sigma(t,s) > 0$$

$$\text{La fonction } \sigma(.,.) \text{ est Lipschitz en } s \text{ uniformément en } t$$

$\left(W_t^{(1)}\right)_{t\geq 0}$ et $\left(W_t^{(2)}\right)_{t\geq 0}$ sont deux $(\mathbb{P}-\Im_t)$-mouvements Browniens indépendants [3].

Densité des prix d'état et probabilité forward-neutre De plus, afin de donner des expressions pour les portefeuilles de marché optimaux pour chacun des deux agents, nous utilisons ici la notion de "densité de prix d'état", introduite dans le chapitre 3 à la section 3.2.2. Il s'agit donc la densité de l'aléa associé au marché financier à une date future, t telle que $0 \leq t \leq T$. Celle-ci est notée H_t. Ainsi, il est possible de définir un processus $(H_t; 0 \leq t \leq T)$ et la propriété suivante est fondamentale :

$$\forall t \in [0,T] \qquad \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(H_t) = \frac{1}{\beta_{0,t}}$$

où $\beta_{0,t}$ est le facteur de capitalisation entre les dates 0 et t. En particulier, pour $t = T$:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(H_T) = \frac{1}{\beta_0}$$

Une famille de probabilités "forward-neutres", $(\mathbb{Q}_t; 0 \leq t \leq T)$, peut également être associée à ce processus de la façon suivante :

$$\forall t \in [0,T] \qquad \frac{d\mathbb{Q}_t}{d\mathbb{P}} = H_t \beta_{0,t}$$

et en particulier, pour $t = T$:

$$\frac{d\mathbb{Q}_T}{d\mathbb{P}} = H_T \beta_0$$

Nous avons également vu qu'une formulation classique de la dynamique de ce processus est :

$$\frac{dH_t}{H_t} = -r_t dt - \lambda_t dW_t$$

où $(r_t)_{t\geq 0}$ est le processus de taux court, $(\lambda_t)_{t\geq 0}$ est le processus des primes de risque et W est un mouvement Brownien standard sous $\mathbb{P}$. Par conséquent, dans le cadre de notre étude, la dynamique

[3] Nous désignons par $W^{(1)}$ et $W^{(2)}$ les deux mouvements Browniens intervenant dans la dynamique de Θ et de S afin d'éviter les confusions relatives à la mesurabilité par rapport aux différentes filtrations qui interviennent dans cette étude.

de H_t sous la probabilité $\mathbb{P}$ est donnée par :

$$\frac{dH_t}{H_t} = -rdt - \lambda(t, S_t, \theta_t)\, dW_t^{(2)}$$

où :

$$\lambda(t, S_t, \theta_t) = \frac{\mu(t, S_t, \theta_t) - r}{\sigma(t, S_t)}$$

est la *prime de risque*. Notons que l'hypothèse (H) concernant l'intégrabilité du coefficient μ s'étend à la prime de risque.

Stratégies d'investissement sur le marché financier Enfin, on considère la filtration engendrée par les prix, i.e. :

$$\Im_t^S = \sigma(S_s; 0 \leq s \leq t)$$

Il s'agit de la seule information à laquelle un investisseur a accès. La question relative aux choix optimaux d'investissement est donc un problème d'information partielle. Notons que la densité des prix d'état n'est pas un processus $\Im_t^S$-adapté.
Les différents investissements sur les marchés financiers ne prennent en compte que l'information contenue dans les prix de marché observés. Les stratégies doivent donc être des processus $\Im^S$-adaptés, ou plus simplement en utilisant la dualité, les valeurs terminales des portefeuilles associés doivent être $\Im_T^S$-mesurables. *Par conséquent, nous supposons que la valeur terminale des portefeuilles de marché de chacun des deux agents doit être $\Im_T^S$-mesurable*[4]*.* Cette hypothèse traduit le cadre d'information partielle de cette étude. Contrairement à d'autres travaux, comme ceux de N. El Karoui et R. Rouge ([23]), de M. Davis ([15]) ou de M. Musiela et T. Zariphopoulou ([57]), les difficultés de notre études sont surtout dues à la restriction de l'information à laquelle l'investisseur a accès, et non pas uniquement l'incomplétude des marchés.
Pour cette raison, nous introduisons la notion suivante :

Definition 10 *On appelle stratégie φ tout processus $\Im^S$-*adapté *tel que, pour tout $t \in [0;T]$:*

$$\int_0^t |\varphi_s|^2\, ds < \infty \qquad \mathbb{P}\ p.s.$$

Un agent ayant la stratégie φ a un portefeuille dont la valeur est notée V_t^φ à l'instant t : à l'instant t,

[4]Dans toute la thèse, la notation suivante sera utilisée :

$$\xi_T \in \Im_T^S$$

pour traduire le fait que la valeur terminale du portefeuille ξ est $\Im_T^S$-mesurable.

il a un montant φ_t investi dans l'actif risqué S et un montant $V_t^\varphi - \varphi_t$ dans l'actif sans risque S^0. Ce portefeuille est supposé autofinançant. Sa dynamique est alors la suivante :

$$dV_t^\varphi = \varphi_t \frac{dS_t}{S_t} + \left(V_t^\varphi - \varphi_t\right) \frac{dS_t^0}{S_t^0}$$

Comme φ est un processus $\Im_t^S$-adapté, le processus représentant la valeur du portefeuille, V^φ, est $\Im^S$-adapté. En particulier, la valeur en T de ce portefeuille, V_T^φ est une variable $\Im_T^S$-mesurable. Notons que les poids des portefeuilles considérés ne dépendent que de S.

Caractérisation du marché financier conditionnellement à l'information disponible

Cette sous-section est consacrée à la détermination de la dynamique de S dans sa filtration naturelle. Le point de vue adopté est celui des changements de probabilité (approche de type Zakaï) et non celui de l'innovation. Il nous permet d'obtenir un théorème de représentation des martingales, et une dynamique pour H conditionnellement à l'information disponible $\Im_t^S$. En effet, cette approche nous permet d'interpréter les résultats, en introduisant une nouvelle mesure de probabilité.

Dynamique de S sous la mesure de probabilité "forward-neutre" D'après les notations et hypothèses précédentes, la dynamique de S sous la probabilité $\mathbb{P}$ peut également s'écrire comme :

$$\frac{1}{\sigma\left(t, S_t\right)} \frac{dS_t}{S_t} = \left[\lambda\left(t, S_t, \Theta_t\right) + \frac{r}{\sigma\left(t, S_t\right)}\right] dt + dW_t^{(2)}$$

où $\lambda\left(t, S_t, \Theta_t\right) dt + dW_t^{(2)}$ est $\Im_t^S$-mesurable.

Nous allons alors déterminer la dynamique de S sous la mesure de probabilité "forward-neutre" $\mathbb{Q}_T$, définie comme précédemment. Alors, sous l'hypothèse (H), on trouve que le processus défini par :

$$\forall t \in [0;T] \qquad W_t^Q = W_t^{(2)} + \int_0^t \lambda\left(u, S_u, \Theta_u\right) du$$

est un $\left(\mathbb{Q}_T - \Im^S\right)$-mouvement Brownien et la dynamique de S sous $\mathbb{Q}_T$ s'écrit :

$$\forall t \in [0;T] \qquad \frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma\left(t, S_t\right) dW_t^Q$$

Question relative aux filtrations :

Le coefficient de la dynamique de S, $\sigma\left(t, S_t\right)$, est un processus $\Im^S$-adapté. Comme dans le cas de l'innovation, ce coefficient de volatilité peut ajouter un "bruit" $\Im_t^S$-mesurable, qui soit indépendant de la filtration engendrée par W^Q, i.e. $\forall t \in [0;T]$, $\Im_t^{W^Q} = \sigma\left(W_s^Q; 0 \le s \le t\right)$. Par conséquent, on peut seulement écrire que :

$$\Im_t^{W^Q,\eta_0} \subseteq \Im_t^S$$

mais on n'a pas a priori l'égalité entre ces deux filtrations. Toutefois, sous certaines hypothèses, comme par exemple $\sigma(t,.)$ Lipschitz en $s \in \mathbb{R}_+$, uniformément en $t \in [0,T]$, pour tout horizon T, on a le résultat suivant, obtenu par la procédure d'itérations successives de Picard :

Proposition 11 *Sous les hypothèses précédentes, la filtration engendrée par S coïncide avec celle engendrée par le $\left(\mathbb{Q}_T - \Im^S\right)$-mouvement Brownien :*

$$\Im_t^S = \Im_t^{W^Q,\eta_0}$$

Théorème de représentation D'après la proposition précédente et le théorème de représentation pour le mouvement Brownien, nous pouvons écrire une représentation de toute $\left(\mathbb{Q}_T - \Im^S\right)$-martingale continue à l'aide du mouvement Brownien W^Q. Ainsi, le résultat suivant vient quasi-immédiatement :

Proposition 12 *Si M est une $\left(\mathbb{Q}_T - \Im^S\right)$-martingale continue de carré intégrable, alors il existe un processus ϕ, $\Im^S$-adapté et de carré intégrable, tel que :*

$$\forall t \in [0;T] \qquad M_t = M_0 + \int_0^t \phi_u dW_u^Q$$

De plus, ce processus ϕ peut s'écrire à l'aide d'une stratégie φ , comme :

$$\phi_u = \varphi_u \sigma(u, S_u)$$

Preuve :

La preuve est immédiate en utilisant le théorème de représentation pour le mouvement Brownien et la définition 10 d'une stratégie. ■

Remarque : Nous sommes alors en mesure de réécrire le processus de richesse V^φ associé à la stratégie autofinançante φ sous la forme suivante :

$$dV_t^\varphi = \varphi_t \left(rdt + \sigma(t, S_t)\, dW_t^Q\right) + \left(V_t^\varphi - \varphi_t\right) rdt \qquad \text{sous } \mathbb{Q}_T$$

En utilisant la formule d'Itô, $\left(\exp(-rt)\, V_t^\varphi; 0 \le t \le T\right)$ est une $\left(\mathbb{Q}_T - \Im^S\right)$-martingale et :

$$d\left(\exp(-rt)\, V_t^\varphi\right) = \exp(-rt)\, \varphi_t \sigma(t, S_t)\, dW_t^Q$$

Par conséquent, le point de vue que l'on adopte est celui d'un *marché conditionnellement complet*, i.e. toute variable $\Im_T^S$-mesurable peut être répliquée à l'aide d'un portefeuille autofinançant. Chaque variable $\Im_T^S$-mesurable satisfait donc une contrainte de budget, conditionnellement à $\Im_T^S$, qui la caractérise entièrement[5]. Pour cette raison, il est nécessaire de travailler avec les dynamiques de S et de H conditionnellement à l'information disponible pour chaque agent à chaque instant t, i.e. $\Im_t^S$.

Dynamique conditionnelle de la densité des prix d'état

Dans cette partie, nous cherchons à déterminer la dynamique du processus de la densité des prix d'état conditionnellement à $\Im_t^S$. D'après les notations utilisées précédemment, il est logique de noter cette projection :

$$\forall t \in [0;T] \qquad \widehat{H}_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(H_t/\Im_t^S\right) \tag{4.6}$$

D'après ce qui précède, la mesure de probabilité "forward-neutre" est définie, sur la tribu initiale $\Im$, par la densité de Radon-Nikodym suivante :

$$\forall t \in [0,T] \qquad \frac{d\mathbb{Q}_t}{d\mathbb{P}} = H_t \beta_{0,t}$$

Par conséquent, le changement de probabilités inverse est défini par :

$$\forall t \in [0,T] \qquad \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}_t} = \frac{H_t^{-1}}{\beta_{0,t}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}_t} = \frac{M_t}{\beta_{0,t}}$$

avec M le numéraire de marché défini comme l'inverse de la densité des prix d'état.

Deux écritures sont alors possibles de façon complètement équivalente : l'une en fonction de H_t^{-1} et l'autre en fonction de M_t. Nous les présentons successivement.

Ecriture en fonction de H_t^{-1} Notons que $\widehat{H}_t$ est relié à H_t^{-1} de la façon suivante :

$$\forall t \in [0;T] \qquad \widehat{H}_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(H_t/\Im_t^S\right) = \frac{\beta_0}{\beta_0} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left(H_t^{-1}H_t/\Im_t^S\right)}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left(H_t^{-1}/\Im_t^S\right)} = \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left(H_t^{-1}/\Im_t^S\right)}$$

Connaitre la dynamique de $\widehat{H}_t$ est par conséquent équivalent à connaitre la dynamique de H_t^{-1} sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}_T$. D'après la formule d'Itô, la dynamique de H_t^{-1} sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ est donnée par :

$$\forall t \in [0;T] \qquad dH_t^{-1} = H_t^{-1}\left(r + \lambda^2\left(t, S_t, \Theta_t\right)\right)dt + H_t^{-1}\lambda\left(t, S_t, \Theta_t\right)dW_t^{(2)}$$

[5] C'est cette remarque qui nous permet d'écrire le programme d'optimisation comme nous le ferons dans la section suivante.

Sous $\mathbb{Q}_T$, la dynamique de H^{-1} devient :

$$dH_t^{-1} = H_t^{-1}\left(rdt + \lambda\left(t, S_t, \Theta_t\right)dW_t^Q\right)$$

d'après la définition du $\left(\mathbb{Q}_T, \Im^S\right)$-mouvement Brownien W^Q :

$$\forall t \in [0;T] \qquad W_t^Q = W_t^{(2)} + \int\limits_0^t \lambda\left(u, S_u, \Theta_u\right)du$$

Par conséquent, puisque $\left(W_t^Q; 0 \leq t \leq T\right)$ est un processus $\Im^S$-adapté :

$$\forall t \in [0;T] \qquad d\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left(H_t^{-1}/\Im_t^S\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left(H_t^{-1}/\Im_t^S\right)rdt + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left(H_t^{-1}\lambda\left(t, S_t, \Theta_t\right)/\Im_t^S\right)dW_t^Q$$

et :

$$\frac{d\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left(H_t^{-1}/\Im_t^S\right)}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left(H_t^{-1}/\Im_t^S\right)} = rdt + \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left(H_t^{-1}\lambda\left(t, S_t, \Theta_t\right)/\Im_t^S\right)}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left(H_t^{-1}/\Im_t^S\right)}dW_t^Q$$

Comme :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(H_t/\Im_t^S\right) = \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left(H_t^{-1}/\Im_t^S\right)} \tag{4.7}$$

D'après la formule d'Itô, on obtient :

$$\begin{aligned}
d\widehat{H}_t &= d\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(H_t/\Im_t^S\right)\\
&= -\frac{1}{\left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left(H_t^{-1}/\Im_t^S\right)\right]^2}\left\{r\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left(H_t^{-1}/\Im_t^S\right)dt + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left(H_t^{-1}\lambda\left(t, S_t, \Theta_t\right)/\Im_t^S\right)dW_t^Q\right\}\\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{2}{\left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left(H_t^{-1}/\Im_t^S\right)\right]^3}\left\{\left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left(H_t^{-1}\lambda\left(t, S_t, \Theta_t\right)/\Im_t^S\right)\right]^2 dt\right\}
\end{aligned}$$

Soit :

$$\frac{d\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(H_t/\Im_t^S\right)}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(H_t/\Im_t^S\right)} = -\left(r - \widehat{\lambda}^2\left(t, [S]_t\right)\right)dt - \widehat{\lambda}\left(t, [S]_t\right)dW_t^Q$$

La dynamique de $\widehat{H}$ est donnée sous $\mathbb{P}$ par :

$$\forall t \in [0;T] \qquad \frac{d\widehat{H}_t}{\widehat{H}_t} = -rdt - \widehat{\lambda}\left(t, [S]_t\right)dI_t^S$$

où, en utilisant la même notation que précédemment :

$$\forall t \in [0;T] \qquad \widehat{\lambda}\left(t, [S]_t\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\lambda\left(t, S_t, \Theta_t\right)/\Im_t^S\right)$$

I^S est le processus défini comme :

$$\forall t \in [0;T] \qquad I_t^S = W_t^{(2)} + \int_0^t \lambda(u, S_u, \Theta_u)\, du - \int_0^t \widehat{\lambda}(u, [S]_u)\, du = W_t^Q - \int_0^t \widehat{\lambda}(u, [S]_u)\, du$$

Il s'agit du processus d'innovation. La théorie du filtrage garantit que $\left(I_t^S; 0 \leq t \leq T\right)$ est un $\left(\mathbb{P}, \Im^S\right)$-mouvement Brownien.

Ecriture en fonction de M_t D'après ce qui précède, comme $M_t = H_t^{-1}$, la dynamique de M sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ est donnée par :

$$\forall t \in [0;T] \qquad dM_t = M_t\left(r + \lambda^2(t, S_t, \Theta_t)\right) dt + M_t \lambda(t, S_t, \Theta_t)\, dW_t^{(2)}$$

Sous $\mathbb{Q}_T$, la dynamique de M devient :

$$dM_t = M_t\left(rdt + \lambda(t, S_t, \Theta_t)\, dW_t^Q\right)$$

Par conséquent, si on note :

$$\forall t \in [0;T] \qquad \widehat{M}_t^Q \triangleq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left(M_t / \Im_t^S\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left(H_t^{-1} / \Im_t^S\right) = \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(H_t / \Im_t^S\right)} = \left(\widehat{H}_t\right)^{-1}$$

on obtient :

$$\frac{d\widehat{M}_t^Q}{\widehat{M}_t^Q} = rdt + \widehat{\lambda}(t, [S]_t)\, dW_t^Q$$

Notons que $\widehat{M}_t^Q$ est une espérance conditionnelle sous la mesure $\mathbb{Q}_t$ (ce qui justifie la présence de l'exposant Q) tandis que $\widehat{\lambda}(t, [S]_t)$ est une espérance conditionnelle sous la mesure $\mathbb{P}$.

Remarque :

Comme :

$$\frac{1}{\sigma(t, S_t)}\left(\frac{dS_t}{S_t} - rdt\right) = dW_t^Q$$

alors :

$$\frac{d\widehat{M}_t^Q}{\widehat{M}_t^Q} = \left(1 - \frac{\widehat{\lambda}(t, [S]_t)}{\sigma(t, S_t)}\right) rdt + \frac{\widehat{\lambda}(t, [S]_t)}{\sigma(t, S_t)} \frac{dS_t}{S_t}$$

et on retrouve ici l'interprétation de $\widehat{M}^Q$ en termes de portefeuille de marché avec la proportion investie en actif risqué S et la proportion investie dans l'actif sans risque.

4.2.3 Exemples de dynamique pour l'actif de marché et implications

Dans cette section, nous présentons différents exemples de modélisation de l'actif non-financier et de la dynamique de l'actif de marché. Nous étudions quelles sont les implications de ces choix sur la densité des prix d'état et sur les primes de risque, ainsi que sur la dynamique de l'actif de marché conditionnelle aux observations des prix.

Nous nous plaçons dans un contexte où le paramètre de dérive de la dynamique de S dépend linéairement de Θ. D'autre part, cette dernière est supposée être une variable aléatoire indépendante du mouvement Brownien W. Plus précisément, la dynamique de l'actif de marché S, sous la probabilité $\mathbb{P}$, est la suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha\Theta dt + \sigma dW_t \tag{4.8}$$

où α et σ sont deux réels, non-nuls. D'autre part, on suppose que $\sigma > 0$.

Θ est une variable aléatoire réelle indépendante du $\mathbb{P}$-mouvement Brownien, W.

Avant d'étudier plus en détails les situations où Θ a une distribution particulière, nous présentons quelques résultats généraux liés à cette dynamique.

Loi jointe et prime de risque

Caractérisation de la loi jointe Dans le cas de cette dynamique particulière pour S, donnée par l'équation (4.8), il est possible de déterminer la loi jointe de Θ et de S. Mais cela n'est pas toujours aussi simple dans un cadre plus général.

Posons :

$$\forall t \geq 0 \qquad Z_t = W_t + \frac{\alpha}{\sigma}\Theta.t \triangleq W_t + \widetilde{\Theta}.t$$

avec :

$$\widetilde{\Theta} = \frac{\alpha}{\sigma}\Theta$$

On note ν la loi de $\widetilde{\Theta}$.

Soit F une fonctionnelle quelconque et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction Borélienne. Alors d'après la relation de Cameron-Martin (cf., par exemple le livre de M. Yor ([76]), Chapitre 1, Théorème 1.3 ou encore l'article de H. Robbins et D. Siegmund ([65])) :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F\left(Z_u; u \leq t\right) g\left(\widetilde{\Theta}\right)\right] = \int \nu\left(d\mu\right) g\left(\mu\right) \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F\left(W_u; u \leq t\right) \exp\left(\mu W_t - \frac{\mu^2 t}{2}\right)\right]$$

Par conséquent, en utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F\left(Z_u;u\leq t\right)g\left(\widetilde{\Theta}\right)\right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F\left(W_u;u\leq t\right)\int\nu\left(d\mu\right)g\left(\mu\right)\exp\left(\mu W_t-\frac{\mu^2 t}{2}\right)\right] \\ &\triangleq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F\left(W_u;u\leq t\right)h_g\left(W_t,t\right)\right] \end{aligned} \tag{4.9}$$

où h_g est une fonction harmonique espace-temps définie comme :

$$h_g\left(x,t\right)=\int\nu\left(d\mu\right)g\left(\mu\right)\exp\left(\mu x-\frac{\mu^2 t}{2}\right)$$

D'autre part, de façon triviale, on a :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F\left(W_u;u\leq t\right)h_g\left(W_t,t\right)\right]=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F\left(W_u;u\leq t\right)\frac{h_g\left(W_t,t\right)}{h_1\left(W_t,t\right)}h_1\left(W_t,t\right)\right]$$

Et finalement :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F\left(Z_u;u\leq t\right)g\left(\widetilde{\Theta}\right)\right]=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[F\left(Z_u;u\leq t\right)\frac{h_g\left(Z_t,t\right)}{h_1\left(Z_t,t\right)}\right]$$

en utilisant l'égalité (4.9) avec $g\equiv 1$.

Ceci implique que :

$$\mathbb{P}\left(\widetilde{\Theta}\in d\mu/Z_u;u\leq t\right)=\frac{\nu\left(d\mu\right)\exp\left(\mu Z_t-\frac{\mu^2 t}{2}\right)}{\int\nu\left(dm\right)\exp\left(mZ_t-\frac{m^2 t}{2}\right)} \tag{4.10}$$

On revient alors au processus S qui s'écrit :

$$\begin{aligned} dS_t &= \sigma S_t dZ_t \\ S_0 &= s_0 \end{aligned}$$

Comme $\langle Z\rangle_t=t$, on obtient alors :

$$S_t=s_0\exp\left(\sigma Z_t-\frac{\sigma^2 t}{2}\right)$$

Il suffit désormais de remplacer dans l'équation (4.10) $\exp\left(Z_t\right)$ par :

$$\left(\frac{S_t}{s_0}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\exp\left(\frac{\sigma t}{2}\right)$$

et on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\widetilde{\Theta}\in d\mu/S_u;u\leq t\right)=\frac{\nu\left(d\mu\right)\left(\frac{S_t}{s_0}\right)^{\frac{\mu}{\sigma}}\exp\left\{\frac{t}{2}\left(\frac{\sigma\mu}{2}-\frac{\mu^2}{2}\right)\right\}}{\int\nu\left(dm\right)\left(\frac{S_t}{s_0}\right)^{\frac{m}{\sigma}}\exp\left\{\frac{t}{2}\left(\frac{\sigma m}{2}-\frac{m^2}{2}\right)\right\}} \tag{4.11}$$

Notons que l'on est ici dans un cadre Markovien.

Détermination de la prime de risque conditionnée D'après ce qui précède, si on suppose que les taux sont nuls, la prime de risque conditionnée est donnée par :

$$\widehat{\lambda}\left(t,[S]_t\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{\alpha\Theta}{\sigma}/\Im_t^S\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\widetilde{\Theta}/\Im_t^S\right] = \int v\left(d\mu\right)\mu\mathbb{P}\left(\widetilde{\Theta}\in d\mu/S_u;u\leq t\right)$$

Par conséquent, en utilisant l'équation de la probabilité conditionnelle (4.11), on a :

$$\widehat{\lambda}\left(t,[S]_t\right) = \frac{\int v\left(d\mu\right)\mu\left(\frac{S_t}{s_0}\right)^{\frac{\mu}{\sigma}}\exp\left\{\frac{t}{2}\left(\frac{\sigma\mu}{2}-\frac{\mu^2}{2}\right)\right\}}{\int v\left(dm\right)\left(\frac{S_t}{s_0}\right)^{\frac{m}{\sigma}}\exp\left\{\frac{t}{2}\left(\frac{\sigma m}{2}-\frac{m^2}{2}\right)\right\}} \tag{4.12}$$

Etude dans le cas gaussien

Hypothèses et notations Dans cette étude particulière, on suppose que l'actif non-financier Θ est une variable aléatoire normale $N\left(m,\delta^2\right)$.
Comme précédemment, par souci de simplicité, les taux sont supposés nuls et la dynamique de l'actif de marché S, sous la probabilité $\mathbb{P}$, est donnée par l'équation (4.8), i.e. :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha\Theta dt + \sigma dW_t$$

Densité des prix d'état et prime de risque Par conséquent, en utilisant les calculs de la section 4.2.2, la dynamique de la densité des prix d'état H, sous $\mathbb{P}$, est la suivante :

$$\forall t\in[0;T] \qquad \frac{dH_t}{H_t} = -\frac{\alpha\Theta}{\sigma}dW_t$$

et le numéraire de marché M défini comme :

$$M_t = \frac{1}{H_t}$$

a la dynamique suivante sous $\mathbb{Q}_T$:

$$\forall t\in[0;T] \qquad \frac{dM_t}{M_t} = \frac{\alpha\Theta}{\sigma}dW_t^Q$$

où $\left(W_t^Q;0\leq t\leq T\right)$ est un $\left(\mathbb{Q}_T-\Im^S\right)$-mouvement Brownien.

La dynamique de la densité conditionnelle des prix d'état $\widehat{H}$, sous $\mathbb{Q}_T$, est la suivante :

$$\forall t \in [0;T] \qquad \frac{d\widehat{H}_t}{\widehat{H}_t} = \widehat{\lambda}^2 \left(t, [S]_t\right) dt - \widehat{\lambda} \left(t, [S]_t\right) dW_t^Q$$

où la prime de risque conditionnée est donnée par : $\forall t \in [0;T]$

$$\widehat{\lambda} \left(t, [S]_t\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{\alpha\Theta}{\sigma} / \Im_t^S \right] = \frac{1}{\sigma} \eta_t \left(\ln S_t + \frac{\sigma^2}{2} t - \ln s_0 \right)$$

Le paramètre η_t est obtenu directement en régressant simplement $\alpha\Theta$ sur $\ln S_t$: nous sommes dans le cas gaussien, où il s'agit d'un problème simple de filtrage linéaire. En effet, comme :

$$\ln S_t = \ln s_0 - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t + \alpha\Theta$$

avec (W_t) mouvement Brownien indépendant de la variable Θ, on obtient directement :

$$\begin{aligned} \eta_t &\triangleq \frac{\alpha \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\Theta \left(\ln S_t + \frac{\sigma^2}{2} t - \ln s_0 \right) \right]}{Var \left(\ln S_t \right)} \\ &= \frac{\alpha m \left(\frac{\sigma^2}{2} t - \ln s_0 \right) + \alpha \left(\delta^2 + m^2 \right)}{\sigma^2 t + \alpha^2 \delta^2} \end{aligned}$$

Notons que nous aurions pu également utiliser l'équation (4.12) pour déterminer cette prime de risque conditionnée.

Dynamique de l'actif de marché Dans cette section, nous avons supposé que l'actif de marché avait la dynamique suivante sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}$:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha\Theta dt + \sigma dW_t$$

La dynamique de S dans sa filtration naturelle est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\alpha\Theta / \Im_t^S \right) dt + \sigma dI_t^S \\ &= \eta_t \left(\ln S_t + \frac{\sigma^2}{2} t - \ln s_0 \right) dt + \sigma dI_t^S \end{aligned}$$

où :

$$\eta_t = \frac{\alpha m \left(\frac{\sigma^2}{2} t - \ln s_0 \right) + \alpha \left(\delta^2 + m^2 \right)}{\sigma^2 t + \alpha^2 \delta^2}$$

et

$$\begin{aligned} dI_t^S &= dW_t + \frac{\alpha}{\sigma}\left(\Theta - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\Theta/\Im_t^S\right)\right) dt \\ &= dW_t + \frac{1}{\sigma}\left(\alpha\Theta - \eta_t\left(\ln S_t + \frac{\sigma^2}{2}t - \ln s_0\right)\right) dt \end{aligned}$$

est le processus d'innovation associé à S. C'est un $\left(\mathbb{P} - \Im^S\right)$-mouvement Brownien.

Ainsi, en utilisant cette formulation et en appliquant la formule d'Itô à la dynamique de S exprimée avec le processus d'innovation, on obtient :

$$d\ln S_t = \eta_t\left(\ln S_t + \frac{\sigma^2}{2}\left(t - \frac{1}{\eta_t}\right) - \ln s_0\right) dt + \sigma dI_t^S$$

Ainsi, $(\ln S_t; t \geq 0)$ suit un processus d'Ornstein-Ühlenbeck[6] généralisé de force de rappel égale à η_t, et de tendance égale à l'instant t à :

$$\frac{\sigma^2}{2}\left(t - \frac{1}{\eta_t}\right) - \ln s_0$$

lorsque l'on ne prend en compte que l'information contenue dans le prix de marché observés.

En conclusion, dans un cadre gaussien, conditionnellement à Θ, $(\ln S_t)$ est un mouvement Brownien avec drift. Par contre, ce processus $(\ln S_t; t \geq 0)$ est un processus d'Ornstein-Ühlenbeck généralisé lorsque l'information disponible pour les agents est réduite aux observations des prix de marché. Ce résultat semble correspondre à la croyance profonde du marché, selon laquelle il existe une force de rappel et une tendance pour les cours des actifs. Les techniques de type "chartisme" pourraient alors trouver une justification.

Notons également que lorsque toute l'information est accessible, la vision du marché est une approche risque-neutre. Dans un cadre d'information partielle, la dynamique n'est plus risque-neutre et la prime de risque est sans cesse réajustée pour prendre en compte ce différentiel d'information. Toutefois, puisque le marché reste conditionnellement complet, comme nous l'avons montré précédemment, la gestion de portefeuille conditionnellement aux prix de marché observés ne tient pas compte de cette différence.

[6] Nous appelerons ici processus d'Ornstein-Ühlenbeck généralisé la solution d'une équation de la forme :

$$dU_t = \alpha_t U_t dt + \sigma_t dW_t + \gamma_t dt$$

où (α_t), (σ_t) et (γ_t) désignent trois fonctions déterministes. La résolution explicite de cette équation (cf. Revuz-Yor [64], chapitre 9) montre qu'un processus d'Ornstein-Ühlenbeck généralisé est un processus Gaussien.

Etude dans le cas quadratique gaussien

Hypothèses et notations Dans cette étude particulière, on suppose que l'actif non-financier Θ est le carré d'une variable aléatoire normale $N\left(a,\delta^2\right)$, i.e. :

$$\Theta = \Delta^2$$

où Δ est une variable gaussienne $N\left(a,\delta^2\right)$.

Les taux sont toujours supposés nuls et la dynamique de l'actif de marché S, sous la probabilité $\mathbb{P}$, est donnée par l'équation (4.8), i.e. :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha\Theta dt + \sigma dW_t$$

Densité des prix d'état et prime de risque Par conséquent, en utilisant les calculs de la section 4.2.2, la dynamique de la densité des prix d'état H, sous $\mathbb{P}$, est la suivante :

$$\forall t \in [0;T] \qquad \frac{dH_t}{H_t} = -\frac{\alpha\Theta}{\sigma} dW_t$$

et le numéraire de marché M défini comme :

$$\forall t \in [0;T] \qquad M_t = \frac{1}{H_t}$$

a la dynamique suivante sous $\mathbb{Q}_T$:

$$\forall t \in [0;T] \qquad \frac{dM_t}{M_t} = \frac{\alpha\Theta}{\sigma} dW_t^Q$$

où $\left(W_t^Q; 0 \leq t \leq T\right)$ est un $\left(\mathbb{Q}_T - \Im^S\right)$-mouvement Brownien.

La dynamique de la densité conditionnelle des prix d'état $\widehat{H}$, sous $\mathbb{Q}_T$, est la suivante :

$$\forall t \in [0;T] \qquad \frac{d\widehat{H}_t}{\widehat{H}_t} = \widehat{\lambda}^2\left(t,[S]_t\right) dt - \widehat{\lambda}\left(t,[S]_t\right) dW_t^Q$$

où la prime de risque conditionnée est donnée par :

$$\forall t \in [0;T] \qquad \widehat{\lambda}\left(t,[S]_t\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{\alpha\Theta}{\sigma} / \Im_t^S\right]$$

On ne peut plus régresser simplement $\alpha\Theta$ sur S_t. Il s'agit d'un problème de filtrage non-linéaire. On utilise alors la formule (4.12). Dans notre cas particulier où Θ est le carré d'une variable normale de moyenne a et de variance δ^2, on obtient :

$$\forall t \in [0;T] \qquad \widehat{\lambda}\left(t,[S]_t\right) = \frac{2\frac{\alpha}{\sigma} + \left(\frac{a}{\delta^2} + \left(\frac{\alpha}{\sigma^2}\ln\frac{S_t}{s_0} + \frac{\alpha t}{2}\right)\right)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + \frac{t\alpha^2}{\sigma^2}\right)}$$

Notons que cette approche est de type Kallianpur-Striebel, présentée au début de ce chapitre. Il s'agit en effet d'un simple changement de probabilité conditionnelle :

$$\widehat{\lambda}\left(t,[S]_t\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{\alpha\Theta}{\sigma}/\Im_t^S\right] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left[\frac{\alpha\Theta}{\sigma}H_t^{-1}/\Im_t^S\right]}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left[H_t^{-1}/\Im_t^S\right]} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left[\frac{\alpha\Theta}{\sigma}M_t/\Im_t^S\right]}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left[M_t/\Im_t^S\right]}$$

Or, W_t^Q intervenant dans M_t est $\Im_t^S$-mesurable. Par conséquent, de façon très générale, on obtient la prime de risque en fonction de W^Q :

$$\widehat{\lambda}\left(t,[S]_t\right) = \frac{\int \frac{\alpha\theta}{\sigma}\exp\left(\frac{\alpha\theta}{\sigma}W_t^Q - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\theta}{\sigma}\right)^2 t\right) v\left(d\theta\right)}{\int \exp\left(\frac{\alpha\theta}{\sigma}W_t^Q - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\theta}{\sigma}\right)^2 t\right) v\left(d\theta\right)}$$

où $v\left(d\theta\right)$ est la loi de la variable Θ.

Dynamique de l'actif de marché Dans cette section, nous avons supposé que l'actif de marché avait la dynamique suivante sous la mesure de probabilité prior $\mathbb{P}$:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha\Theta dt + \sigma dW_t$$

La dynamique de S dans sa filtration naturelle est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\alpha\Theta/\Im_t^S\right)dt + \sigma dI_t^S \\ &= \frac{2\alpha + \sigma\left(\frac{a}{\delta^2} + \left(\frac{\alpha}{\sigma^2}\ln\frac{S_t}{s_0} + \frac{\alpha t}{2}\right)\right)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + \frac{t\alpha^2}{\sigma^2}\right)}dt + \sigma dI_t^S\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}dI_t^S &= dW_t + \frac{\alpha}{\sigma}\left(\Theta - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\Theta/\Im_t^S\right)\right)dt \\ &= dW_t + \frac{1}{\sigma}\left(\alpha\Theta - \frac{2\frac{\alpha}{\sigma} + \left(\frac{a}{\delta^2} + \left(\frac{\alpha}{\sigma^2}\ln\frac{S_t}{s_0} + \frac{\alpha t}{2}\right)\right)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + \frac{t\alpha^2}{\sigma^2}\right)}\right)dt\end{aligned}$$

est le processus d'innovation associé à S. C'est un $\left(\mathbb{P} - \Im^S\right)$-mouvement Brownien.
Par conséquent, on obtient :

$$d\ln S_t = \left[\frac{2\alpha + \sigma\left(\frac{a}{\delta^2} + \left(\frac{\alpha}{\sigma^2}\ln\frac{S_t}{s_0} + \frac{\alpha t}{2}\right)\right)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + \frac{t\alpha^2}{\sigma^2}\right)} - \frac{\sigma^2}{2}\right] dt + \sigma dI_t^S$$

En conclusion, dans un cadre quadratique gaussien, la dynamique de $\ln S_t$ ne suit plus un processus d'Ornstein-Ühlenbeck généralisé lorsque l'information disponible pour les agents est réduite aux observations des prix de marché.
Notons également que, comme précédemment, lorsque toute l'information est accessible, la vision du marché est une approche risque-neutre. Dans un cadre d'information partielle, la dynamique n'est plus risque-neutre et la prime de risque est sans cesse réajustée pour prendre en compte ce différentiel d'information. Toutefois, puisque le marché reste conditionnellement complet, comme nous l'avons montré précédemment, la gestion de portefeuille conditionnellement aux prix de marché observés ne tient pas compte de cette différence.

Etude dans le cas Bernoulli symétrique

Hypothèses et notations Dans cette étude particulière, on suppose que l'actif non-financier Θ est une variable de Bernoulli symétrique à valeurs dans $\{-1; 1\}$ telle que :

$$\mathbb{P}(\Theta = -1) = \mathbb{P}(\Theta = 1) = \frac{1}{2}$$

Comme précédemment, par souci de simplicité, on suppose que les taux sont nuls, et la dynamique de l'actif de marché S, sous la probabilité $\mathbb{P}$, est donnée par l'équation (4.8), i.e. :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha\Theta dt + \sigma dW_t$$

Densité des prix d'état et prime de risque Par conséquent, en utilisant les calculs de la section 4.2.2, la dynamique de la densité des prix d'état H, sous $\mathbb{P}$, est la suivante :

$$\forall t \in [0; T] \qquad \frac{dH_t}{H_t} = -\frac{\alpha\Theta}{\sigma} dW_t$$

et le numéraire de marché M défini comme :

$$\forall t \in [0; T] \qquad M_t = \frac{1}{H_t}$$

a la dynamique suivante sous $\mathbb{Q}_T$:

$$\forall t \in [0;T] \qquad \frac{dM_t}{M_t} = \frac{\alpha\Theta}{\sigma} dW_t^Q$$

où $\left(W_t^Q ; 0 \leq t \leq T\right)$ est un $\left(\mathbb{Q}_T - \Im^S\right)$-mouvement Brownien.

La dynamique de la densité conditionnelle des prix d'état $\widehat{H}$, sous $\mathbb{Q}_T$, est la suivante :

$$\forall t \in [0;T] \qquad \frac{d\widehat{H}_t}{\widehat{H}_t} = \widehat{\lambda}^2 \left(t, [S]_t\right) dt - \widehat{\lambda} \left(t, [S]_t\right) dW_t^Q$$

où la prime de risque conditionnée est donnée par :

$$\forall t \in [0;T] \qquad \widehat{\lambda} \left(t, [S]_t\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{\alpha\Theta}{\sigma} / \Im_t^S\right]$$

Comme précédemment, on utilise l'équation (4.12) et dans notre cas particulier où Θ est une variable de Bernoulli symétrique, on obtient[7] :

$$\widehat{\lambda} \left(t, [S]_t\right) = \frac{\alpha}{\sigma} \tanh \left(\frac{\alpha}{\sigma^2} \ln \frac{S_t}{s_0} + \frac{\alpha t}{2}\right)$$

Dynamique de l'actif de marché Dans cette section, nous avons supposé que l'actif de marché avait la dynamique suivante sous la mesure de probabilité prior $\mathbb{P}$:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha\Theta dt + \sigma dW_t$$

La dynamique de S dans sa filtration naturelle est donnée par :

$$\begin{aligned}
\frac{dS_t}{S_t} &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\alpha\Theta / \Im_t^S\right) dt + \sigma dI_t^S \\
&= \alpha \tanh \left(\frac{\alpha}{\sigma^2} \ln \frac{S_t}{s_0} + \frac{\alpha t}{2}\right) dt + \sigma dI_t^S
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
dI_t^S &= dW_t + \frac{\alpha}{\sigma} \left(\Theta - \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\Theta / \Im_t^S\right)\right) dt \\
&= dW_t + \frac{\alpha}{\sigma} \left(\Theta - \tanh \left(\frac{\alpha}{\sigma^2} \ln \frac{S_t}{s_0} + \frac{\alpha t}{2}\right)\right) dt
\end{aligned}$$

est le processus d'innovation associé à S. C'est un $\left(\mathbb{P} - \Im^S\right)$-mouvement Brownien.

[7] Cette expression peut sembler un peu lourde mais présente l'avantage de s'exprimer en fonction de S.

Par conséquent, on obtient :

$$d\ln S_t = \left[\alpha \tanh\left(\frac{\alpha}{\sigma^2}\ln\frac{S_t}{s_0} + \frac{\alpha t}{2}\right) - \frac{\sigma^2}{2}\right] dt + \sigma dI_t^S$$

En conclusion, dans un cadre Bernoulli symétrique, la dynamique de $\ln S_t$ ne suit plus un processus d'Ornstein-Ühlenbeck généralisé lorsque l'information disponible pour les agents est réduite aux observations des prix de marché.

Notons également que, comme précédemment, lorsque toute l'information est accessible, la vision du marché est une approche risque-neutre. Dans un cadre d'information partielle, la dynamique n'est plus risque-neutre et la prime de risque est sans cesse réajustée pour prendre en compte ce différentiel d'information. Toutefois, puisque le marché reste conditionnellement complet, comme nous l'avons montré précédemment, la gestion de portefeuille conditionnellement aux prix de marché observés ne tient pas compte de cette différence.

Chapitre 5

Structuration d'un produit illiquide avec stratégie d'investissement conditionnelle aux prix de marché

Ce chapitre s'intéresse à la caractérisation de la structure optimale d'un produit illiquide ainsi qu'à son évaluation. Le cadre de l'étude et les notations sont ceux présentés d'une part dans le chapitre 2 mais également dans le chapitre 4.

Nous nous intéressons au cas particulier où les agents peuvent intervenir, non seulement sur la source de risque non-financière Θ, mais également sur un marché financier. Les agents déterminent de façon simultanée leur stratégie d'investissement sur le marché et pour ce faire, ils ne prennent en compte que l'information contenue dans les prix de marché, qu'ils observent.
Dans cette situation, nous caractérisons la structure optimale F ainsi que son prix et étudions l'impact du marché financier sur cette structure. L'impact du risque non-financier sur les stratégies d'investissement sur le marché financier est également étudié.

5.1 Hypothèses et notations

5.1.1 Cadre d'étude

Dans ce chapitre, chacun des deux agents a la possibilité d'intervenir sur les marchés financiers. On suppose que chacun d'entre eux investit la totalité de sa richesse résiduelle sur le marché dans un portefeuille qu'il aura choisi optimalement, suivant un critère qui sera décrit par la suite, en prenant en compte sa position globale. De ce fait, l'investissement dans les actifs de marché optimal pour chaque agent va être étroitement lié à son exposition vis à vis du risque Θ. $\xi_B(z)$ désigne la valeur en T de l'investissement de l'agent B lorsqu'il a investi un montant z en 0 et suivi une stratégie autofinançante ; $\xi_I(z)$ (resp. $\eta_I(z)$) désigne la valeur en T de l'investissement de l'agent I, lorsqu'il a investi un montant z en 0 sur les marchés financiers et suivi une stratégie autofinançante, mais alors qu'il est également intervenu sur l'actif illiquide (resp. alors qu'il est uniquement intervenu sur les marchés financiers).

Alors, les flux capitalisés, si la transaction se fait, peuvent s'écrire pour chacun des deux agents comme :

$$\begin{array}{rcl} \text{Pour l'agent } B & : & X(\Theta) - F(\Theta) + \xi_B(\pi) \\ \text{Pour l'agent } I & : & F(\Theta) + \xi_I(x-\pi) \end{array}$$

Par contre, si aucune transaction entre les deux agents ne survient :

$$\begin{array}{rcl} \text{Pour l'agent } B & : & X(\Theta) \\ \text{Pour l'agent } I & : & \eta_I(x) \end{array}$$

Notons que lorsque la transaction survient, chacun des deux agents supporte deux sources de risque, le risque Θ et le risque financier. Le problème de la caractérisation du marché financier et de ses liens avec le risque non-financier peut alors être posé.

La question est de caractériser la structure optimale du contrat F et son prix suivant un critère de choix donné mais également d'analyser l'impact de ce risque non-financier sur les stratégies d'investissement sur les marchés financiers.

5.1.2 Dynamiques des actifs et information contenue dans les prix de marché

Dans cette section, nous rappelons les notations et principaux résultats obtenus dans le chapitre précédent. Ainsi, trois actifs évoulent dans l'univers considéré :

- Un actif sans risque, noté S_t^0, dont le taux de rendement instantané est le taux sans risque r :

$$\frac{dS_t^0}{S_t^0} = rdt$$

- Un actif non financier, noté Θ, dont la dynamique[1] est :

$$\begin{cases} \frac{d\Theta_t}{\Theta_t} = a.dt + b.dW_t^{(1)} \\ \Theta_0 = \eta_0 \end{cases}$$

[1] La forme de la dynamique de Θ n'a que très peu d'importance pour l'obtention de résultats généraux. Seule l'indépendance de Θ et du mouvement Brownien intervenant dans la dynamique de S a de l'importance.

a et b sont deux paramètres supposés constants par souci de simplicité. Toutefois, ces coefficients pourraient également dépendre de t et/ou de la trajectoire de Θ jusqu'en t, $[\Theta]_t$, en restant mesurables par rapport à $\Im_t^\Theta \triangleq \sigma(\Theta_s; 0 \leq s \leq t)$, sans changer les résultats obtenus dans ce chapitre.

- Un actif financier, noté S_t, dont la dynamique est :

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = \mu(t, S_t, \Theta_t)\, dt + \sigma(t, S_t)\, dW_t^{(2)} \\ S_0 = \xi_0 \end{cases}$$

$\left(W_t^{(1)}\right)_{t\geq 0}$ et $\left(W_t^{(2)}\right)_{t\geq 0}$ sont deux $(\mathbb{P}-\Im_t)$-mouvements Browniens indépendants [2].

Dans le cadre de notre étude, la dynamique du processus de la densité des prix d'état, H, sous la probabilité $\mathbb{P}$ est donnée par :

$$\frac{dH_t}{H_t} = -rdt - \lambda(t, S_t, \theta_t)\, dW_t^{(2)}$$

où :

$$\lambda(t, S_t, \theta_t) = \frac{\mu(t, S_t, \theta_t) - r}{\sigma(t, S_t)}$$

est la *prime de risque*.

La famille de probabilités "forward-neutres" associée est définie comme :

$$\forall t \in [0, T] \qquad \frac{d\mathbb{Q}_t}{d\mathbb{P}} = H_t \beta_{0,t}$$

et en particulier :

$$\frac{d\mathbb{Q}_T}{d\mathbb{P}} = H_T \beta_0$$

Enfin, on considère la filtration engendrée par les prix, i.e. :

$$\Im_t^S = \sigma(S_s; 0 \leq s \leq t)$$

Il s'agit de la seule information à laquelle un investisseur a accès. La question relative aux choix optimaux d'investissement est donc un problème d'information partielle. D'autre part, notons que la densité des prix d'état n'est pas un processus $\Im_t^S$-adapté. *Nous supposons que la valeur terminale des portefeuilles de marché de chacun des deux agents doit être $\Im_T^S$-mesurable.* Dans le chapitre précédent, nous avons montré que le point de vue adopté est celui d'un *marché conditionnellement complet*,

[2] Nous désignons par $W^{(1)}$ et $W^{(2)}$ les deux mouvements Browniens intervenant dans la dynamique de Θ et de S afin d'éviter les confusions relatives à la mesurabilité par rapport aux différentes filtrations qui interviennent dans cette étude.

i.e. toute variable $\Im_T^S$-mesurable peut être répliquée à l'aide d'un portefeuille autofinançant. Chaque variable $\Im_T^S$-mesurable satisfait donc une contrainte de budget, conditionnellement à $\Im_T^S$, qui la caractérise entièrement[3]. Pour cette raison, il est nécessaire de déterminer les dynamiques de S et de H conditionnellement à l'information disponible pour chaque agent à chaque instant t, i.e. $\Im_t^S$.

En particulier, la dynamique du processus de la densité des prix d'état, conditionnellement à $\Im^S$, notée :

$$\forall t \in [0,T] \qquad \widehat{H}_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(H_t / \Im_t^S\right)$$

est donnée sous $\mathbb{P}$ par :

$$\frac{d\widehat{H}_t}{\widehat{H}_t} = -rdt - \widehat{\lambda}\left(t, [S]_t\right) dI_t^S$$

où :

$$\widehat{\lambda}\left(t, [S]_t\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\lambda\left(t, S_t, \Theta_t\right) / \Im_t^S\right)$$

et I^S est le processus d'innovation défini comme :

$$I_t^S = W_t^{(2)} + \int_0^t \lambda\left(u, S_u, \Theta_u\right) du - \int_0^t \widehat{\lambda}\left(u, [S]_u\right) du = W_t^Q - \int_0^t \widehat{\lambda}\left(u, [S]_u\right) du$$

On associe la famille de probabilités "forward-neutres" restreinte à $\Im^S$, définie par :

$$\forall t \in [0,T] \qquad \frac{d\widehat{\mathbb{Q}}_t}{d\mathbb{P}} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{d\mathbb{Q}_t}{d\mathbb{P}} / \Im_t^S\right) = \widehat{H}_t \beta_{0,t}$$

5.1.3 Résultat préliminaire

Proposition

La proposition suivante est une extension d'un résultat classique de la théorie du portefeuille (cf. par exemple, R. Merton [54]). Il s'agit de déterminer la valeur en T du portefeuille de marché autofinançant, notée $V_T(x)$, qu'un agent a choisi optimalement suivant un critère d'utilité (exponentielle) alors qu'il a investi x à la date 0 dans une stratégie autofinançante et qu'il a également une position Ψ dans un autre actif. La particularité de cette proposition est liée aux hypothèses que nous faisons. Ainsi, la valeur terminale du portefeuille de marché doit être $\Im_T^S$-mesurable alors que la valeur terminale de l'autre position n'est que $\Im_T$-mesurable. On suppose de plus que le marché est conditionnellement complet par rapport à $\Im_T^S$.

D'autre part, la densité des prix d'état à la date T, H_T, n'étant a priori pas une variable $\Im_T^S$-mesurable,

[3] C'est cette remarque qui nous permet d'écrire le programme d'optimisation comme nous le ferons dans la section suivante.

il convient alors d'utiliser sa projection sur $\Im_T^S$: $\widehat{H}_T \triangleq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[H_T/\Im_T^S\right]$.

Plus formellement, l'agent souhaite maximiser l'utilité espérée de sa richesse terminale en choisissant optimalement la valeur terminale de son portefeuille de marché, parmi les valeurs possibles, i.e. $\Im_T^S$-mesurables :

$$\max_{V_T \in \Im_T^S} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[-\exp\left\{-\gamma\left(V_T\left(x\right)+\Psi\right)\right\}\right]$$

sous la contrainte que cette valeur vérifie la contrainte de budget (conditionnellement à $\Im_T^S$), i.e. :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\widehat{H}_T V_T\left(x\right)\right] \leq x$$

Proposition 13 *Alors, la valeur optimale du portefeuille de marché est donnée par :*

$$\begin{aligned} V_T^*\left(x\right) = x\beta_0 - \frac{1}{\gamma}\ln \widehat{H}_T + \frac{1}{\gamma}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left(\ln \widehat{H}_T\right) \qquad (5.1) \\ +\frac{1}{\gamma}\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\gamma\Psi\right)/\Im_T^S\right) - \frac{1}{\gamma}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\gamma\Psi\right)/\Im_T^S\right)\right] \qquad \mathbb{P}\ p.s. \end{aligned}$$

De plus, la fonction valeur est donnée par :

$$-\exp \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln\left(\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\gamma\left(\Psi+x\beta_0\right)\right)/\Im_T^S\right)}{\widehat{H}_T}\right)\right] \tag{5.2}$$

Preuve :

On cherche à résoudre le programme suivant :

$$\max_{V_T \in \Im_T^S} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[-\exp\left\{-\gamma\left(V_T\left(x\right)+\Psi\right)\right\}\right]$$

$$s.c. \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\widehat{H}_T V_T\left(x\right)\right] \leq x$$

L'idée est alors de se ramener à un cadre d'étude classique de marché complet. Pour cela, il suffira de tout conditionner par rapport à $\Im_T^S$. En introduisant le multiplicateur de Lagrange $\alpha > 0$, le programme s'écrit :

$$\max_{V_T \in \Im_T^S} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[-\exp\left(-\gamma\left(V_T\left(x\right)+\Psi\right)\right) - \alpha\widehat{H}_T V_T\left(x\right)\right]$$

soit :

$$\begin{aligned} & \min_{V_T \in \Im_T^S} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left\{\exp\left(-\gamma\left(V_T\left(x\right)+\Psi\right)\right) + \alpha\widehat{H}_T V_T\left(x\right)/\Im_T^S\right\}\right] \\ = & \min_{V_T \in \Im_T^S} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma V_T\left(x\right)\right)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left\{\exp\left(-\gamma\Psi\right)/\Im_T^S\right\} + \alpha\widehat{H}_T V_T\left(x\right)\right] \end{aligned}$$

Comme le marché est complet conditionnellement à $\Im_T^S$, que les différentes variables intervenant dans ce programme sont $\Im_T^S$-mesurables et qu'aucune contrainte n'est imposée sur la variable d'optimisation, cela revient à résoudre :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\min_{v}\left\{\exp\left(-\gamma v\right)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left\{\exp\left(-\gamma\Psi\right)/\Im_T^S\right\}+\alpha\widehat{H}_T v\right\}\right]$$

D'où :

$$-\gamma\exp\left(-\gamma v^*\right)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left\{\exp\left(-\gamma\Psi\right)/\Im_T^S\right\}+\alpha\widehat{H}_T=0 \qquad \mathbb{P}\ p.s.$$

La valeur terminale optimale du portefeuille de marché choisi par l'agent est donc de la forme :

$$v^*=-\frac{1}{\gamma}\ln\widehat{H}_T+\frac{1}{\gamma}\ln\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left\{\exp\left(-\gamma\Psi\right)/\Im_T^S\right\}+c\left(\alpha\right) \qquad \mathbb{P}\ p.s.$$

Il reste à trouver la valeur optimale du multiplicateur de Lagrange α et donc celle de $c\left(\alpha\right)$. Pour cela, on sature la contrainte de budget. Il vient :

$$c\left(\alpha\right)=x\beta_0+\frac{1}{\gamma}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left(\ln\widehat{H}_T\right)-\frac{1}{\gamma}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\gamma\Psi\right)/\Im_T^S\right)\right]$$

D'où finalement :

$$\begin{aligned}V_T^*\left(x\right) &= x\beta_0-\frac{1}{\gamma}\ln\left(\widehat{H}_T\right)+\frac{1}{\gamma}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left(\ln\widehat{H}_T\right)\\ &\quad+\frac{1}{\gamma}\ln\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left\{\exp\left(-\gamma\Psi\right)/\Im_T^S\right\}-\frac{1}{\gamma}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\gamma\Psi\right)/\Im_T^S\right)\right] \qquad \mathbb{P}\ p.s.\end{aligned}$$

Pour obtenir la fonction valeur, il suffit de remplacer $V_T\left(x\right)$ par son expression optimale dans

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[-\exp\left\{-\gamma\left(V_T\left(x\right)+\Psi\right)\right\}\right]$$

soit :

$$-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{\widehat{H}_T\exp\left(-\gamma\Psi\right)}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\gamma\Psi\right)/\Im_T^S\right)}\right]\times\exp\left\{-\gamma x\beta_0+\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln\left\{\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\gamma\Psi\right)/\Im_T^S\right)}{\widehat{H}_T}\right\}\right]\right\}$$

Donc, en conditionnant par rapport à $\Im_T^S$ dans l'espérance :

$$\begin{aligned}&-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\widehat{H}_T\right]\times\exp\left\{-\gamma x\beta_0+\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln\left\{\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\gamma\Psi\right)/\Im_T^S\right)}{\widehat{H}_T}\right\}\right]\right\}\\ =\ &-\frac{1}{\beta_0}\exp\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln\left\{\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\gamma\left(\Psi+x\beta_0\right)\right)/\Im_T^S\right)}{\widehat{H}_T}\right\}\right]\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Commentaires :

i) La valeur terminale $V_T^*(x)$ est linéaire dans la richesse initiale x.

ii) Au lieu d'utiliser la quantité $\widehat{H}_T$, on peut aussi utiliser $\frac{1}{\widehat{M}_T^Q}$ où :

$$\widehat{M}_T^Q = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}\left(M_T/\Im_T^S\right)$$

où M_t désigne le numéraire de marché. Comme cela a été montré précédemment (cf. équation (4.7) du chapitre précédent) :

$$\widehat{H}_t = \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left[H_t^{-1}/\Im_t^S\right]} = \frac{1}{\widehat{M}_t^Q}$$

Alors :

$$\begin{aligned} V_T^*(x) &= x\beta_0 + \frac{1}{\gamma}\ln\left(\widehat{M}_T^Q\right) - \frac{1}{\gamma}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left(\ln \widehat{M}_T^Q\right) \\ &\quad + \frac{1}{\gamma}\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left\{\exp\left(-\gamma\Psi\right)/\Im_T^S\right\} - \frac{1}{\gamma}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\gamma\Psi\right)/\Im_T^S\right)\right] \qquad \mathbb{P}\ p.s. \end{aligned}$$

i.e. l'investissement de l'agent dans les actifs de marché peut se décomposer en un investissement dans le numéraire de marché et un investissement pour couvrir la position spécifique Ψ, ou plus précisément l'équivalent certain conditionnellement à $\Im^S$ de cette position.

iii) Comme le marché est conditionnellement complet, $V_T^*(x)$ est réplicable par un portefeuille autofinançant écrit uniquement sur l'actif de marché S, partant de la richesse initiale x.

Impact de l'existence d'un cible sur la valeur du portefeuille de marché

Dans cette section, nous cherchons à mesurer l'impact de l'existence d'une exposition envers la source de risque non-financière sur les investissements des différents agents sur le marché financier. Nous désignerons par Ψ cette exposition pour traiter très généralement cette question. L'impact de l'existence de cette cible Ψ sur la valeur terminale du portefeuille de marché est mesuré par la différence :

$$\Delta V \triangleq V_T^{\Psi *}(x) - \left(V_T^{0*}(x) + \Psi - p\beta_0\right)$$

où $p\beta_0$ désigne le prix non-linéaire (capitalisé jusqu'à l'horizon T) que l'agent aurait donné initialement à son exposition Ψ (ou plutôt à l'équivalent certain conditionnel de son exposition). D'après ce qui précède :

$$p\beta_0 = \frac{1}{\gamma}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(\gamma\Psi\right)/\Im_T^S\right)\right]$$

Plus précisément :

$$\Delta V = \frac{1}{\gamma} \ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\exp\left(\gamma \Psi\right) / \Im_T^S \right) - \Psi \qquad \mathbb{P}\ p.s.$$

Cette quantité mesure l'erreur de réplication de la cible par la couverture. Notons que si Ψ est une variable $\Im_T^S$-mesurable alors cette erreur est nulle. Cela correspond à la situation de marché complet.

5.1.4 Modélisation du critère de choix et programme d'optimisation

Comme cela a été souligné dans le chapitre 2, les deux agents n'ont pas les mêmes objectifs : la banque cherche à couvrir son exposition $X(\Theta)$ et l'investisseur peut "l'aider" dans sa démarche en acceptant une partie de ce risque, sous la forme d'une structure F qu'il peut acquérir pour un prix π. La relation entre ces deux agents est fondamentalement une relation d'assurance, même si les flux échangés font plutôt penser à une transaction financière classique : en effet, la banque qui veut s'assurer contre un certain risque va toucher une prime pour la transaction alors que dans un contrat d'assurance classique, elle devrait verser un montant initial. Toutefois, nous nous intéressons ici surtout à la logique sous-jacente à cette transaction. Ainsi, comme dans une relation d'assurance classique (cf. par exemple, A. Raviv [62]), les deux agents, B et I, n'ont pas les mêmes comportements :
Ainsi, l'agent B, "l'assuré", souhaite maximiser son utilité espérée, tandis que l'agent I, "l'assureur", est supposé passif. Il peut accepter toute transaction dont l'utilité espérée est supérieure à celle associée au fait d'intervenir uniquement sur les marchés financiers. Ainsi, le programme d'optimisation liant ces deux agents peut s'écrire comme :

$$\max_{\substack{F,\pi \\ \xi_B \in \Im_T^S}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[-\exp\left(-\gamma_B \left(X(\Theta) - F(\Theta) + \xi_B(\pi) \right) \right) \right]$$

$$s.c. \quad \max_{\xi_I \in \Im_T^S} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[-\exp\left(-\gamma_I \left(F(\Theta) + \xi_I(x - \pi) \right) \right) \right] \geq \max_{\eta_I \in \Im_T^S} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[-\exp\left(-\gamma_I \eta_I(x) \right) \right]$$

$$\text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\widehat{H}_T \xi_B(\pi) \right] & \leq & \pi \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\widehat{H}_T \xi_I(x - \pi) \right] & \leq & x - \pi \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\widehat{H}_T \eta_I(x) \right] & \leq & x \end{array} \right.$$

Les trois dernières contraintes sont des contraintes de budget. Comme cela a été souligné précédemment, ces contraintes permettent de caractériser les variables correspondant aux valeurs terminales des portefeuilles autofinançants ξ_B, ξ_I et η_I. En effet, celles-ci doivent être mesurables par rapport à $\Im_T^S$. Notons que les ensembles d'optimisation sont donc restreints aux variables $\Im_T^S$-mesurables.

5.2 Détermination de la structure optimale

La résolution du programme d'optimisation global peut se faire en deux étapes principales : tout d'abord, il convient de déterminer les investissements optimaux pour chaque agent dans les actifs de marché. Puis, dans un second temps, la structure optimale F et son prix peuvent être caractérisés.

5.2.1 Caractérisation des stratégies d'investissement sur le marché financier de chacun des agents.

La première étape de la résolution du programme d'optimisation concerne la caractérisation des stratégies de marché de chacun des deux agents, et en particulier, la gestion de la contrainte de l'investisseur, permettant de mieux appréhender le rôle joué par la richesse initiale x. Dans cette section, nous nous intéressons au programme d'optimisation suivant, où F et π sont fixés :

$$\max_{\xi_B \in \Im_T^S} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[-\exp\left(-\gamma_B \left(X(\Theta) - F(\Theta) + \xi_B(\pi)\right)\right)\right]$$

$$s.c. \quad \max_{\xi_I \in \Im_T^S} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[-\exp\left(-\gamma_I \left(F(\Theta) + \xi_I(x-\pi)\right)\right)\right] \geq \max_{\eta_I \in \Im_T^S} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[-\exp\left(-\gamma_I \eta_I(x)\right)\right]$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\widehat{H}_T \xi_B(\pi)\right] & \leq \pi \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\widehat{H}_T \xi_I(x-\pi)\right] & \leq x - \pi \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\widehat{H}_T \eta_I(x)\right] & \leq x \end{cases}$$

La résolution de ce programme se fait très simplement en utilisant la Proposition 13. Ainsi, dans les sous-sections suivantes, on va appliquer successivement trois fois ce résultat afin d'obtenir les investissements optimaux de chacun des agents dans les actifs de marché, pour une structure (F, π) donnée, et d'en déduire une expression plus simple du programme d'optimisation en F et π. Notons, à cette occasion, que l'objectif étant de réécrire plus simplement le programme d'optimisation, nous nous concentrons sur l'expression de la fonction de valeur donnée dans cette proposition.

Réécriture de la contrainte de l'investisseur

Nous rappelons que la contrainte de l'investisseur s'écrit sous la forme des deux programmes d'optimisation suivants :

$$\max_{\xi_I \in \Im_T^S} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[-\exp\left(-\gamma_I \left(F(\Theta) + \xi_I(x-\pi)\right)\right)\right] \geq \max_{\eta_I \in \Im_T^S} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[-\exp\left(-\gamma_I \eta_I(x)\right)\right]$$

$$s.c. \quad \begin{cases} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\widehat{H}_T \xi_I(x-\pi)\right] & \leq \quad x-\pi \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\widehat{H}_T \eta_I(x)\right] & \leq \quad x \end{cases}$$

On peut résoudre ces deux optimisations directement en utilisant la Proposition 13, deux fois. Ainsi :
i) En posant $\Psi \equiv 0$, on résoud le problème du membre de droite. La fonction de valeur obtenue est alors :

$$-\frac{1}{\beta_0} \exp\left\{-\gamma_I x \beta_0 - \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left(\ln \widehat{H}_T\right)\right\}$$

ii) En posant $\Psi \equiv F(\Theta)$, on résoud le problème du membre de gauche. La fonction de valeur obtenue est alors :

$$-\frac{1}{\beta_0} \exp \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln\left\{\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\gamma_I\left(F(\Theta)+x\beta_0\right)\right)/\Im_T^S\right)}{\widehat{H}_T}\right\}\right]$$

La contrainte de l'investisseur peut alors se réécrire en utilisant les fonctions de valeur obtenues ci-dessus comme :

$$\exp\left[\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln\left\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\gamma_I\left(F(\Theta)-\pi\beta_0\right)\right)/\Im_T^S\right)\right\}\right]\right] \leq 1$$

ou en prenant le logarithme :

$$\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln\left\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\gamma_I\left(F(\Theta)-\pi\beta_0\right)\right)/\Im_T^S\right)\right\}\right] \leq 0$$

Notons que la richesse initiale de l'investisseur, x, n'intervient plus. On retrouve ainsi cette propriété caractéristique de l'utilité exponentielle.

Réécriture du programme d'optimisation de la banque

Le programme de maximisation de la banque s'écrit, à F et π fixés, comme :

$$\max_{\xi_B \in \Im_T^S} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[-\exp\left(-\gamma_B\left(X(\Theta)-F(\Theta)+\xi_B(\pi)\right)\right)\right]$$

$$s.c. \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\widehat{H}_T \xi_B(\pi)\right] \quad \leq \quad \pi$$

On peut facilement résoudre ce problème en utilisant la Proposition 13. Ainsi, en posant $\Psi \equiv X(\Theta) - F(\Theta)$, la fonction de valeur obtenue est alors :

$$-\frac{1}{\beta_0} \exp \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln\left\{\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\gamma_B\left[X(\Theta)-\left(F(\Theta)-\pi\beta_0\right)\right]\right\}/\Im_T^S\right)}{\widehat{H}_T}\right\}\right]$$

et le programme d'optimisation de la banque en F et π s'écrit alors :

$$\min_{F,\pi}\left\{\exp \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln\left\{\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\gamma_B\left[X(\Theta)-\left(F(\Theta)-\pi\beta_0\right)\right]\right\}/\Im_T^S\right)}{\widehat{H}_T}\right\}\right]\right\}$$

Nouvelle formulation du programme d'optimisation

En reprenant la fonction de valeur associée au programme de la banque ainsi que la contrainte de l'investisseur, le programme d'optimisation "global", i.e. en F et en π, s'écrit finalement :

$$\min_{F,\pi}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\gamma_B\left[X(\Theta)-\left(F(\Theta)-\pi\beta_0\right)\right]\right\}/\Im_T^S\right)\right]$$

$$s.c. \quad \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\gamma_I\left(F(\Theta)-\pi\beta_0\right)\right\}/\Im_T^S\right)\right]\leq 0$$

Différentes simplifications ont permis d'aboutir à cette expression : ainsi, on a pris le logarithme de la fonction de valeur de la banque et on a simplifié par $\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left(\ln \widehat{H}_T\right)$, qui ne dépend pas de F, ni de π.

5.2.2 Détermination de la structure optimale

Cette section est consacrée à la résolution du programme d'optimisation, reformulé dans la section précédente, et à la caractérisation du prix et de la structure optimale.

Structure optimale et règle de prix

La résolution du programme d'optimisation :

$$\min_{F,\pi}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\gamma_B\left[X(\Theta)-\left(F(\Theta)-\pi\beta_0\right)\right]\right\}/\Im_T^S\right)\right]$$

$$s.c. \quad \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\gamma_I\left(F(\Theta)-\pi\beta_0\right)\right\}/\Im_T^S\right)\right]\leq 0$$

conduit aux résultats suivants :

Theorem 14 *La structure optimale est donnée par :*

$$F^*(\Theta)=\frac{\gamma_B}{\gamma_B+\gamma_I}X(\Theta) \qquad \mathbb{P}\ p.s. \tag{5.3}$$

et son prix est calculé sous la probabilité forward-neutre restreinte à $\Im_T^S$ *par :*

$$\pi^*\beta_0=-\frac{1}{\gamma_I}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\gamma_I F^*(\Theta)\right\}/\Im_T^S\right)\right] \tag{5.4}$$

Commentaires :

i) La structure optimale est proportionnelle à l'exposition initiale. Le facteur de proportionnalité est un coefficient d'aversion relative pour le risque.

Notons que F^* est déterminée à une constante près. Ceci est très logique puisque le programme d'optimisation s'écrit en fonction de l'écart $F(\Theta) - \pi\beta_0$ uniquement. Mais, cette constante n'a aucun impact réel puisqu'elle est répercutée directement sur le prix. Par conséquent, il est d'usage de la supposer nulle et c'est l'hypothèse qui est faite ici.

ii) Ce résultat est relativement fort, puisque la structure optimale n'est pas du tout influencée par l'existence d'un marché financier. L'impact du marché est seulement visible dans la règle d'évaluation qui se fait sous $\widehat{\mathbb{Q}}_T$. D'autre part, la structure optimale ne dépend pas de la distribution du risque non-financier. Aucune hypothèse n'a été faite la concernant.

iii) Notons également que la logique très particulière de ces produits à mi-chemin entre finance et assurance est visible ici, au sens où la banque ne vendra un contrat F que si son exposition initiale dans le risque non-financier est non-nulle. Il ne s'agit en aucun cas de spéculation mais bien de couverture.

Preuve du Théorème

L'objectif de cette sous-section est la résolution du programme :

$$\min_{F,\pi} \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T} \left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\exp\left\{-\gamma_B \left[X(\Theta) - (F(\Theta) - \pi\beta_0)\right]\right\} / \Im_T^S\right)\right] \tag{5.5}$$

$$s.c. \quad \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T} \left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\exp\left\{-\gamma_I (F(\Theta) - \pi\beta_0)\right\} / \Im_T^S\right)\right] \leq 0$$

Pour cela, on peut procéder en deux étapes principales :

Détermination de la règle d'évaluation La règle de prix est obtenue directement en saturant la contrainte de l'investisseur à l'optimum. Ainsi :

$$\pi^*\beta_0 = -\frac{1}{\gamma_I} \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T} \left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\exp\left\{-\gamma_I F^*(\Theta)\right\} / \Im_T^S\right)\right]$$

est la fonction de prix optimale.

Détermination de la structure optimale En subsituant la fonction de prix $\pi^*(F)$ dans la programme de minimisation, celui-ci peut alors se ramener à :

$$\min_F \left\{ \frac{\gamma_B}{\gamma_I} \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T} \left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\exp\left\{-\gamma_I F(\Theta)\right\} / \Im_T^S\right)\right] + \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T} \left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\exp\left\{-\gamma_B \left[X(\Theta) - F(\Theta)\right]\right\} / \Im_T^S\right)\right] \right\}$$

Ce programme d'optimisation est identique au précédent, i.e. :

$$\min_{F,\pi} \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\gamma_B\left[X(\Theta)-(F(\Theta)-\pi\beta_0)\right]\right\}/\Im_T^S\right)\right]$$

$$s.c. \quad \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\gamma_I(F(\Theta)-\pi\beta_0)\right\}/\Im_T^S\right)\right] \leq 0$$

puisque quelle que soit la structure F, on peut toujours agir sur la fonction de prix optimale $\pi^*(F)$ de façon à ce que la contrainte soit saturée.

Intuition de la forme de la structure :

D'après les études réalisées dans le chapitre précédent, la structure optimale comporte toujours le terme $\frac{\gamma_B}{\gamma_B+\gamma_I}X(\Theta)$. Pour cette raison, nous allons regarder si une structure de la forme :

$$\frac{\gamma_B}{\gamma_B+\gamma_I}X(\Theta)+\Phi(\Theta)$$

est optimale pour le problème. Déterminer F optimal est alors équivalent à déterminer la fonction Φ optimale :

$$\min_{\Phi}\left\{\begin{array}{c}\frac{\gamma_B}{\gamma_I}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\frac{\gamma_B\gamma_I}{\gamma_B+\gamma_I}X(\Theta)\right)\exp\left(-\gamma_I\Phi(\Theta)\right)/\Im_T^S\right)\right]\\ +\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\frac{\gamma_B\gamma_I}{\gamma_B+\gamma_I}X(\Theta)\right)\exp\left(\gamma_B\Phi(\Theta)\right)/\Im_T^S\right)\right]\end{array}\right\}$$

Nous procédons désormais en deux temps pour caractériser la structure optimale :

1. *Dans un premier temps, nous supposons que* $X(\Theta)\equiv 0$ *:*

   Par conséquent, on cherche à résoudre le programme suivant :

$$\min_{\Phi}\left\{\frac{\gamma_B}{\gamma_I}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\gamma_I\Phi(\Theta)\right)/\Im_T^S\right)\right]+\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(\gamma_B\Phi(\Theta)\right)/\Im_T^S\right)\right]\right\} \triangleq \min_{\Phi} f(\Phi)$$

   La fonction f que l'on cherche à minimiser est toujours positive ou nulle. C'est une conséquence immédiate de l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction concave ln :

$$\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(\gamma_B\Phi(\Theta)\right)/\Im_T^S\right) \geq \gamma_B\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\Phi(\Theta)/\Im_T^S\right) \qquad \mathbb{P}\ p.s.$$
$$\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\gamma_I\Phi(\Theta)\right)/\Im_T^S\right) \geq -\gamma_I\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\Phi(\Theta)/\Im_T^S\right) \qquad \mathbb{P}\ p.s.$$

   En prenant l'espérance sous $\widehat{\mathbb{Q}}_T$ de ces inégalités, la positivité de la fonction vient directement :

$$\forall\Phi, \qquad f(\Phi)\geq 0$$

Existence d'une solution : Lorsque Φ est une variable aléatoire constante, égale à φ $\mathbb{P}$ *p.s.*, la fonction $f(\varphi)$ est nulle, i.e. elle atteint son minimum. Par conséquent, les variables constantes sont solution de ce programme de minimisation.

Unicité de la famille des solutions :

On cherche alors à montrer que : $f(\Phi) = 0 \Rightarrow \Phi \equiv \varphi \qquad \mathbb{P}$ *p.s.*

L'annulation de la fonction f en Φ donne :

$$\frac{1}{\gamma_B}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(\gamma_B \Phi(\Theta)\right)/\Im_T^S\right)\right] = -\frac{1}{\gamma_I}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\gamma_I \Phi(\Theta)\right)/\Im_T^S\right)\right]$$

On utilise alors à nouveau l'inégalité de Jensen pour la fonction concave ln. Les encadrements suivants sont obtenus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\Phi(\Theta)/\Im_T^S\right)\right] \geq -\frac{1}{\gamma_I}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\gamma_I \Phi(\Theta)\right)/\Im_T^S\right)\right] \\
= \frac{1}{\gamma_B}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(\gamma_B \Phi(\Theta)\right)/\Im_T^S\right)\right] \\
\leq \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\Phi(\Theta)/\Im_T^S\right)\right]
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a, par exemple, l'égalité suivante :

$$\frac{1}{\gamma_B}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(\gamma_B \Phi(\Theta)\right)/\Im_T^S\right)\right] = \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\Phi(\Theta)/\Im_T^S\right)\right] \tag{$*$}$$

Ceci implique l'égalité suivante :

$$\frac{1}{\gamma_B}\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(\gamma_B \Phi(\Theta)\right)/\Im_T^S\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\Phi(\Theta)/\Im_T^S\right) \qquad \mathbb{P}\ p.s. \tag{$**$}$$

Cette implication se justifie facilement, puisque $(*)$ revient à écrire :

$$\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}(Y) = 0$$

où Y est une variable aléatoire positive ou nulle $\mathbb{P}$ *p.s.* d'après l'inégalité de Jensen. Alors, on a forcément Y identiquement nulle $\mathbb{P}$ *p.s.*, ce qui correspond à l'égalité $(**)$.

Une seule famille de variables aléatoires Φ est compatible avec $(**)$: il s'agit des variables aléatoires $\Im_T^S$-mesurables. Or, dans le cadre précis de notre étude, cela n'est possible que si Φ est une variable aléatoire constante.

2. *Dans un second temps, nous supposons* $X(\Theta)$ *quelconque :*

On cherche alors à résoudre :

$$\min_{\Phi}\left\{\begin{array}{c}\frac{\gamma_B}{\gamma_I}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\frac{\gamma_B\gamma_I}{\gamma_B+\gamma_I}X\left(\Theta\right)\right)\exp\left(-\gamma_I\Phi\left(\Theta\right)\right)/\Im_T^S\right)\right]\\ +\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\frac{\gamma_B\gamma_I}{\gamma_B+\gamma_I}X\left(\Theta\right)\right)\exp\left(\gamma_B\Phi\left(\Theta\right)\right)/\Im_T^S\right)\right]\end{array}\right\}$$

On peut facilement se ramener à la situation précédente en faisant le changement de probabilités suivant, qui ne dépend pas de Φ :

$$\frac{d\mathbb{P}^X}{d\mathbb{P}}/\Im_T^S=\frac{\exp\left(-\frac{\gamma_B\gamma_I}{\gamma_B+\gamma_I}X\left(\Theta\right)\right)}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\frac{\gamma_B\gamma_I}{\gamma_B+\gamma_I}X\left(\Theta\right)\right)/\Im_T^S\right]}$$

et en travaillant ensuite sous $\mathbb{P}^X$ et non plus sous $\mathbb{P}$.

Par conséquent, le programme s'écrit alors :

$$\min_{\Phi}\left\{\begin{array}{c}\frac{\gamma_B}{\gamma_I}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln\mathbb{E}_{\mathbb{P}^X}\left(\exp\left(-\gamma_I\Phi\left(\Theta\right)\right)/\Im_T^S\right)\right]+\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln\mathbb{E}_{\mathbb{P}^X}\left(\exp\left(\gamma_B\Phi\left(\Theta\right)\right)/\Im_T^S\right)\right]\\ +\left(\frac{\gamma_B}{\gamma_I}+1\right)\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\frac{\gamma_B\gamma_I}{\gamma_B+\gamma_I}X\left(\Theta\right)\right)/\Im_T^S\right)\right]\end{array}\right\}$$

Comme le dernier terme est une constante, qui ne dépend pas de Φ, cela revient à trouver Φ telle que :

$$\min_{\Phi}\left\{\frac{\gamma_B}{\gamma_I}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln\mathbb{E}_{\mathbb{P}^X}\left(\exp\left(-\gamma_I\Phi\left(\Theta\right)\right)/\Im_T^S\right)\right]+\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln\mathbb{E}_{\mathbb{P}^X}\left(\exp\left(\gamma_B\Phi\left(\Theta\right)\right)/\Im_T^S\right)\right]\right\}$$

On est ramené au cas précédent mais avec la mesure de probabilité $\mathbb{P}^X$ au lieu de $\mathbb{P}$. La structure optimale est donc toujours de la forme :

$$F^*\left(\Theta\right)=\frac{\gamma_B}{\gamma_B+\gamma_I}X\left(\Theta\right)+\varphi\qquad\mathbb{P}\ p.s.$$

■

Remarque sur la preuve :

Comme cela a été souligné précédemment, le programme d'optimisation est écrit uniquement en terme de l'écart $F\left(\Theta\right)-\pi\beta_0$, que l'on peut noter $\overline{F}\left(\Theta\right)$. On aurait alors pu résoudre la minimisation uniquement par rapport à cette variable unique $\overline{F}\left(\Theta\right)$. Ainsi, le programme s'écrit :

$$\min_{\overline{F}}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\gamma_B\left[X\left(\Theta\right)-\overline{F}\left(\Theta\right)\right]\right\}/\Im_T^S\right)\right]$$

$$s.c.\quad\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\gamma_I\overline{F}\left(\Theta\right)\right\}/\Im_T^S\right)\right]\leq 0$$

La résolution est alors complétement équivalente à celle que nous avons choisie de présenter ici.

5.2.3 Fonction de valeur et niveau d'utilité

Caractérisation de la fonction de valeur

En reprenant le programme d'optimisation reformulé (5.5) et en remplaçant la structure F et son prix π par leur forme optimale respective, nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 15 *La fonction de valeur du programme d'optimisation (5.5) est donnée par :*

$$\frac{1}{\widetilde{\gamma}}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\widetilde{\gamma}X\left(\Theta\right)\right\}/\Im_T^S\right)\right] \tag{5.6}$$

où :

$$\widetilde{\gamma}=\frac{\gamma_B\gamma_I}{\gamma_B+\gamma_I}$$

Preuve :

La fonction de valeur du programme d'optimisation reformulé est donnée par :

$$\frac{1}{\gamma_I}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\gamma_I F^*\left(\Theta\right)\right\}/\Im_T^S\right)\right]+\frac{1}{\gamma_B}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\gamma_B\left[X\left(\Theta\right)-F^*\left(\Theta\right)\right]\right\}/\Im_T^S\right)\right]$$

soit en remplaçant F^* par sa forme optimale :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\gamma_I}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\gamma_I\frac{\gamma_B}{\gamma_B+\gamma_I}X\left(\Theta\right)\right\}/\Im_T^S\right)\right] \\
& +\frac{1}{\gamma_B}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\gamma_B\left[X\left(\Theta\right)-\frac{\gamma_B}{\gamma_B+\gamma_I}X\left(\Theta\right)\right]\right\}/\Im_T^S\right)\right] \\
= & \frac{1}{\gamma_I}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\frac{\gamma_B\gamma_I}{\gamma_B+\gamma_I}X\left(\Theta\right)\right\}/\Im_T^S\right)\right] \\
& +\frac{1}{\gamma_B}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\gamma_B\left[\frac{\gamma_I}{\gamma_B+\gamma_I}X\left(\Theta\right)\right]\right\}/\Im_T^S\right)\right] \\
= & \left(\frac{1}{\gamma_I}+\frac{1}{\gamma_B}\right)\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\frac{\gamma_B\gamma_I}{\gamma_B+\gamma_I}X\left(\Theta\right)\right\}/\Im_T^S\right)\right] \\
= & \frac{1}{\widetilde{\gamma}}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\widetilde{\gamma}X\left(\Theta\right)\right\}/\Im_T^S\right)\right]
\end{aligned}$$

avec

$$\widetilde{\gamma}=\frac{\gamma_B\gamma_I}{\gamma_B+\gamma_I}$$

■

Remark 2 *Cette quantité coïncide avec l'évaluation que chacun des deux agents fait de son exposition respective vis à vis du risque non-financier qu'il supporte en faisant la transaction liée à F. Notons que cette valeur est identique pour la banque et l'investisseur. Une transaction est donc possible. De plus, ceci correspond à l'espérance de l'équivalent certain conditionnel de $X\left(\Theta\right)$ donné par un agent* *représentatif ayant une aversion pour le risque $\widetilde{\gamma}$ et une utilité conditionnelle exponentielle. Notons que cette quantité est bien homogène à un prix (i.e. au prix non-linéaire de $X(\Theta)$ au signe "$-$" devant l'espérance près). Elle est encore homogène à une mesure de risque (i.e. mesure du risque conditionnelle de $X(\Theta)$, cf. par exemple les travaux de H. Föllmer et A. Schied sur les mesures de risque convexe ([29])). Pour plus de simplicité, nous la désignerons par la suite par l'expression "prix" du risque. Le niveau d'utilité associée est donné (au signe près) par :*

$$\exp\left[-\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\widetilde{\gamma} X(\Theta)\right\}/\Im_T^S\right)\right]\right] \tag{5.7}$$

Le marché étant globalement incomplet mais partiellement complet, cet agent ne considère que la partie de l'équivalent certain de X qui est $\Im_T^S$-mesurable. Cela caractérise l'ensemble des portefeuilles de couverture auxquels il a accès.

Etudes numériques du "prix" du risque : cas gaussien et cas quadratique gaussien

Dans cette sous-section, nous étudions le "prix" du risque donné par l'équation (5.6) en fonction des différents paramètres lorsque le risque non-financier suit une loi normale (centrée, par souci de simplification). Deux cas particuliers sont présentés :

1. Tout d'abord, nous étudions le cas où l'exposition initiale de la banque est proportionnelle à ce risque.
2. Puis, nous étudions celui où l'exposition initiale de la banque est proportionnelle au carré de ce risque.

Plusieurs résultats préliminaires sont nécessaires pour mener à bien les différents calculs. Ceux-ci nous seront également utiles dans la section suivante.

Résultat préliminaire

Nous présentons tout d'abord un Lemme préliminaire qui nous sera très utile, notamment dans les deux études suivantes :

Lemma 16 *Soit Δ une variable aléatoire gaussienne, centrée et de variance δ^2. Alors, pour tout réel a et tout réel b tel que $1 - b\delta^2 > 0$:*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(a\Delta + \frac{b}{2}\Delta^2\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{1-b\delta^2}} \exp\left(\frac{a^2\delta^2}{2\left(1-b\delta^2\right)}\right)$$

Si $\mathbb{E}(\Delta) = m$ *alors :*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(a\Delta + \frac{b}{2}\Delta^2\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{1-b\delta^2}}\exp\left(\frac{a^2\delta^2 + 2am + bm^2}{2\left(1-b\delta^2\right)}\right)$$

Preuve :

La preuve vient immédiatement en calculant explicitement l'espérance comme :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(ax + \frac{b}{2}x^2\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$$

■

Etude dans le cas gaussien

Hypothèses et notations Dans cette étude particulière, les hypothèses suivantes sont faites :

1. Θ est une variable aléatoire gaussienne centrée, de variance δ^2. On suppose, de plus, que $X(\Theta) \equiv \chi.\Theta$, où χ est un réel donné.
2. Par souci de simplicité, on suppose que les taux sont nuls.
3. La dynamique de l'actif de marché S, sous la probabilité $\mathbb{P}$, est la suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha\Theta dt + \sigma dW_t$$

où α et σ sont deux réels, non-nuls. D'autre part, on suppose que $\sigma > 0$.

W est un $\mathbb{P}$-mouvement Brownien, indépendant de Θ.

Calcul du "prix" Pour exprimer de façon simple le "prix" donné par la Proposition 15, il suffit de régresser $\exp(-\gamma\chi\Theta)$ sur $\Im_T^S$, puisqu'il s'agit désormais d'un problème simple de filtrage linéaire (cas gaussien). En effet, comme :

$$\ln S_t = \ln S_0 - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t + \alpha\Theta$$

avec W_t et Θ deux variables indépendantes, on obtient directement :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma\chi\Theta\right)/\Im_T^S\right] = \exp\left\{\frac{\left(\gamma^2\chi^2 - 2\frac{\alpha}{\sigma}W_T^Q\right)\delta^2}{2\left(1+\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\delta^2 T\right)}\right\} \tag{5.8}$$

où :

$$W_T^Q = \frac{1}{\sigma}\left(\ln\frac{S_T}{S_0} + \frac{\sigma^2}{2}T\right)$$

Puis, on doit calculer :

$$\frac{1}{\gamma}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\gamma\chi\Theta\right\}/\Im_T^S\right)\right]$$

On obtient directement, en remarquant que $\left(W_t^Q; 0 \leq t \leq T\right)$ est un $\left(\mathbb{Q}_T - \Im^S\right)$-mouvement Brownien :

$$\frac{1}{\gamma}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\gamma\chi\Theta\right\}/\Im_T^S\right)\right] = \frac{\gamma\delta^2}{2\left(1+\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\delta^2 T\right)}\chi^2 \tag{5.9}$$

Sensibilité aux différents paramètres Nous procédons ici à différentes études numériques de sensibilité du "prix" du risque donné par l'équation (5.9). Les valeurs par défaut des différents paramètres sont les suivantes :

T	σ	α	δ	χ	$\widetilde{\gamma}$
1 an	20%	10%	40%	5	$0,5$ ($\gamma_B = \gamma_I = 1$)

Sensibilité relative à $\widetilde{\gamma}$ La figure suivante présente la sensibilité du"prix" du risque par rapport à l'aversion globale pour le risque, $\widetilde{\gamma}$. Nous pouvons noter que la dépendance du "prix" est linéaire croissante par rapport à ce paramètre d'aversion pour le risque. Ceci est logique compte tenu de l'équation (5.9). Dans le cas gaussien, le signe de l'exposition de la banque dépend de la réalisation de Θ. Il y a donc un réel risque lié au signe de cette réalisation. Plus les agents sont globalement averses au risque, plus le "prix" du risque va être important :

Sensibilité relative à γ_B (pour γ_I fixé) La figure suivante présente la sensibilité du "prix" du risque par rapport à l'aversion pour le risque de la banque, γ_B, lorsque l'investisseur a une aversion pour le risque constante. Notons que l'étude réciproque est rigoureusement identique, puisque les deux coefficients d'aversion pour le risque jouent des rôles symétriques. Nous pouvons noter que le niveau d'utilité est croissant avec ce paramètre d'aversion pour le risque. Ceci est très logique puisque $\widetilde{\gamma}$ est une fonction croissante de γ_B. De plus, le niveau du "prix" est d'autant plus important que le coefficient γ_I est important, puisque le paramètre d'aversion globale $\widetilde{\gamma}$ s'en trouve lui-même augmenté.

Sensibilité relative à σ La figure suivante présente la sensibilité du "prix" du risque par rapport à la volatilité de l'actif de marché, σ, pour différents niveaux d'aversion globale pour le risque. Nous pouvons noter que le "prix" augmente avec la volatilité et que ce niveau est d'autant plus élevé que l'aversion pour le risque est importante (ce résultat est confirmé par l'étude de la sensibilité relative à $\widetilde{\gamma}$). Ainsi, plus le risque associé à l'actif de marché est important, plus le "prix" que les agents accordent au risque qu'ils supportent est important. Ceci est logique, car, dans une certaine mesure, le coût de la couverture de leur exposition dans le risque non-financier augmente avec ce paramètre de volatilité.

Sensibilité relative à α La figure suivante présente la sensibilité du "prix" du risque par rapport à la dérive de l'actif de marché, α, pour différents niveaux d'aversion globale pour le risque. Nous pouvons noter que le "prix" est décroissant avec la dérive et que ce niveau est d'autant plus fort que l'aversion pour le risque est forte (ce résultat est confirmé par l'étude de la sensibilité relative à $\widetilde{\gamma}$). Ainsi, plus la part de la dérive de l'actif de marché expliquée par le risque non-financier est importante, moins le "prix" que les agents accordent au risque qu'ils supportent est important. Ceci est logique, car, dans une certaine mesure, le lien entre l'actif de marché, servant à la couverture de leur position, et le risque non-financier augmente avec ce paramètre de dérive.

Notons que le "prix" du risque lorsque le paramètre α tend vers 0 est identique au "prix" du risque lorsque le paramètre de volatilité σ tend vers l'infini. Ceci est logique puisque, dans ces deux situations, l'efficacité de la couverture de la position "non-financière" par l'actif S est réduite au minimum.

Sensibilité relative à δ La figure suivante présente la sensibilité du "prix" du risque par rapport à la volatilité du risque non-financier, δ, pour différents niveaux d'aversion globale pour le risque. Nous pouvons noter que le "prix" est croissant avec ce paramètre de volatilité et ce d'autant plus que l'aversion pour le risque est forte. Ainsi, plus l'actif non-financier est risqué, plus le "prix" que les agents accordent au risque qu'ils supportent est important.

Etude dans le cas quadratique gaussien

Hypothèses et notations Dans cette étude particulière, les hypothèses suivantes sont faites :

1. Θ est une variable aléatoire gaussienne centrée, de variance δ^2. On suppose, de plus, que $X(\Theta) \equiv \chi\Theta^2$, où χ est un réel donné.
2. Comme précédemment, par souci de simplicité, on suppose que les taux sont nuls.
3. La dynamique de l'actif de marché S, sous la probabilité $\mathbb{P}$, n'est pas modifiée par rapport au cas gaussien. Elle reste :
$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha\Theta dt + \sigma dW_t$$
où α et σ sont deux réels, non-nuls. D'autre part, on suppose que $\sigma > 0$.
W est un $\mathbb{P}$-mouvement Brownien, indépendant de Θ.

Calcul du "prix" du risque Pour exprimer de façon simple le "prix" du risque donné par la Proposition (15) dans le cadre quadratique gaussien, plusieurs calculs préliminaires sont nécessaires, notamment pour déterminer $E_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma\chi\Theta^2\right)/\Im_T^S\right]$. Pour ce faire, on utilise l'approche de type Kallianpur-Striebel, i.e. :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma\chi\Theta^2\right)/\Im_T^S\right] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}\left[H_T^{-1}\exp\left(-\gamma\chi\Theta^2\right)/\Im_T^S\right]}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}\left[H_T^{-1}/\Im_T^S\right]}$$

Or

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}\left[H_T^{-1}/\Im_T^S\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}\left[\exp\left(\frac{\alpha\Theta}{\sigma}W_T^Q - \left(\frac{\alpha\Theta}{\sigma}\right)^2 T\right)/\Im_T^S\right] = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\delta^2 T}}\exp\left\{\frac{\left(\frac{\alpha}{\sigma}W_T^Q\right)^2\delta^2}{2\left(1+\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\delta^2 T\right)}\right\}$$

d'après le Lemme 16 et l'indépendance des variables.

D'autre part, de la même façon :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}\left[H_T^{-1}\exp\left(-\gamma\chi\Theta^2\right)/\Im_T^S\right] = \frac{1}{\sqrt{1+2\left(\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}T+\gamma\chi\right)\delta^2}}\exp\left\{\frac{\left(\frac{\alpha}{\sigma}W_T^Q\right)^2\delta^2}{2\left(1+2\left(\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}T+\gamma\chi\right)\delta^2\right)}\right\}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma\chi\Theta^2\right)/\Im_T^S\right]\\ = \quad & \frac{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\delta^2 T}}{\sqrt{1+2\left(\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}T+\gamma\chi\right)\delta^2}}\exp\left\{\left(\frac{\alpha}{\sigma}W_T^Q\right)^2\delta^2\left[\frac{1}{2\left(1+2\left(\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}T+\gamma\chi\right)\delta^2\right)} - \frac{1}{2\left(1+\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\delta^2 T\right)}\right]\right\}\end{aligned}$$

ou, en utilisant les notations simplifiées suivantes :

$$\begin{cases} a_1 = 1+\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\delta^2 T \\ a_2(\chi) = 1+2\left(\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}T+\gamma\chi\right)\delta^2 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma\chi\Theta^2\right)/\Im_T^S\right] = \frac{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\delta^2 T}}{\sqrt{1+2\left(\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}T+\gamma\chi\right)\delta^2}} \times \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\sigma}W_T^Q\right)^2\delta^2\left[\frac{1}{a_2(\chi)} - \frac{1}{a_1}\right]\right\} \tag{5.10}$$

Comme le "prix" du risque s'écrit

$$\frac{1}{\gamma}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\gamma\chi\Theta^2\right\}/\Im_T^S\right)\right]$$

on obtient directement, en remarquant que $\left(W_t^Q; 0 \leq t \leq T\right)$ est un $\left(\mathbb{Q}_T - \Im^S\right)$-mouvement Brownien :

$$\frac{1}{\gamma}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left\{-\gamma\chi\Theta^2\right\}/\Im_T^S\right)\right] = \frac{1}{\gamma}\left[\ln\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2(\chi)}} + \left(\frac{\alpha\delta}{\sigma}\right)^2\left(\frac{1}{2a_2(\chi)} - \frac{1}{2a_1}\right)T\right] \tag{5.11}$$

Sensibilité aux différents paramètres Nous procédons ici à différentes études numériques de sensibilité du "prix" du risque donné par l'équation (5.11). Les valeurs par défaut des différents paramètres sont les suivantes :

T	σ	α	δ	χ	$\widetilde{\gamma}$
1 an	20%	10%	40%	5	$0,5$ $(\gamma_B = \gamma_I = 1)$

Sensibilité relative à $\widetilde{\gamma}$ La figure suivante présente la sensibilité du "prix" du risque par rapport à l'aversion globale pour le risque, $\widetilde{\gamma}$. Nous pouvons noter que le "prix" est une fonction décroissante de ce paramètre d'aversion pour le risque. Ceci peut paraître surprenant. En réalité, dans le cas quadratique gaussien, quelle que soit la réalisation de Θ, l'exposition de la banque est positive, donc celle des deux agents également. Plus les agents sont globalement averses au risque, plus l'utilité va être importante et moins le "prix" qu'ils vont donner à ce risque est important.

Sensibilité relative à γ_B (pour γ_I fixé) La figure suivante présente la sensibilité du "prix" du risque par rapport à l'aversion pour le risque de la banque, γ_B, lorsque l'investisseur a une aversion pour le risque constante. Notons que l'étude réciproque est rigoureusement identique, puisque les deux coefficients d'aversion pour le risque jouent des rôles symétriques. Nous pouvons noter que le "prix" est décroissant avec ce paramètre d'aversion pour le risque. Ceci est très logique puisque $\widetilde{\gamma}$ est une fonction croissante de γ_B. De plus, le niveau du "prix" est d'autant moins important que le coefficient γ_I est important, puisque le paramètre d'aversion globale $\widetilde{\gamma}$ s'en trouve lui-même augmenté.

Sensibilité relative à σ La figure suivante présente la sensibilité du "prix" du risque par rapport à la volatilité de l'actif de marché, σ, pour différents niveaux d'aversion globale pour le risque. Nous pouvons noter que le "prix" est très faiblement lié à ce paramètre de volatilité, même si on peut remarquer une décroissance, notamment pour les niveaux peu importants σ. Pour les valeurs "raisonnables" de σ, l'absence de dépendance est logique, puisque, dans le cadre quadratique gaussien, les agents "gagnent à tous les coups", ils ne vont donc pas chercher à couvrir leur position "non-financière" à l'aide de S.

Sensibilité relative à α La figure suivante présente la sensibilité du "prix" du risque par rapport à la dérive de l'actif de marché, α, pour différents niveaux d'aversion globale pour le risque. Nous pouvons noter que le "prix" est très faiblement lié à ce paramètre de dérive, même si on peut remarquer une légère décroissance, notamment pour les niveaux peu importants de l'aversion pour le risque. Ainsi, la dépendance entre l'actif de marché et le risque non-financier n'a quasiment aucune importance sur le "prix" que les agents accordent au risque qu'ils supportent. Ceci est logique, puisque, dans le cadre quadratique gaussien, les agents "gagnent à tous les coups", ils ne vont donc pas chercher à couvrir leur position "non-financière" à l'aide de S.

Sensibilité relative à δ La figure suivante présente la sensibilité du "prix" du risque par rapport à la volatilité du risque non-financier, δ, pour différents niveaux d'aversion globale pour le risque. Nous pouvons noter que le "prix" est une fonction croissante de ce paramètre de volatilité et ce d'autant plus que l'aversion pour le risque est faible. Ainsi, plus l'actif non-financier est risqué, plus le "prix" que les agents accordent au risque qu'ils supportent est important.

5.3 Deux études de l'impact de l'existence d'une source de risque non financière sur les décisions d'investissement sur le marché financier

Dans cette section, nous nous intéressons à l'impact sur les stratégies d'investissement dans le marché financier de l'existence de la source de risque non-financière. Pour avoir une réponse explicite, nous nous plaçons dans les deux cas particuliers que nous avons présentés ci-dessus : les cas gaussien et le cas quadratique gaussien. Nous reprenons ainsi les résultats concernant les portefeuilles de marché optimaux pour chacun des deux agents. Grâce à la Proposition 13, les valeurs terminales des investissements de marché de chacun des deux agents sont données par :

$$\begin{aligned}
\xi_I^*\left(x-\pi^*, T\right) &= x\beta_0 - \frac{1}{\gamma_I}\ln \widehat{H}_T + \frac{1}{\gamma_I}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left(\ln \widehat{H}_T\right) \\
&\quad + \frac{1}{\gamma_I}\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\frac{\gamma_I\gamma_B}{\gamma_I+\gamma_B}X\left(\Theta\right)\right)/\Im_T^S\right] \\
&\quad - \frac{1}{\gamma_I}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left\{\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\frac{\gamma_I\gamma_B}{\gamma_I+\gamma_B}X\left(\Theta\right)\right)/\Im_T^S\right]\right\} \qquad \mathbb{P}\ p.s.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

et

$$
\begin{aligned}
\xi_B^*(\pi^*,T) &= -\frac{1}{\gamma_B}\ln \widehat{H}_T + \frac{1}{\gamma_B}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left(\ln \widehat{H}_T\right) \\
&+\frac{1}{\gamma_B}\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\frac{\gamma_I\gamma_B}{\gamma_I+\gamma_B}X(\Theta)\right)/\Im_T^S\right] \\
&-\frac{\gamma_B+\gamma_I}{\gamma_B\gamma_I}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left\{\ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\frac{\gamma_I\gamma_B}{\gamma_I+\gamma_B}X(\Theta)\right)/\Im_T^S\right]\right\} \qquad \mathbb{P}\ p.s.
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

5.3.1 Etude dans le cas d'une exposition gaussienne

Hypothèses et notations

Nous rappelons que , dans cette étude particulière, les hypothèses suivantes sont faites :

1. Θ est une variable aléatoire gaussienne centrée, de variance δ^2. On suppose, de plus, que $X(\Theta) \equiv \chi\Theta$, où χ est un réel donné.
2. Par souci de simplicité, on suppose que les taux sont nuls.
3. La dynamique de l'actif de marché S, sous la probabilité $\mathbb{P}$, est la suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha\Theta dt + \sigma dW_t$$

où α et σ sont deux réels, non-nuls. D'autre part, on suppose que $\sigma > 0$.

W est un $\mathbb{P}$-mouvement Brownien, indépendant de Θ.

Par conséquent, en utilisant les calculs de la section 4.2.2, la dynamique de la densité des prix d'état H, sous $\mathbb{P}$, est la suivante :

$$\forall t \in [0;T] \qquad \frac{dH_t}{H_t} = -\frac{\alpha\Theta}{\sigma}dW_t$$

et le numéraire de marché M défini comme :

$$\forall t \in [0;T] \qquad M_t = \frac{1}{H_t}$$

a la dynamique suivante sous $\mathbb{Q}_T$:

$$\forall t \in [0;T] \qquad \frac{dM_t}{M_t} = \frac{\alpha\Theta}{\sigma}dW_t^Q$$

où $\left(W_t^Q; 0 \leq t \leq T\right)$ est un $\left(\mathbb{Q}_T - \Im^S\right)$-mouvement Brownien.

De plus, d'après le chapitre 4, nous avons, $\forall t \in [0;T]$:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\lambda}\left(t,[S]_t\right) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{\alpha\Theta}{\sigma}/\Im_t^S\right] \\
&= \frac{1}{\sigma}\frac{\alpha m\left(\frac{\sigma^2}{2}t-\ln S_0\right)+\alpha\left(\delta^2+m^2\right)}{\sigma^2 t+\alpha^2\delta^2}\left(\ln S_t+\frac{\sigma^2}{2}t-\ln S_0\right) \\
&= \frac{\alpha m\left(\frac{\sigma^2}{2}t-\ln S_0\right)+\alpha\left(\delta^2+m^2\right)}{\sigma^2 t+\alpha^2\delta^2}W_t^Q
\end{aligned}
$$

Il s'agit d'un processus aléatoire, $\Im^S$-mesurable.

Calculs préliminaires

Pour exprimer de façon simple les valeurs terminales des portefeuilles de marché des agents B et I dans le cadre gaussien, plusieurs calculs préliminaires sont nécessaires :

1. *Calcul de* $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma\chi\Theta\right)/\Im_T^S\right]$ *:* D'après ce qui précède et notamment, l'équation (5.8), on a :

$$
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma\chi\Theta\right)/\Im_T^S\right]=\exp\left\{\frac{\left(\gamma^2\chi^2-2\frac{\alpha}{\sigma}W_T^Q\right)\delta^2}{2\left(1+\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\delta^2 T\right)}\right\}
$$

2. *Calcul de* $\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left(\ln\widehat{H}_T\right)$:

   Comme la dynamique de $\widehat{H}$ sous $\mathbb{Q}_T$ est donnée par :

$$
\forall t\in[0;T] \qquad \frac{d\widehat{H}_t}{\widehat{H}_t}=\left(\widehat{\lambda}\left(t,[S]_t\right)\right)^2dt-\widehat{\lambda}\left(t,[S]_t\right)dW_t^Q
$$

   alors

$$
\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left(\ln\widehat{H}_T\right)=\frac{1}{2}\left(\widehat{\lambda}\left(T,[S]_T\right)\right)^2T
$$

Portefeuilles optimaux pour l'agent I et pour l'agent B

En reprenant les équations (5.12) et (5.13), et en utilisant les résultats préliminaires développés ci-dessus, nous obtenons :

$$
\xi_I^*\left(x-\pi^*,T\right) = x+\frac{1}{\gamma_I}\left\{g_0^I-g_1W_T^Q-g_2\left(W_T^Q\right)^2\right\} \tag{5.14}
$$

$$
\xi_B^*\left(\pi^*,T\right) = \frac{1}{\gamma_B}\left\{g_0^B-g_1W_T^Q-g_2\left(W_T^Q\right)^2\right\} \tag{5.15}
$$

où g_0^I, g_0^B et g_1 sont trois constantes définies par :

$$\begin{aligned}
g_0^I &= \frac{T}{2}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\left(\widehat{\lambda}\left(T,[S]_T\right)\right)^2\right]+\frac{1}{2}\frac{\delta^2\chi^2\left(\frac{\gamma_I\gamma_B}{\gamma_I+\gamma_B}\right)^2}{1+\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\delta^2T}\\
g_0^B &= \frac{T}{2}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\left(\widehat{\lambda}\left(T,[S]_T\right)\right)^2\right]+\frac{\gamma_B}{2\gamma_I}\frac{\delta^2\chi^2\left(\frac{\gamma_I\gamma_B}{\gamma_I+\gamma_B}\right)^2}{1+\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\delta^2T}\\
g_1 &= \frac{\alpha}{\sigma}\frac{\gamma_I\gamma_B}{\gamma_I+\gamma_B}\frac{\delta^2\chi}{1+\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\delta^2T}
\end{aligned}$$

et où $g_2\left(W_T^Q\right)^2$ est une fonction quadratique de W^Q définie par :

$$g_2\left(W_T^Q\right)^2=\frac{T}{2}\left(\widehat{\lambda}\left(T,[S]_T\right)\right)^2-\widehat{\lambda}\left(T,[S]_T\right)W_T^Q$$

Compte tenu de la forme de la prime de risque conditionnelle, on obtient :

$$g_2=\frac{T}{2}\left(\frac{\alpha m\left(\frac{\sigma^2}{2}t-\ln S_0\right)+\alpha\left(\delta^2+m^2\right)}{\sigma^2t+\alpha^2\delta^2}\right)^2-\frac{\alpha m\left(\frac{\sigma^2}{2}t-\ln S_0\right)+\alpha\left(\delta^2+m^2\right)}{\sigma^2t+\alpha^2\delta^2}$$

L'impact de la structure F dépendant du risque non-financier est visible à travers le paramètre χ. Celui-ci intervient au niveau des trois premières constantes, mais il n'intervient pas dans le terme quadratique.

Le fait de prendre une variable Θ non-centrée ne change pratiquement rien aux calculs. Seules les constantes g_0^I et g_0^B sont modifiées.

Stratégie autofinançante associée

D'après ce qui précède, et en particulier les valeurs terminales des portefeuilles optimaux pour l'investisseur et pour la banque, la valeur respective de ces portefeuilles à un instant t, $t\in[0,T]$, vérifie :

$$\begin{aligned}
\xi_I^*\left(x-\pi^*,t\right) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}\left[\xi_I^*\left(x-\pi^*,T\right)/\Im_t^S\right]\\
\xi_B^*\left(\pi^*,t\right) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}\left[\xi_B^*\left(\pi^*,T\right)/\Im_t^S\right]
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après les équations (5.14) et (5.15) :

$$\begin{aligned}\xi_I^*(x-\pi^*,t) &= x+\frac{g_0^I}{\gamma_I}-\frac{g_1}{\gamma_I}W_t^Q-\frac{g_2}{\gamma_I}\left[\left(W_t^Q\right)^2+(T-t)\right]\\ \xi_B^*(\pi^*,t) &= \frac{g_0^B}{\gamma_B}-\frac{g_1}{\gamma_B}W_t^Q-\frac{g_2}{\gamma_B}\left[\left(W_t^Q\right)^2+(T-t)\right]\end{aligned}$$

Nous souhaitons alors exprimer ces quantités à l'aide d'intégrales stochastiques par rapport à l'actif de marché S. Pour ce faire, on considère tour à tour W_t^Q et $\left(W_t^Q\right)^2$.

- D'une part, on sait que, $\forall t \in [0;T]$:

$$W_t^Q=\frac{1}{\sigma}\left(\ln\frac{S_t}{S_0}+\frac{\sigma^2}{2}t\right)=\frac{1}{\sigma}\int_0^t\left(d\ln S_u+\frac{\sigma^2}{2}du\right)$$

D'après la formule d'Itô, on trouve que :

$$d\ln S_u+\frac{\sigma^2}{2}du=\frac{dS_u}{S_u}$$

Ainsi :

$$W_t^Q=\frac{1}{\sigma}\int_0^t\frac{dS_u}{S_u} \tag{5.16}$$

- D'autre part, par Itô :

$$\left(W_t^Q\right)^2-t=2\int_0^t W_u^Q dW_u^Q$$

D'après l'équation (5.16), on peut écrire :

$$\left(W_t^Q\right)^2-t=\frac{2}{\sigma^2}\int_0^t\left(\ln\frac{S_u}{S_0}+\frac{\sigma^2}{2}u\right)\frac{dS_u}{S_u} \tag{5.17}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}\xi_I^*(x-\pi^*,t) &= x+\frac{g_0^I}{\gamma_I}-\frac{g_2}{\gamma_I}T-\frac{1}{\gamma_I\sigma}\int_0^t\left(g_1+\frac{2g_2}{\sigma}\left(\ln\frac{S_u}{S_0}+\frac{\sigma^2}{2}u\right)\right)\frac{dS_u}{S_u}\\ \xi_B^*(\pi^*,t) &= \frac{g_0^B}{\gamma_B}-\frac{g_2}{\gamma_B}T-\frac{1}{\gamma_B\sigma}\int_0^t\left(g_1+\frac{2g_2}{\sigma}\left(\ln\frac{S_u}{S_0}+\frac{\sigma^2}{2}u\right)\right)\frac{dS_u}{S_u}\end{aligned}$$

Le montant que l'agent I a investi en t, $t\in[0;T]$, dans l'actif de marché est par conséquent donné par :

$$-\frac{1}{\gamma_I \sigma}\left(g_1 + \frac{2g_2}{\sigma}\left(\ln\frac{S_t}{S_0} + \frac{\sigma^2}{2}t\right)\right)$$

Celui de l'agent B est :

$$-\frac{1}{\gamma_B \sigma}\left(g_1 + \frac{2g_2}{\sigma}\left(\ln\frac{S_t}{S_0} + \frac{\sigma^2}{2}t\right)\right)$$

Ces deux quantités caractérisent les stratégies autofinançantes de chacun des deux agents.

5.3.2 Etude dans le cas d'une exposition quadratique gaussienne

Hypothèses et notations

Nous rappelons que, dans cette étude particulière, les hypothèses suivantes sont faites :

1. Θ est une variable aléatoire gaussienne centrée, de variance δ^2. On suppose, de plus, que $X(\Theta) \equiv \chi\Theta^2$, où χ est un réel donné.
2. Comme précédemment, par souci de simplicité, on suppose que les taux sont nuls.
3. La dynamique de l'actif de marché S, sous la probabilité $\mathbb{P}$, n'est pas modifiée par rapport au cas gaussien. Elle reste :

   $$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha\Theta dt + \sigma dW_t$$

   où α et σ sont deux réels, non-nuls. D'autre part, on suppose que $\sigma > 0$.

   W est un $\mathbb{P}$-mouvement Brownien, indépendant de Θ.

D'autre part, comme précédemment, $\forall t \in [0; T]$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\lambda}(t, [S]_t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{\alpha\Theta}{\sigma}/\Im_t^S\right] \\
&= \frac{1}{\sigma}\frac{\alpha m\left(\frac{\sigma^2}{2}t - \ln S_0\right) + \alpha\left(\delta^2 + m^2\right)}{\sigma^2 t + \alpha^2\delta^2}\left(\ln S_t + \frac{\sigma^2}{2}t - \ln S_0\right) \\
&= \frac{\alpha m\left(\frac{\sigma^2}{2}t - \ln S_0\right) + \alpha\left(\delta^2 + m^2\right)}{\sigma^2 t + \alpha^2\delta^2} W_t^Q
\end{aligned}$$

Il s'agit d'un processus aléatoire, $\Im^S$-mesurable.

Calculs préliminaires

Pour exprimer de façon simple les valeurs terminales des portefeuilles de marché des agents B et I dans le cadre quadratique gaussien, plusieurs calculs préliminaires sont nécessaires :

1. *Calcul de* $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma\chi\Theta^2\right)/\Im_T^S\right]$ *:* D'après ce qui précède et notamment, l'équation (5.10), on

a :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma\chi\Theta^2\right)/\Im_T^S\right]$$
$$= \frac{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\delta^2 T}}{\sqrt{1+2\left(\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}T+\gamma\chi\right)\delta^2}} \times \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\sigma}W_T^Q\right)^2\delta^2\left[\frac{1}{a_2(\chi)}-\frac{1}{a_1}\right]\right\}$$

avec les notations simplifiées :

$$\begin{cases} a_1 = 1+\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\delta^2 T \\ a_2(\chi) = 1+2\left(\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}T+\gamma\chi\right)\delta^2 \end{cases}$$

2. *Calcul de* $\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left(\ln \widehat{H}_T\right)$:

   Comme la dynamique de $\widehat{H}$ sous $\mathbb{Q}_T$ est donnée par :

$$\forall t \in [0;T] \qquad \frac{d\widehat{H}_t}{\widehat{H}_t} = \left(\widehat{\lambda}\left(t,[S]_t\right)\right)^2 dt - \widehat{\lambda}\left(t,[S]_t\right)dW_t^Q$$

   alors
$$\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left(\ln \widehat{H}_T\right) = \frac{1}{2}\left(\widehat{\lambda}\left(T,[S]_T\right)\right)^2 T$$

Portefeuilles optimaux pour l'agent I et pour l'agent B

En reprenant les équations (5.12) et (5.13), et en utilisant les résultats préliminaires développés ci-dessus, nous obtenons :

$$\xi_I^*\left(x-\pi^*,T\right) = x+\frac{1}{\gamma_I}\left\{q_0^I+q_2\left(W_T^Q\right)^2\right\} \tag{5.18}$$
$$\xi_B^*\left(\pi^*,T\right) = \frac{1}{\gamma_B}\left\{q_0^B+q_2\left(W_T^Q\right)^2\right\} \tag{5.19}$$

où q_0^I et q_0^B sont deux constantes définies par :

$$\begin{aligned} q_0^I &= \frac{T}{2}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\left(\widehat{\lambda}\left(T,[S]_T\right)\right)^2\right]+\frac{1}{2}\ln\left\{\frac{a_1}{a_2(\chi)}\right\} \\ q_0^B &= \frac{T}{2}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}_T}\left[\left(\widehat{\lambda}\left(T,[S]_T\right)\right)^2\right]-\frac{\gamma_B}{2\gamma_I}\ln\left\{\frac{a_1}{a_2(\chi)}\right\}-\frac{\gamma_I+\gamma_B}{2\gamma_I}\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\delta^2\left[\frac{1}{a_2(\chi)}-\frac{1}{a_1}\right] \end{aligned}$$

avec
$$\begin{cases} a_1 = 1+\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\delta^2 T \\ a_2(\chi) = 1+2\left(\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}T+\gamma\chi\right)\delta^2 \end{cases}$$

et où $q_2\left(W_T^Q\right)^2$ est une fonction quadratique de W_T^Q définie par :

$$q_2\left(W_T^Q\right)^2=\frac{T}{2}\left(\widehat{\lambda}\left(T,[S]_T\right)\right)^2-\widehat{\lambda}\left(T,[S]_T\right)W_T^Q+\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\delta^2\left[\frac{1}{a_2\left(\chi\right)}-\frac{1}{a_1}\right]\left(W_T^Q\right)^2$$

Compte tenu de la forme de la prime de risque conditionnelle, on obtient :

$$q_2=g_2+\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\delta^2\left[\frac{1}{a_2\left(\chi\right)}-\frac{1}{a_1}\right]$$

L'impact de la structure F dépendant du risque non-financier est visible à travers le paramètre χ. Celui-ci intervient au niveau des constantes. D'autre part, contrairement au cas gaussien, il intervient également dans le teme quadratique.

Le fait de prendre une variable Θ non-centrée va modifier la structure de la valeur terminale des portefeuilles. Non seulement les constantes q_0^I et q_0^B sont modifiées, mais il va apparaître un terme en W_T^Q dans les deux expressions, pondéré par le même coefficient pour les deux agents.

Stratégie autofinançante associée

D'après ce qui précède, et en particulier les valeurs terminales des portefeuilles optimaux pour l'investisseur et pour la banque, la valeur respective de ces portefeuilles à un instant t, $t\in[0,T]$, vérifie :

$$\begin{aligned}\xi_I^*\left(x-\pi^*,t\right)&=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}\left[\xi_I^*\left(x-\pi^*,T\right)/\Im_t^S\right]\\ \xi_B^*\left(\pi^*,t\right)&=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}\left[\xi_B^*\left(\pi^*,T\right)/\Im_t^S\right]\end{aligned}$$

Ainsi, d'après les équations (5.18) et (5.19) :

$$\begin{aligned}\xi_I^*\left(x-\pi^*,t\right)&=x+\frac{q_0^I}{\gamma_I}+\frac{q_2}{\gamma_I}\left[\left(W_t^Q\right)^2+(T-t)\right]\\ \xi_B^*\left(\pi^*,t\right)&=\frac{q_0^B}{\gamma_B}+\frac{q_2}{\gamma_B}\left[\left(W_t^Q\right)^2+(T-t)\right]\end{aligned}$$

Nous souhaitons alors exprimer ces quantités à l'aide d'intégrales stochastiques par rapport à l'actif de marché S. Pour ce faire, nous utilisons les résultats de la section précédente pour $\left(W_t^Q\right)^2$.

L'équation (5.17) nous donne en effet :

$$\left(W_t^Q\right)^2-t=\frac{2}{\sigma^2}\int_0^t\left(\ln\frac{S_u}{S_0}+\frac{\sigma^2}{2}u\right)\frac{dS_u}{S_u}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned}
\xi_I^*(x-\pi^*,t) &= x+\frac{q_0^I}{\gamma_I}+\frac{q_2}{\gamma_I}T+\frac{2q_2}{\gamma_I\sigma^2}\int_0^t\left(\ln\frac{S_u}{S_0}+\frac{\sigma^2}{2}u\right)\frac{dS_u}{S_u}\\
\xi_B^*(\pi^*,t) &= \frac{q_0^B}{\gamma_B}+\frac{g_2}{\gamma_B}T+\frac{2q_2}{\gamma_B\sigma^2}\int_0^t\left(\ln\frac{S_u}{S_0}+\frac{\sigma^2}{2}u\right)\frac{dS_u}{S_u}
\end{aligned}$$

Le montant que l'agent I a investi en t, $t\in[0;T]$, dans l'actif de marché est par conséquent donné par :

$$\frac{2q_2}{\gamma_I\sigma^2}\left(\ln\frac{S_t}{S_0}+\frac{\sigma^2}{2}t\right)$$

Celui de l'agent B est :

$$\frac{2q_2}{\gamma_B\sigma^2}\left(\ln\frac{S_t}{S_0}+\frac{\sigma^2}{2}t\right)$$

Ces deux quantités caractérisent les stratégies autofinançantes de chacun des deux agents.

5.4 Quelques remarques de conclusion

Comme précédemment, la règle d'évaluation de la structure optimale est entièrement déterminée par l'investisseur. Le prix obtenu est une fonction non-linéaire de la structure. Il correspond au prix d'indifférence.

Le résultat obtenu pour la structure optimale ici est relativement fort. Aucune hypothèse très restrictive n'a été nécessaire ici. La structure optimale n'est pas du tout influencée par l'existence d'un marché financier, l'impact du marché étant seulement visible dans la règle d'évaluation qui se fait sous $\widehat{\mathbb{Q}}_T$. D'autre part, la structure optimale ne dépend pas de la distribution du risque non-financier.
Notons également que l'on retrouve la logique très particulière de ces produits à mi-chemin entre finance et assurance est visible ici, au sens où la banque ne vendra un contrat F que si son exposition initiale dans le risque non-financier est non-nulle. Il ne s'agit en aucun cas de spéculation mais bien de couverture.

D'autre part, il reste à identifier statistiquement les distributions de Θ, du marché financier et de leur loi jointe. Cette question a été largement étudiée, notamment dans le cas d'un risque climatique (cf. par exemple M. Cao et J. Wei [10], R. Dischel [18], O. Roustant [68] ou P. Tankov [72]). De plus, concernant la dynamique du marché financier, elle est généralement considérée comme connue, en première approximation. A l'heure actuelle, le point clé reste la caractérisation et la compréhension des distributions jointes, peut-être en utilisant la théorie des copules.

Chapitre 6

Structuration d'un produit illiquide avec stratégie d'investissement non-contrainte

Ce chapitre concerne la caractérisation de la structure optimale d'un produit illiquide ainsi qu'à son évaluation. Le cadre de l'étude et les notations sont ceux présentés dans le chapitre 2.

Nous nous intéressons au cas particulier où les agents peuvent intervenir sur la source de risque non-financière Θ, mais également sur un marché financier. Les agents déterminent de façon simultanée leur stratégie d'investissement sur le marché. Contrairement au chapitre précédent, les agents prennent en compte toute l'information disponible (y compris celle provenant de la source de risque non-financière) pour déterminer leur stratégie d'investissement sur le marché. Cette approche étend la précédente en autorisant les stratégies d'investissement sur le marché financier à dépendre de la source de risque non-financière et vice et versa.
Dans cette situation, nous caractérisons la structure optimale F ainsi que son prix et étudions l'impact du marché financier sur cette structure. L'impact du risque non-financier sur les stratégies d'investissement sur le marché financier est également étudié.

6.1 Hypothèses et notations

6.1.1 Cadre d'étude

Dans ce chapitre, chacun des deux agents a la possibilité d'intervenir sur les marchés financiers. On suppose que chacun d'entre eux investit la totalité de sa richesse résiduelle sur le marché dans un portefeuille qu'il aura choisi optimalement, suivant un critère qui sera décrit par la suite, en prenant en compte sa position globale. De ce fait, l'investissement optimal dans les actifs de marché pour chaque agent va être étroitement relié à son exposition vis à vis du risque Θ. $\xi_B(z)$ désigne la valeur en T de l'investissement de l'agent B lorsqu'il a investi un montant z en 0 et suivi une stratégie autofinançante ; $\xi_I(z)$ (resp. $\eta_I(z)$) désigne la valeur en T de l'investissement de l'agent I, lorsqu'il a investi un montant z en 0 sur les marchés financiers et suivi une stratégie autofinançante, mais alors qu'il est également intervenu sur l'actif illiquide (resp. alors qu'il est uniquement intervenu sur les marchés financiers).

Alors, les flux capitalisés, si la transaction se fait, peuvent s'écrire pour chacun des deux agents comme :

$$\begin{array}{rcl} \text{Pour l'agent } B & : & X(\Theta) - F(\Theta) + \xi_B(\pi) \\ \text{Pour l'agent } I & : & F(\Theta) + \xi_I(x-\pi) \end{array}$$

Par contre, si aucune transaction entre les deux agents ne survient :

$$\begin{array}{rcl} \text{Pour l'agent } B & : & X(\Theta) \\ \text{Pour l'agent } I & : & \eta_I(x) \end{array}$$

Notons que lorsque la transaction survient, chacun des deux agents supporte deux sources de risque, le risque Θ et le risque financier. Le problème de la caractérisation du marché financier et de ses liens avec le risque non-financier est alors primordial.

Comme dans le chapitre précédent, la question est de caractériser la structure optimale du contrat F et son prix suivant un critère de choix donné mais également d'analyser l'impact de ce risque non-financier sur les stratégies d'investissement sur les marchés financiers.

6.1.2 Modélisation du critère de choix et programme d'optimisation

Comme cela a été souligné dans le chapitre 2, les deux agents n'ont pas les mêmes objectifs : la banque cherche à couvrir son exposition $X(\Theta)$ et l'investisseur peut "l'aider" dans sa démarche en acceptant une partie de ce risque, sous la forme d'une structure F qu'il peut acquérir pour un prix π.
Ainsi, l'agent B, "l'assuré", souhaite maximiser son utilité espérée, tandis que l'agent I, "l'assureur", est supposé passif. Il peut accepter toute transaction dont l'utilité espérée est supérieure à celle associée au fait d'intervenir uniquement sur les marchés financiers. Ainsi, le programme d'optimisation liant ces deux agents peut s'écrire comme :

$$\max_{F,\pi,\xi_B} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[-\exp\left(-\gamma_B\left(X(\Theta) - F(\Theta) + \xi_B(\pi)\right)\right)\right] \tag{6.1}$$

$$s.c. \quad \max_{\xi_I} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[-\exp\left(-\gamma_I \left(F(\Theta) + \xi_I (x - \pi)\right)\right)\right] \geq \max_{\eta_I} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[-\exp\left(-\gamma_I \eta_I (x)\right)\right]$$

Les portefeuilles de marché de chacun des deux agents doivent être admissibles, i.e. tels que les stratégies autofinançantes associées à ces investissements vérifient certaines conditions d'intégrabilité par rapport aux actifs de marché. On les note respectivement $\mathcal{A}_B^{\xi}(\pi)$, $\mathcal{A}_I^{\xi}(x-\pi)$ et $\mathcal{A}_I^{\eta}(x)$. Les optimisations ont lieu sur ces différents sous-espaces. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer par exemple à l'article de F. Delbaen, P. Grandits, T. Rheinländer, D. Samperi, M. Schweizer et C. Stricker ([16]).

La complexité de cette étude réside dans la caractérisation des stratégies d'investissement sur le marché financier. En effet, une généralisation des résultats de R. Merton n'est pas possible dans ce cas précis, contrairement au chapitre précédent, puisque le marché est incomplet et que l'on ne peut se ramener à une situation où il deviendrait complet. De ce fait, une autre approche est nécessaire, et pour cela, différents résultats de la littérature vont nous être d'une très grande utilité.

6.1.3 Rappels préliminaires

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats clés issus de l'article de N. El Karoui et R. Rouge ([23]), qui nous seront d'une extrême utilité pour résoudre notre problème. D'autres auteurs se sont également intéressés à ce problème : parmi eux, on peut citer notamment le travail récent de F. Delbaen, P. Grandits, T. Rheinländer, D. Samperi, M. Schweizer et C. Stricker ([16]) qui généralise l'approche de N. El Karoui et R. Rouge ([23]) en relâchant certaines hypothèses concernant l'admissibilité des portefeuilles de couverture envisagés.

Dans ces deux articles en particulier, le problème considéré est du type :

$$\max_{\varphi \in \mathcal{A}} \mathbb{E}\left[-\exp\left(-\gamma\left(\xi(x,\varphi,T) - C\right)\right)\right]$$

ou de façon équivalente :

$$\min_{\varphi \in \mathcal{A}} \frac{1}{\gamma} \ln \mathbb{E}\left[\exp\left(-\gamma\left(\xi(x,\varphi,T) - C\right)\right)\right] \triangleq V(x,C) \tag{6.2}$$

où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des stratégies admissibles associée à ce problème.

$\xi(x,\varphi,T)$ désigne la valeur en T d'une stratégie admissible φ, étant donnée une richesse initiale x. D'autre part, C est le payoff d'un actif contingent dont on cherche le prix en 0.

Ainsi, pour faire le lien entre cette problématique et notre étude, $\xi(x,\varphi,T)$ joue le rôle de la valeur terminale des portefeuilles de marché des deux agents, tandis que C correspond à une fonction de la structure inconnue F. En effet, on a selon les cas[1] :

$$\begin{aligned} C &= -X(\Theta) + F(\Theta) \\ C &= -F(\Theta) \\ C &= 0 \end{aligned}$$

Fonction de valeur

Le lien entre l'entropie relative et $\ln \mathbb{E}$ est à l'origine de beaucoup de résultats. Ainsi, si $h(\mathbb{Q}/\mathbb{P})$ est l'entropie relative de la mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$, définie comme :

$$\begin{aligned} h(\mathbb{Q}/\mathbb{P}) &= \mathbb{E}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \ln \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right) \qquad \text{si } \mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \\ &= +\infty \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sinon} \end{aligned}$$

alors la relation suivante prévaut :

$$\frac{1}{\gamma} \ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\exp(\gamma C)] = \sup_{\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C) - \frac{1}{\gamma} h(\mathbb{Q}/\mathbb{P}) \right\} \tag{6.3}$$

Hypothèse : On suppose dans ce chapitre qu'il existe au moins une mesure de probabilité équivalente à $\mathbb{P}$, d'entropie relative finie et que la cible considérée C est bornée[2], de façon à garantir l'existence des quantités que l'on regarde[3].

Lorsque l'on utilise un portefeuille de couverture, il semble très naturel d'introduire l'ensemble $\mathcal{Q}$ des mesures de probabilité "risque-neutre", i.e. mesures équivalentes à $\mathbb{P}$, sous laquelle l'actif de marché actualisé est une martingale (locale). On obtient alors :

$$\begin{aligned} V(x, C) &= \inf_{\varphi \in \mathcal{A}} \sup_{\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C - \xi(x, \varphi, T)) - \frac{1}{\gamma} h(\mathbb{Q}/\mathbb{P}) \right\} \\ &\geq \inf_{\varphi \in \mathcal{A}} \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C - \xi(x, \varphi, T)) - \frac{1}{\gamma} h(\mathbb{Q}/\mathbb{P}) \right\} \end{aligned}$$

puisque $\mathcal{Q} \subset \{\mathbb{Q}; \mathbb{Q} \ll \mathbb{P}\}$.

---

[1] Il faut faire attention aux signes, puisque dans notre problème d'optimisation, les "cibles" ont des signes positifs alors que le problème traité dans les différents articles comporte un signe "$-$" devant la cible.

[2] Cette hypothèse de bornitude n'est pas illogique dans un contexte financier : en effet, supposer que les expositions initiales ou les payoffs des actifs contingents ne peuvent devenir infinis $\mathbb{P}$ *p.s.* parrait être une hypothèse raisonnable.

[3] D'autre part, N. El Karoui et R. Rouge ont montré (Théorème (2.1) de ([23])) que, si C est borné, il existe au moins une mesure de probabilité $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ telle que le sup soit atteint. Ce résultat est également obtenu par F. Delbaen, P. Grandits, T. Rheinländer, D. Samperi, M. Schweizer et C. Stricker ([16]) pour des hypothèses plus faibles sur l'espace de stratégies admissibles.

D'autre part, dans le cas où $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$, $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\xi\left(x,\varphi,T\right)\right) = x\beta_0$. Finalement, l'inégalité suivante prévaut :

$$V\left(x,C\right) \geq -x\beta_0 + \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}}\left\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(C\right) - \frac{1}{\gamma}h\left(\mathbb{Q}/\mathbb{P}\right)\right\}$$

La réelle difficulté dans la caractérisation de la fonction de valeur $V\left(x,C\right)$ est liée à l'obtention de l'autre inégalité. Le Théorème (2.1) de l'article ([23]) en donne une preuve complète. On obtient ainsi :

$$V\left(x,C\right) = -x\beta_0 + \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}}\left\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(C\right) - \frac{1}{\gamma}h\left(\mathbb{Q}/\mathbb{P}\right)\right\} \tag{6.4}$$

Prix de l'actif contingent

Le prix en 0 de l'actif contingent C est noté $p_0\left(\gamma,C\right)$. Il est calculé comme prix d'indifférence, i.e. comme le prix permettant à l'agent d'être indifférent entre investir uniquement sur le marché financier (avec une stratégie optimale φ_0^*) et investir dans C et le marché financier (avec une stratégie optimale φ_C^*, dépendant de C). Ainsi, les deux niveaux d'utilité espérée associés à chacune de ces situations coïncident et on obtient :

$$\mathbb{E}\left[-\exp\left\{-\gamma\left(\xi\left(x-p_0\left(\gamma,C\right),\varphi_C^*,T\right)+C\right)\right\}\right] = \mathbb{E}\left[-\exp\left(-\gamma\xi\left(x,\varphi_0^*,T\right)\right)\right]$$

On en déduit :

$$p_0\left(\gamma,C\right)\beta_0 = V\left(x,C\right) - V\left(x,0\right)$$

puisque la fonction de valeur est linéaire par rapport à la richesse initiale :

$$V\left(x,C\right) = V\left(0,C\right) - x\beta_0 \tag{6.5}$$

On peut donc se ramener au cas où les richesses initiales sont nulles :

$$p_0\left(\gamma,C\right)\beta_0 = V\left(0,C\right) - V\left(0,0\right)$$

ou de façon plus précise :

$$p_0\left(\gamma,C\right)\beta_0 = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}}\left\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(C\right) - \frac{1}{\gamma}h\left(\mathbb{Q}/\mathbb{P}\right)\right\} - \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}}\left\{-\frac{1}{\gamma}h\left(\mathbb{Q}/\mathbb{P}\right)\right\} \tag{6.6}$$

Remark 3 *Dans le cas où C est réplicable par un portefeuille autofinançant partant d'une richesse initiale y :*

$$\forall\mathbb{Q}\in\mathcal{Q} \qquad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(C\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left\{\xi\left(y,\varphi,T\right)\right\} = y\beta_0$$

Le prix de l'actif C (capitalisé) est alors donné par :

$$p_0(\gamma, C)\,\beta_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C) \qquad \textit{pour } \mathbb{Q} \in \mathcal{Q} \textit{ quelconque}$$

De plus, si $\widehat{\mathbb{Q}} \in \mathcal{Q}$ désigne la probabilité minimisant[4] l'entropie relative par rapport à $\mathbb{P}$, $\widehat{\mathbb{Q}}$ équivalente à $\mathbb{P}$, alors le prix peut également s'écrire comme :

$$p_0(\gamma, C)\,\beta_0 = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C) - \frac{1}{\gamma} h\left(\mathbb{Q}/\widehat{\mathbb{Q}}\right) \right\}$$

Il est alors simplement défini à l'aide d'un critère entropique (et non pas uniquement comme la différence entre deux critères) et correspond au prix lorsque l'agent peut (partiellement) se couvrir sur le marché.
De plus, l'inégalité suivante prévaut très naturellement :

$$\sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C) - \frac{1}{\gamma} h\left(\mathbb{Q}/\widehat{\mathbb{Q}}\right) \right\} \leq \sup_{\mathbb{Q}\ll\widehat{\mathbb{Q}}} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C) - \frac{1}{\gamma} h\left(\mathbb{Q}/\widehat{\mathbb{Q}}\right) \right\}$$

Et en utilisant l'équation (6.3), on a :

$$\sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C) - \frac{1}{\gamma} h\left(\mathbb{Q}/\widehat{\mathbb{Q}}\right) \right\} \leq \frac{1}{\gamma} \ln \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}}(\exp(\gamma C))$$

où le membre de droite est le prix non-linéaire obtenu si aucune possibilité de couverture n'est offerte à l'agent.

Notons que cette mesure d'entropie minimale $\widehat{\mathbb{Q}}$ est indépendante de γ, puisque :

$$\widehat{\mathbb{Q}} = \arg\sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \left\{ -\frac{1}{\gamma} h(\mathbb{Q}/\mathbb{P}) \right\} = \arg\sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \left\{ -h(\mathbb{Q}/\mathbb{P}) \right\}$$

Propriétés du prix

La fonction de prix définie ci-dessus possède quelques propriétés remarquables. Notamment, elle est convexe en C (cf. la Proposition (5.1) de l'article ([23])) :

$$\begin{aligned} \forall \alpha &\in [0,1], \quad \forall \left(C^1, C^2\right) \in (L^\infty)^2 : \qquad (6.7) \\ p_0\left(\gamma, \alpha C^1 + (1-\alpha) C^2\right) &\leq \alpha p_0\left(\gamma, C^1\right) + (1-\alpha)\, p_0\left(\gamma, C^2\right) \end{aligned}$$

Cette propriété découle directement de l'expression du prix comme sup de fonctions linéaires en C.

[4] D'après le Théorème (2.1) de M. Frittelli [31], $\widehat{\mathbb{Q}}$ existe et est unique.

D'autre part, la fonction de prix est minorée par une quantité indépendante du coefficient d'aversion pour le risque γ (cf. le Théorème (5.2) de l'article ([23])) :

$$\forall C \in L^{\infty} : \; p_0 (\gamma, C) \beta_0 \geq \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}} (C) \tag{6.8}$$

où $\widehat{\mathbb{Q}} \in \mathcal{Q}$ est la probabilité minimisant l'entropie relative par rapport à $\mathbb{P}$.
Ceci est immédiat en notant que :

$$\begin{aligned} p_0 (\gamma, C) \beta_0 &= \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} (C) - \frac{1}{\gamma} h (\mathbb{Q}/\mathbb{P}) \right\} + \frac{1}{\gamma} h \left(\widehat{\mathbb{Q}}/\mathbb{P} \right) \\ &\geq \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}} (C) - \frac{1}{\gamma} h \left(\widehat{\mathbb{Q}}/\mathbb{P} \right) + \frac{1}{\gamma} h \left(\widehat{\mathbb{Q}}/\mathbb{P} \right) = \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}} (C) \end{aligned}$$

Enfin, notons que cette mesure de probabilité d'entropie minimale $\widehat{\mathbb{Q}}$ peut être considérée comme la mesure de probabilité de calibration, commune aux différents agents économiques. Son caractère universel traduit le fait que les agents sont d'accord sur le prix des actifs réplicables, i.e. des actifs très liquides sur le marché. De plus, les agents ont la même mesure marginale (ou locale) de l'intérêt lié à une transaction donnée, ce qui la rend envisageable.

6.1.4 Réécriture du programme d'optimisation et règle d'évaluation

Dans cette section, nous réécrivons le programme d'optimisation (6.1) afin de déterminer plus facilement la structure optimale F^* et son prix. Le lemme suivant va, en ce sens, nous être d'une grande utilité :

Lemma 17 *Le problème initial (6.1) est équivalent au programme d'optimisation :*

$$\min_{F} \left\{ p_0 (\gamma_B, -X(\Theta) + F(\Theta)) + p_0 (\gamma_I, -F(\Theta)) \right\} \tag{6.9}$$

De plus, la règle d'évaluation optimale est donnée par :

$$\pi^* \beta_0 = V_I (0, 0) - V_I (0, -F^* (\Theta))$$

Preuve :

Le programme d'optimisation (6.1) peut se réécrire comme :

$$\min_{F, \pi, \xi_B} \frac{1}{\gamma_B} \ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(-\gamma_B \left(X(\Theta) - F(\Theta) + \xi_B (\pi) \right) \right) \right]$$

$$s.c. \quad \min_{\xi_I} \frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(-\gamma_I \left(F(\Theta) + \xi_I (x - \pi) \right) \right) \right] \geq \min_{\eta_I} \frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(-\gamma_I \eta_I (x) \right) \right]$$

ou encore en utilisant les notations introduites précédemment :

$$\min_{F,\pi} V_B \left(\pi, -X(\Theta) + F(\Theta) \right) \qquad s.c. \quad V_I \left(x - \pi, -F(\Theta) \right) \geq V_I (x, 0)$$

D'après la linéarité de la fonction valeur V (équation 6.5), ce programme peut encore se simplifier :

$$\min_{F,\pi} \left\{ V_B \left(0, -X(\Theta) + F(\Theta) \right) - \pi \beta_0 \right\} \qquad s.c. \quad V_I \left(0, -F(\Theta) \right) + \pi \beta_0 \geq V_I (0, 0)$$

La règle d'évaluation est obtenue en saturant la contrainte de l'investisseur à l'optimum :

$$\pi^* \beta_0 = V_I (0, 0) - V_I \left(0, -F^* (\Theta) \right)$$

Finalement résoudre le programme d'optimisation (6.1) est équivalent à résoudre :

$$\min_{F} \left\{ V_B \left(0, -X(\Theta) + F(\Theta) \right) + V_I \left(0, -F(\Theta) \right) - V_I (0, 0) \right\} \tag{6.10}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} & \min_{F} \left\{ V_B \left(0, -X(\Theta) + F(\Theta) \right) - V_B (0, 0) + V_I \left(0, -F(\Theta) \right) - V_I (0, 0) \right\} \\ = \quad & \min_{F} \left\{ p_0 \left(\gamma_B, -X(\Theta) + F(\Theta) \right) + p_0 \left(\gamma_I, -F(\Theta) \right) \right\} \times \beta_0 \end{aligned}$$

ce qui revient finalement à :

$$\min_{F} \left\{ p_0 \left(\gamma_B, -X(\Theta) + F(\Theta) \right) + p_0 \left(\gamma_I, -F(\Theta) \right) \right\}$$

en utilisant la relation existante entre la fonction de valeur V et la fonction de prix p_0. ■

6.2 Détermination de la structure optimale

Après ces quelques résultats préliminaires, nous sommes en mesure de résoudre le programme d'optimisation (6.1) ou plus précisément le programme (6.9).

Nous présentons tout d'abord la structure optimale et son prix dans un théorème. Puis, dans une seconde section, nous démontrons ces résultats.

6.2.1 Structure optimale

Theorem 18 *La structure optimale est donnée, à un actif réplicable près, par :*

$$F^*(\Theta) = \frac{\gamma_B}{\gamma_B + \gamma_I} X(\Theta) \quad \mathbb{P}\ p.s. \tag{6.11}$$

et son prix est donné par :

$$\pi^* \beta_0 = V_I(0,0) - V_I(0, -F^*(\Theta)) \tag{6.12}$$

où la fonction $V_I(0,C)$ est définie par :

$$V_I(0,C) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C) - \frac{1}{\gamma_I} h(\mathbb{Q}/\mathbb{P}) \right\}$$

6.2.2 Preuve du théorème

Comme dans le chapitre précédent, nous procédons en deux temps séparés pour caractériser la structure optimale (la règle de prix ayant été caractérisée dans le Lemme 17).

1. *Dans un premier temps, nous supposons que $X(\Theta) \equiv 0$:*

   Par conséquent, d'après le Lemme 17, on cherche désormais à résoudre le programme suivant :

   $$\min_F \{p_0(\gamma_B, F(\Theta)) + p_0(\gamma_I, -F(\Theta))\} \triangleq \min_F f(F)$$

   Notons que lorsque F est une variable aléatoire nulle, la fonction $f(0)$ est nulle par la définition même de la fonction p_0, puisque :

   $$p_0(\gamma, 0) = V(0,0) - V(0,0) = 0$$

   Par conséquent :

   $$\min_F f(F) \leq f(0) = 0$$

   D'autre part, et ceci est une des étapes fondamentales de la preuve, d'après le résultat (6.8) :

   $$p_0(\gamma_B, F(\Theta)) \geq \frac{1}{\beta_0} \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}}(F(\Theta))$$
   $$p_0(\gamma_I, -F(\Theta)) \geq \frac{1}{\beta_0} \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}}(-F(\Theta))$$

   La fonction f que l'on cherche à minimiser est toujours positive ou nulle :

   $$\forall F, \quad f(F) \geq 0$$

Le minimum est donc 0.

Caractérisation d'une solution particulière : 0 est solution de ce programme de minimisation.

Unicité de la famille des solutions :

On cherche alors à montrer que : $f(F) = 0 \Rightarrow F \equiv 0 \qquad \mathbb{P}\ p.s.$ (à un actif réplicable près).

L'annulation de la fonction f en F donne :

$$p_0(\gamma_B, F(\Theta)) = -p_0(\gamma_I, -F(\Theta))$$

On utilise alors à nouveau la minoration de la fonction p_0 (équation (6.8)). Les encadrements suivants sont obtenus :

$$\frac{1}{\beta_0}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}}[F(\Theta)] \leq p_0(\gamma_B, F(\Theta)) = -p_0(\gamma_I, -F(\Theta)) \leq \frac{1}{\beta_0}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}}[F(\Theta)]$$

Par conséquent, on a, par exemple, l'égalité suivante :

$$\frac{1}{\beta_0}\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}}[F(\Theta)] = p_0(\gamma_B, F(\Theta))$$

Une seule famille d'actifs F est compatible avec cette égalité : il s'agit des actifs réplicables.

2. *Dans un second temps, nous supposons que $X(\Theta)$ quelconque :*

   On transforme alors le programme initial (équation 6.1) en écrivant F sous la forme

$$\frac{\gamma_B}{\gamma_B + \gamma_I}X(\Theta) + \Phi(\Theta)$$

   En effet, d'après les études réalisées dans les chapitres précédents, la structure optimale comporte toujours le terme $\frac{\gamma_B}{\gamma_B+\gamma_I}X(\Theta)$. Déterminer F optimal est alors équivalent à déterminer la fonction Φ optimale. Le programme s'écrit alors :

$$\min_{\Phi,\pi,\xi_B} \frac{1}{\gamma_B} \ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\frac{\gamma_B\gamma_I}{\gamma_B+\gamma_I}X(\Theta)\right)\exp\left(-\gamma_B\left(-\Phi(\Theta) + \xi_B(\pi)\right)\right)\right]$$

   sous la contrainte

$$\begin{aligned}&\min_{\xi_I} \frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\frac{\gamma_B\gamma_I}{\gamma_B+\gamma_I}X(\Theta)\right)\exp\left(-\gamma_I\left(\Phi(\Theta) + \xi_I(x-\pi)\right)\right)\right] \\ \geq &\min_{\eta_I} \frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\frac{\gamma_B\gamma_I}{\gamma_B+\gamma_I}X(\Theta)\right)\exp\left(-\gamma_I\left(-\frac{\gamma_B}{\gamma_B+\gamma_I}X(\Theta) + \eta_I(x)\right)\right)\right]\end{aligned}$$

Le changement de probabilité suivant est alors naturel :

$$\frac{d\mathbb{P}^X}{d\mathbb{P}} = \frac{\exp\left(-\frac{\gamma_B\gamma_I}{\gamma_B+\gamma_I}X(\Theta)\right)}{\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{\gamma_B\gamma_I}{\gamma_B+\gamma_I}X(\Theta)\right)\right]}$$

Le programme devient

$$\min_{\Phi,\pi,\xi_B}\frac{1}{\gamma_B}\ln\mathbb{E}_{\mathbb{P}^X}\left[\exp\left(-\gamma_B\left(-\Phi(\Theta)+\xi_B(\pi)\right)\right)\right]$$

sous la contrainte

$$\min_{\xi_I}\frac{1}{\gamma_I}\ln\mathbb{E}_{\mathbb{P}^X}\left[\exp\left(-\gamma_I\left(\Phi(\Theta)+\xi_I(x-\pi)\right)\right)\right]$$
$$\geq \min_{\eta_I}\frac{1}{\gamma_I}\ln\mathbb{E}_{\mathbb{P}^X}\left[\exp\left(-\gamma_I\left(-\frac{\gamma_B}{\gamma_B+\gamma_I}X(\Theta)+\eta_I(x)\right)\right)\right]$$

soit en reprenant les notations précédentes :

$$\min_{\Phi,\pi} V_B^X\left(\pi,\Phi(\Theta)\right)$$

$$s.c.\quad V_I^X\left(x-\pi,-\Phi(\Theta)\right)\geq V_I^X\left(x,\frac{\gamma_B}{\gamma_B+\gamma_I}X(\Theta)\right)$$

Tout peut être résolu de la même façon que précédemment. Il faut désormais résoudre :

$$\min_{\Phi}\left\{p_0\left(\gamma_B,\Phi(\Theta)\right)+p_0\left(\gamma_I,-\Phi(\Theta)\right)\right\}$$

En utilisant ce qui a été fait ci-dessus, on obtient que l'unique solution de ce problème (à un actif réplicable près) est :

$$\Phi(\Theta)=0\quad \mathbb{P}\ p.s.$$

et finalement, la structure optimale est donnée à un actif réplicable près par :

$$F^*(\Theta)=\frac{\gamma_B}{\gamma_B+\gamma_I}X(\Theta)\qquad \mathbb{P}\ p.s.$$

■

6.2.3 Fonction de valeur et niveau d'utilité

En reprenant le programme d'optimisation remanié (6.10) et en remplaçant la structure F et son prix π par leur forme optimale respective, nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 19 *La fonction de valeur du programme d'optimisation (6.10) est donnée par :*

$$p_0\left(\widetilde{\gamma}, -X\left(\Theta\right)\right)\beta_0$$

où :

$$\widetilde{\gamma} = \frac{\gamma_B \gamma_I}{\gamma_B + \gamma_I}$$

Preuve :

La fonction de valeur du programme d'optimisation reformulé est donnée par :

$$\begin{aligned} & V_B\left(0, -X\left(\Theta\right) + F^*\left(\Theta\right)\right) + V_I\left(0, -F^*\left(\Theta\right)\right) - V_I\left(0,0\right) \\ = \quad & p_0\left(\gamma_B, -X\left(\Theta\right) + F^*\left(\Theta\right)\right)\beta_0 + p_0\left(\gamma_I, -F^*\left(\Theta\right)\right)\beta_0 + V_B\left(0,0\right) \end{aligned}$$

soit en remplaçant F^* par sa forme optimale et en notant $\widetilde{\gamma} = \frac{\gamma_B\gamma_I}{\gamma_B+\gamma_I}$:

$$\begin{aligned} & p_0\left(\gamma_B, -\frac{\widetilde{\gamma}}{\gamma_B}X\left(\Theta\right)\right)\beta_0 + p_0\left(\gamma_I, -\frac{\widetilde{\gamma}}{\gamma_I}X\left(\Theta\right)\right)\beta_0 + V_B\left(0,0\right) \\ = \quad & \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}}\left\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(-\frac{\widetilde{\gamma}}{\gamma_B}X\left(\Theta\right)\right) - \frac{1}{\gamma_B}h\left(\mathbb{Q}/\mathbb{P}\right)\right\} - \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}}\left\{-\frac{1}{\gamma_B}h\left(\mathbb{Q}/\mathbb{P}\right)\right\} \\ & + \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}}\left\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(-\frac{\widetilde{\gamma}}{\gamma_I}X\left(\Theta\right)\right) - \frac{1}{\gamma_I}h\left(\mathbb{Q}/\mathbb{P}\right)\right\} - \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}}\left\{-\frac{1}{\gamma_I}h\left(\mathbb{Q}/\mathbb{P}\right)\right\} \\ & + \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}}\left\{-\frac{1}{\gamma_B}h\left(\mathbb{Q}/\mathbb{P}\right)\right\} \end{aligned}$$

D'où en factorisant par rapport à $\frac{1}{\gamma_B}$ et $\frac{1}{\gamma_I}$, puis par rapport à $\widetilde{\gamma}$, on obtient le résultat souhaité. ■

Remark 4 *Cette quantité correspond au niveau d'utilité (au signe et à une exponentielle près) que chacun des deux agents obtient en faisant la transaction liée à F. Notons que leur niveau d'utilité est identique. Une transaction est donc possible. D'autre part, ceci correspond au "prix" capitalisé de $-X\left(\Theta\right)$ donné par un agent représentatif ayant une aversion pour le risque $\widetilde{\gamma}$ et une utilité conditionnelle exponentielle. Le marché étant globalement incomplet, cet agent projette les portefeuilles de couverture auxquels il a accès afin de ne prendre en compte que les actifs réplicables.*
Notons également, que, comme dans le chapitre précédent, la fonction de valeur possède cette interprétation en termes de prix : le "payoff" considéré, $-X\left(\Theta\right)$, et l'aversion pour le risque de l'agent représentatif, $\widetilde{\gamma}$, sont les mêmes. Le cadre d'étude étant différent, la règle d'évaluation diffère également : dans le chapitre précédent, les actifs atteignables sont tous les actifs $\Im^S$-mesurables. La solution conduit à répliquer l'équivalent certain, par rapport à l'utilité exponentielle de coefficient $\widetilde{\gamma}$, de $-X\left(\Theta\right)$ pour la loi conditionnelle. Dans ce chapitre, les stratégies sont plus nombreuses mais ne permettent pas de couvrir parfaitement $X\left(\Theta\right)$.

6.2.4 Comparaison de deux types de stratégies d'investissement : stratégies conditionnées ou non

Dans cette section, nous comparons les deux types de stratégies d'investissement présentés dans ce chapitre précédent et dans ce chapitre. Tout d'abord, nous envisageons les niveaux d'utilité associés à chacune des deux approches, puis nous étudions l'impact de la source de risque non-financière sur chacun des investissements.

Dans le chapitre précédent et dans la section ci-dessus, nous avons caractérisé la structure optimale F^* dans deux approches différentes : dans le premier cas, les stratégies d'investissement sur le marché sont conditionnées par rapport à l'information contenue dans les prix de marché alors que dans le second cas, les stratégies ne sont pas contraintes. Le résultat obtenu est extrêmement robuste : la structure optimale F^* est identique quelle que soit l'approche considérée.

Ainsi, en prenant en compte la forme de cette structure, tout peut se résumer à la résolution d'un programme d'optimisation pour le même agent représentatif. Ce programme est le même pour les deux approches. Seul change l'ensemble d'optimisation. Ainsi, en reprenant les notations du chapitre précédent et de ce chapitre :

- Dans l'approche où les stratégies sont conditionnées par rapport à l'observation des prix, le programme s'écrit comme :

$$\min_{\xi \in \Im_T^S} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(-\widetilde{\gamma} \left(X \left(\Theta \right) + \xi \right) \right) \right]$$

- Dans l'approche où les stratégies d'investissement ne sont pas conditionnées, le programme s'écrit comme :

$$\min_{\xi \in \Im_T} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(-\widetilde{\gamma} \left(X \left(\Theta \right) + \xi \right) \right) \right]$$

Notons que $\Im_T^S \subset \Im_T$. Par conséquent, la première minimisation s'effectue sur un ensemble plus petit que la seconde. Il est donc possible de les comparer :

$$\min_{\xi \in \Im_T} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(-\widetilde{\gamma} \left(X \left(\Theta \right) + \xi \right) \right) \right] \leq \min_{\xi \in \Im_T^S} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(-\widetilde{\gamma} \left(X \left(\Theta \right) + \xi \right) \right) \right]$$

Il vient alors le résultat suivant :

Proposition 20 *L'approche où les stratégies d'investissement ne sont pas contraintes est meilleure que celle où des contraintes liées à l'information disponible sont imposées, au sens de l'utilité exponentielle.*

Toutefois, ce résultat ne tient pas compte d'éventuels coûts (financiers ou d'effort) liés à l'aquisition de l'information supplémentaire pour mener à bien ces stratégies non-conditionnées. Il faudrait alors comparer le gain d'utilité a priori et la perte d'utilité liée à l'aquisition d'information ou à l'effort pour obtenir de l'information.

6.3 Stratégies d'investissement optimales sur le marché financier

Notre objectif premier, dans ce chapitre, a été la caractérisation de la structure optimale F^*. Pour ce faire, il a été possible de se ramener à l'étude d'un problème *statique* associé à la date future T.

Toutefois, un autre aspect complémentaire et indispensable consiste en la détermination explicite du prix de cette structure F^* et en la caractérisation des stratégies d'investissement sur le marché financier. Toute la dimension *dynamique* du problème initial réapparaît ici.

Pour déterminer la structure optimale, on a simplement eu besoin de certaines propriétés (comme la convexité) de la fonction de prix p_0 définie dans l'article de N. El Karoui et R. Rouge ([23]). Pour la seconde partie de l'étude, il est important de prendre en compte d'autres résultats de cet article et notamment les équations différentielles stochastiques rétrogrades, permettant de calculer dynamiquement les différentes quantités, comme :
i) le "prix" du risque consensuel $p_0\left(\widetilde{\gamma}, -X\left(\Theta\right)\right)$. Pour ce faire, on se ramène au problème étudié par N. El Karoui et R. Rouge avec la cible consensuelle $C = -X\left(\Theta\right)$ et le niveau d'aversion pour le risque $\widetilde{\gamma}$. L'équation différentielle stochastique rétrograde associée au prix p_t permet de calculer cette valeur initiale.
ii) les portefeuilles d'investissement dans le marché financier, optimaux pour chacun des agents. Ainsi, trois sous-programmes interviennent dans le programme global :

$$\begin{array}{ll} i) & \max\limits_{\varphi} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[-\exp\left(-\gamma_B\left(X\left(\Theta\right) - F\left(\Theta\right) + \xi_B\left(\pi, \varphi\right)\right)\right)\right] \\ ii) & \max\limits_{\varphi} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[-\exp\left(-\gamma_I\left(F\left(\Theta\right) + \xi_I\left(x - \pi, \varphi\right)\right)\right)\right] \\ iii) & \max\limits_{\varphi} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[-\exp\left(-\gamma_I \eta_I\left(x, \varphi\right)\right)\right] \end{array}$$

Ils sont de même nature et chacun d'eux peut être résolu en utilisant la méthode avec les équations différentielles stochastiques rétrogrades, présentée notamment par N. El Karoui et R. Rouge dans leur article ([23]).

La résolution de ces problèmes utilise les mêmes arguments. Nous avons choisi de présenter les résultats obtenus dans cet article, dans un cadre précis, décrit dans la section suivante. Toutefois, nous ne résolvons pas en détails chacun de ces programmes. Ainsi, nous nous ramenons à l'étude du problème

(6.2) avec :

$$\begin{aligned} i) \qquad C &= -X(\Theta) + F(\Theta) \quad \text{et} \quad \gamma = \gamma_B \\ ii) \qquad C &= -F(\Theta) \quad \text{et} \quad \gamma = \gamma_I \\ iii) \qquad C &= 0 \quad \text{et} \quad \gamma = \gamma_I \end{aligned}$$

6.3.1 Cadre de l'étude

Afin d'écrire ces problèmes d'un point de vue dynamique, il est nécessaire de spécifier le cadre de l'étude. Nous supposons qu'il existe un actif de marché dont la dynamique dépend de plusieurs facteurs décrits par le vecteur Z, de dimension n. La première composante[5] de ce vecteur est l'actif de marché lui-même :

$$\frac{dZ_t^1}{Z_t^1} = \mu_t^1 dt + \langle \sigma_t^1, dW_t \rangle$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire, $\mu^1 \in \mathbb{R}$, $\sigma^1 \in \mathbb{R}^n$ et W est un $\mathbb{P}$-mouvement Brownien n-dimensionnel. Notons que la dimension du mouvement Brownien coïncide avec le nombre de facteurs. La dynamique de chaque facteur $(i = 2, ..., n)$ est donnée par :

$$\frac{dZ_t^i}{Z_t^i} = \mu_t^i dt + \langle \sigma_t^i, dW_t \rangle$$

Le risque non-financier Θ est décrit par ces différents facteurs.

Nous supposons par simplicité que le processus n-dimensionnel de dérive $(\mu_t; 0 \le t \le T)$ a pour valeur en t :

$$\mu_t = \begin{pmatrix} \mu_t^1 \\ .. \\ \mu_t^n \end{pmatrix}$$

Celui-ci est supposé adapté.

Le processus de volatilité $(\sigma_t; 0 \le t \le T)$ a pour valeur en t la matrice carré $n \times n$:

$$\sigma_t = \begin{pmatrix} (\sigma_t^1)^* \\ .. \\ (\sigma_t^n)^* \end{pmatrix}$$

où A^* désigne la transposée de A. Pour tout instant $t \in [0; T]$, la matrice σ est supposée inversible et $(\sigma_t)^{-1}$ est supposée bornée.

[5] Notons que Z^1 peut être un vecteur de dimension inférieure à n si on considère plusieurs actifs dans le marché.

Il existe également un actif sans risque, S^0, dont le taux de rendement instantané à l'instant $t \in [0;T]$ est égal à r_t :

$$\frac{dS_t^0}{S_t^0} = r_t dt$$

Le processus $(r_t; 0 \leq t \leq T)$ est supposé adapté et borné. Par la suite, nous utiliserons le prix du zéro-coupon versant 1 en T défini comme :

$$\forall t \in [0;T] \qquad B(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)\right]$$

où $\mathbb{Q}$ est la mesure de probabilité risque-neutre.
Le prix "forward" associé au prix Y_t en t sera alors noté :

$$Y_t \beta_{t,T} \triangleq \frac{Y_t}{B(t,T)}$$

De plus, nous définissons le processus $(\lambda_t; 0 \leq t \leq T)$ dont la valeur en t est donnée par le vecteur de dimension n de la façon suivante :

$$\lambda_t = [\sigma_t]^{-1} (\mu_t - r_t \mathbf{1})$$

où $\mathbf{1}$ est un vecteur de dimension n dont chaque composante est égale à 1.
Chaque coordonnée peut être rapprochée de la notion de "prime de risque", même si cela est peu clair concernant les facteurs qui ne sont pas traités sur le marché.
Ce processus des primes de risque est supposé borné.

6.3.2 Résultats préliminaires, problématique et écriture dynamique

Le problème que nous cherchons à résoudre ici est du type :

$$\max_{\varphi} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[-\exp\left(-\gamma\left\{\xi(x,\varphi,T) - C\right\}\right)\right]$$

où φ est une stratégie admissible, C est une "cible" que l'on cherche à évaluer et $\xi(x,\varphi,T)$ désigne la valeur terminale de la stratégie autofinançante φ, partant de la richesse initiale x en 0.

Fonction de valeur et contrôle optimal

Equations contrôlées et contrôles admissibles La fonction de valeur de ce programme peut s'écrire, en utilisant les résultats de l'article de N. El Karoui et R. Rouge ([23]), comme un problème de contrôle :

$$V(x,\gamma) = -x\beta_0 + \sup_{v}\left\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T^v}(C) - \frac{1}{\gamma}h\left(\mathbb{Q}_T^v/\mathbb{P}\right)\right\}$$

où $(v_t; 0 \leq t \leq T)$, processus de dimension n, est le contrôle de ce problème et :

$$\frac{d\mathbb{Q}_T^v}{d\mathbb{P}} = H_t^v = \exp\left\{-\int_0^T [\lambda_s + v_s]\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \|\lambda_s + v_s\|^2\,ds\right\}$$

Toutefois, le processus v caractérisant la probabilité $\mathbb{Q}_T^v$ ne peut pas être choisi n'importe comment. En effet, l'actif de marché (le seul actif traité) doit être martingale sous cette probabilité. De ce fait, cette condition impose que pour tout $t \in [0,T]$:

$$\left\langle \sigma_t^1, v_t \right\rangle = 0$$

On définit alors l'ensemble :

$$\mho_t = \left\{v \in \mathbb{R}^n; \left\langle \sigma_t^1, v\right\rangle = 0\right\} \tag{6.13}$$

et $\mho$ est l'ensemble des processus $(v_t; 0 \leq t \leq T)$ tels que :

$$\forall t \in [0,T] : v_t \in \mho_t$$

Par conséquent, la fonction de valeur s'écrit comme :

$$\begin{aligned} V(x,\gamma) &= -x\beta_0 + \sup_{v\in\mho}\left\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T^v}(C) - \frac{1}{\gamma}h\left(\mathbb{Q}_T^v/\mathbb{P}\right)\right\} \\ &\triangleq -x\beta_0 + \sup_{v\in\mho}\left(x_0^{C,v}\right) = -x\beta_0 + x_0^{C,\overline{v}} \end{aligned}$$

où $x_0^{C,\overline{v}} = \sup_{v\in\mho}\left(x_0^{C,v}\right)$et $\overline{v}$ est le processus (ou contrôle) optimal défini comme $(\overline{v}_t; 0 \leq t \leq T)$ avec $\overline{v}_t$ optimal à l'instant t.

Nous cherchons alors à trouver la dynamique de $x_t^{C,\overline{v}}$ afin d'avoir sa valeur en 0. Plusieurs étapes sont pour cela nécessaires. Il convient tout d'abord de caractériser la dynamique de $x_t^{C,v}$ mais également le contrôle optimal $\overline{v}$.

Notons, d'après ce qui précède et la définition de l'entropie relative h, que, pour tout $t \in [0,T]$:

$$x_t^{C,v} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T^v}\left(C - \frac{1}{2\gamma}\int_t^T \|\lambda_s + v_s\|^2\,ds\right) \tag{6.14}$$

Il existe donc une stratégie φ^v (i.e. un vecteur de dimension n) telle que :

$$\begin{cases} -dx_t^{C,v} = & -\frac{1}{2\gamma}\left\|\lambda_t + v_t\right\|^2 dt - \left\langle (\varphi_t^v)^* \sigma_t, dW_t^v \right\rangle \\ x_T^{C,v} = & C \end{cases}$$

où $\left(W_t^v = W_t + \int\limits_0^t [\lambda_s + v_s]\, ds; 0 \leq t \leq T\right)$ est un $\mathbb{Q}_T^v$-mouvement Brownien, de dimension n.
Par conséquent, tout peut se réécrire, en posant $\delta_t = (\sigma_t)^* \varphi_t^v$, comme :

$$\begin{cases} -dx_t^{C,v} = & f_{\lambda,t}(\delta, v)\, dt - \langle \delta_t, dW_t \rangle \\ x_T^{C,v} = & C \end{cases}$$

avec :

$$f_t(\delta, v) = -\frac{1}{2\gamma}\left\|\lambda_t + v_t\right\|^2 - \langle \delta_t, \lambda_t + v_t \rangle = -\frac{1}{2\gamma}\left\|\lambda_t + v_t + \gamma\delta_t\right\|^2 + \frac{\gamma}{2}\left\|\delta_t\right\|^2 \tag{6.15}$$

et l'équation différentielle staochastique rétrograde associée à $x^{C,v}$ devient alors :

$$\begin{cases} -dx_t^{C,v} = & \left\{-\frac{1}{2\gamma}\left\|\lambda_t + v_t + \gamma\delta_t\right\|^2 + \frac{\gamma}{2}\left\|\delta_t\right\|^2\right\} dt - \langle \delta_t, dW_t \rangle \\ x_T^{C,v} = & C \end{cases}$$

Détermination du contrôle optimal Il est possible de montrer que le contrôle optimal est obtenu en maximisant la dérive $f_{\lambda,t}(\delta, v)$ sur l'ensemble des contrôles admissibles, ou encore, à t et δ fixés, avec des notations simplificatrices évidentes :

$$\min_{v_t \in \mho_t} \left\|\lambda_t + \gamma\delta_t + v_t\right\|^2 \tag{6.16}$$

Par conséquent, le processus optimal $(\overline{v}_t; 0 \leq t \leq T)$ est défini à chaque instant t comme la solution de ce programme de minimisation et donné par le lemme suivant :

Lemma 21 *La valeur optimale de $\overline{v}_t$ est donnée par :*

$$\overline{v}_t = (\lambda_t + \gamma\delta_t)^e - (\lambda_t + \gamma\delta_t) = -(\lambda_t + \gamma\delta_t)^{\perp} \tag{6.17}$$

où u^e désigne la projection du vecteur u sur l'espace vectoriel engendré par :

$$e_t = \frac{\sigma_t^1}{\left\|\sigma_t^1\right\|}$$

De la même façon, $u^{\perp}$ désigne la projection du vecteur u sur l'espace orthogonal à l'espace vectoriel engendré par e_t.

De plus,

$$\sup_{v_t \in \mho_t} f_t(\delta, v) \triangleq f_t(\delta, \overline{v}) = -\frac{1}{2\gamma} \left\|(\lambda_t + \gamma\delta_t)^e\right\|^2 + \frac{\gamma}{2} \left\|\delta_t\right\|^2$$

Preuve :

La notation suivante va être importante dans la détermination du contrôle optimal :

$$e_t = \frac{\sigma_t^1}{\left\|\sigma_t^1\right\|}$$

La preuve de ce lemme réside en un argument de décomposition des vecteurs sur deux espaces orthogonaux. Ainsi, en considérant l'espace vectoriel engendré par e_t, $vect\,(e_t)$, et son orthogonal $vect\,(e_t)^{\perp}$, on peut écrire pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$:

$$u = \Pi_{vect(e_t)^{\perp}}(u) + \Pi_{vect(e_t)}(u) \triangleq u^e + u^{\perp}$$

avec des notations évidentes. D'où :

$$\lambda_t + \gamma\delta_t + v_t = (\lambda_t + \gamma\delta_t)^{\perp} + (\lambda_t + \gamma\delta_t)^e + v_t$$

Or, par construction, v_t doit appartenir à $vect\,(e_t)^{\perp}$. Le programme de minimisation (6.16) peut donc s'écrire comme :

$$\min_{v_t \in \mho_t} \left\{ \left\|(\lambda_t + \gamma\delta_t)^{\perp} + v_t\right\|^2 + \left\|(\lambda_t + \gamma\delta_t)^e\right\|^2 \right\}$$

ce qui revient à :

$$\min_{v_t \in \mho_t} \left\|(\lambda_t + \gamma\delta_t)^{\perp} + v_t\right\|^2$$

La solution optimale vient immédiatement en remarquant que le minimum est atteint en 0. Ainsi :

$$\overline{v}_t = -\left(\lambda_t + \gamma\delta_t\right)^{\perp}$$

ou encore, en adoptant une autre formulation :

$$\overline{v}_t = (\lambda_t + \gamma\delta_t)^e - (\lambda_t + \gamma\delta_t)$$

■

Dynamique contrôlée optimalement Finalement, la dynamique contrôlée optimalement est donnée par le lemme suivant :

Lemma 22 *Il existe un processus δ tel que $\left(x_t^C, \delta_t\right)$ est solution de l'équation différentielle stochastique* *rétrograde suivante :*

$$\begin{cases} -dx_t^C = & \left\{-\frac{1}{2\gamma}\left\|(\lambda_t+\gamma\delta_t)^e\right\|^2+\frac{\gamma}{2}\left\|\delta_t\right\|^2\right\}dt-\langle\delta_t,dW_t\rangle \\ x_T^C = & C \end{cases}$$

ou encore en utilisant l'équation (6.15) :

$$\begin{cases} -dx_t^C = & \left\{-\frac{1}{2\gamma}\left\|\lambda_t+\overline{v}_t\right\|^2-\langle\delta_t,\lambda_t+\overline{v}_t\rangle\right\}dt-\langle\delta_t,dW_t\rangle \\ x_T^C = & C \end{cases}$$

En d'autres termes :

$$\forall t\in[0;T] \qquad x_t^C = x_t^{C,\overline{v}}$$

et d'après l'équation (6.14), le processus $\left(x_t^C-\frac{1}{2\gamma}\int\limits_0^t\left\|\lambda_s+\overline{v}_s\right\|^2ds; 0\leq t\leq T\right)$ *est une* $\mathbb{Q}_T^{\overline{v}}$*-martingale.*

Ce résultat correspond au Théorème 4.1 de l'article de N. El Karoui et R. Rouge ([23]) dans le cadre de notre étude particulière, décrit précédemment.

Valeur forward du portefeuille d'investissement sur les march és financiers

Valeur forward optimale Dans cette sous-section, nous dérivons la valeur forward du portefeuille de marché de l'agent lorsqu'il possède également une cible C. L'obtention d'une valeur optimale envisageable de ce portefeuille en T vient directement de l'expression du problème d'optimisation. Nous la notons $\mathcal{W}_T^C(x)$ et $\overline{v}$ désigne le contrôle optimal, obtenu ci-dessus :

$$\mathcal{W}_T^C(x) = -V(x,C)+C-\frac{1}{\gamma}\ln H_T^{\overline{v}}$$

Si $\mathcal{W}_T^C(x)$ est admissible alors il s'agit bien de la valeur optimale puisque :

$$\frac{1}{\gamma}\ln\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma\left(\mathcal{W}_T^C-C\right)\right)\right] = V(x,C)$$

Evidemment, cette valeur coïncide avec $\xi(x,\varphi^*,T)$.

La proposition suivante permet d'avoir l'admissibilité de ce portefeuille mais également d'en avoir une forme explicite pour une date t intermédiaire ainsi que la dynamique associée.

Proposition 23 *i) La valeur forward du portefeuille de marché de l'agent à un instant* $t\in[0;T]$ *est donnée par :*

$$\mathcal{W}_t^C = -V(x,C)+x_t^C-\frac{1}{\gamma}\ln H_t^{\overline{v}}$$

ii) De plus, la dynamique associée est la suivante :

$$d\mathcal{W}_t^C = \left\langle \left(\delta_t + \frac{1}{\gamma}\lambda_t \right)^e , \ dW_t + (\lambda_t + \overline{v}_t)\, dt \right\rangle$$

iii) Par conséquent, pour tout processus $v \in \mho$, on a :

$$d\mathcal{W}_t^C = \left\langle \left(\delta_t + \frac{1}{\gamma}\lambda_t \right)^e , \ dW_t + (\lambda_t + v_t)\, dt \right\rangle$$

et en particulier $\left(\mathcal{W}_t^C ; 0 \leq t \leq T\right)$ est une $\mathbb{Q}_T$-martingale.

Preuve :

Pour prouver ces résultats, nous procédons en plusieurs temps :

- Tout d'abord, nous montrons que le processus $(M_t; 0 \leq t \leq T)$ défini comme :

$$\forall t \in [0;T] \qquad M_t = -V(x,C) + x_t^C - \frac{1}{\gamma} \ln H_t^{\overline{v}}$$

est bien une $\mathbb{Q}_T^{\overline{v}}$-martingale. Pour cela, nous utilisons le Lemme 22 et tout particulièrement le fait que $\left(x_t^C - \frac{1}{2\gamma} \int_0^t \|\lambda_s + \overline{v}_s\|^2 \, ds; 0 \leq t \leq T \right)$ est une $\mathbb{Q}_T^{\overline{v}}$-martingale. En effet :

$$\begin{aligned} x_t^C - \frac{1}{\gamma}\ln H_t^{\overline{v}} &= x_t^C - \frac{1}{\gamma} \left\{ - \int_0^t [\lambda_s + \overline{v}_s]\, dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\lambda_s + \overline{v}_s\|^2 \, ds \right\} \\ &= x_t^C + \frac{1}{\gamma} \left\{ \int_0^t [\lambda_s + \overline{v}_s] \left(dW_s^{\overline{v}} - (\lambda_s + \overline{v}_s)\, ds \right) + \frac{1}{2} \int_0^t \|\lambda_s + \overline{v}_s\|^2 \, ds \right\} \\ &= x_t^C + \frac{1}{\gamma} \int_0^t [\lambda_s + \overline{v}_s]\, dW_s^{\overline{v}} - \frac{1}{2} \int_0^t \|\lambda_s + \overline{v}_s\|^2 \, ds \end{aligned}$$

Par conséquent $\left(x_t^C - \frac{1}{\gamma} \ln H_t^{\overline{v}} ; 0 \leq t \leq T \right)$ est également une $\mathbb{Q}_T^{\overline{v}}$-martingale, de valeur initiale x_0^C. Le processus $(M_t; 0 \leq t \leq T)$ est alors une $\mathbb{Q}_T^{\overline{v}}$-martingale, de valeur initiale $x\beta_0$ (ce qui est la valeur capitalisée de la richesse initiale x que l'agent a investi dans le marché), i.e. $-V(x,C) + x_0^C$.

- Dans un second temps, nous déterminons la dynamique de $(M_t; 0 \leq t \leq T)$. On obtient directement :

$$dM_t = dx_t^C - \frac{1}{\gamma} d\ln H_t^{\overline{v}}$$

$$= \left\{ \frac{1}{2\gamma} \left\| \lambda_t + \overline{v}_t \right\|^2 + \langle \lambda_t + \overline{v}_t, \delta_t \rangle \right\} dt + \langle \delta_t, dW_t \rangle + \frac{1}{2\gamma} \left\| \lambda_t + \overline{v}_t \right\|^2 dt + \frac{1}{\gamma} \langle \lambda_t + \overline{v}_t, dW_t \rangle$$

$$= \left\langle \delta_t + \frac{1}{\gamma} (\lambda_t + \overline{v}_t), dW_t + (\lambda_t + \overline{v}_t) dt \right\rangle - \frac{1}{\gamma} \left\| \lambda_t + \overline{v}_t \right\|^2 dt + \frac{1}{\gamma} \left\| \lambda_t + \overline{v}_t \right\|^2 dt$$

Par conséquent :

$$dM_t = \left\langle \delta_t + \frac{1}{\gamma} (\lambda_t + \overline{v}_t), dW_t + (\lambda_t + \overline{v}_t) dt \right\rangle = \left\langle \left(\delta_t + \frac{1}{\gamma} \lambda_t \right)^e, \ dW_t + (\lambda_t + \overline{v}_t) dt \right\rangle$$

- Enfin, comme v_t doit appartenir à $vect\,(e_t)^{\perp}$ par construction, on peut écrire pour tout v_t :

$$dM_t = \left\langle \left(\delta_t + \frac{1}{\gamma} \lambda_t \right)^e, \ dW_t + (\lambda_t + v_t) dt \right\rangle$$

et en particulier pour $v_t = 0$ (qui appartient bien à l'espace des contrôles admissibles) :

$$dM_t = \left\langle \left(\delta_t + \frac{1}{\gamma} \lambda_t \right)^e, \ dW_t + \lambda_t dt \right\rangle$$

Finalement, $(M_t; 0 \leq t \leq T)$ est une $\mathbb{Q}_T$-martingale. Il s'agit donc bien d'un candidat admissible. Par conséquent, par absence d'opportunité d'arbitrage, la valeur forward du portefeuille de marché à toute date $t \in [0; T]$ est donnée par :

$$M_t = \mathcal{W}_t^C$$

C'est donc le processus optimal de valeur foward. ■

Impact de la cible sur la valeur forward du portefeuille de march é En utilisant les résultats de la sous-section 6.3.2 et, en particulier, la Proposition 23, la valeur terminale du portefeuille de marché alors que l'agent possède la cible C dans ses livres est donnée par :

$$\mathcal{W}_T^{C*}(x) = x\beta_0 - x_0^C + C - \frac{1}{\gamma} \ln H_T^{\overline{v}^C}$$

où :

$$H_T^{\overline{v}^C} \triangleq \frac{d\mathbb{Q}_T^{\overline{v}^C}}{d\mathbb{P}} = \exp\left\{ -\int_0^T \left[\lambda_s + \overline{v}_s^C \right] dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \left\| \lambda_s + \overline{v}_s^C \right\|^2 ds \right\}$$

Dès lors, l'impact de l'existence de cette cible C sur la valeur terminale du portefeuille de marché est mesuré par la différence entre la valeur terminale lorsque l'on s'est couvert et la valeur terminale lorsque l'on n'a pas cherché à couvrir la cible :

$$\Delta\mathcal{W} \triangleq \mathcal{W}_T^{C*}(x) - \left(\mathcal{W}_T^{0*}(x) + C - p_0\beta_0\right)$$

Cette quantité permet de mesurer l'intérêt en T d'avoir la cible C et de l'avoir couvert (partiellement à l'aide du portefeuille de marché). Plus précisément :

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{W} &= C - \left(x_0^C - x_0^0\right) + \frac{1}{\gamma}\ln\frac{H_T^{\overline{v}^0}}{H_T^{\overline{v}^C}} - C + p_0\beta_0 \qquad \mathbb{P}\ p.s. \\
&= -\frac{1}{\gamma}\ln\frac{H_T^{\overline{v}^C}}{H_T^{\overline{v}^0}} \qquad \mathbb{P}\ p.s.
\end{aligned}$$

Par les transformations habituelles de changement de numéraire, on obtient :

$$\frac{H_T^{\overline{v}^C}}{H_T^{\overline{v}^0}} = \exp\left\{-\int_0^T \left[\overline{v}_t^C - \overline{v}_t^0\right] dW_t^{\overline{v}^0}\right\} - \frac{1}{2}\left\{\int_0^T \left\|\overline{v}_t^C - \overline{v}_t^0\right\|^2 dt\right\}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\gamma}\ln\frac{H_T^{\overline{v}^C}}{H_T^{\overline{v}^0}} &= \frac{1}{\gamma}\int_0^T \left[\overline{v}_t^C - \overline{v}_t^0\right] dW_t^{\overline{v}^0} + \frac{1}{2\gamma}\left\{\int_0^T \left\|\overline{v}_t^C - \overline{v}_t^0\right\|^2 dt\right\} \\
&= \int_0^T \left(\delta_t^C - \delta_t^0\right)^{\perp} dW_t^{\overline{v}^0} + \frac{\gamma}{2}\int_0^T \left\|\left(\delta_t^C - \delta_t^0\right)^{\perp}\right\|^2 dt
\end{aligned}$$

Ainsi, l'écart sur les richesses terminales est donné par :

$$\mathcal{W}_T^{C*}(x) - \left(\mathcal{W}_T^{0*}(x) + C - p_0\beta_0\right) = \int_0^T \left(\delta_t^C - \delta_t^0\right)^{\perp} dW_t^{\overline{v}^0} + \frac{\gamma}{2}\int_0^T \left\|\left(\delta_t^C - \delta_t^0\right)^{\perp}\right\|^2 dt \qquad \mathbb{P}\ p.s.$$

Notons que si C est un payoff réplicable alors cet écart est nul. Cette situation est identique à celle où la cible est $\Im_T^S$-mesurable dans le cas des stratégies contraintes.
De plus, il est intéressant de noter que l'espérance sous $\mathbb{Q}_T^{\overline{v}^0}$ de cette quantité est toujours positive ou nulle. Ayant une cible C dans son portefeuille, un agent a toujours intérêt, en moyenne, à chercher à se couvrir sur le marché.

Equation du prix

Le prix de la cible C à toute date t, $0 \leq t \leq T$, noté p_t, peut être défini comme prix d'indifférence ou prix de réserve. Il correspond de ce fait à l'écart (au facteur de capitalisation jusqu'à l'horizon T près) entre les fonctions valeur du programme avec cible et du programme sans cible. Plus formellement :

$$p_t \beta_{t,T} = x_t^C - x_t^0$$

La dynamique de p peut, par conséquent, être déduite des dynamiques de x^C et de x^0. C'est en procédant de cette façon que N. El Karoui et R. Rouge ont obtenu dans le théorème 5.1 de leur article ([23]) l'équation différentielle stochastique rétrograde associée à la différence $x_t^C - x_t^0$. Plusieurs paramètres et relations vont être importants pour obtenir cette équation :

$$z_t = \delta_t^C - \delta_t^0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\lambda}_t^0 = \lambda_t + \overline{v}_t^0 = (\lambda_t)^e - \gamma \left(\delta_t^0\right)^\perp$$

De ce fait :

$$\left(\lambda_t + \gamma \delta_t^0\right)^e = \overline{\lambda}_t^0 + \gamma \left(\delta_t^0\right)^\perp \qquad \text{et} \qquad \left(\lambda_t + \gamma \delta_t^C\right)^e = \overline{\lambda}_t^0 + \gamma \left(\delta_t^0\right)^\perp + \gamma \left(z_t\right)^e$$

De façon détaillée pour notre cadre d'étude particulier et d'après les résultats de la section précédente, notamment le Lemme 22, en utilisant notamment l'astuce de calcul :

$$a^2 - b^2 = (a-b)^2 + 2(a-b)b \tag{6.18}$$

on obtient pour les deux différences de normes intervenant dans le terme de dérive de l'équation différentielle stochastique rétrograde :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\gamma}\left\|\left(\lambda_t + \gamma\delta_t^C\right)^e\right\|^2 + \frac{1}{2\gamma}\left\|\left(\lambda_t + \gamma\delta_t^0\right)^e\right\|^2 &= -\frac{1}{2\gamma}\left\{\left\|\overline{\lambda}_t^0 + \gamma\left(\delta_t^0\right)^\perp + \gamma\left(z_t\right)^e\right\|^2 - \left\|\overline{\lambda}_t^0 + \gamma\left(\delta_t^0\right)^\perp\right\|^2\right\} \\
&= -\frac{1}{2\gamma}\left\{\left\|\gamma\left(z_t\right)^e\right\|^2 + 2\left\langle \gamma\left(z_t\right)^e, \overline{\lambda}_t^0 + \gamma\left(\delta_t^0\right)^\perp \right\rangle\right\} \\
&= -\frac{1}{2\gamma}\left\{\left\|\gamma\left(z_t\right)^e\right\|^2 + 2\left\langle \gamma z_t, \left(\lambda_t + \gamma\delta_t^0\right)^e \right\rangle\right\} \qquad (6.19)
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\frac{\gamma}{2}\left\|\delta_t^C\right\|^2 - \frac{\gamma}{2}\left\|\delta_t^0\right\|^2 = \frac{\gamma}{2}\left\{\left\|z_t\right\|^2 + 2\left\langle z_t, \delta_t^0\right\rangle\right\} \tag{6.20}$$

Du coup, en faisant la somme de (6.19) et (6.20), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\gamma}{2}\left\|(z_t)^{\perp}\right\|^2-\left\langle z_t,\left(\lambda_t+\gamma\delta_t^0\right)^e\right\rangle+\left\langle z_t,\gamma\delta_t^0\right\rangle &= \frac{\gamma}{2}\left\|(z_t)^{\perp}\right\|^2-\left\langle z_t,\left(\lambda_t+\gamma\delta_t^0\right)^e-\gamma\delta_t^0\right\rangle \\ &= \frac{\gamma}{2}\left\|(z_t)^{\perp}\right\|^2-\left\langle z_t,\lambda_t+\overline{v}_t^0\right\rangle\end{aligned}$$

et on en déduit :

$$\begin{cases} -d\left(x_t^{C,\overline{v}^C}-x_t^{0,\overline{v}^0}\right) = \left\{\frac{\gamma}{2}\left\|(z_t)^{\perp}\right\|^2-\left\langle z_t;\lambda_t+\overline{v}_t^0\right\rangle\right\}dt-\left\langle z_t,dW_t\right\rangle \\ x_T^{C,\overline{v}^C}-x_T^{0,\overline{v}^0} = C\end{cases}$$

En remarquant que $\left(W_t^{\overline{v}^0}\triangleq W_t+\int_0^t\left(\lambda\left(s,Z_s\right)+\overline{v}_s^0\right)ds;0\leq t\leq T\right)$ est un mouvement Brownien sous $\mathbb{Q}_T^{\overline{v}^0}$, la proposition suivante est obtenue :

Proposition 24 *Le prix capitalisé de l'actif C satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :*

$$\begin{cases} -d\left(p_t\beta_{t,T}\right) = \frac{\gamma}{2}\left\|(z_t)^{\perp}\right\|^2dt-\left\langle z_t,dW_t^{\overline{v}^0}\right\rangle \\ p_T = C\end{cases}$$

Notons que si C est un actif réplicable, alors le terme de pénalisation $(z_t)^{\perp}$ est nul, et le prix de C est une martingale sous $\mathbb{Q}_T^{\overline{v}^0}$.

6.3.3 Ecriture en termes d'E.D.P. dans un cadre Markovien

Dans cette section, nous nous plaçons dans le cadre d'étude précédent décrit dans la sous-section 6.3.1 afin d'écrire les quantités précédentes comme solution d'une équation aux dérivées partielles (E.D.P.) et non plus comme solution d'une équation différentielle stochastique rétrograde. Les relations étroites existant entre les équations différentielles stochastiques ("forward" ou "backward") et les E.D.P. sont ici utilisées pour permettre d'obtenir des équations plus facilement implémentables numériquement. Par ailleurs, nous nous plaçons dans un univers Markovien. La solution obtenue dans la section précédente comme soultion d'une équation différentielle rétrograde va être solution au sens de la viscosité d'une E.D.P. non-linéaire. Par conséquent, cette section reprend les résultats précédents mais dans une optique quelque peu différente.

Dynamique de Z, processus contrôlé et générateur

Désormais, nous considérons le cadre de l'étude présentée ci-dessus (section 6.3.1) mais dans un univers Markovien. La dynamique de chaque facteur Z^i, pour $i=1,...,n$, est donnée, sous la mesure de probabilité prior $\mathbb{P}$, par :

$$\frac{dZ_t^i}{Z_t^i} = \mu^i(t, Z_t)\, dt + \left\langle \sigma^i(t, Z_t), dW_t \right\rangle$$

D'autre part, comme nous l'avons souligné précédemment, la famille des probabilités $(\mathbb{Q}_T^v; v \in \mho)$ va jouer un rôle très important dans la détermination des quantités qui nous intéressent. Ces mesures sont définies dans le cadre Markovien par :

$$\frac{d\mathbb{Q}_T^v}{d\mathbb{P}} = H_T^v = \exp\left\{ -\int_0^T \left[\lambda(s, Z_s) + v(s, Z_s)\right] dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \left\|\lambda(s, Z_s) + v(s, Z_s)\right\|^2 ds \right\}$$

où nous supposons que les primes de risque λ et v sont bornées.

La dynamique de chaque facteur Z^i, pour $i = 1, ..., n$, est donnée, sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}_T^v$, par :

$$\frac{dZ_t^i}{Z_t^i} = \left[\mu^i(t, Z_t) - \left\langle \sigma^i(t, Z_t), \lambda(t, Z_t) + v(t, Z_t) \right\rangle\right] dt + \left\langle \sigma^i(t, Z_t), dW_t^v \right\rangle$$

où $(W_t^v; 0 \leq t \leq T)$ est un $\mathbb{Q}_T^v$-mouvement Brownien.

Le processus Z peut alors être considéré comme un processus contrôlé par v dont le générateur infinitésimal est donné par :

$$\mathcal{L}^v = \sum_{i=1}^n b^{i,v}(t, z) \frac{\partial}{\partial z_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a^{i,j}(t, z) \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}$$

où :

$$\forall i = 1, ..., n \qquad b^{i,v}(t, z) = \mu^i(t, z) - \left\langle \sigma^i(t, z), \lambda(t, z) + v(t, z) \right\rangle$$

et a est la matrice carré $n \times n$ définie comme $a(t, z) = \sigma(t, z)(\sigma(t, z))^*$.

Critère et optimisation

Comme cela a été rappelé précédemment, la fonction de valeur du programme d'optimisation (6.2) peut s'écrire comme[6] :

$$V(0, \gamma) = \sup_v \left\{ x_0^{C,v} \right\}$$

[6]Nous nous plaçons ici dans le cas où la richesse initiale x est nulle. Cette hypothèse simplificatrice ne change rien aux résultats du fait de la linéarité de la fonction de valeur et permet d'obtenir une plus grande clarté dans les résultats.

avec, pour tout $t \in [0, T]$:

$$x_t^{C,v} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T^v}\left(C - \frac{1}{2\gamma}\int_t^T \|\lambda(s, Z_s) + v(s, Z_s)\|^2 ds\right)$$

En faisant un parallèle avec un problème de contrôle standard, le critère que nous considérons est simplement :

$$J^v(Z_t, t) = x_t^{C,v}$$

On peut lui associer l'E.D.P. suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}J^v(z,t) + \mathcal{L}^v J^v(z,t) - \frac{1}{2\gamma}\|\lambda(t,z) + v(t,z)\|^2 = 0 \\ J^v(z,T) = C(T,z) \end{cases}$$

où C est la cible définie précédemment. Il s'agit bien évidemment d'une fonction des différents facteurs.

En notant Du le gradient de u, i.e. :

$$Du(t,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1}u(t,z) \\ \ldots \\ \frac{\partial}{\partial z_n}u(t,z) \end{pmatrix}$$

une propriété importante est présentée dans le lemme suivant :

Lemma 25 *Le générateur infinitésimal du processus Z contrôlé par v peut s'écrire :*

$$\mathcal{L}^v u(t,z) = \mathcal{L}u(t,z) + f_\lambda\left((\sigma(t,z))^* Du(t,z), v(t,z)\right) + \frac{1}{2\gamma}\|\lambda(t,z) + v(t,z)\|^2$$

où $\mathcal{L}$ est le générateur infinitésimal associé à Z lorsque le contrôle est égal à 0 et f_λ est définie par l'équation (6.15), i.e. :

$$f_\lambda(\delta, v) = -\frac{1}{2\gamma}\|\lambda + v\|^2 - \langle \delta, \lambda + v\rangle$$

Preuve : d'après la définition du générateur $\mathcal{L}^v$ et la section précédente avec notamment l'équation (6.15), on a :

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^v u(t,z) - \frac{1}{2\gamma}\|\lambda(t,z) + v(t,z)\|^2 \\ = \ & \mathcal{L}u(t,z) - \frac{1}{2\gamma}\|\lambda(t,z) + v(t,z)\|^2 - \langle(\sigma(t,z))^* Du(t,z), \lambda(t,z) + v(t,z)\rangle \\ = \ & \mathcal{L}u(t,z) + f_t\left((\sigma(t,z))^* Du(t,z), v(t,z)\right) \end{aligned}$$

Le rôle joué par δ dans la partie sur les équations différentielles stochastiques rétrogrades est à présent tenu par $\sigma^* Du$. ■

Ainsi l'E.D.P. associée à $J^v(Z_t, t) = x_t^{C,v}$ debient simplement :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} J^v(z,t) + \mathcal{L}J^v(t,z) + f_\lambda\left((\sigma(t,z))^* DJ^v(t,z), v(t,z)\right) = 0 \\ J^v(z,T) = C(T,z) \end{cases}$$

Le Lemme 25 permet de souligner la réelle analogie existant entre ce qui a été fait précédemment et ce qui est fait ici.

Il faut ensuite optimiser par rapport au contrôle v sur l'ensemble admissible $\mho$, défini précédemment dans l'équation (6.13). Pour cela, on doit résoudre :

$$\sup_{v \in \mho} J^v(z,t)$$

On peut montrer qu'il existe une solution au problème de Hamilton-Jacobi-Bellman et le théorème de vérification conduit à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(z,t) + \sup_{v \in \mho} \left\{\mathcal{L}u(t,z) + f_\lambda\left((\sigma(z,t))^* Du(z,t), v(z,t)\right)\right\} = 0 \\ u(z,T) = C(T,z) \end{cases}$$

Comme précédemment, le contrôle optimal est simplement obtenu en prenant le maximum sur l'ensemble admissible de $\mathcal{L}u(t,z) + f_\lambda\left(\sigma(z,t)^* Du(z,t), v(z,t)\right)$soit $f_\lambda\left(\sigma(z,t)^* Du(z,t), v(z,t)\right)$. Utilisant les mêmes arguments que ceux de la preuve du Lemme 21, on obtient finalement :

$$\overline{v}(t,z) = -\left(\lambda(t,z) + \gamma(\sigma(t,z))^* Du(t,z)\right)^\perp \tag{6.21}$$

où $a^\perp$ désigne la projection du vecteur a sur l'espace orthogonal de l'espace vectoriel engendré par :

$$e(t,z) \triangleq \frac{\sigma^1(t,z)}{\|\sigma^1(t,z)\|}$$

Finalement, x_t^C est solution de viscosité de l'E.D.P. :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(z,t) + \left\{\mathcal{L}u(t,z) + f_\lambda\left((\sigma(t,z))^* Du(t,z), \overline{v}(t,z)\right)\right\} = 0 \\ u(z,T) = C(T,z) \end{cases} \tag{6.22}$$

où $\overline{v}$ est défini par l'équation (6.21).

Prix de l'actif contingent comme solution d'une E.D.P.

De la même façon que dans la section 6.3.2, en supposant que l'on sait identifier la mesure de porbabilité d'entropie minimale $\mathbb{Q}_T^{\overline{v}_0}$, le prix capitalisé de la cible C à toute date t, $0 \leq t \leq T$, noté $p_t\beta_{t,T}$, va être solution de viscosité de l'E.D.P. suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,z) + \mathcal{L}^{\overline{v}_0}u(t,z) + \frac{\gamma}{2}\|\overline{v}_C - \overline{v}_0\|^2 = 0 \\ u(z,T) = C \end{cases}$$

Pour cela, on a utilisé la Proposition 24 et les expressions optimales des contrôles données par l'équation (6.21).

Valeur forward du portefeuille de marché

Comme dans la section 6.3.2, la valeur forward du portefeuille de marché de l'agent lorsqu'il possède également une cible C, à tout instant $t \in [0;T]$, vérifie[7] :

$$\mathcal{W}_t^C = -V(0,C) + x_t^C - \frac{1}{\gamma}\ln H_t^{\overline{v}}$$

Nous pouvons remarquer que $\mathcal{W}^C$ n'est pas une fonction des facteurs. Par contre, les poids du portefeuille associés sont fonction de t et de z. D'après la Proposition 23, la valeur forward du portefeuille optimal en t peut s'écrire comme une intégrale stochastique par rapport au mouvement Brownien sous la mesure de probabilité foward-neutre. L'intégrand est en outre :

$$\left\{(\sigma(t,z))^* Du(t,z) + \frac{1}{\gamma}\lambda(t,z)\right\}^e$$

où u est solution de viscosité de l'E.D.P. (6.22). Celui-ci s'écrit aussi :

$$\left\{\sigma(t,z)^*\left[Du(t,z) + \frac{1}{\gamma}\left(\sigma(t,z)\sigma(t,z)^*\right)^{-1}(\mu(t,z) - r)\right]\right\}^e$$

Cela revient à ne considérer que la première coordonnée du vecteur :

$$\sigma(t,z)^*\left[Du(t,z) + \frac{1}{\gamma}\left(\sigma(t,z)\sigma(t,z)^*\right)^{-1}(\mu(t,z) - r)\right]$$

Il s'agit alors du poids à l'instant t de l'actif de marché (i.e. le premier facteur) dans le portefeuille.

[7] On suppose comme précédemment que la richesse initiale investie sur le marché est nulle. Ceci ne change rien aux résultats du fait de la linéarité de la fonction de valeur.

Remark 5 *Toute la particularité du problème étudié et toute son originalité sont visibles au travers de ce processus de valeur. En effet, de façon très intuitive, $\mathcal{W}_t^C$ peut être considéré comme réunissant deux approches : une approche de type "backward" pour caractériser le processus x_t^C et une approche de type "forward" pour déterminer $H_t^{\overline{v}}$.*

Pour revenir au problème spécifique étudié dans ce chapitre (et plus généralement dans la première partie de cette thèse), i.e. la résolution du programme d'optimisation (6.1), la complexité et la richesse de l'approche découlent des points suivants :
- Tout d'abord, un des paramètres intervenant dans la richesse initiale de deux programmes est inconnu. En effet, le paramètre π est à déterminer. Le fait que la contrainte de l'investisseur soit saturée à l'optimum permet alors d'obtenir une relation entre π et F, relation qui est la règle d'évaluation optimale de la structure F.
- Ensuite, la cible de deux programmes d'optimisation, faisant intervenir F, est également inconnue et doit être optimisée.

Par conséquent, trois problèmes de type "backward" sont à résoudre mais on doit revenir à des problèmes de type "forward" pour déterminer les conditions initiales et la cible.

La force de la dualité prend ici tout son sens. En effet, pour caractériser F^* et son prix π^*, il nous a suffi de considérer les différentes quantités étudiées à l'horizon T. Cette vision statique est équivalente à la vision dynamique. En effet, un portefeuille peut être caractérisé de deux façons distinctes : soit comme une intégrale stochastique en adoptant une vision dynamique, soit en fonction de sa valeur terminale et de l'espace auquel elle appartient, en adoptant une vision statique. Généralement, cette dernière approche conduit à une condition d'othogonalité par rapport à un vecteur donné, qui s'écrit en termes d'espérance.

Chapitre 7

Annexe de la première partie : Reinsuring climatic risk using optimally designed weather bonds

Dans ce chapitre, nous présentons la problématique de la structuration optimale d'un produit illiquide à travers l'étude plus précise d'un contrat particulier. Nous considérons ainsi la question de la structuration d'une obligation climatique. Ce chapitre reprend un article co-écrit avec Nicole El Karoui, ayant été accepté pour publication aux Geneva Papers-Risk and Insurance Theory. Aussi, nous avons souhaité le laisser sous sa forme originelle et, en particulier, ne pas le traduire en fraçais.

7.1 Introduction

Since 1997 the United States has witnessed the arrival of a new breed of financial assets : weather derivatives. They allow firms to manage the climatic risk which disturbs their activities and may notably entail a variability of earnings and costs.

These new but illiquid instruments have a structure which is relatively standard : they are options, swaps or bonds. They depend, however, on the evolution of very particular underlying assets since they are related to the weather (temperature, precipitation, wind...). These assets are not quoted on markets and are not replicable. Therefore, a standard risk-neutral point of view is not well-suited and the weather derivatives' market can be considered as "acomplete" in the sense that only derivatives are traded on it.

Another particularity of these products is the problem of their classification (see Géman [1999]) : weather derivatives are financial products by their structure but insurance products by their logic.

This difficulty of classification is a common factor to the whole A.R.T. ("Alternative Risk Transfer") business i.e. the securitization of insurance traditional risks : as Farny [1999] writes there is no clear and obvious distinction between insurance and finance when these new types of transaction are concerned. This ambiguity is especially clear for the weather bond : this is a standard bond apart from the fact that its coupons depend on the occurrence of a weather event. In that sense, this is a financial product. But, its origins - the firm's demand for a hedge against a climatic risk - or the diversification of the issuer's risk on small bondholders can make us think more of an insurance policy or of an agreement of mutual assistance (see Gallix [1985]).

This paper focuses on an accurate analysis of a weather bond i.e. on the joint determination of its coupon level and its price. This particular study helps us to better define the characteristics and stakes of this new market. Moreover, the problems relative to the weather bond's characterization are not obvious, as underlined by the two and only emission's attempts of autumn 1999, which have failed : Enron's emission was cancelled and that of Koch was reduced by half, for lack of buyers. These difficulties are all the more surprising so since cat bonds, whose logic is quite similar (i.e. securitization of a non-financial risk), are relatively successful.

Furthermore the aim of this article is neither to determine a dynamic for weather data nor to propose a prediction model. Indeed, many articles have been interested in these questions : especially, Dischel [1998], [1999], [2000*a*] and [2000*b*], Cao and Wei [2000] or Dornier and Queruel [2000] try to propose a statistical model for temperature.
Moreover, a joint analysis, coupon-price, of a (standard) bond appears to be original : indeed, bonds studied in the literature often are zero-coupon bonds (as Longstaff and Schwartz [1995] or Briys [1998*a*] and [1998*b*]) or their coupon allows their emission to be at par. Very recently, Sankaran [2000] has proposed a model for weather bond pricing. However, in this article, the coupon levels are taken *a priori* and the author focuses on the characterization of a model for the underlying temperature data. The bond price is given by the classical method of net present value. Even so the role of weather bond coupons is not simple : they take part in the structure of the global transaction and have, for that reason, their own purpose. Therefore, the characterization of the optimal bond structure, and not only the simple determination of its price, is the core matter of this study.

Hence, after having specified the notations and the assumptions used in this paper, we propose a modelling for the global transaction, involving the definition of a choice criterion for the different agents : the firm, the bank and the investor. Solving the optimization problem related to the global transaction leads us to the study of both the insurance relation between the firm and the bank and the bond issue. Looking at the origins of the bond emission helps us to better understand the specificities of the weather bond coupons. Finally, the optimal structure of the emission i.e. the bond price function and the optimal amount, which is paid back if an event occurs, are eventually determined.

7.2 General presentation, assumptions and notations

7.2.1 Description of the transaction

This paper focuses on the analysis of a weather bond. The principal is assumed to be non-risky whereas the payment of the coupons depends on the occurrence of a given weather event. More precisely, the amount of the coupon is reduced when an event occurs. In this case, the bondholders receive less than in the situation when nothing happens.

However, considering such a bond without taking into account the origins of its emission is a myopic attitude. Indeed, the characteristics of this bond (coupons, amount which is paid back when an event occurs, price) cannot be chosen arbitrarily. They have to fully play their risk diversification role for the issuer : everything starts when a firm is facing a climatic risk and calls on a bank to be hedged against the fateful effects of weather on its activities. For a premium, the latter commits itself to transferring compensation to the firm if loss obtains. Then, the bank issues a weather bond, so that it can diversify its new risk on small bondholders. For that reason, the whole story will be taken into account and the bond emission will be viewed as a part of a more general transaction.

As a summary, this transaction has the following structure :

- If no event occurs during the bond's life, the flows' structure is given by :

where *S.P.V.* denotes Special Purpose Vehicle. This is a legal entity, independent of the other activities of the bank.

- If, on the contrary, a weather event occurs (one possibility per year, non-exclusive), two additional flows appear :

Thus, this transaction involves three agents : a firm, a bank and an investor. Such a structure is quite classical when the securitisation of a non-financial risk is at stake. A direct relationship between the firm and the investor is usually unfeasible since the firm does not often have the same qualifications as the bank especially for risk tranfer.
This paper aims to characterize the structure of the weather bond. We particularly focus on its coupons. In fact, contrary to more standard bonds, the coupon plays a full role here. It has its own purpose : indeed, its function is to design not a "nice-looking" emission (for example, emission at par) but the global transaction structure. It plays a key role in the compensation program of the bank. Fixing its level arbitrarily may be very hazardous as it may be inadequate with respect to that of the compensation. The coupon level has to be determined so that the global transaction is not unfavourable to the bank.

Moreover, the presence of three actors (the firm, the bank and the investor) plays a key role in the characterization of the different parameters of the global transaction and especially of the bond emission, as we will see in the next sections.

7.2.2 Assumptions and notations

The time period considered in this article is n years corresponding to the bond maturity. Each year is indexed by i, $i \in \{0; 1; ...; n\}$ and $\beta_{i,n}$ represents the capitalization factor of year i to year n. Especially, we have

$$\beta_{n,n} = 1$$

In the following, we refer only to β_i as $\beta_{i,n}$ since all the flows are capitalized till year n, the bond maturity. Flows are not reinvested.

The risk inherent to the transaction, i.e. the occurrence of a weather event, is considered in this article as the only risk in the market. It is modelled as a family of random variables. We refer to ε_i as the random event of year i ($i \neq 0$). An event occurs if $\mathbf{1}_{\varepsilon_i} = 1$. In the following, ε_i designates indifferently both the random variable and its occurrence variable. This latter is a Bernoulli variable, as it can take only values in $\{0; 1\}$. We do not make any assumptions for the independence of the ε_i and for their respective parameter p_i under the statistical probability $\mathbb{P}$. In the following, $\mathbb{E}$ denotes the expected value with respect to $\mathbb{P}$. The aim of this paper is not an accurate study of weather data and their distribution. For that reason, p_i and the correlation between the different variables are assumed to be known and we do not focus on their calculation.

Three agents are considered in this study. They are linked together by the financial structure of future cash flows. Indeed, each of them has the following financial commitments :

A firm, denoted as agent F, is facing a weather risk. Its risk can be broken down into different losses shared out among several years. It is characterized by the random variable Θ, which may be defined, for instance, by

$$\Theta = M \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\varepsilon_i} \beta_i = M \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\varepsilon}_i \beta_i \tag{7.1}$$

where M is year i loss amount ($i \neq 0$), if an event ε_i occurs during this particular year. M is assumed to be constant. In this particular framework, Θ can only take a finite number of values (indeed, it can take 2^n possible different values). As it is not a determining factor in the results of this article, the general notation Θ will be kept as far as possible. The firm calls on *a bank, denoted as agent B*, to be hedged against this risk and pays an amount, π, in year 0, to be protected against the risk of loss. In exchange, it receives a compensation $J(\theta)$ if loss $\Theta = \theta$ obtains. As an insurance reimbursement is necessarily nonnegative and cannot exceed the size of the loss, the coverage function must satisfy the following constraint :

$$0 \leq J(\theta) \leq \theta \qquad \forall \theta \in \mathcal{D}(\Theta) \tag{7.2}$$

where $\mathcal{D}(\Theta)$ is the support of the law of Θ i.e. in the discrete case, the set of all possible values taken by Θ, with a positive probability. In the following, the definition set of $J(\Theta)$ is denoted as $\mathcal{D}(\Theta)$. Moreover, this constraint can also be written in terms of the random variable Θ as

$$0 \leq J(\Theta) \leq \Theta \qquad \mathbb{P}\ a.s.$$

Remark 6 (On the compensation function) *In this paper, the risk of loss is assumed to be perfectly covered by the compensation. Indeed, the same source of risk Θ intervenes in both the exposure of the firm and the compensation paid by the bank. Such an assumption*[1] *does not take into account any basis risk, which may remain even after an insurance coverage. This particular aspect will be precised later.*

Some authors have considered the impact of basis risk and moral hazard on the optimal insurance strategy (see, for instance, Doherty and Mahul [2001]).

Hence, the flows, related to the "insurance" part of the transaction and capitalized from the moment when they occur to year n, can be written for both agents F and B as follows

$$\text{For agent } F, \qquad -\pi\beta_0 - \Theta + J(\Theta) \tag{7.3}$$

$$\text{For agent } B, \qquad \pi\beta_0 - J(\Theta) \tag{7.4}$$

[1] *This remark is due to the constructive comments of an anonymous referee on this particular fact.*

By assumption, in this part of the transaction, agent B focuses only on its relation with the firm. It does not know how to manage its risk yet.

To diversify its risk, agent B decides to issue a weather bond. *The investor*, buying this bond, is denoted as *agent* I. It pays the bond price Φ to agent B in year 0. In exchange, it receives, each year i, a coupon s and, in year n, the principal N. Since the coupons are subject to weather risk, agent I has to pay back a constant amount α to agent B, when an event occurs. This amount is considered as an entity itself and do not relate it directly to the coupon s. This particular point will be discussed later.

Hence, the flows, related to the bond emission and capitalized from the moment when they take place to year n, can be written for both agents B and I as follows

$$\text{For agent } B,\ \ \pi\beta_0 - J(\Theta) + \Phi\beta_0 - s\sum_{i=1}^{n}\beta_i - N + \frac{\alpha}{M}\Theta \tag{7.5}$$

$$\text{For agent } I,\ \ -\Phi\beta_0 + s\sum_{i=1}^{n}\beta_i + N - \frac{\alpha}{M}\Theta \tag{7.6}$$

For the sake of simplicity, Λ will denote in the following the non-random flows (or the amount of cash[2]) received by the investor and capitalized to year n

$$\begin{aligned}&\text{For agent } B,\ \ \pi\beta_0 - J(\Theta) - \Lambda + \frac{\alpha}{M}\Theta\\ &\text{For agent } I,\ \ \Lambda - \frac{\alpha}{M}\Theta\end{aligned}$$

This notation is completely equivalent to the first one as only the expression $\Lambda = -\Phi\beta_0 + s\sum_{i=1}^{n}\beta_i + N$ intervenes in the representation of this part of the transaction. No particular role is played by s, N or Φ, taken separately. This point will be developed later.
In this second part of the transaction, agent B has a more global view : it takes into account both its relations with agent F and agent I.

7.3 Modelling the choice criterion for the characteristics of the global transaction

As underlined previously, the bond emission can be considered as an element of a more global transaction, analyzing and studying this transaction give us a key to better understand the bond emission and to value it. Moreover, this transaction involves three different agents, which play different

[2] Note that it may also be considered also as the sequence of flows related to an hypothetical non-risky bond with coupon s and principal N and whose price is given by Φ.

roles at different stages of the deal. However, as previously underlined, it can be divided into two smaller transactions : agent F is at the origins of the first one (and, for that reason, of the global one). It calls on agent B for a protection against a risk of loss. The second transaction is consecutive to the first one : indeed, agent B transfers the risk, it is now bearing, on agent I, by issuing a weather bond. Hence, the global problem of the characterization of the transaction is naturally set in two subproblems, each of them representing a smaller transaction.

Moreover, in this section, the multiplicity of roles playing by agent B is particularly taken into account. It has not only a classical function of a banker towards agent I but also an insurer's role towards agent F. This schizophrenia emphasizes one of the weather derivatives' features, as they lie midway between finance and insurance.

7.3.1 Risk aversion and utility criterion

All agents (B, F and I) are assumed to be risk-averse, even the bank. Such an assumption may be justified by the risk specificity. Since Θ is the only source of risk, which is taken into account in this study, it cannot be reduced by diversification. The attitude of the different agents towards risk is modelled via a utility function. Such a function is supposed to represent the level of satisfaction a given economic agent gets from a given situation. It depends on its risk-aversion. All agents are usually assumed to be rational, moreover they want to maximize the utility they can expect from a future (and uncertain) situation. A choice criterion for a given agent may be the maximization of its expected utility. Hence, in this rational framework, some conditions on utility functions are required : they have to be continuous, strictly increasing and concave.
For the sake of simplicity in this particular study, as no particular constraint is imposed on the different capitalized flows, utility functions of the agents B, F and I, denoted as U_B, U_F and U_I are assumed to be exponential utility functions, since they have the particularity to be defined on $\mathbb{R}$. Thus, for any real-valued random variable X, which can be seen as the final wealth of a given agent (B, F or I)

$$\begin{aligned} U_B(X) &= -\exp(-\gamma_B X) \\ U_F(X) &= -\exp(-\gamma_F X) \\ U_I(X) &= -\exp(-\gamma_I X) \end{aligned}$$

where γ_B (resp. γ_F and γ_I) represents the risk-aversion coefficient of agent B (resp. agent F and agent I). These three parameters have to be positive. Note that, in this study, agent B is assumed to have the same risk aversion coefficient for both parts of the transaction. Or, in other words, the bank has the same utility function for both sides of the transaction. It is considered as an entity and not as two

different parts, one per role. The study may be extended to the similar framework where the bank has a different risk aversion for its "insurer" role and its "issuer" one. Such a situation may illustrate the fact that two distinct departments of the bank could be involved in the global transaction.
These parameters represent the sensibility of the agents towards risk and they have an impact on the utility criterion itself. They also are the coefficient of absolute risk aversion (exponential utility functions belong to the family of Constant Absolute Risk Aversion, or CARA, utility functions). Moreover, the particular choice of exponential utilities enables to play with the criterion according to the values taken by risk-aversion coefficients. On one hand, it is well-known that, when the risk aversion coefficient is small enough, maximising the expected utility is equivalent to a mean-variance criterion (assuming that the considered risk has a bounded variance). On the other, when γ is large, $\mathbb{E}\left[-\exp\left(-\gamma X\right)\right]$ is all the more important so since X is not "too much" negative. The attitude of the agent is not symmetric between possible gains or losses. This attitude appears quite logical : the agent does not want to bear "too much" important losses.

In order to simplify this study, only the current transaction is taken into account. It is equivalent to set the initial endowments of the agents to zero. Moreover, the transaction costs are assumed to be null.
These assumptions may be dropped easily without modifying the global structure of the results. They enable us to derive simple expressions for the different parameters of the transaction.

7.3.2 Characterization of the optimal insurance contract

This subsection focuses on the problem of the relation between the firm, agent F, and the bank, agent B. It can easily be considered as an insurance relation as the firm calls on the bank to be hedged against the risk it faces. Indeed, to be protected, it pays a certain amount, π, and receives in exchange a compensation, $J\left(\theta\right)$, if loss $\Theta = \theta$ obtains. As to model this "insurance" relation between these agents, we use a classical insurance method, as that of Raviv [1979], which is described below :

Thus to model the relation between the bank and the firm, the standard assumptions of a passive insurer and of an insured maximising the expected utility of its final random wealth (Equation (7.3)) under certain constraints are made. Hence, the insured determines the structure of the policy, which is optimal for it, whereas the insurer can only accept or refuse this new contract.
Hence, agent B is assumed to be passive and agent F to have the following optimization program, using previous notations

$$\max_{\pi,J} \mathbb{E}\left[-\exp\left\{-\gamma_F\left(J\left(\Theta\right)-\Theta-\pi\beta_0\right)\right\}\right] \tag{$\mathcal{P}$}$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.} \qquad \mathbb{E}\left[-\exp\left\{-\gamma_B\left(\pi\beta_0 - J(\Theta)\right)\right\}\right] &\geq -1 \\
0 &\leq J(\Theta) \leq \Theta \qquad \mathbb{P}\ a.s.
\end{aligned}
$$

where -1 corresponds to agent B's utility level if it does nothing and s.t. denotes "subject to". In particular, the constraint relative to $J(.)$ has been previously motivated (See Constraint (7.2)).

Agent F uses the decision criterion we previously described, whereas agent B only compares its expected utility of the final random wealth for two different situations : "insuring" agent F or doing nothing (See Equation (7.4)).

The solving of such an optimization program will be the object of the next section.

Remark 7 (On the program $\mathcal{P}$) *The optimization program ($\mathcal{P}$) is standard in the insurance literature. Indeed, the first part of the transaction is a special case of Raviv's result, where there is no transaction cost and where utility functions are CARA. However, as the methodology will be useful to analyze the second part of the transaction, we present a full characterization of the optimal compensation.*

Remark 8 (On the basis risk) *The results of this paper may be extended to the situation where there is a basis risk between the (individual) risk borne by the firm and the (global) risk covered by the insurance contract sold by the bank. Thus, if $\widehat{\Theta}$ denotes the risk exposure of agent F and Θ the risk covered by the compensation paid by agent B, with $\widehat{\Theta} \neq \Theta$ $\mathbb{P}$ a.s., the optimization program becomes*

$$
\begin{aligned}
&\max_{\pi,J} \mathbb{E}\left[-\exp\left\{-\gamma_F\left(J(\Theta) - \widehat{\Theta} - \pi\beta_0\right)\right\}\right] \\
s.t. \qquad &\mathbb{E}\left[-\exp\left\{-\gamma_B\left(\pi\beta_0 - J(\Theta)\right)\right\}\right] \geq -1 \\
&0 \leq J(\Theta) \leq \Theta \qquad \mathbb{P}\ a.s.
\end{aligned}
$$

To come back to the framework of this paper, the "conditional certain equivalent" of the firm's exposure, with respect to the common risk Θ, is introduced

$$
X(\Theta) \triangleq \frac{1}{\gamma_F} \ln \mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma_F \widehat{\Theta}\right)/\Theta\right]
$$

Hence, solving the optimization program with a basis risk is equivalent to solve the optimization program ($\mathcal{P}$), replacing the exposure Θ of agent F by $X(\Theta)$.

7.3.3 Design of the optimal weather bond

The structure of the bond is determined by agent B so that it is optimal for it, with respect to the utility criterion described in the previous section. The optimization variables are directly related to the structure of the financial contract : the coupon s, the amount α which is paid back when an event occurs and the price Φ. However, agent B is constrained by the existence of a counterpart. It is indeed necessary for the existence of the transaction that agent I has some interest in buying the weather bond. Its level of interest is given by a utility criterion and the investor compares it with that of a risk-free investment. Agent I is said to be "passive" as it can only decide to do or not the transaction.

Hence, to model the relation between the bank and the investor, the bank, agent B, is assumed to maximize the expected utility of its random final wealth (related to the global transaction and given by Equation (7.5)) under certain constraints. On the other hand, the investor, agent I, only compares its expected utility of the final random wealth for two different situations : buying the bond from agent B or making a non-risky investment (see Equation (7.6)).

This optimization program takes into account the first part of the transaction, i.e. the compensation function $J(.)$ and the premium π. As both parts of the transaction are independent, conditionnally on agent B, the following optimization program is true for any couple $(J(.), \pi)$, and in particular for $(J^*(.), \pi^*)$. Hence, at the optimum, these quantities are logically the optimal ones.

$$\max_{\Phi,\alpha,s} \mathbb{E}\left[-\exp\left\{-\gamma_B\left(\pi\beta_0 - N - J(\Theta) + \Phi\beta_0 - s\sum_{i=1}^{n}\beta_i + \frac{\alpha}{M}\Theta\right)\right\}\right] \tag{$\overline{\mathcal{P}}$}$$

s.t.

$$\mathbb{E}\left[-\exp\left\{-\gamma_I\left(-\Phi\beta_0 + s\sum_{i=1}^{n}\beta_i + N - \frac{\alpha}{M}\Theta\right)\right\}\right] \geq -1$$

where -1 corresponds to agent I's utility level if it makes a non-risky investment and s.t. denotes "subject to".

Note that α and Λ form a system of parsimonious control variables. This second formulation of the optimization program will be favoured in the following in order to simplify the notations.

Note that the logic adopted for the financial investment in this article is not risk-neutral. Moreover, it is close to the framework of pricing via utility maximization as, for instance, in Hodges and Neuberger [1989] or in El Karoui and Rouge [2000]. Indeed, there is no underlying market where agents may build a replicating strategy for the bond. Moreover, the investor has a static point of view, it can only choose between the bond and cash. This logic is closer to that of insurance as the diversification potential of the bond for the investor's portfolio is not taken into consideration.

The solving of such an optimization program will be the object of the next section. However, note that, instead of solving the program $(\overline{\mathcal{P}})$ using standard variational control techniques, as in the following section, it is equivalent to directly introduce agent I's bound constraint into the minimization of agent B. This is possible as, given the constraint, a unique Λ is associated to any value of α. This method stresses the particular role played by both agents in the characterization of the bond : agent

I determines the structure of the price or of Λ whereas agent B features the whole structure of the bond optimally, but using the price function given by agent I.
Moreover, both π and the compensation function $J(.)$ play a very particular role in agent B's optimization program. Indeed, the bank determines the optimal structure of the bond, conditionally on the knowledge of $(\pi, J(.))$. Therefore, in the very particular framework of exponential utilities, $(\pi, J(.))$ may define a change of probability measures : the bank characterizes the optimal structure of the bond under a certain probability measure, which depends on both π and $J(.)$. This comment underlines some potential extension of this study to more general relations between the bank and the firm.

7.4 Solving the optimization problems

The solving of the optimization problem for the global transaction leads to the solving of two optimization subproblems, as described in the previous section. For that reason, the first step concerns the relation between the firm and the bank, whereas the second one deals with the bond issue, i.e. the relation between agent B and agent I.

7.4.1 Solving the problem of the relation between the firm and the bank

As written in the previous section, the optimization program related to the relation between agent F and agent B is given by

$$\min_{\pi, J} \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\gamma_F\left(J(\Theta) - \Theta - \pi\beta_0\right)\right\}\right] \tag{$\mathcal{P}$}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{s.t.} & \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\gamma_B\left(\pi\beta_0 - J(\Theta)\right)\right\}\right] & \leq & 1 \\ & 0 & \leq & J(\Theta) \leq \Theta \qquad \mathbb{P}\ a.s. \end{array}$$

This program depends on two different parameters : π represents the "price" of the insurance contract, and J the compensation function, which gives the amount which is paid back when an event occurs.

Solving of the optimization program $(\mathcal{P})$

To solve $(\mathcal{P})$, variational control techniques are used, by introducing a positive Lagrange multiplier coefficient λ, which will be chosen optimally later. The modified global utility of the program is denoted as $\widehat{U}$ and defined by

$$\widehat{U}(\Theta, J(\Theta), \pi) = -\exp\left[-\gamma_F\left(J(\Theta) - \Theta - \pi\beta_0\right)\right] - \lambda \exp\left[-\gamma_B\left(\pi\beta_0 - J(\Theta)\right)\right]$$

To solve $(\mathcal{P})$, we first solve $\left(\widehat{\mathcal{P}}\right)$ defined by

$$\max_{\pi,J} \mathbb{E}\left[\widehat{U}\left(\Theta, J\left(\Theta\right), \pi\right)\right] \tag{$\widehat{\mathcal{P}}$}$$

Then, so as to go back to $(\mathcal{P})$, the optimal value of the coefficient λ has to be determined, in such a way that the constraint is bound.

First-order conditions Solving $\left(\widehat{\mathcal{P}}\right)$, in the particular framework of exponential utilities, leads to the following first order conditions at the optimum $\left(J^*\left(.\right), \pi^*\right)$: $\forall \theta \in \mathcal{D}\left(\Theta\right)$,

- If $0 < J^*\left(\theta\right) < \theta$

$$\gamma_F \exp\left[-\gamma_F\left(J^*\left(\theta\right) - \theta - \pi^*\beta_0\right)\right] - \lambda\gamma_B \exp\left[-\gamma_B\left(\pi^*\beta_0 - J^*\left(\theta\right)\right)\right] = 0 \tag{7.7}$$

- If $J^*\left(\theta\right) = 0$

$$\gamma_F \exp\left[\gamma_F\left(\theta + \pi^*\beta_0\right)\right] - \lambda\gamma_B \exp\left[-\gamma_B\left(\pi^*\beta_0\right)\right] \leq 0 \tag{7.8}$$

- If $J^*\left(\theta\right) = \theta$

$$\gamma_F \exp\left[\gamma_F\left(\pi^*\beta_0\right)\right] - \lambda\gamma_B \exp\left[-\gamma_B\left(\pi^*\beta_0 - \theta\right)\right] \geq 0 \tag{7.9}$$

On the one hand, these conditions are obtained, for any $\theta \in \mathcal{D}\left(\Theta\right)$ fixed, by partially deriving $\widehat{U}$ with respect to $J\left(\theta\right)$ and taking its expected value at the optimum $\left(J^*\left(.\right), \pi^*\right)$. As it has to be equal to zero, some conditions on their sign appear according to the value of $J^*\left(\theta\right)$, for any $\theta \in \mathcal{D}\left(\Theta\right)$. On the other hand, the partial derivative of $\widehat{U}$ with respect to π is calculated and its expected value is taken at the optimum $\left(J^*\left(.\right), \pi^*\right)$. It also has to be equal to zero.

The determination of these conditions and their sufficiency, as classical results in convex optimization, are given in appendixes.

Determination of two thresholds The optimal level of compensation, $J^*\left(\theta\right)$, if risk of loss $\Theta = \theta$, $\theta \neq 0$, obtains, belong to the interval $[0, \theta]$, as Constraint (7.2) holds. In order to precise the structure of the compensation, it will be very useful to have some rules on θ giving whether $J^*\left(\theta\right) = 0$, $J^*\left(\theta\right) = \theta$ or $J^*\left(\theta\right) \in \left]0, \theta\right[$ (so that only one first-order condition would be valid).
For that reason, $\theta^-\left(\pi^*, \lambda\right)$ and $\theta^+\left(\pi^*, \lambda\right)$, two intrinsic thresholds, may be introduced. They respectively denote the policy deductible level and the policy upper limit for a complete compensation i.e.

- $\theta^{-}(\pi^{*},\lambda)$ is such that : if $J^{*}(\theta)=0$ then

$$\gamma_F \exp\left[\gamma_F\left(\theta+\pi^{*}\beta_0\right)\right]-\lambda\gamma_B \exp\left[-\gamma_B\left(\pi^{*}\beta_0\right)\right]$$

is negative only if $\theta \leq \theta^{-}(\pi^{*},\lambda)$.

- $\theta^{+}(\pi^{*},\lambda)$ is such that : if $J^{*}(\theta)=\theta$ then

$$\gamma_F \exp\left[\gamma_F\left(\pi^{*}\beta_0\right)\right]-\lambda\gamma_B \exp\left[-\gamma_B\left(\pi^{*}\beta_0-\theta\right)\right]$$

is positive only if $\theta \leq \theta^{+}(\pi^{*},\lambda)$.

These thresholds may be calculated explicitly

$$\begin{aligned}
\theta^{-}(\pi^{*},\lambda) &= -\frac{\gamma_B+\gamma_F}{\gamma_F}\pi^{*}\beta_0+\frac{1}{\gamma_F}\ln\left(\frac{\lambda\gamma_B}{\gamma_F}\right)\\
\theta^{+}(\pi^{*},\lambda) &= \frac{\gamma_B+\gamma_F}{\gamma_B}\pi^{*}\beta_0-\frac{1}{\gamma_B}\ln\left(\frac{\lambda\gamma_B}{\gamma_F}\right)
\end{aligned}$$

Hence, the following relation holds

$$\theta^{+}(\pi^{*},\lambda)=-\frac{\gamma_F}{\gamma_B}\theta^{-}(\pi^{*},\lambda)$$

and both thresholds have opposite signs. But $\mathcal{D}(\Theta)\subset\mathbb{R}_{+}$, both thresholds are positive. Hence

$$\theta^{-}(\pi^{*},\lambda)=\theta^{+}(\pi^{*},\lambda)=0 \tag{7.10}$$

Thus, the optimal level of compensation, $J^{*}(\theta)$, if risk of loss $\Theta=\theta$, $\theta\neq 0$, obtains, always lies in the interval $]0,\theta[$, for any $\theta\in\mathcal{D}(\Theta)$, $\theta\neq 0$. Hence, boundaries are never reached and the framework of this study is more simple.

Structure of the optimal compensation J^{*} and of the optimal premium π^{*}

Now, we are in a position to write a relation between J^{*}, π^{*} and the other parameters for any values $\theta\in\mathcal{D}(\Theta)$, $\theta\neq 0$. As $J^{*}(\theta)\in\,]0,\theta[$, the first-order condition (7.7) gives the following equation

$$\gamma_F \exp\left[-\gamma_F\left(J^{*}(\theta)-\theta-\pi^{*}\beta_0\right)\right]=\lambda\gamma_B \exp\left[-\gamma_B\left(\pi^{*}\beta_0-J^{*}(\theta)\right)\right]$$

and

$$J^{*}(\theta)=\frac{\gamma_F}{\gamma_B+\gamma_F}\theta+\pi^{*}\beta_0-\frac{1}{\gamma_B+\gamma_F}\ln\left(\frac{\lambda\gamma_B}{\gamma_F}\right) \tag{7.11}$$

Moreover, the equation (7.10) gives the following relationship between π^* and λ

$$\pi^*\beta_0 = \frac{1}{\gamma_B + \gamma_F} \ln \frac{\lambda\gamma_B}{\gamma_F}$$

Hence, the optimal compensation is given for any values $\theta \in \mathcal{D}(\Theta)$, $\theta \neq 0$, by

$$J^*(\theta) = \frac{\gamma_F}{\gamma_B + \gamma_F}\theta$$

But this result can be extended to $\theta = 0$ as $J^*(0) = 0$ by using constraint (7.2). Finally

$$J^*(\theta) = \frac{\gamma_F}{\gamma_B + \gamma_F}\theta \qquad \forall\theta \in \mathcal{D}(\Theta)$$

The optimal pricing rule for the insurance conttract is obtained by binding the constraint at the optimum. Hence

$$\pi^*\beta_0 = \frac{1}{\gamma_B} \ln \mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma_B J^*(\Theta)\right)\right]$$

These results may be summarised in the following proposition :

Proposition 26 *The optimal level of premium, π^*, is given by*

$$\pi^*\beta_0 = \frac{1}{\gamma_B} \ln \mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma_B J^*(\Theta)\right)\right] \tag{7.12}$$

And the optimal compensation, $J^*(\theta)$, when a risk of loss $\theta \in \mathcal{D}(\Theta)$ obtains, is given by

$$J^*(\theta) = \frac{\gamma_F}{\gamma_B + \gamma_F}\theta \qquad \forall\theta \in \mathcal{D}(\Theta) \tag{7.13}$$

The optimal structure of the compensation is coherent with the Borch's theorem (see for instance, Eeckhoudt and Gollier [1995]) concerning risk sharing and mutualisation. J^* is indeed proportional to the obtained loss. The proportional coefficient is the ratio of agent F's risk aversion coefficient with respect to the sum of both agent F's and agent B's coefficients. It may be seen as agent F's relative risk aversion : i.e. if both agents have the same attitude towards risk, they will perfectly share the obtained loss ; but the more risk averse agent F is, relatively to agent B, the larger is the compensation. This result does not depend on a particular *a priori* given form of the compensation. Indeed, it is optimal among all the possible compensation structures, not only among the proportional one.

Moreover, the optimal π^* is a non-linear function of the compensation. This non-linearity is one of the major aspects of the transaction, as we shall see in the section dedicated to the study of the bond emission.

Remark 9 (On the optimal compensation) *The shape of the optimal compensation does not include a deductible. It comes directly from the assumption of no transaction cost.*

7.4.2 Solving the problem of the relation between the bank and the investor

The optimization program related to the relation between agent B and agent I is given by

$$\min_{\Lambda,\alpha} \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\gamma_B\left(\pi\beta_0 - J(\Theta) - \Lambda + \frac{\alpha}{M}\Theta\right)\right\}\right] \tag{$\overline{\mathcal{P}}$}$$

$$\text{s.t.} \qquad \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\gamma_I\left(\Lambda - \frac{\alpha}{M}\Theta\right)\right\}\right] \leq 1$$

This program depends on two different parameters : $\Lambda = -\Phi\beta_0 + s\sum_{i=1}^{n}\beta_i + N$ represents the capitalized amount of cash which is received by the investor, and α the amount which is paid back when an event occurs.

As written in the previous section, the optimal structure of the bond is determined by agent B, which knows the price function determined by agent I. In other words, agent I determines the structure of Λ, whereas agent B focuses on the key variable α.

Optimal characterization of the weather bond

This finite dimensional problem is a special case of the previous problem. Using the previous results, we know that the optimal solution is proportional. Hence, looking for the optimal value of α (solution among the proportional functions) is equivalent to look for the general optimal solution. Moreover, this problem is much simpler than the previous one, as there is no constraint imposed on α. Consequently, solving the optimization program $(\overline{\mathcal{P}})$ is immediate and leads to the following proposition

Proposition 27 *The price function, Φ^*, of the weather bond is given by the following formula*

$$\Phi^*\beta_0 = s^*\sum_{i=1}^{n}\beta_i + N - \frac{1}{\gamma_I}\ln\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma_I\frac{\alpha^*}{M}\Theta\right)\right] \tag{7.14}$$

The optimal amount which is paid back when an event occurs is given by

$$\alpha^* = \frac{\gamma_B\gamma_F}{(\gamma_B+\gamma_F)(\gamma_B+\gamma_I)}M \tag{7.15}$$

This constraint leads to the characterization of a unique price function of the bond : agent I imposes a certain relationship between the variables s, Φ and α (or, using the simplifying notation, between Λ and α). The uniqueness of the price function comes from the fact that, for any α, it is possible to find a unique Λ, which binds agent I's constraint, as written below. Agent B takes this relationship into account to determine the optimal structure of the bond. In other words, agent I determines the structure of Λ, whereas agent B focuses on the key variable α, which conditions the risky part of the bond. For these reasons, we can interpret the bond emission as the signing of a "minimal" contract, i.e. the bond characteristics we obtain will be "minimum" in two ways as they represent both a threshold of interest for the investor and a threshold of hedging for the bank.

Some comments on the pricing rule The right-hand side of the pricing rule (7.14) represents the amount that agent I is willing to pay for the bond characterized by (s^*, α^*). The price function is non-linear, far from the standard logic of pricing involving expected value and linearity. Even if with exponential utility functions, initial endowments do not play any role in the results, here, there is a non-constant dependence on the risky flows of the bond, due to this non-linearity. Note that binding agent I's constraint is not trivial, since it has an impact on the whole structuration of the bond, by introducing this non-linear aspect in the price function.

Moreover, Φ^* is a very interesting price for a marketing point of view, as it is obviously lower than the historical price denoted as P and defined as the expected value of the sum of all discounted flows related to the bond with respect to the historical probability measure $\mathbb{P}$. Therefore, the investor has to pay less than the historical expected value of the discounted bond flows to buy the bond. Indeed, when comparing Φ^* and P, we obtain $\Phi^* < P$ as function exp is convex

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma_I \frac{\alpha^*}{M}\Theta\right)\right] &> \exp \mathbb{E}\left(\gamma_I \frac{\alpha^*}{M}\Theta\right) \\ \Phi^* \beta_0 &< s^* \sum_{i=1}^{n} \beta_i + N - \frac{\alpha^*}{M}\mathbb{E}\left(\Theta\right) = P\beta_0 \end{aligned}$$

Some comments on the bond structure The optimal amount which is paid back when an event occurs, α^*, is proportional. It is optimal among all possible functions and does not require any particular restriction on the optimisation set. Consequently, it does not depend on a particular *a priori* given structure of payments. On the other hand, note that the coupon level s^* of the bond appears clearly as a marketing tool to appeal the investor. Indeed, the price function Φ^* of the bond depends linearly on the coupon level. The spread between α^*, the amount which is paid back when an event occurs, and s^* is simply transferred to the bond price. There is no unique determination of the optimal coupon level s^*. The transfer problem between Φ^* and s^* leads to a situation where there is an infinity of solutions. The optimum is defined by (Φ^*, s, α^*) where Φ^* and α^* are optimally chosen. Then, the "optimal" value of s is determined by the investor according to the structure of its current portfolio, and the diversification dimension of the weather bond for the investor can be finally taken into account. Hence, considering only the global variable Λ is completely equivalent to considering both s and Φ.

This proposition shows an important result for the structuration of the bond : not only the pricing of the product but also its characteristics and stakes are determined here. In this framework, α^* play a huge role as being the keystone of the bond structure.

Remark 10 *Replacing α^* by its value, the price function, Φ^*, of the weather bond may be now written as*

$$\Phi^* \beta_0 = s^* \sum_{i=1}^{n} \beta_i + N - \frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E}\left[\exp\left(\Gamma \Theta\right)\right]$$

where

$$\Gamma = \frac{\gamma_B \gamma_F \gamma_I}{\left(\gamma_B + \gamma_F\right)\left(\gamma_B + \gamma_I\right)}$$

is a function of all the agents' risk aversion coefficient.
In the particular case when all agents are not very risk averse (Γ small enough), we obtain, with a Taylor expansion with order 2 in the neighbourhood of 0

$$\begin{aligned}\Phi^* \beta_0 \sim\ & s^* \sum_{i=1}^{n} \beta_i + N - \frac{\gamma_B \gamma_F}{\left(\gamma_B + \gamma_F\right)\left(\gamma_B + \gamma_I\right)} \mathbb{E}\left(\Theta\right) \\ & - \frac{1}{2} \gamma_I \left(\frac{\gamma_B \gamma_F}{\left(\gamma_B + \gamma_F\right)\left(\gamma_B + \gamma_I\right)}\right)^2 \mathbb{E}\left(\Theta^2\right)\end{aligned}$$

It can be seen as the sum of the historical expected value of the discounted bond's flows and a "premium" term which is all the more negative so since agent I is risk averse. We find again the noteworthy property $\Phi^* < P$.

Different interpretations of the bond structure The degree of freedom in the choice of s^* leads to different possible interpretation of the bond structure, which can be used as different marketing strategies to appeal the investor.

- First, if s^* is taken greater than α^*- this is probably the most natural situation, when the amount α^* which is paid back if an event occurs, is smaller than the coupon s^*-, the product has a real bond structure : all the net cash flows related to the bond are positive for agent I (apart from the price, of course).

- Secondly, if s^* is taken so that the bond is issued at par, i.e. $\Phi^* = N$, the structure of the bond is very classical and s^* is given by

$$s^* \sum_{i=1}^{n} \beta_i = N\left(\beta_0 - 1\right) + \frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E}\left[\exp\left(\Gamma \Theta\right)\right]$$

In the particular case when all agents are not very risk averse (Γ small enough), we obtain, with a Taylor expansion with order 2 in the neighbourhood of 0

$$s^* \sim \frac{\frac{\alpha^*}{M}\mathbb{E}(\Theta) - \frac{1}{2}\gamma_I \left(\frac{\alpha^*}{M}\right)^2 \mathbb{E}\left(\Theta^2\right) + N(\beta_0 - 1)}{\sum_{i=1}^{n} \beta_i}$$

where α^* is given by equation (7.15).

- Finally, if $\Phi^*\beta_0 = N$, the bond is reduced to a yearly exchange of flows, conditionally on the occurrence of an event. Hence, each year, agent I will systematically receive s^* whereas she will pay α^* to agent B if and only if an event occurs. This is quite similar to a swap structure. Moreover, note that s^* is given by

$$s^* \sum_{i=1}^{n} \beta_i = \frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E}\left[\exp\left(\Gamma\Theta\right)\right]$$

In the particular case when all agents are not very risk averse (Γ small enough), we obtain, with a Taylor expansion with order 2 in the neighbourhood of 0

$$s^* \sim \frac{\frac{\alpha^*}{M}\mathbb{E}(\Theta) - \frac{1}{2}\gamma_I \left(\frac{\alpha^*}{M}\right)^2 \mathbb{E}\left(\Theta^2\right)}{\sum_{i=1}^{n} \beta_i}$$

where α^* is given by equation (7.15).

Note that the interpretation in terms of a swap is also valid for any price Φ^*. Indeed, as

$$\Phi^*\beta_0 - N = s^* \sum_{i=1}^{n} \beta_i - \frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma_I \frac{\alpha^*}{M}\Theta\right)\right]$$

The first term can be seen as a front fee whereas the second represents the swapped flows. The front fee enables the swap initial value to be set to 0.

Risk valuation of both agents : an entropy approach

The pricing rule of the weather bond (7.14) has a non-linear component with respect to the risk Θ

$$-\frac{1}{\gamma_I} \ln \mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma_I \frac{\alpha^*}{M}\Theta\right)\right]$$

Thanks to the entropy[3] approach, another interpretation may be obtained for this quantity. Indeed, considering a new probability measure $\mathbb{Q}$, absolutely continuous with respect to $\mathbb{P}$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\gamma_I}\ln\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma_I\frac{\alpha^*}{M}\Theta\right)\right] &= -\frac{1}{\gamma_I}\ln\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{\exp\left(\gamma_I\frac{\alpha^*}{M}\Theta\right)}{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}}\right) \\ &\geq -\frac{1}{\gamma_I}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\gamma_I\frac{\alpha^*}{M}\Theta-\ln\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right) = -\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{\alpha^*}{M}\Theta\right) + \underbrace{\frac{1}{\gamma_I}\mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\ln\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\right]}_{\frac{1}{\gamma_I}h(\mathbb{Q}/\mathbb{P})} \end{aligned}$$

Moreover, as Θ is bounded[4], a probability measure, $\mathbb{Q}_I$, may be defined as

$$\frac{d\mathbb{Q}_I}{d\mathbb{P}} = \frac{\exp\left(\gamma_I\frac{\alpha^*}{M}\Theta\right)}{\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma_I\frac{\alpha^*}{M}\Theta\right)\right]}$$

It is optimal for agent I using the entropic criterion in the sense that

$$-\frac{1}{\gamma_I}\ln\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma_I\frac{\alpha^*}{M}\Theta\right)\right] = -\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_I}\left(\frac{\alpha^*}{M}\Theta\right) + \frac{1}{\gamma_I}\mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}_I}{d\mathbb{P}}\ln\left(\frac{d\mathbb{Q}_I}{d\mathbb{P}}\right)\right]$$

$\mathbb{Q}_I$ is different from a risk-neutral measure. It does not play any role in the valuation of the bond's parameters. But it is an interpretation tool for the assessment of risk by agent I, as its density depends on the risk aversion coefficient of the investor and on the random part of its capitalized flows.

Using the same arguments, it is possible to valuate the Θ-exposure of agent B

$$-\frac{1}{\gamma_B}\ln\mathbb{E}\left[\exp\left(-\gamma_B\left(-J^*(\Theta)+\frac{\alpha^*}{M}\Theta\right)\right)\right]$$

Thus, the probability measure $\mathbb{Q}_B$, defined by the following Radon-Nykodym density

$$\frac{d\mathbb{Q}_B}{d\mathbb{P}} = \frac{\exp\left[-\gamma_B\left(-J^*(\Theta)+\frac{\alpha^*}{M}\Theta\right)\right]}{\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\gamma_B\left(-J^*(\Theta)+\frac{\alpha^*}{M}\Theta\right)\right\}\right]}$$

[3] If the probability measure υ is absolutely continuous with respect to $\mathbb{P}$,

$$h(\upsilon/\mathbb{P}) = \mathbb{E}\left[\frac{d\upsilon}{d\mathbb{P}}\ln\left(\frac{d\upsilon}{d\mathbb{P}}\right)\right]$$

is the relative entropy of υ with respect to $\mathbb{P}$, otherwise

$$h(\upsilon/\mathbb{P}) = +\infty$$

[4] Note that this assumption may be weakened and replaced by an integrability criterion on $\exp\left(\gamma_I\frac{\alpha^*}{M}\Theta\right)$.

may be introduced. $\mathbb{Q}_B$ also corresponds to the probability which minimizes the relative entropy

$$-\frac{1}{\gamma_B}\ln \mathbb{E}\left[\exp\left(-\gamma_B\left(-J^*(\Theta)+\frac{\alpha^*}{M}\Theta\right)\right)\right] = -\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_B}\left(-J^*(\Theta)+\frac{\alpha^*}{M}\Theta\right)+\frac{1}{\gamma_B}\mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}_B}{d\mathbb{P}}\ln\left(\frac{d\mathbb{Q}_B}{d\mathbb{P}}\right)\right]$$

Moreover, by simply replacing α^* and J^* by their respective value given by (7.15) and (7.13), we directly obtain

$$\frac{d\mathbb{Q}_B}{d\mathbb{P}} = \frac{d\mathbb{Q}_I}{d\mathbb{P}}$$

and the following result

Proposition 28 *When doing the weather bond transaction, both agents have the same view on the risk Θ since*

$$\mathbb{Q}_B = \mathbb{Q}_I \tag{7.16}$$

Hence, their valuation of risk is composed of two terms, which are identical for both of them : the first one correspond to a risk-neutral price whereas the second one is a penalisation. The difference between both agents' valuation simply lies in the weighting of the penalisation since this weight depends on their risk aversion coefficient.

7.4.3 Some additional comments

Some remarks on the bank portfolio

As described in the general introduction and in the different sections of this paper, the flows, related to the transaction and capitalized from the moment when they take place to year n, can be written for agent B as follows

$$\mathbf{V}_B = \pi^*\beta_0 - J^*(\Theta) + \Phi^*\beta_0 - s\sum_{i=1}^{n}\beta_i - N + \frac{\alpha^*}{M}\Theta$$

Replacing the different parameters by the optimal values, obtained when solving the different optimization programs involving the three agents, the random value of the bank portfolio, denoted as $\mathbf{V}_B$, is given, at the end of the considered period, by the $\mathbb{P}$ *a.s.* following equation

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_B &= \frac{\gamma_F\gamma_I}{(\gamma_B+\gamma_F)(\gamma_B+\gamma_I)}\Theta \\ &\quad +\frac{1}{\gamma_B}\ln\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\gamma_B\gamma_F}{\gamma_B+\gamma_F}\Theta\right)\right]-\frac{1}{\gamma_I}\ln\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\gamma_I\gamma_B\gamma_F}{(\gamma_B+\gamma_F)(\gamma_B+\gamma_I)}\Theta\right)\right]\end{aligned} \tag{7.17}$$

Agent B is not completely hedged against the risk Θ and against the risky flows of the compensation it will have to pay when an event occurs. In this sense, the bank has some speculative behaviour.

Its remaining exposition is proportional to the "relative" risk aversion of both agent I and agent F : i.e. respectively $\frac{\gamma_I}{(\gamma_B+\gamma_I)}$ and $\frac{\gamma_F}{(\gamma_B+\gamma_F)}$. The amounts agent B has received for both risky parts of the transaction correspond to the second line of the formula. Both of them are non-linear functions of Θ. In the particular case when all agents are not very risk averse (their respective risk-aversion coefficients are small enough), we obtain, with a Taylor expansion with order 1 in the neighbourhood of 0 ($\mathbb{P}$ $a.s.$ relation)

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_B \quad\sim\quad & \frac{\gamma_F\gamma_I}{(\gamma_B+\gamma_F)(\gamma_B+\gamma_I)}\Theta \\ & +\frac{\gamma_F}{\gamma_B+\gamma_F}\mathbb{E}(\Theta)-\frac{\gamma_B\gamma_F}{(\gamma_B+\gamma_F)(\gamma_B+\gamma_I)}\mathbb{E}(\Theta)\end{aligned}$$

or

$$\mathbf{V}_B \sim \frac{\gamma_F\gamma_I}{(\gamma_B+\gamma_F)(\gamma_B+\gamma_I)}(\Theta-\mathbb{E}(\Theta))$$

At the first order, the exposition of the bank is limited to the variations of Θ around its historical expected value. A Taylor expansion with order 2 in the neighbourhood of 0 adds a negative term which depends on the variance of Θ ($\mathbb{P}$ $a.s.$ relation)

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_B \quad\sim\quad & \frac{\gamma_F\gamma_I}{(\gamma_B+\gamma_F)(\gamma_B+\gamma_I)}(\Theta-\mathbb{E}(\Theta)) \\ & -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\gamma_F}{(\gamma_B+\gamma_F)(\gamma_B+\gamma_I)}\right)^2\left[\gamma_B^3+\gamma_I^2\gamma_B+3\gamma_I\gamma_B^2\right]\right]\mathbb{E}\left(\Theta^2\right)\end{aligned}$$

Some remarks on the aversion coefficients

An asymptotic study of the results An asymptotic study, when one of the aversion coefficient tends to the infinity or to zero, of the main results of this paper leads to some natural intepretation :

Asymptotics when γ is infinite

- If γ_B tends to the infinity (i.e. the bank is infinitely risk-averse)

$$\begin{aligned} J^*(\Theta) &\longrightarrow 0 \qquad\qquad \mathbb{P}\ a.s. \\ \pi^* &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

There is no transaction between the bank and the firm. The bank does not want to hedge the firm's risk. In that case, no weather bond can be issued.

- If γ_F tends to the infinity (i.e. the firm is infinitely risk-averse)

$$\begin{array}{lll} J^*(\Theta) & \longrightarrow & \Theta \qquad \mathbb{P}\ a.s. \\ \pi^* & \longrightarrow & \frac{1}{\beta_0\gamma_B}\ln\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma_B\Theta\right)\right] \end{array}$$

The firm wants to be covered totally. In this particular case, a weather bond may be issued with the following characteristics

$$\begin{array}{lll} \alpha^* & \longrightarrow & \frac{\gamma_B}{\gamma_B+\gamma_I}M \\ \Phi^*\beta_0 & \longrightarrow & s\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i + N - \frac{1}{\gamma_I}\ln\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\gamma_B\gamma_I}{\gamma_B+\gamma_I}\Theta\right)\right] \end{array}$$

The structure is comparable with that of an insurance relation between the bank and the investor on the risk Θ.

- If γ_I tends to the infinity (i.e. the investor is infinitely risk-averse).

$$\alpha^* \longrightarrow 0$$

No weather bond can be issued.

Asymptotics when γ is null

- If γ_B tends to 0 (i.e. the bank is risk-neutral in the utility sense)

$$J^*(\Theta) \longrightarrow \Theta \qquad \mathbb{P}\ a.s.$$

The bank accepts to cover the whole risk Θ. No weather bond can be issued as it keeps the risk in its portfolio

$$\alpha^* \longrightarrow 0$$

- If γ_F tends to 0 (i.e. the firm is risk-neutral in the utility sense)

$$J^*(\Theta) \longrightarrow 0 \qquad \mathbb{P}\ a.s.$$

The firm does not want to hedge its risk Θ. No transaction will take place.

- If γ_I tends to zero (i.e. the investor is risk-neutral in the utility sense). A weather bond may be issued with the following characteristics

$$\alpha^* \longrightarrow \frac{\gamma_F}{\gamma_B+\gamma_F}M$$

and the non-linear "price of risk"

$$-\frac{1}{\gamma_I}\ln\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma_I\frac{\alpha^*}{M}\Theta\right)\right]\longrightarrow 0$$

Behaviour of the non-linear "price of risk" related to the weather bond A simple study of the monotonicity of the non-linear "price of risk", i.e.

$$\begin{aligned}PR\left(\gamma_B,\gamma_F,\gamma_I\right) &\triangleq -\frac{1}{\gamma_I}\ln\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma_I\frac{\alpha^*}{M}\Theta\right)\right]\\ &= -\frac{1}{\gamma_I}\ln\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\gamma_I\gamma_B\gamma_F}{\left(\gamma_B+\gamma_F\right)\left(\gamma_B+\gamma_I\right)}\Theta\right)\right]\end{aligned}$$

with respect to the different risk aversion coefficients leads to the following conclusions

- *With respect to* γ_B *:*

$\alpha^*$is a strictly increasing function of γ_B till the level $\sqrt{\gamma_I\gamma_F}$ and a strictly decreasing function of γ_B after this threshold. Consequently, as PR is a decreasing function of α^* (in our framework where Θ takes only positive values), PR is a decreasing function of γ_B till the level $\sqrt{\gamma_I\gamma_F}$ and an increasing function of γ_B after this threshold.

- *With respect to* γ_F *:*

$\alpha^*$is a strictly decreasing function of γ_F till the level γ_B-1 and a strictly increasing function of γ_F after this threshold. Consequently, as PR is a decreasing function of α^*, PR is an increasing function of γ_F till the level γ_B-1 and a decreasing function of γ_F after this threshold.

- *With respect to* γ_I *:*

According to the previous interpretation of the probability measure $\mathbb{Q}_I$ as the minimal relative entropy measure, the non-linear "price of risk" may be written as

$$PR\left(\gamma_B,\gamma_F,\gamma_I\right)=\sup_{\mathbb{Q}\ll\mathbb{P}}\left\{-\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{\gamma_B\gamma_F}{\left(\gamma_B+\gamma_F\right)\left(\gamma_B+\gamma_I\right)}\Theta\right)+\frac{1}{\gamma_I}h\left(\mathbb{Q}/\mathbb{P}\right)\right\}$$

However, the relative entropy of any absolutely continuous measure $\mathbb{Q}$ with respect to $\mathbb{P}$ is always negative and as Θ takes only positive values, the expected value is positive. Morevoer, as $\frac{\alpha^*}{\gamma_I}$ is a strictly decreasing function of γ_I, this expected value is a decreasing function of γ_I. Hence, PR is an increasing function of γ_I.

A VaR interpretation of the aversion coefficients A standard question when using utility functions is that of quantifying the different risk aversion coefficients. Several criteria may be used to characterise these parameters. Among them, the VaR criterion (Value at Risk) could help the bank (for example) to choose its aversion coefficient γ_B.

The VaR criterion is simply defined as the maximum amount $-A$ $(A < 0)$ an agent is ready to lose for a given probability level δ. This limit is imposed on the terminal value $\mathbf{V}$ of her portfolio

$$\mathbb{P}(\mathbf{V} < A) \leq \delta \qquad \text{or} \quad \mathbb{P}(-\mathbf{V} \geq -A) \leq \delta$$

For a given portfolio, A is a function of δ, corresponding to the δ-quantile, also called VaR.

In the particular framework of this study, assuming that the bank imposes a VaR criterion on the terminal value of its portfolio, $\mathbf{V}_B$, and given its risk aversion coefficient γ_B, it is possible to link together the VaR and the δ-quantile of the Θ-distribution.
Indeed, using the expression of $\mathbf{V}_B$ obtained in (7.17), which may simply be rewritten as

$$\mathbf{V}_B = \varphi(\gamma_B)\,\Theta + \psi(\gamma_B)$$

where φ and ψ are two deterministic functions of γ_B, we obtain

$$\mathbb{P}(\mathbf{V}_B < A) = \mathbb{P}\left(\Theta < \frac{A - \psi(\gamma_B)}{\varphi(\gamma_B)}\right) \leq \delta$$

Hence, knowing the distribution function of Θ leads to the characterisation of γ_B using the δ-quantile, q_δ^Θ, since

$$\frac{A - \psi(\gamma_B)}{\varphi(\gamma_B)} \simeq q_\delta^\Theta \qquad \text{(with } = \text{ if the } \Theta\text{-distribution is continuous)}$$

Note that q_δ^Θ only depends on the Θ-distribution and on δ. In particular, γ_B does not influence this quantile.

Consequently, if the bank has an idea of its VaR, then it can determine a suitable value for its risk aversion parameter γ_B.

7.5 Concluding remarks

The main contribution of our study is to provide a way of completely characterizing a bond whose coupons depend on the occurrence of a weather event. One particularity of our analysis is to explore this transaction as a whole : from the firm which needs a hedge against weather risk to small bondholders. In this framework, given some basic assumptions about the involved agents, we are able to derive simultaneously both the bond price and the amount which is paid back when an event occurs, in a simple fashion. On the other hand, we adopt a static point of view, far from the standard risk-neutral logic, as there is no underlying market. The pricing of the product is not as important as its structuration. Thus, this study can be extended to more general structured transactions involving several agents and can go far beyond the simple frame of weather derivatives. For example, it can also be useful for bonds and even swaps, whose payments depend on the occurrence of a particular event (weather, catastrophe, credit), as no particular assumptions are required in this article regarding the considered events ε_i.

The study developed in this paper is robust to changes in many assumptions. Examples of possible generalisations which do not alter the basic arguments are allowing weather events to be correlated, permitting the potential loss amount M to be random, introducing transaction costs for agent B, or initial endowments and portfolios for the different agents, especially for the investor, so that the diversification potential of the weather bond be fully taken into account.

One assumption to which the results may be sensitive is the basic supposition that agents have exponential utilities. This enables us to derive nice expressions for the different parameters of the transaction. However, the extend to which the use of different utility functions, especially power utilities, may modify the results, is actually the subject of further investigation.
Moreover, as discussed before, the methodology we develop in this paper may certainly be useful for the analysis of different types of structured transaction. In particular, allowing the bank to have a strategic behaviour by taking into account its hedging strategy when insuring the firm, or more generally, allowing agents to have more interaction between them, may be an interesting generalisation of this model. This is also a field of research we currently explore.

7.6 Appendixes : Proof of Proposition 7.1

7.6.1 Optimality in J

Let ε be a real number in $[0,1]$. From now on, we denote as J^* the optimal compensation, as π^* the optimal premium and as J any function satisfying the constraint

$$0 \leq J(\theta) \leq \theta \qquad \forall \theta \in \mathcal{D}(\Theta)$$

Then, if for any $\theta \in \mathcal{D}(\Theta)$, we define

$$J^{\varepsilon}(\theta) = (1-\varepsilon) J^*(\theta) + \varepsilon J(\theta) = J^*(\theta) + \varepsilon (J(\theta) - J^*(\theta))$$

If

$$\widehat{U}(\Theta, J^*(\Theta), \pi^*) = -\exp[-\gamma_F (J^*(\Theta) - \Theta - \pi^*\beta_0)] - \lambda \exp[-\gamma_B (\pi^*\beta_0 - J^*(\Theta))]$$

We have

$$\mathbb{E}\left[\widehat{U}(\Theta, J^*(\Theta), \pi^*)\right] \geq \mathbb{E}\left[\widehat{U}(\Theta, J^{\varepsilon}(\Theta), \pi^*)\right]$$

or, using the concavity of $\widehat{U}$

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial \widehat{U}}{\partial J}(J^*(\Theta)) \times (J(\Theta) - J^*(\Theta))\right] \leq 0$$

with

$$\frac{\partial \widehat{U}}{\partial J}(J^*(\Theta)) = \gamma_F \exp[-\gamma_F (J^*(\Theta) - \Theta - \pi^*\beta_0)] - \lambda \gamma_B \exp[-\gamma_B (\pi^*\beta_0 - J^*(\Theta))]$$

Hence

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{(0<J^*(\Theta)<\Theta)} \frac{\partial \widehat{U}}{\partial J}(J^*(\Theta)) \times (J(\Theta) - J^*(\Theta))\right] \\
& + \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{(J^*(\Theta) \,=\, 0)} \frac{\partial \widehat{U}}{\partial J}(J^*(\Theta)) \times J(\Theta)\right] \\
& + \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{(J^*(\Theta) \,=\, \Theta)} \frac{\partial \widehat{U}}{\partial J}(J^*(\Theta)) \times (J(\Theta) - \Theta)\right] \\
\leq \;& 0
\end{aligned}$$

Consequently, we need to study the sign of $\frac{\partial \widehat{U}}{\partial J}(J^*(\Theta))$ on three disjoint sets :

- On the set $\{0 < J^*(\Theta) < \Theta\}$, we can choose enough functions J to make the sign of $J(\Theta) - J^*(\Theta)$ vary as much as we wish. We can also choose J so that, on the boundaries, when $J^*(\Theta) = 0$,

$\mathbb{P}$ $a.s.$, $J(\Theta) = 0$, $\mathbb{P}$ $a.s.$ and when $J^*(\Theta) = \Theta$, $\mathbb{P}$ $a.s.$, $J(\Theta) = \Theta$, $\mathbb{P}$ $a.s.$. Thus we deduce that, on this set, the derivative is null on average and this can be satisfied only if

$$\frac{\partial \widehat{U}}{\partial J}(J^*(\Theta)) = 0 \qquad \mathbb{P} \ a.s.$$

- On the set $\{J^*(\Theta) = 0\}$, as $J(\Theta)$ is positive $\mathbb{P}$ $a.s.$ by assumption, we deduce that, on this set, the derivative is negative on average and this can be satisfied only if

$$\frac{\partial \widehat{U}}{\partial J}(J^*(\Theta)) \leq 0 \qquad \mathbb{P} \ a.s.$$

- Finally, on the set $\{J^*(\Theta) = \Theta\}$, as $(J(\Theta) - \Theta)$ is negative $\mathbb{P}$ $a.s.$ by assumption, we deduce that, on this set, the derivative is positive on average and this can be satisfied only if

$$\frac{\partial \widehat{U}}{\partial J}(J^*(\Theta)) \geq 0 \qquad \mathbb{P} \ a.s.$$

7.6.2 Optimality in π

Let ε a real number in $[0,1]$. From now on, we denote as π^* the optimal premium, as J^* the optimal compensation and as π any other function.

Then, if for any $\theta \in \mathcal{D}(\Theta)$, we define

$$\pi^\varepsilon = (1-\varepsilon) \times \pi^* + \varepsilon \times \pi = \pi^* + \varepsilon(\pi - \pi^*)$$

we have

$$\mathbb{E}\left[\widehat{U}(\Theta, J^*(\Theta), \pi^*)\right] \geq \mathbb{E}\left[\widehat{U}(\Theta, J^*(\Theta), \pi^\varepsilon)\right]$$

or

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial \widehat{U}}{\partial \pi}(\pi^*) \times (\pi - \pi^*)\right] \leq 0$$

with

$$\frac{\partial \widehat{U}}{\partial \pi}(\pi^*) = \gamma_F \beta_0 \exp\left[-\gamma_F\left(J^*(\Theta) - \Theta - \pi^* \beta_0\right)\right] - \lambda \gamma_B \beta_0 \exp\left[-\gamma_B\left(\pi^* \beta_0 - J^*(\Theta)\right)\right]$$

Thus we can choose enough functions π to make the sign of $\pi - \pi^*$ vary. So, we deduce that the derivative is null on average

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial \widehat{U}}{\partial \pi}(\pi^*)\right] = 0$$

7.6.3 Particular case of exponential utilities

In the particular framework of this article, i.e. exponential utilities, the conditions, previously obtained, can be written as :

- *The first order conditions* are :

If $0 < J^*(\Theta) < \Theta$, $\mathbb{P}$ *a.s.*, then

$$\gamma_F \exp\left[-\gamma_F\left(J^*(\Theta) - \Theta - \pi^*\beta_0\right)\right] - \lambda\gamma_B \exp\left[-\gamma_B\left(\pi^*\beta_0 - J^*(\Theta)\right)\right] = 0 \quad \mathbb{P}\ a.s.$$

and

$$\mathbb{E}\begin{bmatrix} \gamma_F \exp\left[-\gamma_F\left(J^*(\Theta) - \Theta - \pi^*\beta_0\right)\right] \\ -\lambda\gamma_B \exp\left[-\gamma_B\left(\pi^*\beta_0 - J^*(\Theta)\right)\right] \end{bmatrix} = 0$$

- *The boundary conditions* are :

If $J^*(\Theta) = 0$, $\mathbb{P}$ *a.s.*, then

$$\gamma_F \exp\left[\gamma_F\left(\Theta + \pi^*\beta_0\right)\right] - \lambda\gamma_B \exp\left[-\gamma_B\left(\pi^*\beta_0\right)\right] \leq 0 \quad \mathbb{P}\ a.s.$$

If $J^*(\Theta) = \Theta$, $\mathbb{P}$ *a.s.*, then

$$\gamma_F \exp\left[\gamma_F\left(\pi^*\beta_0\right)\right] - \lambda\gamma_B \exp\left[-\gamma_B\left(\pi^*\beta_0 - \Theta\right)\right] \geq 0 \quad \mathbb{P}\ a.s.$$

We can notice that the second first order condition is redundant with the first one. This comes from the very particular form of exponential utilities. ■

7.6.4 Optimality verification

In this paragraph, we use the notations U_F and U_B to have more concise expressions.

So, it is necessary to check that the solution of this program is an optimum, or equivalently to prove that

$$\mathbb{E}\left[U_F\left(J(\Theta) - \Theta - \pi\beta_0\right) - U_F\left(J^*(\Theta) - \Theta - \pi^*\beta_0\right)\right] \leq 0$$

or, by introducing the constraint with the Lagrange multiplier coefficient in order to use the first-order conditions

$$\mathbb{E}\begin{bmatrix} U_F\left(J(\Theta) - \Theta - \pi\beta_0\right) - U_F\left(J^*(\Theta) - \Theta - \pi^*\beta_0\right) \\ +\lambda\left[U_B\left(\pi\beta_0 - J(\Theta)\right) - U_B\left(\pi^*\beta_0 - J^*(\Theta)\right)\right] \\ -\lambda\left[U_B\left(\pi\beta_0 - J(\Theta)\right) - U_B\left(\pi^*\beta_0 - J^*(\Theta)\right)\right] \end{bmatrix} \leq 0$$

However, as agent B's constraint is satisfied

$$\mathbb{E}\left[U_B\left(\pi\beta_0 - J\left(\Theta\right)\right) - U_B\left(\pi^*\beta_0 - J^*\left(\Theta\right)\right)\right] \geq 0$$

and

$$-\lambda\mathbb{E}\left[U_B\left(\pi\beta_0 - J\left(\Theta\right)\right) - U_B\left(\pi^*\beta_0 - J^*\left(\Theta\right)\right)\right] \leq 0$$

Moreover, using the concavity of the utility functions

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\begin{array}{c} U_F\left(J\left(\Theta\right) - \Theta - \pi\beta_0\right) - U_F\left(J^*\left(\Theta\right) - \Theta - \pi^*\beta_0\right) \\ +\lambda\left[U_B\left(\pi\beta_0 - J\left(\Theta\right)\right) - U_B\left(\pi^*\beta_0 - J^*\left(\Theta\right)\right)\right] \\ -\lambda\left[U_B\left(\pi\beta_0 - J\left(\Theta\right)\right) - U_B\left(\pi^*\beta_0 - J^*\left(\Theta\right)\right)\right] \end{array}\right] \\
\leq \; & \mathbb{E}\left[\left(J\left(\Theta\right) - J^*\left(\Theta\right) + \pi^*\beta_0 - \pi\beta_0\right)\left\{\begin{array}{c} U_F^{'}\left(J^*\left(\Theta\right) - \Theta - \pi^*\beta_0\right) \\ -\lambda U_B^{'}\left(\pi^*\beta_0 - J^*\left(\Theta\right)\right) \end{array}\right\}\right] \qquad (7.18)
\end{aligned}$$

Three cases have to be studied separately

1. If $0 < J^*\left(\Theta\right) < \Theta \quad \mathbb{P}\ a.s.$, condition (7.7) gives

$$U_F^{'}\left(J^*\left(\Theta\right) - \Theta - \pi^*\beta_0\right) - \lambda U_B^{'}\left(\pi^*\beta_0 - J^*\left(\Theta\right)\right) = 0 \quad \mathbb{P}a.s.$$

   and
$$\mathbb{E}\left[\left(J\left(\Theta\right) - J^*\left(\Theta\right) + \pi^*\beta_0 - \pi\beta_0\right)\left\{\begin{array}{c} U_F^{'}\left(J^*\left(\Theta\right) - \Theta - \pi^*\beta_0\right) \\ -\lambda U_B^{'}\left(\pi^*\beta_0 - J^*\left(\Theta\right)\right) \end{array}\right\}\right] = 0$$

   Hence the result (using equation (7.18)).

2. If $J^*\left(\Theta\right) = 0 \quad \mathbb{P}\ a.s.$, condition (7.8) gives

$$U_F^{'}\left(J^*\left(\Theta\right) - \Theta - \pi^*\beta_0\right) - \lambda U_B^{'}\left(\pi^*\beta_0 - J^*\left(\Theta\right)\right) \leq 0 \quad \mathbb{P}a.s.$$

   and
$$\mathbb{E}\left[\left(J\left(\Theta\right) - J^*\left(\Theta\right) + \pi^*\beta_0 - \pi\beta_0\right)\left\{\begin{array}{c} U_F^{'}\left(J^*\left(\Theta\right) - \Theta - \pi^*\beta_0\right) \\ -\lambda U_B^{'}\left(\pi^*\beta_0 - J^*\left(\Theta\right)\right) \end{array}\right\}\right] \leq 0$$

   Hence the result (using equation (7.18)).

3. If $J^*\left(\Theta\right) = \Theta \quad \mathbb{P}\ a.s.$, condition (7.9) gives

$$U_F^{'}\left(J^*\left(\Theta\right) - \Theta - \pi^*\beta_0\right) - \lambda U_B^{'}\left(\pi^*\beta_0 - J^*\left(\Theta\right)\right) \geq 0 \quad \mathbb{P}a.s.$$

and

$$\mathbb{E}\left[\left(J\left(\Theta\right)-J^{*}\left(\Theta\right)+\pi^{*}\beta_{0}-\pi\beta_{0}\right)\left\{\begin{array}{c}U_{F}^{'}\left(J^{*}\left(\Theta\right)-\Theta-\pi^{*}\beta_{0}\right)\\-\lambda U_{B}^{'}\left(\pi^{*}\beta_{0}-J^{*}\left(\Theta\right)\right)\end{array}\right\}\right]\leq 0$$

Hence the result (using equation (7.18)).

Hence, the solution is an optimum for the program $\left(\widehat{\mathcal{P}}\right)$.

Bibliographie

[1] A.R. Admati et P. Pfleiderer, A monopolistic market for information, *Journal of Economic Theory*, vol. 39, n°2, p. 400-438, 1986.

[2] A.R. Admati et P. Pfleiderer, Direct and indirect sale of information, *Econometrica*, vol. 58, n°4, p. 901-928, 1990.

[3] D. Allinger et S. Mitter, New results on the innovations problem for non-linear filtering. *Stochastics*, vol. 4, page 339-348, 1981.

[4] J. Amendinger, *Initial enlargement of filtrations and additional information in financial markets*, Thèse de doctorat, Université de Berlin, 1998.

[5] L. Bachelier, *Théorie de la spéculation.* Thèse de doctorat, 1900.

[6] P. Barrieu et N. El Karoui, Reinsuring climatic risk using optimally designed weather bonds. Accepté pour publication aux Geneva Papers, Risk and Insurance Theory.

[7] P. Barrieu et N. El Karoui, Optimal design of derivatives in illiquid markets. *Quantitative Finance*, vol. 2, p. 1-8, 2002.

[8] E. Briys, Taming mother nature : a primer on the pricing of Nature-linked securities. Working Paper, 1998.

[9] E. Briys, Pricing mother nature. *Risk, E.P.R.M.,* p. 16-20, 1998.

[10] M. Cao et J. Wei, Pricing the weather. *Risk*, P. 67-70, 2000.

[11] M. Cao et J. Wei, Equilibrium valuation of weather derivatives. Working Paper, 2000.

[12] Commission Européenne, *European Commission : A.R.T. market study - Final report*, 2000.

[13] G. Constantinides, A theory of the nominal term structure of interest rates. *Review of Financial Studies*, vol. 4, p. 531-552, 1992.

[14] D. Dacunha-Castelle et M. Duflo, *Probabilités et statistiques - Problèmes à temps fixe, Volume* 1. Masson, 1982.

[15] M. Davis, Pricing weather derivatives by marginal value. *Quantitative Finance*, vol. 1, p. 1-4, 2001.

[16] F. Delbaen, P. Grandits, T. Rheinländer, D. Samperi, M. Schweizer et C. Stricker, Exponential hedging and entropic penalities. *Mathematical Finance*, vol. 12, n°2, p. 99-123, 2002.

[17] R. Dischel, Is precipitation basis risk overstated ?. *Risk, E.P.R.M.*, P. 26-28, 2000.

[18] R. Dischel, Black-Scholes won't do. *Risk, E.P.R.M.*, p. 8-14, 1998.

[19] R. Dischel, Shaping history. *Risk, E.P.R.M.*, p. 13-16, 1999.

[20] R. Dischel, Seasonal weather forecasts and derivative valuation. *Risk, E.P.R.M.*, p. 18-21, 2000.

[21] F. Dornier. et M. Queruel, Caution to the wind. *Risk, E.P.R.M.*, p. 30-32, 2000.

[22] L. Eeckhoudt et C. Gollier, *Risk : evaluation, management and sharing*. Harvester Wheatsheaf, 1995.

[23] N. El Karoui et R. Rouge, Pricing via utility maximization and entropy. *Mathematical Finance*, vol.10 n°2, p. 259-276, 2000.

[24] R.J. Elliott, *Stochastic calculus and applications*. Springer Verlag, 1982.

[25] R.J. Elliott, P. Fischer et E. Platen, Dynamic asset allocation and filtering in continuous time. Working paper, 2000.

[26] R.J. Elliott, C.H. Lahaie et D.B. Madan, Filtering derivative security valuations from market prices. *Proceedings of the Isaac Newton Institue Bank of England Conference on Mathematical Finance*, Cambridge University Press, p. 141-162, 1997.

[27] L. Epstein et Z. Chen, Ambiguity, risk and asset returns in continuous time. *Econometrica*, vol. 70, p. 1403-1443, 2002.

[28] D. Farny, The development of European private sector insurance over the last 25 years. *The Geneva Papers on Risk and Insurance*, vol. 24, n°2, p. 145-162, 1999.

[29] H. Föllmer et A. Schied, Robust preferences and convex measure of risk. *Finance and Stochastics*, vol. 6 n°4, p. 429-447, 2002.

[30] H. Föllmer et A. Schied, *Stochastic Finance : An Introduction in Discrete Time*, De Gruyter, Studies in Mathematics, vol. 27, 2002.*Mathematical Finance*, vol. 10 n°1, p. 39-52, 2000.

[31] K.A. Froot (ed.), *The financing of catastrophe risk*. N.B.E.R., 1999.

[32] M. Fujisaki, G. Kallianpur et H. Kunita, Stochastic differential equations for the non-linear filtering problem, *Osaka J. Math.*, vol. 9, p. 19-40, 1972.

[33] L. Gallix, *Il était une fois... l'assurance*. L'Argus Edition, 1985.

[34] H. Geman (ed.), *Insurance and weather derivatives : from exotic options to exotic underlyings*. Risk Book, 1999.

[35] S.J. Grossman, On the efficiency of competitive stock markets when traders have diverse information, *Journal of Finance*, vol. 31, n°2, p. 573-585, 1976.

[36] S.J. Grossman, An introduction to the theory of rational expectations under asymmetric information, *Review of Economic Studies*, vol. 48, p. 541-559, 1981.

[37] S.J. Grossman et J. Stiglitz, On the impossibility of informationally efficient markets, *The American Economic Review*, vol. 70, n°3, p. 393-408, 1980.

[38] J.D. Hammond, *Essays in the theory of risk and insurance*. Scott, Foresman and Co, 1968.

[39] M. Hellwig, On the aggregation of information in competitive markets, *Journal of Economic Theory*, vol. 22, p. 477-498, 1980.

[40] D. Henriet et J.C. Rochet, *Microéconomie de l'assurance*. Economica, coll. Economie et Statistiques avancées, 1991.

[41] S.D. Hodges et A. Neuberger, Optimal replication of contingent claims under transaction costs. *Review of Futures Markets*, vol. 8, p. 222-239, 1989.

[42] J.C. Hull et A. White, Pricing interest rate derivative securities. *Review of Financial Studies*, vol. 3 n°4, p. 573-592, 1990.

[43] G. Kallianpur, *Stochastic Filtering Theory*, Springer Verlag, 1980.

[44] G. Kallianpur et C. Striebel, Estimation of stochastic systems : arbitrary system process with additive white noise observation errors. *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 39, n°3, p. 785-801, 1968.

[45] I. Karatzas et S.G. Kou, On the pricing of contingent claims under constraints. *Ann. of Appl. Probab.*, vol. 6 n°2, p. 321-369, 1996.

[46] H. Kunita, Non-linear filtering for the system with general noise, *Stochastic Control Theory and Stochastic Differential Systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, n°16, p. 496-509, Springer Verlag, 1979.

[47] A.N. Krylov, On the equivalence of σ-algebras in the filtering problem of diffusion processes. *Theory Probab. Its Appl.*, vol. 24, p. 772-781 1979.

[48] P. Lakner, Utility maximization with partial information. *Stochastic processes and their applications*, vol. 56, p. 247-273, 1995.

[49] P. Lakner, Optimal trading for an investor : the case of partial information. *Stochastic processes and their applications*, vol. 76, p. 77-96, 1998.

[50] D. Lefèvre, An introduction to utility maximization with partial observation. Rapport de recherche n°4183, INRIA, 2001.

[51] R.S. Lipster et A.N. Shiryayev, *Statistics of random processes.* Springer Verlag, 2001.

[52] F. Longstaff et E. Schwartz, A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt. *Journal of Finance*, vol. 50, n°3, p. 789-819, 1995.

[53] H. Loubergé, *Economie et finance de l'assurance et de la réassurance.* Dallloz, 1981.

[54] R. Merton, Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model. *Journal of Economic Theory*, vol. 3, p. 373-413, 1971.

[55] P.A. Meyer, Sur un problème de filtration. *Séminaire de Probabilités VII*, Lecture Notes n°321, p. 223-247, 1971-1972

[56] S.K. Mitter, Nonlinear filtering of diffusion processes : a guided tour. *Adv. in Filtering and Optimal Stochastic Control, LN in Control and Information Sciences* n°42, p. 256-266, 1982.

[57] M. Musiela et T. Zariphopoulou, Pricing and risk management of derivatives written on non-traded assets. Working Paper, 2001.

[58] D.L. Ocone et I. Karatzas, A generalized Clark representation formula, with application to optimal portfolios. *Stochastics and Stochastics Reports*, vol. 34, p. 187-220, 1991.

[59] E. Pardoux, Filtrage non-linéaire et équations aux dérivés partielles stochastiques associées, *Ecole d'été de Saint-Flour XIX*, Lecture Notes in Mathematics n°1464, 1989.

[60] H. Pham et M.C. Quenez, Dynamic portfolio optimization in the case of partially observed drift process. *Annals of Probability*, vol. 11, n°1, p. 210-238, 2001.

[61] M.C. Quenez, Maximization of utility of terminal wealth in an incomplete multiple-priors model. Prépublication, Université de Marne-La-Vallée, 2000.

[62] A. Raviv, The design of an optimal insurance policy. *American Economic Review*, 1979.

[63] D. Revuz et M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Second Edition. Springer Verlag, 1994.

[64] Risk, *Weather risk special report.* 1998, 1999, 2000, 2001.

[65] H. Robbins et D. Siegmund, Statistical tests of power one and the integral representation of solutions of certain parabolic differential equations. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica (Taipei)*, vol. 1, p. 93-120, 1973.

[66] L.C.G. Rogers et D. Williams, *Diffusions, Markov processes and Martingales, vol* 2 *: Itô calculus.* (second edition), Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 2000.

[67] R. Rouge, Méthodes de contrôle stochastique et modèle d'évaluation d'actifs financiers. *Thèse de doctorat*, Université de Pari VI, 1999.

[68] O. Roustant, Une application de deux modèles économétriques de température à la gestion des risques climatiques. Working Paper, 2001.

[69] K. Sankaran, Finding a value. *Risk, E.P.R.M.*, p. 21-25, 2000.

[70] D. Soumelis Fivos, *Assurance optimale et asymmetrie de perception du risque : application aux catastrophes en milieux urbains.* Mémoire de DEA, Université Paris I, 1996.

[71] J. Szpirglas, Sur l'équivalence d'équations différentielles stochastiques à valeurs mesures intervenant dans le filtrage markovien non-linéaire. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. 14, n°1, p. 34-59, 1978.

[72] P. Tankov, Modélisation des données de température : cas univarié. Working Paper, 2001.

[73] M. Tchamengo, *Stratégies statiques en finance.* Thèse de doctorat, Université de Bourgogne, 1998.

[74] B. Tsirelson, An example of a stochastic differential equation having no strong solution. *Theory Probab. Its Appl.*, vol. 20, p. 416-418, 1975.

[75] M. Yor, Une équation générale pour le filtrage. Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour, Lecture Notes in Mathematics 876, Springer Verlag, p. 240-280, 1979.

[76] M. Yor, *Some aspects of Brownian motion, Part* 1 *: Some special functionals.* Birkhaüser, Lectures in Mathematics, E.T.H. Zurich, 1992.

Deuxième partie

Deux études Markoviennes particulières

Cette deuxième partie présente successivement deux études distinctes. Toutefois, elles ont au moins le point commun de concerner toutes deux des fonctionnelles additives du mouvement Brownien, et plus généralement de processus de Markov. Ainsi, la quantité suivante :

$$\int_0^t du \exp 2 (B_u + vu)$$

intervient dans le chapitre 8 consacré à la densité de Hartman-Watson, tandis que le chapitre 9 donne des exemples de martingales fonctionnelles additives.

De façon plus précise,

Concernant le Chapitre 8

Le chapitre 8 est consacré à l'analyse d'un problème numérique lié à la simulation de la densité de Hartman-Watson lorsque le paramètre de temps est petit. Cette étude a été motivée par des questions relatives à l'évaluation de produits financiers particuliers : les options asiatiques.

De façon plus formelle, on note $\mathbb{Q}$ la probabilité risque-neutre sous laquelle les différents produits dérivés sont évalués. On suppose que le cours d'un actif a la dynamique suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t$$

où W est un $\mathbb{Q}$-mouvement Brownien et r est le taux sans risque instantané.
Alors, le payoff d'une option asiatique de maturité T et de prix d'exercice K est donné par :

$$\max (A(T) - K; 0) \triangleq (A(T) - K)^+$$

où $A(T)$ est la moyenne arithmétique de S entre 0 et T :

$$A(T) = \frac{1}{T} \int_0^T S_u du = \frac{1}{T} \int_0^T S_0 \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) u + \sigma W_u \right] du$$

Son prix à chaque instant t $(0 \leq t \leq T)$ est donné par :

$$C_t = E_{\mathbb{Q}} \left[\exp(-r(T-t)) (A(T) - K)^+ / \Im_t \right]$$

Comme plusieurs auteurs l'ont montré (cf., par exemple, H. Geman et M. Yor [18] ou V. Linetsky [29]), celui-ci est fortement relié à la densité conditionnelle de $A_t^{(v)} = \int_0^t \exp[2(W_u + vu)] du$ sachant $W_t + vt$, qui, d'après un résultat de M. Yor [54], s'exprime à l'aide de la densité de Hartman-Watson.

Or, celle-ci pose de graves problèmes de simulations lorsque t est petit. Pour cette raison, nous souhaitons connaitre le comportement asymptotique de la densité de Hartman-Watson lorsque t tend vers 0.

Pour ce faire, plusieurs méthodes classiques sont envisagées.

Nous montrons qu'une variable aléatoire ayant la distribution de Hartman-Watson de paramètre r a des moments exponentiels inverses. Ainsi, si H_r est une variable aléatoire ayant la distribution de Hartman-Watson de paramètre r, alors, pour tout $\mu > 0$,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\mu}{H_r}\right)\right] < \infty$$

et pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(H_r < t) \leq \exp\left(-\frac{\mu}{t}\right)\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\mu}{H_r}\right)\right]$$

D'autre part, la théorie des grandes déviations nous permet d'améliorer ce résultat et d'obtenir le comportement asymptotique de la fonction de répartition de Hartman-Watson lorsque t tend vers 0. Ainsi, nous obtenons :

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{\left(\log\left(\frac{1}{h}\right)\right)^2}\log\mathbb{P}(H_r < h) = -\frac{1}{2}$$

Mais la densité reste inapprochable ! Les théorèmes Taubériens, donnant des relations entre le comportement asymptotique de la transformée de Laplace d'une variable et celui de sa fonction de répartition, ne permettent pas de conclure. Enfin, le problème étudié ne peut être résolu par la méthode du col, que nous rappelons en annexe. Ce chapitre, même s'il ne donne pas la solution au problème initial, fait sens. En effet, le fait qu'aucune de ces méthodes, pourtant généralement utilisées pour la gestion de problèmes de ce type, ne semble fonctionner est un résultat en soi !

Concernant le Chapitre 9

Le chapitre 9 est consacré à l'obtention d'une "formule de Taylor stochastique", faisant intervenir les itérés de générateurs infinitésimaux, dans le cas de subordinateurs. Nous considérons $(X_t)_{t\geq 0}$ un subordinateur général, sans drift et de mesure de Lévy $\nu(dy)$ tel que :

$$\text{Il existe } \varepsilon > 0, \text{ tel que } \int_0^\infty \nu(dy)(\exp(\varepsilon y) - 1) < \infty$$

L'exposant de Lévy associé est noté :

$$\Psi(\xi) = \int_0^\infty \nu(dy)(1 - \exp(-\xi y))$$

D'autre part

$$Lf(x) = \int \nu(dy)\left[f(x+y) - f(x)\right],$$

est l'expression du générateur infinitésimal de X sur f, qui est une fonction de type polynomial.

Alors, la propriété suivante peut être montrée. Elle correspond à une sorte de formule de Taylor stochastique :

Si $\mathbf{p}$ est un polynôme de dégré N,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-t)^n}{n!}\left(L^n \mathbf{p}\right)(x)$$

est un polynôme harmonique espace-temps, ou encore :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-t)^n}{n!}\left(L^n \mathbf{p}\right)(X_t)$$

est une martingale.

De plus, deux théorèmes classiques en théorie de la combinatoire et des polynômes binômiaux sont alors obtenus par des arguments probabilistes. Il s'agit des théorèmes suivants :

Théorème 9.3 **:** Soit $(p_N(x))_{N=0,1,2...}$ une famille de polynôme de degré N exactement satisfaisant la condition :

$$(c) : p_0 \equiv 1 \quad \text{et} \quad p_N(0) = 0 \quad \forall N \geq 1$$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $L(p_N) = p_{N-1} \quad \forall N \geq 1$;

(ii) Les polynômes $P_N(x,t)$ définis par :

$$P_N(x,t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k t^{N-k}}{(N-k)!} p_k(x)$$

sont harmoniques espace-temps ;

(iii) $(p_N(x))_{N=0,1,2...}$ est la famille obtenue à partir de :

$$\exp\left(-\Psi^{-1}(a)\,x\right) = \sum_{N=0}^{\infty} (-a)^N p_N(x)$$

Plus précisément, en définissant la famille $\sigma_n^{(m)}$ $(n \geq m)$ de la façon suivante :

$$\left(\Psi^{-1}(a)\right)^m = m! \sum_{n=m}^{\infty} \sigma_n^{(m)} \frac{a^n}{n!}$$

p_N est donné par :

$$p_N(x) = \frac{1}{N!} \sum_{m=0}^{N} (-1)^{N-m} \sigma_N^{(m)} x^m$$

Théorème 9.4 **:** Soit $(q_k(t))_{k=0,1,2...}$ une famille de polynôme de degré k exactement satisfaisant la condition :

$$(c) : q_0 \equiv 1 \quad \text{and} \quad q_k(0) = 0 \quad \forall k \geq 1$$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Les polynômes $Q_j(x,t)$ définis par :

$$Q_j(x,t) = \sum_{k=0}^{j} \frac{(-x)^{j-k}}{(j-k)!} q_k(t)$$

sont harmoniques espace-temps ;

(ii) $(q_k(t))_{k=0,1,2...}$ est la famille obtenue à partir de :

$$\exp(t\Psi(\xi)) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n q_n(t)$$

Plus précisément, en définissant la famille $s_n^{(m)}$ $(n \geq m)$ de la façon suivante :

$$(\Psi(\xi))^m = m! \sum_{n=m}^{\infty} s_n^{(m)} \frac{\xi^n}{n!}$$

q_n est donné par :

$$q_n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} s_n^{(m)} t^m$$

Cette étude fait intervenir différentes notions dépassant le champ classique de la théorie des probabilités, comme les fonctions harmoniques, les nombres de Stirling ou les polynômes orthogonaux. Nous les définissons et rappelons certaines de leurs principales propriétés dans une section préliminaire.

Chapitre 8

Etude asymptotique de la densité de Hartman-Watson

Commentaires : Ce chapitre ne présente pas vraiment de résultats aboutis. Nous évoquons ici les principales tentatives menées pour résoudre un problème numérique. Elles ont toutes plus ou moins échoué pour l'instant. Aucune des méthodes classiquement utilisées pour gérer ces types de problèmes ne semble fonctionner dans ce cas. Il s'agit par conséquent d'un chapitre qui peut sembler peu structuré, ayant plus l'apparence d'un simple document de travail. Néanmoins, les Théorème 8.1, Proposition 8.3 et Proposition 8.4 apportent des résultats nouveaux sur la distribution de Hartman-Watson, que nous espérons rassembler dans un Préprint commun avec Alain Rouault et Marc Yor.

8.1 Problèmes liés à l'évaluation des options asiatiques

Cette première section est consacrée aux problèmes d'évaluation des options asiatiques. Après avoir présenté le principe d'une option asiatique ainsi que quelques réflexions sur la question de leur évaluation, nous nous intéressons aux liens existant entre le prix de telles options et la densité de Hartman-Watson et évoquons les difficultés numériques rencontrées lors de la simulation de ces quantités.

8.1.1 Description d'une option d'achat asiatique

Cadre standard de l'étude

Soit un espace de probabilité filtré $(\Omega, \Im, (\Im_t), \mathbb{P})$, où $\mathbb{P}$ est la probabilité historique, et un actif risqué, désigné par S, évoluant dans cet espace. Son prix à un instant t est noté S_t. Sa dynamique est généralement solution de l'équation suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma d\widetilde{W}_t$$

où $\widetilde{W}$ est un $(\mathbb{P} - \Im_t)$-mouvement Brownien et σ est le paramètre de volatilité, supposé constant et non-nul.

Si on se limite à l'étude de produits relatifs à S, alors ce marché financier est complet. Il existe par conséquent une unique probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$, équivalente à $\mathbb{P}$, telle que la dynamique de S sous $\mathbb{Q}$ est décrite par :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t$$

où W est un $(\mathbb{Q} - \Im_t)$-mouvement Brownien et r est le taux sans risque instantané.

$A(T)$ désigne la moyenne arithmétique de S entre 0 et T, i.e. :

$$A(T) = \frac{1}{T}\int_0^T S_u du = \frac{1}{T}\int_0^T S_0 \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)u + \sigma W_u\right] du$$

Payoff d'un call asiatique

Un call (ou option d'achat) standard est un contrat financier qui octroie le droit à son détenteur, mais non l'obligation, d'acheter l'actif sous-jacent du contrat à une date future, la maturité de l'option, à un prix fixé préalablement, le prix d'exercice de l'option. Le détenteur va exercer son droit si le cours du sous-jacent à la maturité est supérieur au niveau d'exercice. Il fait alors un gain potentiel de la différence entre ces deux prix. Si, par contre, le cours du sous-jacent est inférieur au prix d'exercice, le détenteur de l'option n'a aucun intérêt à exercer son droit. Le gain lié à l'option est nul. Le gain lié à l'option à la maturité est aléatoire (puisque dépendant du cours du sous-jacent à cette date) et s'appelle le payoff de l'option.

Un call asiatique standard, écrit sur l'actif S, est un contrat financier qui dépend de la moyenne arithmétique du cours de l'actif S entre la date 0 et la maturité de l'option, notée T. Le payoff en T d'une telle option est, si le prix d'exercice est noté K :

$$\max(A(T) - K; 0) \triangleq (A(T) - K)^+$$

L'avantage d'un tel produit est la réduction des phénomènes de manipulation possibles du cours du sous-jacent au moment de l'exercice éventuel de l'option. Notons ici que la notion de delivrance physique du sous-jacent du contrat, $A(T)$, à la maturité de l'option si celle-ci est exercée, est peu claire. En effet, il s'agit ici uniquement d'un échange de flux monétaire traduisant la partie positive de $A(T) - K$.

D'après un raisonnement par arbitrage, nous pouvons en déduire que son prix à chaque instant t ($0 \leq t \leq T$) est donné par :

$$\begin{aligned} C_t &= E_{\mathbb{Q}}\left[\exp(-r(T-t))(A(T)-K)^+ / \Im_t\right] \qquad (8.1) \\ &= E_{\mathbb{Q}}\left[\exp(-r(T-t))\left(\frac{S_0}{T}\int_0^T \exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)u+\sigma W_u\right]du - K\right)^+ / \Im_t\right] \end{aligned}$$

8.1.2 Liens avec les processus de Bessel et la densité de Hartman-Watson

D'après ce qui précède et notamment la formule (8.1), une quantité importante à maîtriser pour l'évaluation du call asiatique est l'intégrale d'une fonction exponentielle du mouvement Brownien, i.e. :

$$\int_0^T \exp[vt + \sigma W_t]\,dt \qquad \text{où } v = r - \frac{\sigma^2}{2}$$

D'après l'article de J. Lamperti [27] (cf. également la proposition (2.3) de l'article de H. Geman et M. Yor [18]) :

$$\exp(W_t + vt) = R^{(v)}_{\int_0^t \exp(W_u + vu)du} \qquad (8.2)$$

où $\left(R_s^{(v)}; s \geq 0\right)$ est un carré de processus de Bessel d'indice v, dont la dynamique est donnée par :

$$dR_t^{(v)} = 2(v+1)\,dt + 2\sqrt{R_t^{(v)}}dB_t$$

où B est un mouvement Brownien.

De façon générale, en utilisant :

- la propriété de "scaling" du mouvement Brownien :

$$\sigma W_t = \widehat{W}_{\sigma^2 t}$$

où $\widehat{W}$ est un $(\mathbb{Q} - \Im_t)$-mouvement Brownien,

- et le fait que :

$$\sigma W_t + vt = \widehat{W}_{\sigma^2 t} + \frac{v}{\sigma^2}\sigma^2 t$$

nous pouvons généraliser la formule (8.2) et finalement déduire :

$$\exp\left(\sigma W_t + vt\right) = R^{\left(\frac{v}{\sigma^2}\right)}_{\int_0^t \exp(\sigma W_u + vu)du} \tag{8.3}$$

8.1.3 Problèmes d'évaluation

La question de l'évaluation des options asiatiques est particulièrement délicate. Ceci est dû au fait même que la loi de la moyenne arithmétique $A(t)$ n'est pas connue. De là, plusieurs méthodes ont été adoptée pour tenter de résoudre ce problème, comme le soulignent H. Géman et M. Yor dans [18] :

- Une première approche consiste à simuler numériquement la densité de la somme de plusieurs variables et à intégrer le payoff par rapport à cette densité (cf., par exemple, A.P. Carverhill et L.J. Clewlow [6] ou A.G.Z. Kemna et A.C.F. Vorst [22]).

- Une seconde approche consiste à encadrer le prix de l'option en travaillant sur des quantités plus "exploitables" mais il est alors nécessaire de donner un ordre de grandeur pour l'erreur commise (cf. par exemple L. Bouaziz, E. Briys et M. Crouhy [4]).

- Une troisième approche consiste à supposer que la moyenne arithmétique est distribuée suivant une loi lognormale, dont il faut déterminer les paramètres (cf., par exemple E. Lévy [28]).

Toutes ces méthodes sont fondées sur des approximations plus ou moins importantes. Toutefois, même si le problème de l'évaluation de l'option peut être partiellement résolu, la question de la couverture reste entière.
Pour cette raison, l'approche que nous avons choisie de présenter ici consiste à travailler directement sur la densité de la moyenne arithmétique. Tout revient alors à expliciter l'équation (8.1). Ce problème a été étudié dans différents articles. Parmi de très nombreuses références, nous allons présenter certains points clés des études suivantes :

Etude de H. Geman et M. Yor ([18])

Dans cet article, les auteurs s'intéressent à l'évaluation d'une option asiatique telle que celle décrite dans la première section. Ils commencent leur analyse par trois simplifications de l'expression (8.1), rappelées ci-dessous :

$$C_t = E_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-r\left(T-t\right)\right)\left(A\left(T\right)-K\right)^+ / \Im_t\right]$$

- $1^{ère}$ simplification :

$$C_t = \frac{\exp\left(-r\left(T-t\right)\right)}{T} E_{\mathbb{Q}}\left[\left(\widetilde{A}\left(T\right)-\widetilde{K}\right)^+ / \Im_t\right]$$

où :

$$\widetilde{A}(T) = \int_0^T S_u du \qquad \text{et} \qquad \widetilde{K} = KT$$

- $2^{ème}$ simplification :

$$E_{\mathbb{Q}}\left[\left(\widetilde{A}(T) - \widetilde{K}\right)^+ / \Im_t\right]$$
$$= S_t E_{\mathbb{Q}}\left[\left(\int_0^{T-t} \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)s + \sigma\left(W_{s+t} - W_t\right)\right] ds - \overline{K}\right)^+ / \Im_t\right]$$
$$= S_t E_{\mathbb{Q}}\left[\left(\int_0^{T-t} \exp\left(bs + \sigma \overline{W}_s\right) ds - \overline{K}\right)^+\right]$$

où $\overline{W}$ est un nouveau mouvement Brownien indépendant de $(\Im_t)$, ce qui nous a permis de remplacer l'espérance conditionnelle par l'espérance et :

$$\overline{K} = \frac{\widetilde{K} - \widetilde{A}(t)}{S_t} \qquad \text{et} \qquad b = r - \frac{\sigma^2}{2}$$

- $3^{ème}$ simplification : en faisant le changement de variable $s = \frac{4u}{\sigma^2}$ et en utilisant la propriété de "scaling" du mouvement Brownien, alors :

$$\sigma \overline{W}_s = 2W_u$$
$$bs = b\frac{4u}{\sigma^2} \triangleq 2vu$$

et :

$$E_{\mathbb{Q}}\left[\left(\int_0^{T-t} \exp\left(bs + \sigma \overline{W}_s\right) ds - \overline{K}\right)^+\right] = \frac{4}{\sigma^2} C^{\left(\frac{2b}{\sigma^2}\right)}\left(\frac{\sigma^2}{4}(T-t); \frac{\sigma^2}{4}\overline{K}\right)$$

pour :

$$C^{(v)}(x;q) = E_{\mathbb{Q}}\left[\left(\int_0^x \exp\left[2\left(W_u + vu\right)\right] du - q\right)^+\right]$$

Par conséquent, la formule (8.1) peut se réécrire comme :

$$C_t = \frac{\exp\left(-r\left(T-t\right)\right)}{T} \frac{4S_t}{\sigma^2} C^{(v)}(x,q) \tag{8.4}$$

où :

$$\begin{aligned} v &= \frac{2r}{\sigma^2} - 1 \quad , \quad x = \frac{\sigma^2}{4}(T-t) \\ \text{et } q &= \frac{\sigma^2}{4S_t}\left[KT - \int_0^t S_u du\right] \end{aligned}$$

Deux cas peuvent alors se présenter à la date t :

- 1^{er} *cas :* $q \leq 0$. Ceci est équivalent à :

$$K \leq \frac{1}{T}\int_0^t S_u du$$

Cela implique :

$$K \leq \frac{1}{t}\int_0^t S_u du = A(t)$$

L'option est alors "*In The Money*" à la date t.

D'autre part, comme :

$$\frac{1}{T}\int_0^t S_u du \leq \frac{1}{T}\int_0^T S_u du = \frac{1}{T}\int_0^t S_u du + \frac{1}{T}\int_t^T S_u du$$

puisque $\frac{1}{T}\int_t^T S_u du > 0$, l'option est également dans la monnaie à la maturité de l'option.
Dans ce cas, l'évaluation de l'option est plus simple, puisque la formule (8.1) s'écrit simplement :

$$C_t = E_{\mathbb{Q}}\left[\exp(-r(T-t))(A(T)-K)/\Im_t\right]$$

soit :

$$\begin{aligned} C_t &= E_{\mathbb{Q}}\left[\exp(-r(T-t))A(T)/\Im_t\right] - K\exp(-r(T-t)) \\ &= \exp(-r(T-t))\left[\frac{1}{T}\int_0^t S_u du - K\right] + \frac{\exp(-r(T-t))}{T}E_{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T S_u du/\Im_t\right] \end{aligned}$$

et :

$$E_{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T S_u du/\Im_t\right] = E_{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T S_t \exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(u-t)+\sigma\left(W_u-W_t\right)\right) du\right]$$
$$= S_t E_{\mathbb{Q}}\left[\int_0^{T-t} \exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)s+\sigma\overline{W}_s\right) ds\right]$$
$$= S_t \int_0^{T-t} E_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)s+\sigma\overline{W}_s\right) ds\right]$$
$$= S_t \int_0^{T-t} \exp\left(rs\right) ds = S_t \frac{\exp\left(r\left(T-t\right)\right)-1}{r}$$

D'où finalement, on retrouve la formule (3.7) de H. Geman et M. Yor [18] :

$$C_t = S_t \frac{1-\exp\left(-r\left(T-t\right)\right)}{rT} - \exp\left(-r\left(T-t\right)\right)\left[K-\frac{1}{T}\int_0^t S_u du\right]$$

- $2^{ème}$ *cas : $q>0$*. Ceci est équivalent à :

$$K > \frac{1}{T}\int_0^t S_u du$$

Il est alors impossible de comparer K et $\frac{1}{t}\int_0^t S_u du$ ou K et $\frac{1}{T}\int_0^T S_u du$. L'option peut aussi bien être "*Out The Money*" que "*In The Money*" à la date t ou à la maturité.

Le problème est ici que l'on n'est pas certain d'être dans ou hors de la monnaie en T. La condition $q \leq 0$ est en effet suffisante pour être dans la monnaie mais pas nécessaire. L'évaluation est alors plus délicate. Celle-ci passe par l'inversion de la transformée de Laplace de $C^{(v)}(x,q)$ dont l'expression est donnée par la formule (3.10) de H. Geman et M. Yor [18].

Etude de M. Schröder ([46])

Dans cet article, l'auteur reprend l'étude de H. Geman et M. Yor ([18]) et propose une fomule d'inversion de la transformée de Laplace, ce qui lui permet d'évaluer explicitement l'option d'achat asiatique dans le cas "$q>0$". Le théorème de la page 7 de M. Schröder [46] donne en effet une expression de $C^{(v)}(x,q)$ à l'aide des fonctions d'Hermite H_μ [1].

Ainsi :

$$C^{(v)}(x,q) = c.\left(\exp\left(2x\left(v+1\right)\right)-1\right)\int_0^\pi H_{-(v+4)}\left(-\frac{\cos\theta}{\sqrt{2q}}\right)\cos\left(v\theta\right)d\theta$$
$$+\frac{c}{\sqrt{\pi}}\exp\left(\frac{\pi^2}{2x}\right)\int_0^\infty H_{-(v+4)}\left(-\frac{\cos y}{\sqrt{2q}}\right)\left[\exp\left(2x\left(v+1\right)\right).S_{v+2}^{(x)}\left(y\right)-S_v^{(x)}\left(y\right)\right]dy$$

avec :

$$\begin{aligned} S_b^{(x)}\left(y\right) &= \exp\left(yb\right).E_b^{(x)}\left(y\right)+\exp\left(-yb\right).E_{-b}^{(x)}\left(y\right) \\ E_b^{(x)}\left(y\right) &= \int_{\frac{y}{\sqrt{2x}}+\frac{b}{2}\sqrt{2x}}^{\infty}\exp\left(-u^2\right).\sin\left(\pi\left(b+u\frac{\sqrt{2x}}{x}\right)\right)du \end{aligned}$$

La démonstration de ce théorème est relativement complexe.... Aussi, par souci de clarté dans l'exposition des différents messages de ce chapitre, nous ne la présentons pas ici. Nous invitons le lecteur à se référer à l'article originel.

Etude de V. Linetsky ([29])

Dans son papier, V. Linetsky essaie de travailler directement sur la densité de $\int_0^x \exp\left[2\left(W_u+vu\right)\right]du$ intervenant dans $C^{(v)}(x,q)$. Il utilise différents résultats permettant de ne pas avoir à inverser la transformée de Laplace pour obtenir $C^{(v)}(x,q)$.

L'auteur travaille sur une option de vente asiatique mais les problèmes sont inchangés par rapport à ceux d'une option d'achat. Il reprend la formalisation développée par H. Geman et M. Yor ([18]) à savoir :

$$\exp\left(-rT\right)E_{\mathbb{Q}}\left[\left(K-A\left(T\right)\right)^+/\Im_0\right] = \exp\left(-rT\right)S_0\frac{P^{(v)}\left(k,h\right)}{h}$$

où :

$$P^{(v)}\left(k,h\right) = E_{\mathbb{Q}}\left[\left(k-A_h^{(v)}\right)^+\right]$$

[1]On rappelle que la fonction d'Hermite H_μ est définie par :

$$H_\mu\left(z\right) = \frac{1}{2.\Gamma\left(-\mu\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n-\mu}{2}\right)\left(2z\right)^n$$

avec :

$$\begin{aligned} h &= \frac{\sigma^2}{4} \quad , \quad v = \frac{2r}{\sigma^2} > 0 \quad , \quad k = h\frac{K}{S_0} \\ \text{et } A_h^{(v)} &= \int_0^h \exp\left[2\left(W_u + vu\right)\right] du \end{aligned}$$

Les formules (13) et (16) de V. Linetsky [29] donnent :

$$P^{(v)}(k,h) = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty \exp\left[-\frac{\left(u^2+v^2\right)h}{2}\right](2k)^{1+\frac{v}{2}+\frac{1}{2}}\, W_{-1-\frac{1}{2}-\frac{v}{2},i\frac{u}{2}}\left(\frac{1}{2k}\right)\left|\Gamma\left(\frac{v+iu}{2}\right)\right|^2 u\sinh(\pi u)\, du$$

où $W_{a,b}(x)$ est la fonction de Whittaker, i.e. la solution de l'équation de Whittaker (voir par exemple Chapitre 13 page 505 dans M. Abramovitz et I. Stegun [1]) :

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{a}{x} + \frac{\frac{1}{4}-b^2}{x^2}\right] w = 0$$

8.1.4 Relations avec la densité de Hartman-Watson

D'après tout ce qui précède, un problème crucial pour l'évaluation d'un call asiatique standard est la détermination de la densité de $A_t^{(v)} = \int_0^t \exp\left[2\left(W_u + vu\right)\right] du$ (voir par exemple la formule (8.4)). Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'étude de cette densité. Parmi eux, on peut entre autres citer D. Dufresne et M. Yor. Nous présentons brièvement leurs approches respectives dans cette section.

Approche de D. Dufresne ([11])

D. Dufresne [11] s'est intéressé à l'étude de la densité de $A_t^{(\mu)}$, ou plus précisément de $\frac{1}{2A_t^{(\mu)}}$, qu'il note $f_\mu(x,t)$. Alors, si $p_\mu(x,t) \triangleq \exp\left(\mu^2 \frac{t}{2}\right) f_\mu(x,t)$ et si :

$$h_{\mu,r}(s,t) = \mathcal{L}_x\left(x^r p_\mu(x,t)\right)(s) \equiv \int_0^\infty \exp(sx)\, x^r p_\mu(x,t)\, dx$$

où $\mathcal{L}_x$ désigne la transformée de Laplace, alors l'inversion de la transformée de Laplace permet d'obtenir l'expression de la densité à l'aide de la formule suivante, donnée par D. Dufresne (page 233) :

$$x^r \exp\left(\mu^2 \frac{t}{2}\right) f_\mu(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Delta \exp(sx)\, h_{\mu,r}(-s,t)\, ds \tag{8.5}$$

où Δ est le chemin d'intégration $\{c - i\infty; c + i\infty\}$, où $c \in \mathbb{R}$, situé à droite des sigularités de $h_{\mu,r}$.

Dans les cas où $\mu = 0$ et $\mu = 1$, une étude plus précise est faite : le Théorème 4.1 de D. Dufresne ([11])

donne des expressions (réelles et complexes) de $p_\mu(x,t)$ dans les cas particuliers où $r=\frac{1}{2}$; $\mu=0$ et $\mu=1$:

$$
\begin{aligned}
p_0(x,t) &= \frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^\infty \exp\left(-x\cosh^2 y\right) q(y,t)\cos\left(\frac{\pi y}{2t}\right) dy && (8.6)\\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\int_\Delta \exp(sx) K(s,t)\, ds && (8.7)\\
p_1(x,t) &= \frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^\infty \exp\left(-x\cosh^2 y\right) q(y,t)\sinh y\sin\left(\frac{\pi y}{2t}\right) dy && (8.8)\\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\int_\Delta \exp(sx) K(s,t)\sqrt{1+s}ds && (8.9)
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
q(y,t) &= \frac{1}{\pi\sqrt{2t}}\exp\left(\frac{\pi^2}{8t}-\frac{y^2}{2t}\right)\cosh y\\
K(s,t) &= \frac{1}{2\pi i\sqrt{2t(1+s)}}\exp\left(-\frac{\arg\sinh^2\left(\sqrt{s}\right)}{2t}\right)
\end{aligned}
$$

Les identités de Bougerol [5] permettent de comprendre pourquoi ces cas particuliers donnent lieu à des expressions simplifiées. En effet :

Cas $\mu=0$ L'identité suivante prévaut en loi :

$$
\text{Pour } t \text{ fixé,} \qquad \sinh(B_t) \overset{(loi)}{=} \beta_{A_t^{(0)}} \overset{(loi)}{=} \sqrt{A_t^{(0)}}\mathcal{N}
$$

où β est un mouvement Brownien, et $\mathcal{N}$ est une variable normale centrée réduite, indépendants du mouvement Brownien B. Par conséquent :

$$
\mathbb{P}(\sinh(B_t)\in dx) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi A_t^{(0)}}}\exp\left(-\frac{x^2}{2A_t^{(0)}}\right)\right]dx
$$

Or, pour toute fonction f régulière :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f(\sinh(B_t))\right] &= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) f(\sinh x)\, dx\\
&= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(\arg\sinh y)^2}{2t}\right) f(y)\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}
\end{aligned}
$$

après avoir fait le changement de variables :

$$\begin{cases} y = \sinh x \\ dx = \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} \end{cases}$$

Par conséquent, la transformée de Laplace de la variable $\frac{1}{2A_t^{(0)}}$ avec un paramètre y^2 et un facteur $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi A_t^{(0)}}}\exp\left(-\frac{y^2}{2A_t^{(0)}}\right)\right] &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}h_{0,\frac{1}{2}}(y,t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t\,(1+y^2)}}\exp\left(-\frac{(\arg\sinh y)^2}{2t}\right) \end{aligned}$$

On en déduit alors l'expression donnée par D. Dufresne [11] (page 234, Théorème 4.1) :

$$h_{0,\frac{1}{2}}(y,t) = \frac{1}{\sqrt{2t\,(1+y^2)}}\exp\left(-\frac{(\arg\sinh y)^2}{2t}\right)$$

Cas $\mu = 1$ L'identité suivante prévaut en loi :

$$\text{Pour } t \text{ fixé,} \qquad \sinh(B_t + \varepsilon t) \overset{(loi)}{=} \beta_{A_t^{(1)}} \overset{(loi)}{=} \sqrt{A_t^{(1)}}\mathcal{N}$$

où ε est une variable de Bernoulli indépendante de B tel que :

$$\mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2}$$

et β est un mouvement Brownien, et $\mathcal{N}$ est une variable normale centrée réduite, indépendants du mouvement Brownien B et de la variable ε. Par conséquent :

$$\mathbb{P}(\sinh(B_t + \varepsilon t) \in dx) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi A_t^{(1)}}}\exp\left(-\frac{x^2}{2A_t^{(1)}}\right)\right]dx$$

Or, pour toute fonction f régulière :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f\left(\sinh\left(B_t+\varepsilon t\right)\right)\right] &= \frac{1}{2}\left\{\mathbb{E}\left[f\left(\sinh\left(B_t-t\right)\right)\right]+\mathbb{E}\left[f\left(\sinh\left(B_t+t\right)\right)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\exp\left(B_t-\frac{t}{2}\right)f\left(\sinh B_t\right)+\exp\left(-B_t-\frac{t}{2}\right)f\left(\sinh B_t\right)\right] \\
&= \exp\left(-\frac{t}{2}\right)\mathbb{E}\left[\cosh\left(B_t\right)f\left(\sinh B_t\right)\right] \\
&= \exp\left(-\frac{t}{2}\right)\mathbb{E}\left[\sqrt{1+\sinh^2\left(B_t\right)}f\left(\sinh B_t\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f\left(\sinh\left(B_t+\varepsilon t\right)\right)\right] &= \exp\left(-\frac{t}{2}\right)\int\frac{\sqrt{1+\sinh^2\left(x\right)}}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)f\left(\sinh x\right)dx \\
&= \exp\left(-\frac{t}{2}\right)\int\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{\left(\arg\sinh y\right)^2}{2t}\right)f\left(y\right)dy
\end{aligned}$$

après avoir fait le changement de variables :

$$\begin{cases} y=\sinh x \\ dx=\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} \end{cases}$$

Par conséquent, la transformée de Laplace de la variable $\frac{1}{2A_t^{(1)}}$ avec un paramètre y^2 et un facteur $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi A_t^{(1)}}}\exp\left(-\frac{y^2}{2A_t^{(1)}}\right)\right] &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}h_{1,\frac{1}{2}}\left(y,t\right)\exp\left(-\frac{t}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{t}{2}\right)\exp\left(-\frac{\left(\arg\sinh y\right)^2}{2t}\right) \qquad (*)
\end{aligned}$$

On en déduit alors l'expression donnée par D. Dufresne [11] (page 234, Théorème 4.1) :

$$h_{1,\frac{1}{2}}\left(y,t\right)=\frac{1}{\sqrt{2t}}\exp\left(-\frac{\left(\arg\sinh y\right)^2}{2t}\right)$$

Remarque : D'autre part, d'après le Théorème 4.1. de D. Dufresne [11], et tout particulièrement la formule 4.3., on a :

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{x} f_1(x,t) \exp\left(\frac{t}{2}\right) \\
= & \ 2\frac{\exp\left(\frac{\pi^2}{8t}\right)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(-x\cosh^2 y\right) \sinh(2y) \sin\left(\frac{\pi y}{2t}\right) \frac{\exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right)}{\sqrt{2\pi t}} dy \\
= & \ \frac{\exp\left(\frac{\pi^2}{8t}\right)}{\sqrt{\pi}} \mathbb{E}\left[\exp\left(-x\cosh^2 B_t\right) \sinh(2B_t) \sin\left(\frac{\pi B_t}{2t}\right)\right] \\
= & \ \frac{\exp\left(\frac{\pi^2}{8t}\right)}{2\sqrt{\pi}} \mathbb{E}\left[\exp\left(-x\cosh^2 B_t\right) \sinh(2B_t) \sin\left(\frac{\pi B_t}{2t}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Par conséquent :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi A_t^{(1)}}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2A_t^{(1)}}\right)\right] &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} h_{1,\frac{1}{2}}(\xi,t) \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \\
&= \int_0^{\infty} \sqrt{x} \exp\left(-\xi^2 x\right) f_1(x,t)\, dx
\end{aligned}
$$

D'où :

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi A_t^{(1)}}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2A_t^{(1)}}\right)\right] \\
= & \ \frac{\exp\left(\frac{\pi^2}{8t}\right)\exp\left(-\frac{t}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}} \mathbb{E}\left[\sinh(2B_t) \sin\left(\frac{\pi B_t}{2t}\right) \int_0^{\infty} \exp\left(-x\left(\cosh^2 B_t + \xi^2\right)\right) dx\right] \\
= & \ \frac{\exp\left(\frac{\pi^2}{8t}\right)\exp\left(-\frac{t}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}} \mathbb{E}\left[\frac{\sinh(2B_t) \sin\left(\frac{\pi B_t}{2t}\right)}{\xi^2 + \cosh^2(B_t)}\right] \qquad (**)
\end{aligned}
$$

Finalement, en égalisant $(*)$ et $(**)$:

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \exp\left(-\frac{(\arg\sinh \xi)^2}{2t}\right) = \frac{\exp\left(\frac{\pi^2}{8t}\right)\exp\left(-\frac{t}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}} \mathbb{E}\left[\frac{\sinh(2B_t) \sin\left(\frac{\pi B_t}{2t}\right)}{\xi^2 + \cosh^2(B_t)}\right]
$$

Pour $\xi \equiv 0$, on obtient :

$$
\sqrt{\frac{2}{t}} \exp\left(-\frac{\pi^2}{8t}\right) = \mathbb{E}\left[\tanh B_t \sin\left(\frac{\pi B_t}{2t}\right)\right]
$$

Approche de M. Yor ([54])

M. Yor a montré en 1992 dans [54] (Proposition 2, page 527) que la densité conditionnelle de $A_t^{(v)}$ par rapport à la position du Brownien W en t s'exprime à l'aide de la densité de Hartman-Watson.

En effet :

$$P\left[A_t^{(v)} \in du / W_t + vt = x\right] = \frac{\sqrt{2\pi t}}{u} \exp\left(\frac{x^2}{2t} - \frac{1}{2u}\left(1 + \exp(2x)\right)\right) \theta_{\frac{e^x}{u}}(t)\, du$$

où $\theta_r(t) = I_0(r) . f_r(t)$ avec f_r la densité de Hartman-Watson. Plus précisément[2] :

$$\theta_r(t) = \frac{r}{\sqrt{2\pi^3 t}} \exp\left(\frac{\pi^2}{2t}\right) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) \exp\left(-r\cosh(y)\right) \sinh(y) \sin\left(\frac{\pi y}{t}\right) dy$$

Pour montrer cette relation, M. Yor utilise la loi jointe de $A^{(v)}$ et de W, pris à des temps exponentiels indépendants ainsi que les liens entre la densité de Hartman-Watson et les processus de Bessel. De cette densité conditionnelle, M. Yor en déduit la densité de A_t, qui s'écrit comme :

$$\alpha_t(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3 t}} \exp\left(\frac{\pi^2}{2t}\right) \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{u}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Psi_{x\sqrt{u}}(t)$$

où :

$$\Psi_r(t) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) \exp\left(-r\cosh(y)\right) \sinh(y) \sin\left(\frac{\pi y}{t}\right) dy$$

Par conséquent, la densité de $\frac{1}{2A_t}$ s'obtient immédiatement comme :

$$f_0(w,t) = \frac{2\exp(-w)}{\sqrt{2\pi^3 t}} \exp\left(\frac{\pi^2}{2t}\right) \int_0^\infty dy \exp\left(-wy^2\right) \int_0^\infty dz \exp\left(-\frac{z^2}{2t}\right) \exp\left(-2yw\cosh z\right) \sinh z \sin\left(\frac{\pi z}{t}\right)$$

Son approche est cohérente avec celle de D. Dufresne, comme cela a été très récemment prouvé par H. Matsumoto et M. Yor ([31]).

De ce fait, la bonne maîtrise de la densité de Hartman-Watson permettrait d'obtenir une meilleure connaissance de la densité de $A_t^{(v)}$.

8.1.5 Problèmes numériques liés à la densité de Hartman-Watson

Or, de très gros problèmes numériques surviennent dans la simulation de la densité de $A_t^{(v)}$ ou de $f_r(t)$ lorsque t est petit. Ces difficultés numériques ont été largement signalées dans la littérature et sont communes aux différentes approches : on peut entre autres citer D. Dufresne (remarque de la page 235 de l'article [11]) ou encore R. Gould dans son mémoire de fin d'études [19].

[2] Cette expression de la densité de Hartman-Watson a été obtenue par M. Yor dans l'article sur la loi du lacet Brownien, en 1980 ([20]).

Nous considérons ici l'approche développée par M. Yor [54]. Ainsi, la simulation de $\theta_r(t)$ est extrêmement délicate (oscillations infinies négatives et positives !...) : en effet, lorsque t tend vers 0, un gros problème numérique se pose puisque $\exp\left(\frac{\pi^2}{2t}\right)$ tend rapidement vers l'infini et que $\sin\left(\frac{\pi y}{t}\right)$ oscille de plus en plus. La fréquence et la taille des oscillations augmentent conjointement lorsque t tend vers 0. Les figures ci-dessous représentent l'évolution de $\frac{\pi}{r}\theta_r(t)$ en fonction de t, pour $r = 0,5$. Notons que pour $t \gtrapprox 0,13$, l'évolution est très régulière. La forme de la densité est très claire. Mais pour des valeurs plus petites de t, les valeurs simulées pour cette quantité oscillent de plus en plus et peuvent même être négatives ! La représentation est illisible pour des valeurs trop faibles de t. Celles-ci ont été supprimées pour rendre plus compréhensible la figure.

Pour cette raison, nous avons décidé de travailler plus précisément sur la densité de Hartman-Watson et sur son comportement lorsque le paramètre de temps est très petit.

8.2 Etude de la densité de Hartman-Watson

Cette seconde section est consacrée à l'étude de la densité de Hartman-Watson, et en particulier de son comportement lorsque le paramètre de temps tend vers 0. Plusieurs approches sont envisagées afin de mieux comprendre ce qui se passe au voisinage de 0. Mais, ni la théorie des grandes déviations, ni les théorèmes Taubériens, ni la méthode du col, utilisant les nombres complexes ne permettent d'apporter une réponse. Nous présentons tout d'abord quelques rappels sur la densité de Hartman-Watson.

8.2.1 Quelques rappels sur la densité de Hartman-Watson

La distribution de Hartman-Watson $d\eta_r(t)$, de paramètre $r > 0$, est la probabilité sur $\mathbb{R}_+$, caractérisée par sa transformée de Laplace :

$$\frac{I_{|\upsilon|}(r)}{I_0(r)} = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\upsilon^2}{2}t\right) d\eta_r(t) \tag{8.10}$$

La densité $(f_r(t), t \geq 0)$ de η_r a été déterminée par M. Yor dans [54]. Nous rappelons ici les formules et les notations :

$$f_r(t) = \frac{1}{I_0(r)}\theta_r(t) \tag{8.11}$$

où :
$$\theta_r(t) = \frac{r}{\sqrt{2\pi^3 t}} \exp\left(\frac{\pi^2}{2t}\right) \Psi_r(t) \tag{8.12}$$
et :
$$\Psi_r(t) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) \exp\left(-r\cosh(y)\right) \sinh(y) \sin\left(\frac{\pi y}{t}\right) dy \tag{8.13}$$
Notons que :
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \Psi_r(t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-r\cosh(B_t)\right)\sinh(B_t)\sin\left(\frac{\pi B_t}{t}\right)\right]$$
où $(B_t)_{t\geq 0}$ désigne un mouvement Brownien réel standard.

8.2.2 Propriétés d'intégrabilité de l'inverse d'une variable aléatoire de Hartman-Watson

Dans ce qui suit, nous notons simplement H_r une variable aléatoire, qui est distribuée selon η_r, i.e. ayant la distribution de Hartman-Watson de paramètre r. Dans un premier temps, nous présentons quelques propriétés d'intégrabilité de cette variable H_r.

Theorem 29 *$i)$ Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Alors :*
$$\mathbb{E}\left[(H_r)^\alpha\right] < \infty \qquad ssi \;\; \alpha < \frac{1}{2}$$
$ii)$ Pour tout $\mu > 0$,
$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\mu}{H_r}\right)\right] < \infty$$
Ainsi, pour tout $p > 0$,
$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{(H_r)^p}\right] < \infty$$
et pour tout $t > 0$,
$$\mathbb{P}(H_r < t) \leq \exp\left(-\frac{\mu}{t}\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\mu}{H_r}\right)\right]$$

Preuve :

$i)$ Ce premier résultat est une conséquence directe de l'équivalence :
$$f_r(t) \underset{t\to\infty}{\sim} c_r \left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{8.14}$$

qui se déduit des formules (8.11), (8.12) et (8.13) avec :

$$c_r = \frac{r}{I_0(r)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp(-r\cosh(y)) \sinh(y)\, y dy$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_0(r)}{I_0(r)}$$

après intégration par parties.

ii) Pour obtenir ce second résultat, nous ne nous référons pas directement à la formulation intégrale (à l'aide de la formule (8.13)) de $f_r(t)$, mais nous utilisons quelques expressions classiques des moments négatifs d'une variable aléatoire positive X en termes de sa transformée de Laplace.

Ces formules sont les suivantes[3] :

Lemma 30 *Soit $X > 0$ p.s., alors les formules suivantes prévalent :*

a) Pour tout $p > 0$:

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{X^p}\right] = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty dv \left(\frac{v^{2p-1}}{2^{p-1}}\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{v^2}{2}X\right)\right]$$

b) Pour tout $\mu > 0$,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\mu}{X}\right)\right] = 1 + \int_0^\infty dv I_1(v)\, \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{v^2}{4\mu}X\right)\right]$$

Preuve du Lemme :

a) Cette formule très connue est une conséquence directe du théorème de Fubini et du fait que :

$$\frac{1}{x^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty dv \left(\frac{v^{2p-1}}{2^{p-1}}\right) \exp\left(-\frac{v^2}{2}x\right)$$

b) Nous utilisons a), le développement de :

$$\exp\left(\frac{\mu}{x}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{n! x^n}$$

et les développements en série de :

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1} \frac{1}{(k+1)!\Gamma(k+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n-1} \frac{1}{n!\Gamma(n)} \end{aligned}$$

[3] On trouve des applications de la formule *b*) de ce Lemme dans D. Dufresne [12].

Ce qui conduit à :

$$\exp\left(\frac{\mu}{x}\right) = 1 + \int_0^\infty dv I_1(v) \exp\left(-\frac{v^2}{4\mu}x\right)$$

■

Retour à la preuve du Théorème 29

Nous utilisons la partie b) du Lemme, avec les résultats asymptotiques connus suivants :

$$I_1(v) \underset{v\to\infty}{\sim} \frac{\exp(v)}{\sqrt{2\pi v}} \tag{8.15}$$

$$I_v(r) \underset{v\to\infty}{\sim} \left(\frac{r}{2}\right)^v \frac{1}{\Gamma(v+1)} \underset{v\to\infty}{\sim} \left(\frac{r}{2}\right)^v \frac{\exp(-v(\log v - 1))}{\sqrt{2\pi v}} \tag{8.16}$$

(la dernière équivalence est une conséquence de la formule de Stirling)

Nous utilisons alors simultanément les formules (8.14) et (8.15), ce qui permet d'obtenir la finitude de l'expression b) pour $X = H_r$.

Les deux conséquences présentées à la fin du Théorème 29 sont immédiates, en utilisant par exemple l'inégalité de Tchebitcheff. ■

D'autre part, en poursuivant l'étude de la variable aléatoire H_r en vue d'une meilleure compréhension de la densité de Hartman-Watson, nous nous sommes intéressés à la théorie des grandes déviations, qui permet (parfois) d'avoir une idée du comportement asymptotique de certaines distributions en "zoomant" sur les zones limites. Grâce à l'aide de Alain Rouault, nous avons pu obtenir deux résultats asymptotiques sur la fonction de répartition de Hartman-Watson. Ceux-ci sont présentés dans les deux propositions suivantes. Toutefois, nous ne savons pas étendre ces asymptotiques à la densité de Hartman-Watson elle-même.

Proposition 31 *Soit H_r une variable aléatoire ayant la distribution de Hartman-Watson de paramètre r. Alors :*

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{\left(\log\left(\frac{1}{h}\right)\right)^2} \log \mathbb{P}(H_r < h) = -\frac{1}{2}$$

Preuve :

La formule (8.16) donne un équivalent de $I_v(r)$ lorsque v tend vers l'infini :

$$I_v(r) \underset{v\to\infty}{\sim} \left(\frac{r}{2}\right)^v \frac{\exp(-v(\log v - 1))}{\sqrt{2\pi v}}$$

Comme, pour tout $w \geq 0$ et tout $\alpha \geq 0$ donné :

$$\mathbb{E}[\exp(-\alpha w H_r)] = \frac{I_{\sqrt{2\alpha w}}(r)}{I_0(r)}$$

on peut déduire :

$$\lim_{w\to\infty}\frac{1}{\sqrt{w}\log w}\log\mathbb{E}\left[\exp\left(-\alpha w H_r\right)\right]=-\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$$

Selon une version particulière du théorème de Gärtner-Ellis (voir par exemple Q. Liu et A. Rouault [30] pour un énoncé détaillé et une preuve précise de ce théorème), nous pouvons écrire pour tout $y>0$:

$$\lim_{w\to\infty}\frac{1}{\sqrt{w}\log w}\log\mathbb{P}\left[\frac{\sqrt{w}}{\log w}H_r<y\right]=-\frac{1}{8y}$$

Pour $y=1$ et $h=\frac{\log w}{\sqrt{w}}>0$, nous avons :

$$\begin{array}{rcl} h & \to & 0 \text{ si } w\to\infty \\ w & \sim & \dfrac{4\left(\log\frac{1}{h}\right)^2}{h^2} \end{array}$$

Finalement, nous obtenons :

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{\left(\log\left(\frac{1}{h}\right)\right)^2}\log\mathbb{P}\left(H_r<h\right)=-\frac{1}{2}$$

■

Proposition 32 *Soit* $(R_s)_{s\geq}$ *un processus de Bessel de dimension deux. Alors :*

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{\left(\log\left(\frac{1}{h}\right)\right)^2}\log\mathbb{P}\left(\int_0^1\frac{ds}{R_s^2}<h\right)=-\frac{1}{8}$$

Preuve :

Pour $v\geq 0$:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{v^2}{2}\int_0^1\frac{ds}{R_s^2}\right)\mid R_0=a\ ;\ R_1=y\right]=\frac{I_v\left(r\right)}{I_0\left(r\right)}\qquad\text{avec } r=ay$$

La densité de R_1, conditionnellement à $R_0=a$, est donnée par :

$$f_{R_1}\left(y\right)_{|R_0=a}=I_0\left(ay\right)y\exp\left(-\frac{a^2+y^2}{2}\right)$$

La formule (8.16) donne un équivalent de $I_v\left(ay\right)$ lorsque v tend vers l'infini :

$$I_v\left(ay\right)\underset{v\to\infty}{\sim}\left(\frac{ay}{2}\right)^v\frac{1}{\Gamma\left(v+1\right)}$$

Alors, en conditionnant uniquement par rapport à la position initiale du processus de Bessel et en écrivant v sous la forme $\sqrt{2\alpha w}$ avec α et w deux réels positifs :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{v^2}{2}\int_0^1 \frac{ds}{R_s^2}\right) \mid R_0 = a\right] &= \int_0^\infty \frac{I_{\alpha w}(ay)}{I_0(ay)} f_{R_1}(y)_{|R_0=a}\, dy \\
&= \int_0^\infty \frac{I_{\alpha w}(ay)}{I_0(ay)} I_0(ay)\, y \exp\left(-\frac{a^2+y^2}{2}\right) dy \\
&= \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right)\int_0^\infty I_{\alpha w}(ay)\, y \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy
\end{aligned}$$

En faisant tendre w vers l'infini, pour tout $\alpha \geq 0$ donné, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{I_{\alpha w}(ay)}{I_0(ay)} f_{R_1}(y)_{|R_0=a}\, dy \\
&\underset{w\to\infty}{\sim} \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right)\int_0^\infty \left(\frac{ay}{2}\right)^{\alpha w} \frac{1}{\Gamma(\alpha w+1)} y \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = \frac{\exp\left(-\frac{a^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha w+1}{2}\right)}\left(\frac{a^2}{8}\right)^{\frac{\alpha w}{2}}\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

On peut en déduire :

$$\lim_{w\to\infty} \frac{1}{\sqrt{w}\log w} \log \mathbb{E}\left[\exp\left(-\alpha w \int_0^1 \frac{ds}{R_s^2}\right)\right] = -\sqrt{\frac{\alpha}{8}}$$

En utilisant une version particulière du théorème de Gärtner-Ellis (voir Q. Liu et A. Rouault [30] par exemple), on peut finalement écrire pour tout $y > 0$:

$$\lim_{w\to\infty} \frac{1}{\sqrt{w}\log w} \log \mathbb{P}\left[\frac{\sqrt{w}}{\log w}\int_0^1 \frac{ds}{R_s^2} < y\right] = -\frac{1}{32y}$$

Pour $y = 1$ et $h = \frac{\log w}{\sqrt{w}} > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}
h &\rightarrow 0 \text{ si } w \rightarrow \infty \\
w &\sim \frac{4\left(\log \frac{1}{h}\right)^2}{h^2}
\end{aligned}$$

et finalement :

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{\left(\log\left(\frac{1}{h}\right)\right)^2} \log \mathbb{P}\left(\int_0^1 \frac{ds}{R_s^2} < h\right) = -\frac{1}{8}$$

■

Remarque : La formule (8.14) donne directement le comportement de la densité f_r lorsque t tend vers l'infini :

$$f_r(t) \underset{t\to\infty}{\sim} c_r\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$$

avec :

$$c_r = \frac{r}{I_0(r)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \exp(-r\cosh(y))\sinh(y)\,y\,dy = \frac{K_0(r)}{I_0(r)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

En utilisant une intégration par parties et la définition de $K_0(r)$, i.e. :

$$K_0(r) = \int_0^\infty \exp(-r\cosh(y))\,dy$$

le résultat suivant sur la fonction de répartition peut être obtenu :

$$\mathbb{P}(H_r \geq t) = \int_t^\infty f_r(u)\,du \underset{t\to\infty}{\sim} c_r\int_t^\infty \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}du = \frac{2c_r}{\sqrt{t}} = \frac{K_0(r)}{I_0(r)}\sqrt{\frac{2}{\pi t}}$$

ce qui est cohérent avec le résultat de K.D. Elworthy, X.M. Li et M. Yor ([13]) qui donnent :

$$\lim_{t\to\infty}\sqrt{t}P(H_r \geq t)$$

8.2.3 Pertinence des théorèmes Tauberiens

Dans la poursuite de nos recherches sur le comportement asymptotique de f_r lorsque t tend vers 0, nous considérons désormais les théorèmes Taubériens, sous la forme trouvée dans l'ouvrage de W. Feller ([17], Corollaire p 421) :

Theorem 33 *Soit $(F(t), t \geq 0)$ la fonction de répartition de la variable $X > 0$, et $\mathcal{L}(\lambda) = \mathbb{E}[\exp(-\lambda X)]$, $\lambda > 0$, sa transformée de Laplace.*
Supposons qu'il existe $a > 1$ tel que :

$$\frac{\mathcal{L}(\lambda a)}{\mathcal{L}(\lambda)} \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Alors :

$$\frac{1}{\mathcal{L}\left(\frac{1}{t}\right)}F(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

En conséquence, il existe une constante C telle que :

$$F(t) \leq C\mathcal{L}\left(\frac{1}{t}\right)$$

Notons que ceci implique :

$$F(t) \leq C\Phi\left(\sqrt{\frac{2}{t}}\right)$$

où :

$$\Phi(x) = \left(\frac{r}{2}\right)^x \frac{\exp(-x(\log x - 1))}{\sqrt{2\pi x}}$$

Comme :

$$\mathcal{L}_r(\lambda) \triangleq \mathbb{E}[\exp(-\lambda H_r)] = \frac{I_{\sqrt{2\lambda}}(r)}{I_0(r)}$$

nous avons :

$$\mathcal{L}_r\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{I_{\sqrt{\frac{2}{t}}}(r)}{I_0(r)}$$

et :

$$I_{\sqrt{\frac{2}{t}}}(r) \underset{t\to 0}{\sim} \left(\frac{r}{2}\right)^{\sqrt{\frac{2}{t}}} \frac{\exp\left(-\sqrt{\frac{2}{t}}\left(\log\sqrt{\frac{2}{t}} - 1\right)\right)}{\sqrt{2\pi\sqrt{\frac{2}{t}}}}$$

Ce résulat est beaucoup plus faible que celui engendré par le Théorème 29. En conséquence, les théorèmes Taubériens ne semblent pas être la bonne méthode pour aborder ce problème.

8.2.4 Une étude directe de la représentation intégrale de la densité de Hartman-Watson

Dans cette section, nous étudions directement la représentation intégrale de la densité de Hartman-Watson, ou plus précisément d'une fonction ayant la même dépendance en t. Ainsi, comme :

$$f_r(t) = \frac{1}{I_0(r)}\theta_r(t)$$

nous allons étudier plus précisément :

$$\frac{\pi}{r}\theta_r(t) = \frac{\exp\left(\frac{\pi^2}{2t}\right)}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right)\exp(-r\cosh(y))\sinh(y)\sin\left(\frac{\pi y}{t}\right)dy$$

qui a la même dépendance en t que $f_r(t)$.

Espérance d'une fonctionnelle du mouvement Brownien et th éorème de Cauchy

Notons qu'il est possible d'exprimer $\frac{\pi}{r}\theta_r(t)$ comme l'espérance d'une fonctionnelle d'un mouvement Brownien $(B_t)_{t\geq 0}$. Ainsi :

$$\frac{\pi}{r}\theta_r(t) = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{\pi^2}{2t}\right)\mathbb{E}\left[\exp\left(-r\cosh\left(B_t\right)\right)\sinh\left(B_t\right)\sin\left(\frac{\pi B_t}{t}\right)\right]$$

Posons $u = \frac{1}{t}$, alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}B_t &= uB_{\frac{1}{u}} \triangleq \widetilde{B}_u \quad \text{où } \left(\widetilde{B}_u\right)_{u\geq 0} \text{ est un mouvement Brownien} \\ B_t &= B_{\frac{1}{u}} = \frac{1}{u}\left(uB_{\frac{1}{u}}\right) = \frac{1}{u}\widetilde{B}_u \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{r}\theta_r\left(\frac{1}{u}\right) &= \frac{1}{2}\exp\left(\frac{\pi^2 u}{2}\right)\mathbb{E}\left[\exp\left(-r\cosh\left(\frac{1}{u}\widetilde{B}_u\right)\right)\sinh\left(\frac{1}{u}\widetilde{B}_u\right)\sin\left(\pi\widetilde{B}_u\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{\exp\left(\frac{\pi^2 u}{2}\right)\mathbb{E}\left[\exp\left(-r\cosh\left(\frac{1}{u}\widetilde{B}_u\right)\right)\sinh\left(\frac{1}{u}\widetilde{B}_u\right)\exp\left(i\pi\widetilde{B}_u\right)\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{\exp\left(\frac{\pi^2 u}{2}\right)\mathbb{E}\left[H\left(\frac{\widetilde{B}_u}{u}\right)\exp\left(i\pi\widetilde{B}_u\right)\right]\right\} \end{aligned}$$

où :

$$H(x) = \exp\left(-r\cosh(x)\right)\sinh(x)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{r}\theta_r\left(\frac{1}{u}\right) &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{\exp\left(\frac{\pi^2 u}{2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2u}\right)}{\sqrt{2\pi u}}H\left(\frac{x}{u}\right)\exp(i\pi x)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{\exp\left(\frac{\pi^2 u}{2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{\exp\left(-\frac{\left((x-i\pi u)^2+\pi^2u^2\right)}{2u}\right)}{\sqrt{2\pi u}}H\left(\frac{x}{u}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{\exp\left(-\frac{(x-i\pi u)^2}{2u}\right)}{\sqrt{2\pi u}}H\left(\frac{x}{u}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{\int_{D_u} dz\frac{\exp\left(-\frac{z^2}{2u}\right)}{\sqrt{2\pi u}}H\left(\frac{z}{u}+i\pi\right)\right\} \end{aligned}$$

où $D_u = \{z = x - i\pi u; x \in \mathbb{R}\}$ est une droite horizontale dans le plan complexe $\mathbb{C}$.

En utilisant le théorème de Cauchy, nous pouvons écrire :

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{D_u} dz \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{2u}\right)}{\sqrt{2\pi u}} H\left(\frac{z+i\pi u}{u}\right) \\
= &\lim_{\substack{a\to+\infty \\ \varepsilon\to 0}} \left\{ -\int\limits_{D_\varepsilon} dz \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{2u}\right)}{\sqrt{2\pi u}} H\left(\frac{z+i\pi\varepsilon}{u}\right) - \int\limits_{-\pi u}^{-\pi\varepsilon} dyF\left(a+iy\right) - \int\limits_{-\pi\varepsilon}^{-\pi u} dyF\left(-a+iy\right) \right\}
\end{aligned}
$$

où :

$$
F\left(x+iy\right) = \frac{\exp\left(-\frac{(x+iy)^2}{2u}\right)}{\sqrt{2\pi u}} H\left(\frac{x+iy}{u}\right)
$$

Alors :

$$
\frac{\pi}{r}\theta_r\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c}
\operatorname{Im}\left\{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{D_\varepsilon} dz\frac{\exp\left(-\frac{z^2}{2u}\right)}{\sqrt{2\pi u}}H\left(\frac{z+i\pi\varepsilon}{u}\right)\right\} \\
+\operatorname{Im}\left\{\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ a\to\infty}}\left(\int\limits_{-\pi u}^{-\pi\varepsilon} dyF\left(a+iy\right) + \int\limits_{-\pi\varepsilon}^{-\pi u} dyF\left(-a+iy\right)\right)\right\}
\end{array}\right]
$$

Mais, d'une part :

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{D_\varepsilon} dz \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{2u}\right)}{\sqrt{2\pi u}} H\left(\frac{z+i\pi\varepsilon}{u}\right) = \int\limits_{-a}^{a} dx \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2u}\right)}{\sqrt{2\pi u}} H\left(\frac{x}{u}\right)
$$

et :

$$
\operatorname{Im}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{D_\varepsilon} dz \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{2u}\right)}{\sqrt{2\pi u}} H\left(\frac{z+i\pi\varepsilon}{u}\right)\right\} = \operatorname{Im}\left\{\int\limits_{-a}^{a} dx \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2u}\right)}{\sqrt{2\pi u}} H\left(\frac{x}{u}\right)\right\} = 0
$$

Et, d'autre part, pour a donné :

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_{-\pi u}^{-\pi\varepsilon} dyF\left(a+iy\right) + -\int\limits_{-\pi\varepsilon}^{-\pi u} dyF\left(-a+iy\right)\right\} = \int\limits_{-\pi u}^{-\pi u} dyF\left(a+iy\right)
$$

et :

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{-\pi u}^{-\pi u} dyF\left(a+iy\right) \\
= &\int\limits_{-\pi u}^{-\pi u} dy \frac{\exp\left(-\frac{(a+iy)^2}{2u}\right)}{\sqrt{2\pi u}} \exp\left(-r\cosh\left(a+iy\right)\right)\sinh\left(a+iy\right) \\
= &\int\limits_{-\pi u}^{-\pi u} dy \left\{\begin{array}{c}
\frac{\exp\left(-\frac{a^2-y^2}{2u}\right)}{\sqrt{2\pi u}} \sin\left(\frac{ay}{u}\right)\exp\left(r\left(\cosh\frac{y}{u}\cos\frac{a}{u}+\sinh\frac{y}{u}\sin\frac{a}{u}\right)\right) \\
\times\left(\cosh\frac{y}{u}\sin\frac{a}{u}+\sinh\frac{y}{u}\cos\frac{a}{u}\right)
\end{array}\right\}
\end{aligned}
$$

D'où :

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi}{r}\theta_r\left(\frac{1}{u}\right)\\
= \quad & -\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left\{\lim_{a\to\infty}\int_{-\pi u}^{-\pi u} dy\left\{\begin{array}{c}\frac{\exp\left(-\frac{a^2-y^2}{2u}\right)}{\sqrt{2\pi u}}\sin\left(\frac{ay}{u}\right)\exp\left(r\left(\cosh\frac{y}{u}\cos\frac{a}{u}+\sinh\frac{y}{u}\sin\frac{a}{u}\right)\right)\\ \times\left(\cosh\frac{y}{u}\sin\frac{a}{u}+\sinh\frac{y}{u}\cos\frac{a}{u}\right)\end{array}\right\}\right\}
\end{aligned}$$

si une telle limite existe.

Commentaires : L'introduction des nombres complexes pour résoudre ce problème d'asymptotique n'est pas triviale. La méthode du col (cf. annexe pour plus de détails sur cette technique), généralement utilisée pour ce type de questions, ne fonctionne pas ici, la fonction intégrée étant un cas limite d'utilisation de cette technique. Toutefois, c'est dans cette voie que nous poursuivons actuellemet nos recherches, en travaillant notamment sur l'article de D. Dufresne ([11]), qui propose une formulation complexe de la densité de $\frac{1}{2A_t^{(\mu)}}$, notamment pour $\mu = 0$ et $\mu = 1$ (cf. les équations (8.7) et (8.9)).

Remarque plus générale

Dans cette sous-section, nous présentons un résultat dépassant le cadre du problème d'origine et étudions la quantité suivante :

$$\exp\left(\frac{\pi^2}{2t}\right)\mathbb{E}\left[\int d\mu\left(a\right)\exp\left(aB_t\right)\sinh\left(B_t\right)\sin\left(\frac{\pi B_t}{t}\right)\right]$$

pour une mesure donnée μ, satisfaisant certaines conditions d'intégrabilité.

Proposition 34 *Sous certaines conditions d'intégrabilité sur la mesure μ, la relation suivante prévaut :*

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{\pi^2}{2t}\right)\mathbb{E}\left[\int d\mu\left(a\right)\exp\left(aB_t\right)\sinh\left(B_t\right)\sin\left(\frac{\pi B_t}{t}\right)\right]\\
= -2\int d\mu\left(a\right)\sin\left(\pi a\right)\sinh\left(at\right)\exp\left(\frac{t}{2}\left(1+a^2\right)\right)
\end{aligned}$$

Notons que, pour toute mesure μ à support inclus dans $\mathbb{Z}$:

$$\exp\left(\frac{\pi^2}{2t}\right)\mathbb{E}\left[\int d\mu\left(a\right)\exp\left(aB_t\right)\sinh\left(B_t\right)\sin\left(\frac{\pi B_t}{t}\right)\right] = 0$$

Preuve :

Nous modifions l'expression en utilisant les représentations exponentielles de sinh et sin :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\int d\mu\left(a\right)\exp\left(aB_t\right)\sinh\left(B_t\right)\sin\left(\frac{\pi B_t}{t}\right)\right] \\
= \quad & \frac{1}{4i}\mathbb{E}\left[\int d\mu\left(a\right)\exp\left(aB_t\right)\left(\begin{array}{c} \left(\exp\left(B_t\right)-\exp\left(-B_t\right)\right) \\ \times\left(\exp\left(\frac{i\pi B_t}{t}\right)-\exp\left(-\frac{i\pi B_t}{t}\right)\right) \end{array}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \quad & \frac{1}{4i}\mathbb{E}\left[\int d\mu\left(a\right)\left\{\begin{array}{c} \exp\left(\left(a+1+i\frac{\pi}{t}\right)B_t\right)-\exp\left(\left(a+1-i\frac{\pi}{t}\right)B_t\right) \\ -\exp\left(\left(a-1+i\frac{\pi}{t}\right)B_t\right)+\exp\left(\left(a-1-i\frac{\pi}{t}\right)B_t\right) \end{array}\right\}\right] \\
= \quad & \frac{1}{4i}\int d\mu\left(a\right)\mathbb{E}\left[\begin{array}{c} \exp\left(\left(a+1+i\frac{\pi}{t}\right)B_t\right)-\exp\left(\left(a+1-i\frac{\pi}{t}\right)B_t\right) \\ -\exp\left(\left(a-1+i\frac{\pi}{t}\right)B_t\right)+\exp\left(\left(a-1-i\frac{\pi}{t}\right)B_t\right) \end{array}\right] \\
= \quad & \frac{1}{4i}\int d\mu\left(a\right)\left[\begin{array}{c} \exp\left(\left(a+1+i\frac{\pi}{t}\right)^2\frac{t}{2}\right)-\exp\left(\left(a+1-i\frac{\pi}{t}\right)^2\frac{t}{2}\right) \\ -\exp\left(\left(a-1+i\frac{\pi}{t}\right)^2\frac{t}{2}\right)+\exp\left(\left(a-1-i\frac{\pi}{t}\right)^2\frac{t}{2}\right) \end{array}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \quad & \int d\mu\left(a\right)\exp\left(-\frac{\pi^2}{2t}\right)\left[\begin{array}{c} \exp\left(\left(a+1\right)^2\frac{t}{2}\right)\sin\left(a\pi+\pi\right) \\ -\exp\left(\left(a-1\right)^2\frac{t}{2}\right)\sin\left(a\pi-\pi\right) \end{array}\right] \\
= \quad & -2\exp\left(-\frac{\pi^2}{2t}\right)\int d\mu\left(a\right)\left[\sin\left(a\pi\right)\exp\left(\left(a^2+1\right)\frac{t}{2}\right)\sinh\left(at\right)\right]
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
& \exp\left(\frac{\pi^2}{2t}\right)E\left[\int d\mu\left(a\right)\exp\left(aB_t\right)\sinh\left(B_t\right)\sin\left(\frac{\pi B_t}{t}\right)\right] \\
= \quad & = -2\int d\mu\left(a\right)\sin\left(\pi a\right)\sinh\left(at\right)\exp\left(\frac{t}{2}\left(1+a^2\right)\right)
\end{aligned}$$

De plus, comme $\sin\left(a\pi\right)=0$, pour tout $a\in\mathbb{Z}$, nous obtenons le second résultat de la Proposition. ■

8.3 Annexe : Introduction à la méthode du col

Pour cette présentation, nous nous inspirons très fortement du livre de J. Dieudonné [10].

8.3.1 Quelques résultats préliminaires d'analyse complexe

Définitions et théorème de Cauchy

Dans cette sous-section, nous rappelons quelques définitions et résultats en analyse complexe très importants pour la bonne compréhension de la méthode du col :

Definition 35 *i) Un chemin est une application continue, continûment dérivable par morceaux :*

$$\gamma : I = [a; b] \to \mathbb{C}$$

où I est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, non-réduit à un point.
ii) Un chemin sans fin est une application continue :

$$\gamma : J =]a; b[\to \mathbb{C}$$

où J est un intervalle ouvert (borné ou non) de $\mathbb{R}$, telle que pour tout intervalle fermé I de J, la restriction de γ à I soit un chemin.
iii) Un chemin γ, défini sur $I = [a; b]$, est un lacet si :

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

Definition 36 *Soit D un ensemble ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que la fonction :*

$$f : D \to \mathbb{C}$$

est holomorphe (ou analytique) dans D si pour tout point $z_0 \in D$, il existe un disque ouvert Δ, centré sur z_0 et de rayon fini, contenu dans D tel que, dans ce disque :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

où le second membre est une série entière en $z - z_0$ convergente dans Δ (Notons qu'il s'agit de la convergence d'une série complexe).
Cette définition est à rapprocher de la notion de dérivée : en effet, toute fonction holomorphe dans D admet une dérivée en tout point de D. De plus, cette dérivée est elle-même holomorphe dans D.

Definition 37 *Soient D un ensemble ouvert de $\mathbb{C}$, γ_1 et γ_2 deux lacets contenus dans D, et définis dans le même intervalle $I = [a;b]$.*
On appelle homotopie de γ_1 à γ_2 dans D une application continue :

$$\varphi : I \times J \to D$$

où $J = [c;d]$, telle que :

$$\forall t \in I : \varphi(t,c) = \gamma_1(t) \quad et \quad \varphi(t,d) = \gamma_2(t)$$

γ_1 et γ_2 sont alors dits homotopes.

Definition 38 *Un ensemble ouvert D de $\mathbb{C}$ est connexe si, pour deux points quelconques a et b de D, il existe une fonction linéaire affine par morceaux :*

$$\varphi : [\alpha;\beta] \subset \mathbb{R} \to D$$

telle que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.
L'ensemble D est dit simplement connexe si tout lacet de D est homotope à un point dans D.

Un des théorèmes centraux en analyse complexe est certainement le théorème de Cauchy :

Theorem 39 *Soit $D \subset \mathbb{C}$, un ensemble ouvert connexe et soit f une fonction holomorphe dans D. Si γ_1 et γ_2 sont deux lacets contenus dans D et homotopes comme lacets dans D alors :*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Si D est un ensemble simplement connexe, alors pour tout lacet γ contenu dans D :

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

Méthode de Laplace

La méthode de Laplace permet d'obtenir le comportement d'une fonction définie comme une intégrale lorsque son paramètre tend vers $+\infty$. Cette méthode s'applique à des intégrales de la forme :

$$I(t) = \int_a^b F(t,x)\,dx$$

lorsque t tend vers $+\infty$. Notons que a et b peuvent être finis ou non. On suppose bien évidemment que l'intégrale existe pour t voisin de $+\infty$.

L'idée est de décomposer l'intégrale en deux parties. On essaie alors de se ramener à la situation où t tend vers $+\infty$, a est fini et où, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, l'intégrale $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} F(t,x)\,dx$ est négligeable devant $\int\limits_{a}^{a+\varepsilon} F(t,x)\,dx$. On peut alors remplacer la fonction F par son équivalent en a, noté G (on suppose que celui-ci existe). Ensuite, si tout se passe bien, on calcule un équivalent de $\int\limits_{a}^{a+\varepsilon} G(t,x)\,dx$ lorsque t tend vers $+\infty$. On peut alors montrer que cette quantité est bien la partie principale de $I(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Cela dit, cette méthode nécessite certaines hypothèses relativement fortes sur la fonction F. Nous présentons rapidement le cas classique où :

$$\begin{cases} F(t,x) = g(x)\exp(t.h(x))\,dx \\ a = 0 \\ b = +\infty \end{cases}$$

On suppose que h prend sa plus grande valeur en $x = 0$ (et uniquement en ce point). De plus, $h(0)$ est supposé fini.

D'autre part, on suppose, au voisinage de $x = 0$, les comportements suivants :

$$\begin{aligned} g(x) &\sim Ax^{\alpha} \\ h(x) &= a - cx^{\beta} + o\left(x^{\beta}\right) \end{aligned} \tag{8.17}$$

où :

$$\begin{cases} A \neq 0 \\ \alpha > -1 \\ \beta > 0 \\ c > 0 \end{cases}$$

Alors, en substituant à g sa partie principale et à h les deux premiers termes de son développement, on trouve :

$$A\int\limits_{0}^{\infty} x^{\alpha}\exp\left(t\left[a - cx^{\beta}\right]\right)dx$$

dont on connait la partie principale (lorsque t tend vers $+\infty$) :

$$\frac{A}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}\exp(at)$$

Ceci donne effectivement la partie principale de $I(t)$ sous certaines conditions d'intégrabilité :
i) L'intégrale $\int\limits_0^\infty |g(x)| \exp(h(x))\, dx$ est convergente ;
ii) Il existe un intervalle $[0, a_0]$, tel que, pour $0 < a < a_0$, on a :

$$h(x) \leq h(a) \qquad \text{pour tout } x \geq a$$

iii) Au voisinage de 0, on a les développements donnés en (8.17).

8.3.2 La méthode du col

Dans cette sous-section, nous présentons simplement l'idée générale de la méthode du col. Celle-ci permet de contourner un obstacle, en modifiant le chemin d'intégration. Il s'agit d'une extension, ou plutôt d'un prolongement, de la méthode de Laplace au plan complexe.

Plus précisément, on souhaite étudier le comportement de :

$$I(t) = \int\limits_L g(z) \exp(t.h(z))\, dz$$

lorsque t tend vers $+\infty$. On suppose que L est contenu dans un ensemble ouvert D de $\mathbb{C}$ et que les fonctions g et h sont deux fonctions holomorphes dans D.
D'après le théorème de Cauchy (Théorème 39), pour tout chemin $L^{'}$ dans D, ayant les mêmes extrémités que L, on a :

$$I(t) = \int\limits_{L'} g(z) \exp(t.h(z))\, dz$$

L'idée de la méthode du col est de mettre à profit cette "indépendance" de la valeur de l'intégrale par rapport au chemin d'intégration (les extrêmités du chemin étant fixées). On peut alors choisir le "meilleur" chemin, i.e., par exemple, celui pour lequel on peut appliquer la méthode de Laplace. Ainsi, en utilisant le théorème de Cauchy et le fait que :

$$|\exp(t.h(z))| = \exp[t\, \mathrm{Re}(h(z))]$$

un choix "judicieux" de $L^{'}$ peut correspondre à un chemin sur lequel la partie imaginaire de l'intégrande est nulle (ou tout du moins négligeable devant la partie réelle) et tel que $\mathrm{Re}(h(z))$ atteigne sa plus grande valeur en un seul point de $L^{'}$. On pourra ensuite se ramener au cas où cette valeur maximale est atteinte à l'origine de $L^{'}$ et où cette origine est $z = 0$.

Chapitre 9

Itérés de générateurs infinitésimaux et nombres de Stirling généralisés

Ce chapitre présente les résultats d'un travail réalisé en collaboration avec W. Schoutens et M. Yor portant sur l'étude d'une classe de fonctions harmoniques espace-temps pour certains processus de Lévy. Afin de les énoncer plus clairement, nous procédons tout d'abord à quelques rappels des principales notions utilisées ici : fonctions harmoniques, nombres de Stirling et lien entre polynômes orthogonaux et processus.

Remarque préliminaire : Les résultats obtenus sont présentés sous leur forme originelle, et en particulier, ils sont rédigés en anglais.

9.1 Préliminaires

Dans cette section, nous présentons succintement trois notions abordées dans ce chapitre : il s'agit des fonctions harmoniques, des nombres de Stirling et du lien entre polynômes orthogonaux et processus stochastiques.

9.1.1 Fonctions harmoniques

Cette courte note s'inspire fortement de l'ouvrage de W. Rudin ([42]) support du cours de licence d'analyse réelle et complexe. La théorie associée aux fonctions harmoniques étant extrêmement vaste, il s'agit simplement de rappeler certaines définitions et certaines propriétés liées à l'étude de ces fonctions.

Définition d'une fonction harmonique

On se place sur un ouvert Ω du plan complexe. Si f est une fonction définie sur Ω, deux fois dérivable[1], on peut lui associer l'opérateur Laplacien comme :

$$\Delta f \triangleq \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

De plus, si f posséde des dérivées partielles du second ordre continues alors ses dérivées croisées sont égales :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Dans ce cas, en introduisant les deux opérateurs complexes ∂ et $\overline{\partial}$ suivants :

$$\begin{aligned}\partial &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \overline{\partial} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

on obtient une autre expression du Laplacien de la fonction f comme :

$$\Delta f = 4\partial\overline{\partial} f$$

Definition 40 *La fonction f, définie sur un ouvert du plan Ω, est harmonique si, en tout point de Ω, elle vérifie l'équation de Laplace :*

$$\Delta f = 0$$

Remarque : Comme le Laplacien d'une fonction réelle est réel, une fonction complexe est harmonique dans Ω si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont harmoniques dans Ω.

Une propriété très importante en analyse complexe est que toute fonction holomorphe est harmonique (conséquence directe du théorème de Cauchy). On rappelle qu'une fonction holomorphe est une fonction complexe ayant une "dérivée" en chacun des points de son ensemble de définition.

Représentation des fonctions harmoniques

Les fonctions harmoniques peuvent se représenter sous forme intégrale à l'aide de l'intégrale de Poisson. Avant d'énoncer le théorème de représentation des fonctions harmoniques, nous donnons la définition du noyau de Poisson et de l'intégrale associée.

[1] f est une fonction de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ à valeur dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

Definition 41 *Le noyau de Poisson est défini par la fonction :*

$$(r,t) \in [0,1[\times \mathbb{R} \longmapsto P_r(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|} \exp(int)$$

Definition 42 *Soit f une fonction de $L^1(T)$, où T représente le cercle unité du plan complexe. L'intégrale de Poisson associée à f est définie par :*

$$F(r\exp(i\theta)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P_r(\theta - t) f(t)\, dt$$

Il est également possible de définir l'intégrale de Poisson pour des mesures de Borel complexe sur T.

Il est désormais possible d'énoncer le théorème de représentation des fonctions harmoniques.

Theorem 43 *Soit u une fonction continue et réelle sur le disque unité fermé $\overline{U}$, harmonique dans U. Alors, dans U, u est l'intégrale de Poisson de sa restriction à T et u est la partie réelle de la fonction holomorphe :*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\exp(it)+z}{\exp(it)-z} u(\exp(it))\, dt \qquad \textit{pour } z \in U$$

Notons que ce théorème peut être étendu à d'autres disques que le disque unité par simple changement de variables.

Si l'on considère des mesures de Borel positives finies sur le cercle unité T, alors l'intégrale de Poisson associée est clairement une fonction harmonique positive sur le disque U. Mais, la réciproque est également vraie : toute fonction harmonique positive dans U peut être obtenue de cette façon. Il exsite même une bijection entre les mesures de Borel positives finies sur T et les fonctions harmoniques positives dans U. L'étude des fonctions harmoniques positives est de ce fait très importante et en relation étroite avec la théorie des probabilités (cf. par exemple le livre de R. Pinsky [38]).

9.1.2 Nombres de Stirling

Quelques rappels sur les nombres de Stirling "classiques"

Cette section se fonde essentiellement sur le Chapitre 24 de M. Abramovitz et I. Stegun [1]. Nous rappelons les définitions des nombres de Stirling de première et de deuxième catégories ainsi que quelques relations fondamentales les concernant. Nous verrons dans la deuxième section comment ces relations sont étendues dans le cas de généralisation de nombres de Stirling.

Nombres de Stirling de première catégorie Les nombres de Stirling de première catégorie dépendent de deux paramètres entiers, n et m, et sont notés $S_n^{(m)}$, pour $n \geq m \geq 0$.

Definition 44 *Soient deux entiers naturels n et m tels que $n \geq m \geq 0$.*
$(-1)^{n-m}\ S_n^{(m)}$ correspond au nombre de permutations de n éléments ayant exactement m cycles.

De façon plus précise, les nombres de Stirling de première catégorie peuvent s'écrire à l'aide de fonctions génératrices comme :

$$x\,(x-1)\,...\,(x-n+1) = \sum_{m=0}^{n} S_n^{(m)} x^m \tag{9.1}$$

ou encore, pour $|x| < 1$:

$$(\ln(1+x))^m = m! \sum_{n=m}^{\infty} S_n^{(m)} \frac{x^n}{n!} \tag{9.2}$$

Enfin, une relation de récurrence importante est la suivante :

$$S_{n+1}^{(m)} = S_n^{(m-1)} - n S_n^{(m)} \tag{9.3}$$

Nombres de Stirling de deuxième catégorie De façon similaire, les nombres de Stirling de deuxième catégorie dépendent de deux paramètres entiers, n et m, et sont notés $\sigma_n^{(m)}$, pour $n \geq m \geq 0$.

Definition 45 *Soient deux entiers naturels n et m tels que $n \geq m \geq 0$.*
$\sigma_n^{(m)}$ correspond au nombre de partitions d'un ensemble de n éléments en m sous-ensembles non-vides.

De façon plus précise, les nombres de Stirling de deuxième catégorie peuvent s'écrire à l'aide de fonctions génératrices comme :

$$x^n = \sum_{m=0}^{n} \sigma_n^{(m)} x\,(x-1)\,...\,(x-m+1) \tag{9.4}$$

ou encore :

$$(\exp x - 1)^m = m! \sum_{n=m}^{\infty} \sigma_n^{(m)} \frac{x^n}{n!} \tag{9.5}$$

Enfin, une relation de récurrence importante est la suivante :

$$\sigma_{n+1}^{(m)} = m\sigma_n^{(m)} + \sigma_n^{(m-1)} \tag{9.6}$$

Relation entre les nombres de Stirling de première et de deuxi ème catégories D'après ce qui précède, on peut noter que les nombres de Stirling de première et de deuxième catégories ne sont pas sans rapport. Une relation fondamentale est la suivante :

$$\sum_{k=m}^{n} \sigma_n^{(k)} S_k^{(m)} = \sum_{k=m}^{n} S_n^{(k)} \sigma_k^{(m)} = \delta_{m,n} \quad \left(\text{i.e.} \quad \begin{array}{ll} = 1 & \text{si } m = n \\ = 0 & \text{sinon} \end{array} \right) \tag{9.7}$$

Généralisation des nombres de Stirling

Plusieurs généralisations des nombres de Stirling ont été envisagées dans la littérature. L'article de L.C. Hsu et P.J.S. Shiue [20] présente une unification paramétrique de ces différentes approches. Pour cette raison, nous reprenons ici les grandes lignes de cette étude.

Définition d'un couple de nombres de Stirling généralisés La notion de factorielle généralisée est indispensable à préciser avant de définir la famille paramétrique des nombres de Stirling généralisés.

Definition 46 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}$, on définit la factorielle généralisée d'incrément α par :*

$$(z \mid \alpha)_n \triangleq z(z-\alpha)\ldots(z-n\alpha+\alpha)$$

Par convention, on pose :

$$(z \mid \alpha)_0 = 1$$

Pour tout couple d'entiers naturels n et m tels que $n \geq m \geq 0$, L.C. Hsu et P.J.S. Shiue définissent, dans leur article [20], une famille paramétrique de couples de nombres de Stirling généralisés à l'aide de trois paramètres supplémentaires $(\alpha, \beta, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, tels que $(\alpha, \beta, r) \neq (0, 0, 0)$, par :

$$\left\{ S^1(n,m) ; S^2(n,m) \right\}$$

i.e.

$$\begin{aligned} S^1(n,m) &= S(n,m,\alpha,\beta,r) \\ S^2(n,m) &= S(n,m,\beta,\alpha,-r) \end{aligned}$$

Les formules (9.1) et (9.4), définissant les nombres de Stirling de première et de deuxième catégories à l'aide des fonctions génératrices, se généralisent de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
(x \mid \alpha)_n &= \sum_{m=0}^{n} S^1(n,m)\,(x-r \mid \beta)_m && (9.8)\\
(x \mid \beta)_n &= \sum_{m=0}^{n} S^2(n,m)\,(x+r \mid \alpha)_m && (9.9)
\end{aligned}
$$

Remarque : Le cas $(\alpha,\beta,r)=(1,0,0)$ correspond au cas des nombres de Stirling "classiques". Alors :

$$
\begin{aligned}
S^1(n,m) &= S_n^{(m)}\\
S^2(n,m) &= \sigma_n^{(m)}
\end{aligned}
$$

Pour cela, il suffit de comparer les formules (9.1) et (9.8) et les formules (9.4) et (9.9).
D'autre part, les auteurs de [20] reprennent successivement les différentes généralisations des nombres de Stirling et montrent que chacune d'entre elles correspond à un triplet (α,β,r).

Généralisation des relations concernant les nombres de Stirling Les différentes relations présentées dans la première section se généralisent facilement au cas des nombres de Stirling généralisés. Ainsi, la formule (9.7) liant les deux catégories de nombres de Stirling devient :

$$\sum_{k=m}^{n} S^1(n,k)\,S^2(k,m)=\sum_{k=m}^{n} S^1(k,m)\,S^2(n,k)=\delta_{m,n} \tag{9.10}$$

Les relations de récurrence (9.3) et (9.6) deviennent :

$$
\begin{aligned}
S^1(n+1,m) &= S^1(n,m-1)+(m\beta-n\alpha+r)\,S^1(n,m) && (9.11)\\
S^2(n+1,m) &= S^2(n,m-1)+(m\alpha-n\beta-r)\,S^2(n,m) && (9.12)
\end{aligned}
$$

Enfin, de façon très générale, la fonction génératrice de $S(n,m)=S(n,m,\alpha,\beta,r)$ est donnée pour $\alpha\beta\neq 0$, par :

$$(1+\alpha x)^{\frac{r}{\alpha}}\left(\frac{(1+\alpha x)^{\frac{\beta}{\alpha}}-1}{\beta}\right)^m = m!\sum_{n=m}^{\infty} S(n,m)\,\frac{x^n}{n!}$$

Il s'agit d'une généralisation des formules (9.2) et (9.5). Le cas classique $(\alpha,\beta,r)=(1,0,0)$ est un cas limite de cette expression.

9.1.3 Polynômes orthogonaux

Depuis très longtemps, la relation étroite existant entre les processus stochastiques et les polynômes orthogonaux est connue. Ainsi, par exemple, dès 1930, N. Wiener ([52]), puis, de façon plus précise en 1951, K. Itô ([21]) s'intéressent au rôle clé joué par les polynômes d'Hermite dans l'intégration par rapport au mouvement Brownien. D'autres polynômes sont également importants pour certains processus, comme les polynômes de Charlier pour le processus de Poisson et le processus Gamma. Beaucoup d'auteurs se sont intéressés à la relation existant entre ces deux mondes. Parmi la très nombreuse littérature, on peut citer les travaux de H.P. McKean ([34]), P. Feinsilver ([14], [15], [16]), ceux de O. Mazet ([32]) ou encore, plus récemment ceux de W. Schoutens ([43], [44], [45]).

A défaut de présenter les résultats de cette littérature, nous rappelons ici simplement quelques liens existant entre mouvement Brownien et polynômes d'Hermite, ainsi qu'entre processus de Poisson et polynômes de Charlier. (On pourrait encore relier polynômes de Charlier et processus Gamma...).

Mouvement Brownien et polynômes d'Hermite

Soient un espace de probabilité $(\Omega, \Im, \mathbb{P})$ et $(W_t)_{t\geq 0}$ un $\mathbb{P}$-mouvement Brownien. On note $\Im_t$ la filtration naturelle de W. D'autre part, on considère une fonction f appartenant au domaine étendu $D\left(L^{N+1}\right)$ où $N \in \mathbb{N}^*$.

Alors, en appliquant la formule d'Itô à $f\left(W_t\right)$,

$$L(f)(x) = \frac{1}{2} f^{"}(x).$$

et par une simple récurrence :

$$\forall 0 \leq n \leq N+1, \qquad L^n\left(f\right)(x) = \frac{1}{2^n}\frac{d^{2n}f}{dx^{2n}}(x)$$

D'après la proposition 47 de la section suivante, on obtient que

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n}\frac{(-t)^n}{n!}\frac{d^{2n}f}{dx^{2n}}\left(W_t\right) + (-1)^{N+1}\int_0^t ds \frac{1}{2^{N+1}}\frac{s^N}{N!}\frac{d^{2(N+1)}f}{dx^{2(N+1)}}\left(W_s\right)$$

est une $(\mathbb{P}-\Im_t)$-martingale.

Supposons désormais que :

$$f\left(x\right) = x^N$$

Alors :

$$\begin{aligned} X_t^N &\triangleq \sum_{n=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{1}{2^n}\frac{(-t)^n}{n!} N(N-1)\dots(N-2n+1)(W_t)^{N-2n} \\ &= N!\left(\sqrt{2t}\right)^N \sum_{n=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{\left(\frac{W_t}{\sqrt{2t}}\right)^{N-2n}}{(N-2n)!} \end{aligned}$$

est une $(\mathbb{P}-\Im_t)$-martingale.

D'après la définition des polynômes d'Hermite (par exemple, R. Koekoeck et R.F. Swarttouw [24]) :

$$H_N(x) = N!\sum_{n=0}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{(2x)^{N-2n}}{(N-2n)!}.$$

on peut finalement écrire la martingale $\left(X_t^N\right)_{t\geq 0}$ sous la forme :

$$X_t^N = \left(\sqrt{2t}\right)^N H_N\left(\frac{W_t}{\sqrt{2t}}\right)$$

Or d'après le théorème de représentation des martingales, on a également une représentation explicite :

$$X_t^N = X_0^N + \int_0^t h_s^N dW_s$$

avec :

$$h_s^N = N.X_s^{N-1}$$

ce qui souligne le lien étroit existant entre l'intégrale Brownienne et les polynômes d'Hermite.

Beaucoup d'auteurs se sont appuyés sur ce type de décomposition pour obtenir des théorèmes de représentation (cf. par exemple, les travaux sur le drap Brownien de J.B. Walsh [50] ou [51]).

Processus de Poisson et polynômes de Charlier

Soient un espace de probabilité $(\Omega, \Im, \mathbb{P})$ et $(N_t)_{t\geq 0}$ un $\mathbb{P}$-processus de Poisson de paramètre 1. On note M la martingale compensée associée à N, i.e. :

$$M_t = N_t - t$$

et $\Im_t$ la filtration engendrée par M. D'autre part, on considère une fonction f appartenant au domaine étendu $D\left(L^{K+1}\right)$ où $K \in \mathbb{N}^*$.

Alors, en supposant que :

$$f(x) = p_K(x) = \frac{[x]_K}{K!}$$

avec :

$$[x]_n = x(x-1)\dots(x-n+1) \quad \text{for } x \in \mathbb{R}$$

et en appliquant la formule d'Itô à $f(M_t)$, on obtient la relation de récurrence suivante :

$$L(p_K) = p_{K-1},$$

D'après la proposition 47 de la section suivante, on obtient que

$$X_t^K \triangleq \sum_{n=0}^{K} \frac{(-t)^n}{n!} L_e^n(p_K)(M_t) = \sum_{n=0}^{K} \frac{(-t)^n}{n!} p_{K-n}(M_t) = \sum_{n=0}^{K} \frac{(-t)^n}{n!} \frac{[M_t]_{K-n}}{(K-n)!}$$

est une $(\mathbb{P}-\Im_t)$-martingale.

D'après la définition des polynômes de Charlier dont le coefficient de plus haut degré est égal à 1 (par exemple, R. Koekoeck et R.F. Swarttouw [24]) :

$$C_K(x,t) = K! \sum_{n=0}^{K} \frac{[x]_{K-n}}{(K-n)!} \frac{(-t)^n}{n!}$$

on peut finalement écrire la martingale $\left(X_t^K\right)_{t \geq 0}$ sous la forme :

$$X_t^K = \frac{C_K(M_t, t)}{K!}$$

Or d'après le théorème de représentation des martingales, on a également une représentation explicite :

$$X_t^K = X_0^K + \int_0^t c_s^K dM_s$$

avec :

$$c_s^K = K.X_{s^-}^{K-1}$$

ce qui souligne le lien étroit existant entre l'intégrale par rapport à la martingale compensée du processus de Poisson et les polynômes de Charlier.

9.2 Itérés de générateurs infinitésimaux

Warning :

a) We have learnt from J. Pitman that most of the results in this paper are particular cases of the well-developed theory of polynomials of binomial type, delta operators, basic sequences.... See in particular Exercise 5.37 in R.P. Stanley ([48]), as well as in P. Feinsilver ([14]) and P. Feinsilver and R. Schott ([16]).

b) As a consequence, this paper is not intended for publication, except from being part of this thesis.

c) Despite this, the arguments used below are of probabilistic nature, and may help a "random" reader to have access to some of the combinatorics literature mentioned in *a*).

For more details on the theory of polynomials of binomial type, we refer also to Jim Pitman's lecture at Ecole d'été de Saint Flour ([39]).

9.2.1 Introduction and main results

Notation for subordinators

Let $(X_t)_{t\geq 0}$ be a general subordinator with no drift and Lévy measure $\nu(dy)$ such that :

$$\text{for some } \varepsilon > 0, \qquad \int_0^\infty \nu(dy)\left(\exp(\varepsilon y) - 1\right) < \infty \tag{9.13}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{for some } \varepsilon' > 0, \qquad \int_0^\infty \nu(dy)\, y \exp\left(\varepsilon' y\right) < \infty$$

Denote, for any $\xi > 0$, the associated Lévy exponent :

$$\Psi(\xi) = \int_0^\infty \nu(dy)\left(1 - \exp(-\xi y)\right)$$

so that $\{\exp(-\xi X_t + \Psi(\xi)\, t), t \geq 0\}$ is a martingale.

We write :

$$Lf(x) = \int \nu(dy)\left[f(x+y) - f(x)\right],$$

which is well defined for any polynomial f, and is the expression of the infinitesimal generator of X, acting on f.

We denote by $\mathcal{P}_n$ the space of polynomials of degree less than or equal to n and we note that :

$$L(\mathcal{P}_n) \subseteq \mathcal{P}_{n-1}$$

Indeed, if :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k . x^k$$

then :

$$L(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{f}_k . x^k$$

where :

$$\widetilde{f}_k = \sum_{l=k}^{n-1} C_{l+1}^{k} . f_{l+1} . \nu_{(l+1-k)} \tag{9.14}$$

with $\nu_{(m)} = \int \nu(dy)\, y^m \qquad (< \infty,\ \text{for } m \geq 1)$.

It follows from (9.14) that the coefficients $(f_1, f_2, ..., f_n)$ can be retrieved from $\left(\widetilde{f}_k; k = 0, 1, ...n-1\right)$.

Hence :

$$L(\mathcal{P}_n) = \mathcal{P}_{n-1}$$

Space-time harmonic polynomials

We note that Ψ is strictly increasing from $[0;\infty)$ to $[0;\widetilde{\nu})$ where $\widetilde{\nu} = \int_0^{\infty} \nu(dy)\ (\leq \infty)$. Thus Ψ^{-1} is well-defined on $[0;\widetilde{\nu})$.

Developing :

$$\exp(-\xi x + t\Psi(\xi)) = \sum_{j=0}^{\infty} \xi^j Q_j(x,t)$$

and :

$$\exp\left(-\Psi^{-1}(a)\, x + ta\right) = \sum_{i=0}^{\infty} a^i P_i(x,t),$$

we obtain two sequences of polynomials in both variables x and t, with P_i and Q_j respectively of degree i and j in either variable x and t. Moreover, for $\Pi = P_i$ or Q_j, $\Pi(X_t, t)$ is a martingale so that :

$$\left(L_x + \frac{\partial}{\partial t}\right) \Pi = 0$$

There has been a long standing interest in such functions Π, which are called space-time harmonic (relative to X).

Main results

We first present an interesting family of space-time harmonic polynomials :

Proposition 47 *Let $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_N$. Then :*

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-t)^n}{n!} (L^n \mathbf{p})(x) \tag{9.15}$$

is a space-time harmonic polynomial, in other terms :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-t)^n}{n!} (L^n \mathbf{p})(X_t)$$

is a martingale.

We shall now look for a sequence $(p_N)_{N=0,1,2,...}$ of polynomials in x with respective degree N, such that :

$$L^n (p_N) = p_{N-n} \qquad (n \leq N)$$

in which case, the formula (9.15) reduces to :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-t)^n}{n!} p_{N-n}(x) \tag{9.16}$$

is a space-time harmonic polynomial.

Theorem 48 *Consider a sequence of polynomials $(p_N(x))_{N=0,1,2...}$, exactly of degree N, satisfying the condition :*

$$(c) : p_0 \equiv 1 \quad \textit{and} \quad p_N(0) = 0 \quad \forall N \geq 1$$

Then, the following properties are equivalent :

(i) $L(p_N) = p_{N-1} \quad \forall N \geq 1$ *;*

(ii) The polynomials $P_N(x,t)$ defined by :

$$P_N(x,t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k t^{N-k}}{(N-k)!} p_k(x) \tag{9.17}$$

are space-time harmonic ;

(iii) $(p_N(x))_{N=0,1,2...}$ is the sequence obtained from the development of :

$$\exp\left(-\Psi^{-1}(a)\, x\right) = \sum_{N=0}^{\infty} (-a)^N p_N(x) \tag{9.18}$$

More precisely, defining the double sequence $\sigma_n^{(m)}$ $(n \geq m)$ *as follows :*

$$\left(\Psi^{-1}(a)\right)^m = m! \sum_{n=m}^{\infty} \sigma_n^{(m)} \frac{a^n}{n!} \tag{9.19}$$

there is the formula for the polynomial p_N *:*

$$p_N(x) = \frac{1}{N!} \sum_{m=0}^{N} (-1)^{N-m} \sigma_N^{(m)} x^m \tag{9.20}$$

Looking at (9.16), it is also natural to exchange the role of x and t i.e. to look for a sequence $(q_N)_{N=0,1,2,\ldots}$ of polynomials in t with respective degree N, such that :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-x)^n}{n!} q_{N-n}(t)$$

is a space-time harmonic polynomial.

Theorem 49 *Consider a sequence of polynomials* $(q_k(t))_{k=0,1,2\ldots}$*, exactly of degree* k*, satisfying the condition :*

$$(c) : q_0 \equiv 1 \quad \textit{and} \quad q_k(0) = 0 \quad \forall k \geq 1$$

Then, the following properties are equivalent :

(i) The polynomials $Q_j(x,t)$ *defined by :*

$$Q_j(x,t) = \sum_{k=0}^{j} \frac{(-x)^{j-k}}{(j-k)!} q_k(t) \tag{9.21}$$

are space-time harmonic ;

(ii) $(q_k(t))_{k=0,1,2\ldots}$ *is the sequence obtained from the development of :*

$$\exp(t\Psi(\xi)) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n q_n(t) \tag{9.22}$$

More precisely, defining the double sequence $s_n^{(m)}$ $(n \geq m)$ *as follows :*

$$(\Psi(\xi))^m = m! \sum_{n=m}^{\infty} s_n^{(m)} \frac{\xi^n}{n!} \tag{9.23}$$

there is the formula for the polynomial q_n *:*

$$q_n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} s_n^{(m)} t^m \tag{9.24}$$

An introduction to certain generalized Stirling numbers

a) The classical Stirling numbers and the Gamma process :

If our subordinator is the Gamma process $(\Gamma_t)_{t\geq 0}$ i.e. :

$$E\left[\exp\left(-\xi\Gamma_t\right)\right] = \frac{1}{(1+\xi)^t}$$

so that :

$$\Psi_\Gamma(\xi) = \log(1+\xi) \quad , \quad \Psi_\Gamma^{-1}(a) = (\exp(a) - 1)$$

then $\left(\sigma_n^{(m)}\right)$ are the classical Stirling numbers of the second kind, defined by (see for e.g. Abramovitz-Stegun [1], chapter 24 p. 824) :

$$(\exp(a) - 1)^m = m! \sum_{n=m}^{\infty} \sigma_n^{(m)} \frac{a^n}{n!}$$

and $\left(s_n^{(m)}\right)$ are the classical Stirling numbers of the first kind, defined by (see for e.g. Abramovitz-Stegun [1] chapter 24 p. 824) :

$$(\log(1+\xi))^m = m! \sum_{n=m}^{\infty} s_n^{(m)} \frac{\xi^n}{n!}$$

b) The classical Stirling numbers and the Poisson process :

If our subordinator is the Poisson process $(\eta_t)_{t\geq 0}$ i.e. :

$$E\left[\exp\left(-\xi\eta_t\right)\right] = \exp\left[-t\left(1 - \exp\left(-\xi\right)\right)\right]$$

so that :

$$\Psi_\eta(\xi) = 1 - \exp(-\xi) \quad , \quad \Psi_\eta^{-1}(a) = -\log(1-a)$$

The classical Stirling numbers of the first and the second kind may be related to the Poisson process, with their role interverted in comparison with the Gamma process case.

c) A generalizaion of the Stirling numbers :

From the two above examples, the coefficients $\left(\sigma_n^{(m)}\right)$ and $\left(s_n^{(m)}\right)$, which appear respectively in (5) and (9), deserve the name of generalized Stirling numbers of the second, resp. first, kind.

We are well aware that the terminology "generalized Stirling numbers" designates a vast class of generalizations of Stirling numbers (see, e.g. Hsu-Shiue [20] or Charalambides-Singh [7]).

The generalized Stirling numbers, which appear in e.g. these two papers do not necessarily fit into our framework. However in section (4.2.3), we shall show that the intersection between our generalized Stirling numbers and those of e.g. [20] is reasonably large. In particular, our generalized Stirling numbers associated with the Esscher transformed stable subordinators, whose Lévy measure's is :

$$\nu(dy) = C\frac{\exp(-ay)}{y^{1+b}}dy \qquad \text{for } b < 1$$

appear in the generalized Stirling numbers' family proposed in [20].

These subordinators are well-known to play an essential role in the study of the Poisson-Dirichlet laws (see, for e.g. Pitman-Yor [40]).

Structure of the paper

The rest of our paper is organized as follows :

- Section 2 contains a proof of an extension of Proposition 47 to general Markov processes $(X_t)_{t\geq 0}$ and functions belonging to the domain of the successive iterates of the infinitesimal generator L of X.

- Section 3 contains proofs of both Theorem 48 and Theorem 49.

- In section 4, we discuss various relations between the quantities which appear in Theorem 48 and Theorem 49.

9.2.2 Proof of Proposition 9.2

We will present in this section an extended version of Proposition 47, for $(X_t)_{t\geq 0}$ a Markov process :

Proposition 50 *Let $N \in \mathbb{N}$, and assume that $f : E \to \mathbb{R}$ belongs to $D^{N+1} = D\left(L^{N+1}\right)$. Then :*

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-t)^n}{n!}\left(L^n f\right)(X_t) + (-1)^{N+1}\int_0^t ds \frac{s^N}{N!}\left(L^{N+1}f\right)(X_s) \tag{9.25}$$

is a martingale.

Some heuristic considerations

We begin with the following heuristic consideration : for any bounded measurable $f : E \to \mathbb{R}$ and for $0 \leq t \leq T$, if $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s; 0 \leq s \leq t)$, the process

$$E_x\left(f(X_T)/\mathcal{F}_t\right) = P_{T-t}f(X_t) \tag{9.26}$$

is a martingale.

Now P_u is "generated" by L, the true infinitesimal generator i.e.

$$P_u = \exp(uL) \quad ,$$

so that formula (9.26) may be written informally as :

$$E_x\left(f\left(X_T\right)/\mathcal{F}_t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T-t)^n}{n!} L^n f\left(X_t\right) \tag{9.27}$$

For nice f's, the right hand side is meaningful for any $T \in \mathbb{R}$ and $t \geq 0$ and defines a martingale, which, for $T = 0$, is the (informal) limit obtained from formula (9.25) as N tends to ∞.

Proof

The preceding heuristics lead us to prove the following extension of formula (9.25) :

Proposition 51 *For every $T \in \mathbb{R}$, for every $N \in \mathbb{N}$ and $f \in D\left(L^{N+1}\right)$, the process :*

$$C_t^{N,T}(f) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(T-t)^n}{n!} L^n f\left(X_t\right) - \int_0^t \frac{(T-s)^N}{N!} L^{N+1} f\left(X_s\right) ds$$

is a martingale. More precisely, it satisfies :

$$C_t^{N,T}(f) - C_0^{N,T}(f) = \sum_{n=0}^{N} \int_0^t \frac{(T-s)^n}{n!} dC_s\left(L^n f\right)$$

Proof of Proposition 51 :

i) For $N = 0$, we have :

$$C_t^{0,T}(f) = C_t(f) + f\left(X_0\right)$$

Hence, this is a martingale.

ii) For $N \in \mathbb{N}^*$, consider :

$$C_t^{N,T}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(T-t)^n}{n!} L^n f\left(X_t\right) + \Delta_t^{N,T}(f)$$

where :

$$\Delta_t^{N,T}(f) = \frac{(T-t)^N}{N!}\left(L^N f\right)\left(X_t\right) - \int_0^t \frac{(T-s)^N}{N!} L^{N+1} f\left(X_s\right) ds$$

which, using integration by parts, is equal to :

$$\Delta_t^{N,T}(f) = \frac{T^N}{N!} L^N f(X_0) + \int_0^t \frac{(T-s)^N}{N!} dC_s\left(L^N f\right) - \int_0^t \frac{(T-s)^{N-1}}{(N-1)!} L^N f(X_s)\, ds$$

Consequently, we have obtained :

$$C_t^{N,T}(f) = C_t^{N-1,T}(f) + \frac{T^N}{N!} L^N f(X_0) + \int_0^t \frac{(T-s)^N}{N!} dC_s\left(L^N f\right)$$

Iterating this formula, we obtain :

$$C_t^{N,T}(f) = \sum_{n=0}^{N} \frac{T^n}{n!} L^n f(X_0) + \sum_{n=0}^{N} \int_0^t \frac{(T-s)^n}{n!} dC_s(L^n f)$$

Or equivalently :

$$C_t^{N,T}(f) = C_0^{N,T}(f) + \sum_{n=0}^{N} \int_0^t \frac{(T-s)^n}{n!} dC_s(L^n f)$$

Hence $\left(C_t^{N,T}(f), t \geq 0\right)$ is a martingale. ■

9.2.3 Proofs of Theorem 9.3 and Theorem 9.4

Proof of Theorem 9.3

$(ii) \Rightarrow (i)$ Since $P_N(x,t)$ is a space-time harmonic polynomial, it satisfies :

$$L_x(P_N) + \frac{\partial}{\partial t} P_N = 0 \ ,$$

where, for clarity, L_x denotes the operator L acting on a function of x.

This yields :

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{t^{N-k}}{(N-k)!} L_x(p_k)(x) + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{t^{N-k-1}}{(N-k-1)!} p_k(x) = 0$$

Identifying the coefficients of t^k $(0 \leq k \leq N)$ gives (i).

$(i) \Leftrightarrow (iii)$

Existence of the p_N's satisfying (c) and (iii) (: $(iii) \Rightarrow (i)$) Since the process

$$\left\{\exp\left(-\Psi^{-1}(a) X_t + ta\right), t \geq 0\right\}$$

is a martingale, we have :

$$L_x\left(\exp\left(-\Psi^{-1}(a)\,x\right)\right) = -a\exp\left(-\Psi^{-1}(a)\,x\right) \tag{9.28}$$

Developing $\exp\left(-\Psi^{-1}(a)\,x\right)$ with the help of formula (9.18) on both sides of (9.28), we obtain (i). We note that the property (c) follows directly from (9.18) by taking $x = 0$. ■

Uniqueness of the p_N's (: $(i) \Rightarrow (iii)$) For $N \geq 1$, we write :

$$p_N(x) = \sum_{k=1}^{N} F_{k,N}\ .\ x^k$$

and we need to show that the double sequence $(F_{k,N})_{k\leq N}$ is uniquely determined from (c) and (i). From the formula :

$$Lf(x) = \int \nu(dy)\left[f(x+y) - f(x)\right]$$

which is valid at least for polynomials, we easily obtain :

$$L(p_N)(x) = \sum_{j=0}^{N-1} x^j \left(\sum_{k=j+1}^{N} C_k^j F_{k,N}\right)\nu_{(k-j)}$$

where :

$$\nu_{(m)} \stackrel{(def)}{=} \int \nu(dy)\, y^m$$

is the m^{th} moment of ν.

Thus, the property (i) :

$$L(p_N) = p_{N-1}$$

amounts to :

$$\forall j \leq N-1, \qquad \sum_{l=j}^{N-1}\left(C_{l+1}^j \nu_{(l+1-j)}\right) F_{l+1,N} = F_{j,N-1} \tag{9.29}$$

But this linear system of equations with the unknowns $(F_{k,N})_{1\leq k\leq N}$ admits one and only one solution since it may be written as :

$$\begin{pmatrix} C_1^0\nu_{(1)} & C_2^0\nu_{(2)} & C_3^0\nu_{(3)} & ... & C_N^0\nu_{(N)} \\ 0 & C_2^1\nu_{(1)} & C_3^1\nu_{(2)} & ... & C_N^1\nu_{(N-1)} \\ 0 & 0 & C_3^2\nu_{(1)} & .... & C_N^2\nu_{(N-2)} \\ ... & .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_N^{N-1}\nu_{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{1,N} \\ F_{2,N} \\ F_{3,N} \\ .... \\ F_{N,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{0,N-1} \\ F_{1,N-1} \\ F_{2,N-1} \\ .... \\ F_{N-1,N-1} \end{pmatrix}$$

Hence, the vector $(F_{k,N})_{1\leq k\leq N}$ is determined uniquely.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ As written previously, for any $a>0$, the process $\left\{\exp\left(-\Psi^{-1}(a)\,X_t+ta\right), t\geq 0\right\}$ is a martingale. We recall the definition of the p_m's via (iii) :

$$\exp\left(-\Psi^{-1}(a)\,x\right)=\sum_{m=0}^{\infty}(-a)^m\,p_m(x)$$

On the other hand :

$$\exp(ta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(at)^n}{n!}$$

Hence :

$$\exp\left(-\Psi^{-1}(a)\,x+ta\right)=\sum_{m=0}^{\infty}(-a)^m\,p_m(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(at)^n}{n!}$$

and :

$$\exp\left(-\Psi^{-1}(a)\,x+ta\right)=\sum_{i=0}^{\infty}a^iP_i(x,t) \tag{9.30}$$

where :

$$P_i(x,t)=\sum_{k=0}^{i}\frac{(-1)^k\,t^{i-k}}{(i-k)!}p_k(x)$$

is a sequence of space-time harmonic polynomials.

Proof of Theorem 9.4

$(ii) \Rightarrow (i)$ Recall that for any $\xi>0$, the process $\{\exp(-\xi X_t+t\Psi(\xi)), t\geq 0\}$ is a martingale. It follows from the classical formula :

$$\exp(-\xi x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\xi x)^m}{m!}$$

together with (9.20) that :

$$\exp(-\xi x+t\Psi(\xi))=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\xi x)^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n q_n(t)$$

From which, if we define the sequence Q_j by :

$$\exp(-\xi x+t\Psi(\xi))=\sum_{j=0}^{\infty}\xi^jQ_j(x,t) \tag{9.31}$$

where :

$$Q_j(x,t) = \sum_{k=0}^{j} \frac{(-x)^{j-k}}{(j-k)!} q_k(t)$$

Thus, from (9.31) the Q_j's are space-time harmonic polynomials.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Consider the family $(q_0, q_1, ..., q_j)$ to be known. We want to determine q_{j+1}. According to (i), $Q_{j+1}(x,t)$ is space-time harmonic. Hence :

$$L_x(Q_{j+1})(x,t) + \frac{\partial}{\partial t} Q_{j+1}(x,t) = 0$$

Such an equation is valid for every x, especially for $x = 0$:

$$L_x(Q_{j+1})(0,t) + \frac{\partial}{\partial t} Q_{j+1}(0,t) = 0 \tag{9.32}$$

Let us denote $\widehat{Q}_{j+1}(x,t)$ the following polynomial :

$$\widehat{Q}_{j+1}(x,t) = Q_{j+1}(x,t) - q_{j+1}(t)$$

i.e. the polynomial composed by the $(j+1)$ first terms of $Q_{j+1}(x,t)$, as given in (9.21).

Hence, (9.32) may also be written as :

$$L_x\left(\widehat{Q}_{j+1} + q_{j+1}(t)\right)(0,t) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\widehat{Q}_{j+1}(0,t) + q_{j+1}(t)\right] = 0$$

which simplifies as :

$$L_x\left(\widehat{Q}_{j+1}\right)(0,t) + \frac{\partial}{\partial t} q_{j+1}(t) = 0$$

since $L_x(q_{j+1}(t)) = 0$ and $\frac{\partial}{\partial t}\widehat{Q}_{j+1}(0,t) = 0$.

Moreover :

$$\begin{aligned} L_x\left(\widehat{Q}_{j+1}\right)(0,t) &= \int \nu(dy)\left[\widehat{Q}_{j+1}(y,t) - \widehat{Q}_{j+1}(0,t)\right] \equiv \int \nu(dy)\,\widehat{Q}_{j+1}(y,t) \\ &= \sum_{k=0}^{j} q_k(t) \int \nu(dy)\left[\frac{(-y)^{j+1-k}}{(j+1-k)!}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{j} q_k(t) \frac{(-1)^{j+1-k}}{(j+1-k)!} \nu_{(j+1-k)} \end{aligned}$$

where $\nu_{(n)}$ denotes the n^{th} moment of the Lévy measure ν associated with X.

Consequently :

$$\frac{\partial}{\partial t} q_{j+1}(t) = \sum_{k=0}^{j} q_k(t) \frac{(-1)^{j-k}}{(j+1-k)!} \nu_{(j+1-k)}$$

or :

$$q_{j+1}(t) = \sum_{k=0}^{j} \widehat{q}_k(t) \frac{(-1)^{j-k}}{(j+1-k)!} \nu_{(j+1-k)} \tag{9.33}$$

where $\widehat{q}_k(t)$ is the primitive of $q_k(t)$ such that :

$$\widehat{q}_k(0) = 0$$

as to satisfy condition (c).

By recurrence, we obtain a unique sequence (q_k). Moreover, the sequence (q_n) presented in (ii) satisfies (i). Hence, it is the only sequence which satisfies (i).

Remark 11 *The relation (9.33) may simply be understood as a consequence of the martingale property of :*

$$X_t^{j+1} - \int_0^t ds L\left(x^{j+1}\right)(X_s) \ ,$$

since, by formula (9.38), $q_n(-t)$ is a multiple of $E[X_t^n]$.

9.2.4 Various relations and examples

Relations between both theorems

a) Comparing formulae (9.30) and (9.31), we easily obtain the following relationship between the two sequences (P_n) and (Q_j) of space-time harmonic polynomials :

$$P_n(x,t) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} j! \sigma_n^{(j)} Q_j(x,t) \tag{9.34}$$

Moreover, when looking deeper at formulae (9.17) and (9.21), we get :

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{n-m}}{m!} p_{n-m}(x) &= \frac{1}{n!} \sum_{j=m}^{n} j! \sigma_n^{(j)} \sum_{l=0}^{j-m} \frac{(-1)^l s_{j-l}^{(m)}}{l!(j-l)!} x^l \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^{n-m} \frac{(-1)^l}{l!} x^l \sum_{j=l+m}^{n} \frac{j! \sigma_n^{(j)} s_{j-l}^{(m)}}{(j-l)!} \end{aligned}$$

Comparing this result with formula (9.20), i.e. :

$$p_{n-m}(x) = \frac{1}{(n-m)!} \sum_{h=0}^{n-m} (-1)^{n-m-h} \sigma_{n-m}^{h} x^{h}$$

we deduce :

$$\sigma_{n-m}^{(h)} = \frac{1}{C_n^m} \sum_{l=m}^{n-h} C_{l+h}^{h} \sigma_n^{(l+h)} s_l^{(m)} \tag{9.35}$$

In particular, when $h = 0$, one has the well-known :

$$\sum_{n=m}^{p} \sigma_p^{(n)} s_n^{(m)} = \delta_{p,m}$$

b) Symmetrically, there exist formulae expressing the sequence (Q_j) in terms of the (P_n)'s :

$$Q_j(x,t) = \frac{1}{j!} \sum_{n=0}^{j} n! s_j^{(n)} P_n(x,t) \tag{9.36}$$

The relation (9.36) follows from (9.30) where we have taken $a = \Psi(\xi)$, and (9.23).

Some remarks on the generalized Stirling numbers

Recurrence relations between the classical Stirling numbers We have shown the following results for the Stirling numbers of the first kind $\left(s_n^{(m)}\right)$ and of the second kind $\left(\sigma_n^{(m)}\right)$:

$$\sigma_{n-m}^{(h)} = \frac{1}{C_n^m} \sum_{l=m}^{n-h} C_{l+h}^{h} \sigma_n^{(l+h)} s_l^{(m)}$$

Moreover, according to formula (9.29), applied to the Gamma process, we obtain that the Stirling numbers of the second kind have to satisfy the following ascending recurrence relation, with respect to N :

$$\forall j \leq N-1, \qquad \frac{1}{N} \sum_{l=j}^{N-1} \frac{(l+1)!}{(l+1-j)} (-1)^l \sigma_N^{(l+1)} = (-1)^j j! \sigma_{N-1}^{(j)} \tag{9.37}$$

We now check, for different values of j, the numbers we obtain against the table in Abramovitz-Stegun ([1], chapter 24, p. 835) :

- For $j = N-1$:

$$\sigma_{N-1}^{(N-1)} = \sigma_N^{(N)}$$

By a simple recurrence, we obtain :

$$\forall N \geq 1, \quad \sigma_N^{(N)} = \sigma_1^{(1)} = 1$$

as $\sigma_1^{(1)} = \sigma_0^{(0)} = 1$ (because of the condition (c)).

- For $j = N-2$:

$$\frac{1}{N}\sigma_N^{(N-1)} = \frac{1}{(N-1)}\sigma_{N-1}^{(N-2)} + \frac{1}{2}$$

By a simple recurrence, we obtain :

$$\frac{1}{N}\sigma_N^{(N-1)} = \sigma_1^{(0)} + \frac{N-1}{2}$$

Hence :

$$\sigma_N^{(N-1)} = \frac{N(N-1)}{2}$$

as $\sigma_1^{(0)} = 0$ (because of the condition (c)).

- For $j = N-3$:

$$\frac{1}{N(N-1)}\sigma_N^{(N-2)} = \frac{1}{(N-1)(N-2)}\sigma_{N-1}^{(N-3)} + \frac{N-1}{4} - \frac{1}{3}$$

By a simple recurrence, we obtain :

$$\begin{aligned}\frac{1}{N(N-1)}\sigma_N^{(N-2)} &= \frac{1}{2}\sigma_2^{(0)} + \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{N-1} k - \frac{N-2}{3} \\ &= \frac{3N^2 - 11N + 10}{24}\end{aligned}$$

as $\sigma_2^{(0)} = 0$ (because of the condition (c)).

Hence :

$$\sigma_N^{(N-2)} = N(N-1)(N-2)\frac{(3N-5)}{72}$$

which is again coherent with the table in Abramovitz-Stegun [1].

Relation between the generalized Stirling numbers and the moments of X_t and of ν As written previously :

$$E\left[\exp\left(-\xi X_t\right)\right] = \exp\left(-t\Psi\left(\xi\right)\right)$$

Developing both sides, we obtain, using (9.22) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^n}{n!} E\left[X_t^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n q_n(-t)$$

Hence :

$$q_n(-t) = \frac{(-1)^n}{n!} E\left[X_t^n\right] \tag{9.38}$$

Comparing with equation (9.24),

$$q_n(-t) = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} s_n^{(m)} (-t)^m$$

we obtain :

$$E[X_t^n] = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n+m} s_n^{(m)} t^m$$

On the other hand, the moments of ν are related to those of the variables (X_t) with t varying, since from Remark 11 :

$$E\left[X_t^{j+1}\right] = \sum_{k=0}^{j} C_{j+1}^k \int_0^t dsE\left(X_s^k\right) \nu_{(j+1-k)}$$

Generalized Stirling numbers associated to the generalized stable subordinators In this section, we show that some particular class of particular generalized Stirling numbers, as defined in Hsu-Shiue [20], are in fact "our" generalized Stirling numbers for the generalized stable subordinators, whose Lévy measure is :

$$\nu(dy) = C\frac{\exp(-ay)}{y^{1+b}} dy \qquad \text{for } b < 1 \tag{9.39}$$

In Theorem 2, p. 372 of Hsu-Shiue [20], we take the particular case $r = 0$, which gives :

$$\left(\frac{(1+\alpha\xi)^{\frac{\beta}{\alpha}} - 1}{\beta}\right)^k = k! \sum_{n=0}^{\infty} S_{\alpha,\beta}(n,k) \frac{\xi^n}{n!} \tag{9.40}$$

We note that the left hand side of (9.40) may be obtained as :

$$\int \nu_{\alpha,\beta}(dy) (1 - \exp(-\xi y))$$

where :

$$\nu_{\alpha,\beta}(dy) = \frac{\exp\left(-\frac{y}{\alpha}\right)}{\alpha^{1+\frac{\beta}{\alpha}} y^{1+\frac{\beta}{\alpha}}} dy$$

We recognize the Lévy measure in (9.39), where :

$$\begin{cases} C = \frac{1}{\alpha^{1+\frac{\beta}{\alpha}}} \\ a = \frac{1}{\alpha} \\ b = \frac{\beta}{\alpha} \end{cases}$$

Bibliographie

[1] M. Abramovitz et I. Stegun, *Handbook of Mathematical functions*. Dover Publications, 1972.

[2] R. Azencott, Formule de Taylor stochastique et développement asymptotique d'intégrales de Feynman. *Séminaire de Probabilités XVI*, Lecture Notes in Mathematics 921. Springer Verlag, p. 237-285, 1982.

[3] R. Bhattacharya, E. Thomann et E. Waymire, A note on the distribution of integrals of geometric Brownian motion. *Statistics and Probability Letters*, vol. 55, p. 187-192, 2001.

[4] L. Bouaziz, E. Briys et M. Crouhy, The pricing of forward-starting Asian options. *J. Banking Finance*, vol. 18, p. 823-839, 1994.

[5] P. Bougerol, Exemples de théorèmes locaux sur les groupes résolubles, *Ann. I.H.P.*, vol. 19, p. 369-391, 1983.

[6] A.P. Carverhill et L.J. Clewlow, Valuing average rate (Asian) options. *Risk Magazine*, vol. 3, p. 25-29, 1990.

[7] C.A. Charalambides et J. Singh, A review of Stirling numbers, their generalizations and statistical applications. *Comm. Statis. Theory Methods*, vol. 17 p. 2533-2595, 1988.

[8] C. Dellacherie, C. et P.A. Meyer, *Probabilités et potentiel : Théorie du potentiel associé à une résolvante. Théorie des processus de Markov.* Hermann, 1987.

[9] C. Dellacherie, B. Maisonneuve et P.A. Meyer, *Probabilités et potentiel : Théorie des processus de Markov.* Hermann, 1987.

[10] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal.* Hermann Paris, Collection Méthodes, 1968.

[11] D. Dufresne, The integral of geometric Brownian motion. *Adv. Appl. Prob.*, vol. 33, p. 223-241, 2001.

[12] D. Dufresne, The integrated Square-Root Process. Research Paper n°90, Centre for Actuarial Studies, University of Melbourne, 2001.

[13] K.D. Elworthy, X.M. Li et M. Yor, On the tails of the supremum and the quadratic variation of strictly local martingales. *Séminaire de Probabilités XXXI*, Springer Verlag, 1996.

[14] P. Feinsilver, *Special functions, probability semigroups, and Hamiltonian flows.* Lecture Notes in Mathematics 696, Springer Verlag, 1978.

[15] P. Feinsilver, Some classes of orthogonal polynomials associated with martingales. *Proc. of the A.M.S.*, vol. 98, n°2 p. 298-302, 1986.

[16] P. Feinsilver et R. Schott, *Algebraic structures and operator calculus* :
vol. I : Representation and probability theory, 1993.
vol. II : Special functions and computer science, 1994.
Kluwer Acad. Pub.

[17] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications.* Volume II. Wiley & Sons, 1966.

[18] H. Geman et M. Yor, Bessel processes, Asian options and perpetuities. *Mathematical Finance*, vol. 3 n°4, p. 349-375, 1993.

[19] R. Gould, *The distribution of the integral of exponential Brownian motion.* Mémoire de fin d'étude, 2000.

[20] L.C. Hsu et P.J.-S. Shiue, A unified approach to generalized Stirling numbers. *Adv. in Applied Mathematics*, vol. 20 p. 366-384, 1998.

[21] K. Itô, Multiple Wiener integral. *J. Mathematical Society of Japan*, vol. 3, p. 157-169, 1951.

[22] A.G.Z. Kemna et A.C.F. Vorst, A pricing method for options based on average asset values. *Journal of Banking and Finance*, vol. 14, p. 113-129, 1990.

[23] J. Kent, Some probabilistic properties of Bessel functions. *Ann. Prob.*, vol. 6, p. 760-770, 1978.

[24] R. Koekoek et R.F. Swarttouw, *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue.* Report 98-17, Delft University of Technology, 1998.

[25] H. Kunita, Absolute continuity of Markov processes and generators. *Nagoya Math. J.*, vol. 36, p. 1-26, 1969.

[26] H. Kunita, Absolute continuity of Markov processes. *Séminaire de Probabilités X*, Lecture Notes in Mathematics 511. Springer Verlag, p. 44-77, 1976.

[27] J. Lamperti, Semi-stable processes- I . *Z.W.*, vol. 22, 1972.

[28] E. Lévy, Pricing European average rate currency options. *Journal of International Money Finance*, vol. 11, p. 474-491, 1992.

[29] V. Linetsky, A closed-form formula for the arithmetic Asian option. Working Paper, 2001.

[30] Q. Liu et A. Rouault, Limit theorem for Mandelbrot's multiplicative cascades. *The Annals of Appl. Prob.*, vol. 10, p. 218-239, 2000.

[31] H. Matsumoto et M. Yor, Dufresne's expressions for the probability densities of integrals of geometric Brownian motions. A paraître dans *Adv. Appl. Prob.*, 2003.

[32] O. Mazet, Classification des semi-groupes de diffusion sur $\mathbb{R}$ associés à une famille de polynômes orthogonaux. *Séminaire de Probabilités XXXI*, Lecture Notes in Mathematics 1655. Springer Verlag, p. 40-53, 1997.

[33] E.B. McBride, *Obtaining generating functions.* Springer, 1971.

[34] H.P. McKean, Geometry of differential space. *Annals of Probability*, vol. 1, p. 197-206, 1973.

[35] P.A. Meyer, Intégrales stochastiques III. *Séminaire de Probabilités I*, Lecture Notes in Mathematics 39. Springer Verlag, p. 118-141, 1966.

[36] P.A. Meyer, Sur l'existence de l'opérateur carré du champ. *Séminaire de Probabilités XX*, Lecture Notes in Mathematics 1204. Springer Verlag, p. 30-33, 1984-1985.

[37] G. Mokobodzki, L'opérateur carré du champ : un contre-exemple". *Séminaire de Probabilités XXIII*, Lecture Notes in Mathematics 1372. Springer Verlag, p. 324-325, 1988.

[38] R. Pinsky, *Positive harmonic functions and diffusion : An integrated analytic and probabilistic approach.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1995.

[39] J. Pitman, Combinatorial Stochastic Processes. *Ecole d'été de Saint Flour*, 2002.

[40] J. Pitman et M. Yor, The two-parameter Poisson-Dirichlet distribution derived from a stable subordinator. *The Annals of Probability*, vol. 25, n°2, p 855-900, 1997.

[41] S. Roman, *The Umbral Calculus.* Academic Press, 1984.

[42] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe.* Masson, 1992.

[43] W. Schoutens, *Stochastic processes and orthogonal polynomials. Lecture Notes in Stat.*, vol. 146, 2000.

[44] W. Schoutens et M. Studer, Stochastic Taylor expansions for Poisson processes and applications towards risk management. Working Paper, 2001.

[45] W. Schoutens et J.L. Teugels, Lévy processes, polynomials and martingales. *Commun. Statist.-Stochastic Models,* vol. 14 (1 and 2), p. 335-349, 1998.

[46] M. Schröder, On the valuation of arithmetic-average Asian options. Working Paper, 1999.

[47] M. Schröder, *Analytical Ramifications of derivatives valuation : Asian options and special functions*, Habilitationschrift, Université de Mannheim, 2002.

[48] R.P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Vol. II. Cambridge Studies, 1999.

[49] N.V. Tsilevich et A.M. Vershik, Quasi-invariance of the Gamma process and multiplicative properties of the Poisson-Dirichlet measures. *C.R. Acad. Sci. Paris*, Série I 329 n°2, p. 163-168, 1999.

[50] J.B. Walsh, The local time of Brownian sheet. *Astérisque*, vol. $52-53$, Temps Locaux, p. 47-62, 1978.

[51] J.B. Walsh, Propagation of singularities in the Brownian sheet. *Annals of Probability*, vol. 10, p. 278-288, 1982.

[52] N. Wiener, The homogeneous chaos. *Amer. Journal of Mathematics*, vol. 60, p. 897-936, 1930.

[53] M. Yor, Loi de l'indice du lacet Brownien et distribution de Hartman-Watson. *Z.W.*, vol. 53, p. 71-95, 1980.

[54] M. Yor, On some exponential functionals of Brownian motion. *Adv. Appl. Prob.*, vol. 24, p. 509-531, 1992.

[55] M. Yor, *Some aspects of Brownian motion. Part II : Some recent martingale problems.* Lectures in Mathematics. E.T.H. Zürich. Birkhäuser Verlag, 1997.

[56] M. Yor, *Exponential functionals of Brownian motion and related processes.* Springer Verlag Finance, 2001.

Troisième partie

Options réelles dans un marché en crise

La problématique des investissements a toujours été une question centrale pour les entreprises. Faut-il entreprendre ou non un projet donné et, si oui, quel est le meilleur moment pour investir ? Le critère néoclassique de la valeur actuelle nette (V.A.N.) est encore bien souvent utilisé pour prendre ces décisions. Celui-ci consiste à investir si et seulement si le ratio bénéfices actualisés-coûts actualisés liés au projet est supérieur à *1*. Cependant un tel critère comporte de nombreuses faiblesses. Entre autres, les faits suivants lui sont souvent reprochés :

- La méthode de la V.A.N. ne tient pas compte d'incertitudes éventuelles quant aux flux futurs ;
- Elle utilise un calcul explicite du coût du risque ;
- Elle ne s'intéresse qu'à la décision d'investir aujourd'hui ou jamais.

Or, la réalité est souvent beaucoup plus complexe et flexible : par exemple, en introduisant des composantes optionnelles au projet, l'entreprise aura le droit (et non l'obligation) d'entreprendre ce projet, non pas uniquement à un instant précis mais sur toute une période, voire sans limite de temps. En ce sens, ces propriétés peuvent être rapprochées de celles d'une option d'achat américaine, dont le sous-jacent serait, par exemple, le ratio bénéfices actualisés-coûts actualisés et le niveau d'exercice serait alors de 1. L'utilisation de la théorie des options permet de prendre en compte les composantes optionnelles du projet d'investissement et de déterminer le moment optimal pour investir. La théorie des options réelles est en ce sens un outil managérial d'aide à la décision. En effet, une fois le projet d'investissement bien spécifié, la préoccupation majeure de l'investisseur est résumée par la question suivante : "quel est le meilleur moment pour entreprendre le projet ?". En ce sens la connaissance du "prix" obtenu pour l'option est moins essentielle que l'*obtention de la date d'exercice*. C'est pourquoi, nous nous attachons ici tout particulièrement à l'étude des propriétés de ce temps optimal.
D'autre part, l'existence de situations de crise, de chocs sur les marchés financiers, génèrent des discontinuités sur les dynamiques sous-jacentes. Etudier l'impact sur la prise de décision de l'existence de ces chocs dans le champ d'investissement est une question *importante* à l'heure où les innovations techniques peuvent rendre instable tout domaine d'exploitation.

Pour ces différentes raisons, cette partie est consacrée à l'analyse des propriétés du temps optimal d'exercice dans un contexte mouvementé. La modélisation retenue pour la dynamique sous-jacente est par conséquent écrite à l'aide de diffusions mixtes. Le sous-jacent est porté par un mouvement Brownien et un processus de Poisson, et les amplitudes des sauts sont négatives, de façon à transcrire les situations de difficultés et de problèmes inhérentes au marché.

Dans cette partie, nous utilisons une modélisation de l'opportunité d'investissement à l'aide des options réelles. Pour cela, le processus $(S_t)_{t\geq 0}$ est introduit. Il caractérise le ratio bénéfices actualisés-coûts actualisés d'un projet donné. Sa dynamique sous $\mathbb{P}$ est donnée par :

$$\begin{cases} dS_t = S_{t^-}\left[\alpha dt + \sigma dW_t + \varphi dM_t\right] \\ S_0 = s_0 \end{cases}$$

où W est un mouvement Brownien et M est la martingale compensée associée à un processus de Poisson indépendant de W. Les hypothèses suivantes sont faites concernant les paramètres :
i) $s_0 < 1$,
ii) $\sigma \neq 0$,
iii) $0 > \varphi > -1$.
Par conséquent, le prix de l'opportunité d'investissement est donné en 0 par le prix d'une option d'achat américaine perpétuelle, dont le sous-jacent est S et le niveau d'exercice est 1 :

$$C_0 = \sup_{\tau \in \Upsilon} \mathbb{E}\left[\exp\left(-\mu\tau\right)\left(S_\tau - 1\right)^+\right]$$

où μ désigne le taux d'actualisation et Υ l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $[0, +\infty[$.
Cette expression, écrite par rapport au temps, peut se reformuler, en terme d'espace comme **:**

$$C_0 = \sup_{L \geq 1} \mathbb{E}\left[\exp\left(-\mu\tau_L\right)\left(S_{\tau_L} - 1\right)\right]$$

où :

$$\tau_L = \inf\left\{t \geq 0; S_t \geq L\right\}$$

La frontière d'exercice optimale est notée L^* et est définie comme :

$$L^* = \arg\max\left\{\mathbb{E}\left[\exp\left(-\mu\tau_L\right)\left(S_{\tau_L} - 1\right)\right]\right\}$$

Le choix du taux d'actualisation est une préoccupation essentielle pour l'investisseur, et ce d'autant plus que l'option est perpétuelle. Nous établissons l'existence et l'unicité d'un taux optimal $\widetilde{\mu}$. De plus, ce taux est entièrement spécifié par l'équation :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(-\widetilde{\mu}\tau_{L^*(\widetilde{\mu})}\right)\right) = \max_{\mu} \mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau_{L^*(\mu)}\right)\right)$$

Les propriétés du temps optimal d'investissement sont ensuite étudiées. En particulier, l'impact de la méconnaissance des paramètres liés aux sauts sur la décision d'investissement est analysé à travers différentes études portant sur la robustesse des résultats, lorsqu'il réside une incertitude quant au choix de ces paramètres : ainsi, en supposant que la valeur initiale s_0 n'est pas "trop" faible, si l'amplitude des sauts est une variable aléatoire inconnue de l'investisseur, alors nous établissons que la transformée de Laplace est une fonction décroissante de la taille des sauts et qu'il existe deux réels Γ_{-1} et Γ_0 tels que :

$$\Gamma_{-1} < \mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau^{\Phi}_{L^*_\Phi}\right)\right) < \Gamma_0$$

Ces deux réels sont entièrement déterminés et permettent une nette amélioration de l'encadrement trivial de la transformée de Laplace par $[0;1]$.
Lorsque la variable aléatoire modélisant la taille des sauts est inconnue, nous supposons que l'investisseur l'estime par son espérance $\mathbb{E}(\Phi)$. Alors, nous établissons :

$$\mathbb{E}\left\{\exp\left[-\mu\tau^{\Phi}_{L^*_\Phi}\right]\right\} \leq \mathbb{E}\left\{\exp\left[-\mu\tau^{\mathbb{E}(\Phi)}_{L^*_{\mathbb{E}(\Phi)}}\right]\right\}$$

où

$$\tau^{\Psi}_{L^*_\Psi} = \inf\left\{t \geq 0; S_t(\Psi) \geq L^*_\Psi\right\}$$

Cette inégalité s'interprète de façon heuristique comme suit : le fait de ne pas connaitre précisément l'amplitude des sauts Φ conduit l'investisseur à entreprendre le projet trop tôt.

Puis, nous étudions l'impact sur la prise de décision d'une erreur de spécification du modèle. L'investisseur croit à une structure continue de la dynamique du sous-jacent. Cette dynamique est équivalente à la première au sens où l'absence des sauts est "compensée" par une volatilité et par un paramètre de dérive plus important, permettant la calibration du modèle sur les mêmes données. Un encadrement de l'erreur commise par l'investisseur sur la transformée de Laplace est ensuite présenté et illustrés graphiquement.

Enfin, des arguments liés à l'étude d'options américaines perpétuelles nécessaires pour cette analyse, sont rappelés en annexe, ainsi que certains outils liés à l'évaluation des options d'échange.

Chapitre 10

Situations de crise sur les marchés : Impact sur les options réelles

10.1 Introduction

10.1.1 Question du choix d'un investissement

La problématique des investissements a toujours été une question centrale pour les entreprises. Faut-il entreprendre ou non un projet donné et, si oui, quel est le meilleur moment pour investir ? Pour répondre à ces questions, le critère néoclassique de la valeur actuelle nette (V.A.N.) est encore bien souvent utilisé. Celui-ci consiste à investir si et seulement si la somme des bénéfices actualisés liés au projet est supérieure à la somme actualisée des coûts associés (ou encore si et seulement si le ratio bénéfices actualisés-coûts actualisés est supérieur à *1*). Cependant un tel critère comporte de nombreuses faiblesses. Entre autres, les défauts suivants lui sont souvent reprochés :

- La méthode de la V.A.N. ne tient pas compte d'incertitudes éventuelles quant aux flux futurs ;
- Elle utilise un calcul explicite du coût du risque ;
- Elle ne s'intéresse qu'à la décision d'investir aujourd'hui ou jamais.

Or, la réalité est souvent beaucoup plus complexe et flexible : par exemple, en introduisant des composantes optionnelles au projet, l'entreprise aura le droit (et non l'obligation) d'entreprendre ce projet, non pas uniquement à un instant précis mais sur toute une période, voire sans limite de temps. En ce sens, ces propriétés peuvent être rapprochées de celles d'une option d'achat américaine (ou call américain), dont le sous-jacent serait, par exemple, le ratio bénéfices actualisés-coûts actualisés et le niveau d'exercice serait alors de 1 (cf. la section 10.7.2 en annexe). Le critère de la V.A.N. reviendrait ainsi à exercer l'option dès qu'elle est dans la monnaie. Or on sait que, dans le cas des options américaines, il y a un coût d'opportunité à investir lorsque le sous-jacent se trouve dans une certaine région (région

de continuation) alors même que l'option est dans la monnaie (cf. la section 10.7.1 en annexe). La méthode de la V.A.N. est de ce fait un critère sous-optimal. L'utilisation d'une méthode plus proche de la théorie des options permettrait donc d'améliorer très nettement la décision d'investir ou non et de déterminer le moment optimal pour investir. Il s'agit de la théorie des options réelles.
Une telle approche permet de mieux correspondre à la réalité en tenant compte des options d'abandon du projet, de réentreprise, d'investissement séquentiel, de délocalisation, de gestion de crises.... Les options réelles permettent de s'adapter à chaque cas en particulier.
Plusieurs articles font office de référence dans ce domaine. Les études de M. Brennan et E. Schwartz ([2]), de R. Mc Donald et D. Siegel ([10]) ou encore de R. Pindyck ([12]) sont particulièrement citées car elles présentent les techniques de base de cette méthodologie, notamment l'utilisation de la programmation dynamique et des techniques d'arbitrage.

D'autre part, les options réelles ont certaines spécificités par rapport aux options classiques des marchés financiers. Tout d'abord, la logique risque-neutre utilisée dans l'évaluation de ces options classiques n'est pas envisageable ici : le sous-jacent, correspondant à des flux propres au projet d'investissement, n'est pas quoté sur les marchés financiers. Toute réplication de l'option est impossible et *l'évaluation d'une option réelle se fait donc sous la probabilité historique* (ou sous une mesure de probabilité choisie selon les anticipations de l'investisseur).

Face à un projet donné, deux éléments essentiels intéressent l'investisseur :

- tout d'abord, les flux de capitaux générés par le projet. Ceux-ci sont représentés par le "prix" de l'option.

- mais également, le moment optimal pour l'investissement. Cette date optimale correspond précisément à l'instant d'exercice de l'option.

Il est important de noter que les options réelles sont avant tout un *outil managérial d'aide à la décision.* En effet, une fois le projet d'investissement bien spécifié, la préoccupation majeure de l'investisseur est résumée par la question suivante : " quel est le meilleur moment pour entreprendre le projet ? ". En ce sens la connaissance du "prix" obtenu pour l'option est moins essentielle que l'*obtention de la date d'exercice.* C'est pourquoi, dans ce chapitre, nous nous attachons tout particulièrement à l'étude des propriétés de ce temps optimal.

Les études précédemment citées ([2], [10] ou[12]) sont réalisées dans le cadre de processus à trajectoires continues. Or, l'existence de situations de crise, de chocs sur les marchés financiers, génèrent des discontinuités sur les dynamiques sous-jacentes. Etudier l'impact sur la prise de décision de l'existence de ces chocs dans le champs d'investissement est une question *importante* à l'heure où les innovations techniques peuvent rendre instable tout domaine d'exploitation.

Pour ces différentes raisons, ce chapitre est consacré à l'analyse des propriétés du temps optimal d'exercice dans un contexte mouvementé. La modélisation retenue pour la dynamique sous-jacente est par conséquent écrite à l'aide de diffusions mixtes. Le sous-jacent est porté par un mouvement Brownien et un processus de Poisson, et les amplitudes des sauts sont négatives, de façon à transcrire les situations de difficultés et de problèmes inhérentes au marché.

Après avoir présenté la problématique et le cadre de l'étude, nous étudions les conséquences du choix de la modélisation des sauts. Nous rappelons, dans la deuxième section, les principaux résultats (frontière optimale, prix et transformée de Laplace du temps d'atteinte) relatifs à l'étude d'options d'achat américaines perpétuelles dont le sous-jacent suit une diffusion mixte avec sauts négatifs. Dans cette partie sont également établis quelques résultats préliminaires.
La troisième section examine le problème du choix du taux d'actualisation dans ce cadre précis où l'horizon est infini. Nous établissons l'existence d'un taux d'actualisation optimal, le critère retenu correspondant à la maximisation de la transformée de Laplace du temps d'atteinte.
La quatrième section est consacrée à l'étude de la robustesse de la transformée de Laplace par rapport à l'amplitude des sauts. Nous établissons que la transformée de Laplace est une fonction décroissante de la taille des sauts et nous explicitons l'ensemble des valeurs prises par cette transformée lorsque l'amplitude des sauts varie.
Dans la cinquième section, nous reprenons et continuons l'étude précédente dans le cas où l'amplitude des sauts est une variable aléatoire discrète, inconnue de l'investisseur. Celui-ci l'estime par son espérance, et de fait, il surestime la transformée de Laplace du temps d'atteinte. Tout se passe alors comme si la connaissance imparfaite de l'amplitude des sauts entraînait l'investisseur à entreprendre le projet trop tôt.
Enfin, dans la dernière section, nous nous intéressons à l'impact d'une erreur de spécification du modèle. Si l'investisseur croit à un processus continu pour le sous-jacent, nous donnons des bornes sur les erreurs commises sur le "prix" et sur la transformée de Laplace du temps d'atteinte.

10.1.2 Le modèle

Dans le modèle que nous considérons, la dynamique des flux financiers est représentée par une diffusion mixte. L'introduction d'un processus à sauts permet en effet de rendre compte de discontinuités inhérentes au projet considéré.
Ainsi des sauts d'amplitude négative peuvent-ils être induits par l'apparition brutale d'un produit de substitution directe, faisant chuter les ventes potentielles. Nous nous concentrons ici sur le problème des options réelles dans le cas défavorable pour l'entreprise i.e. la situation où les sauts sont d'amplitude négative.

Notations

L'univers est représenté par un espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ où $\mathbb{P}$ désigne la probabilité historique. Nous supposons que $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s,\ M_s,\ s \leq t)$ où :

- W est un $(\mathbb{P} - \mathcal{F}_t)$-mouvement Brownien standard,

- M est la $(\mathbb{P} - \mathcal{F}_t)$ martingale compensée associée à un $(\mathbb{P} - \mathcal{F}_t)$ processus de Poisson N, d'intensité constante λ. On a donc : $dM_t = dN_t - \lambda dt$.

Les processus $(W_t\ ;\ t \geq 0)$ et $(N_t\ ;\ t \geq 0)$ sont indépendants (voir par exemple D. Revuz et M. Yor [13], chap V, ex. 4.25).

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{E}$ désigne l'espérance sous la probabilité $\mathbb{P}$.

Une entreprise évolue dans cet univers et doit décider si elle entreprend un projet d'investissement donné et si oui, quel est le moment optimal pour investir. On suppose qu'elle n'a aucune limite temporelle pour sa prise de décision i.e. l'horizon est infini.

On définit alors $(S_t)_{t\geq 0}$ le processus relatif à ce projet d'investissement. Il s'agit ici du ratio bénéfices actualisés-coûts actualisés. Sa dynamique sous $\mathbb{P}$ est donnée par l'équation de C. Doléans :

$$\begin{aligned} dS_t &= S_{t^-}\left[\alpha dt + \sigma dW_t + \varphi dM_t\right] \qquad (10.1) \\ S_0 &= s_0 \end{aligned}$$

Les hypothèses suivantes sont faites concernant les paramètres :

i) $s_0 < 1$,

ii) $\sigma \neq 0$ (on supposera sans perte de généralité que $\sigma > 0$),

iii) $0 > \varphi > -1$.

s_0 est supposé strictement inférieur à 1 de façon à étudier un "réel" problème. En effet, dans le cas contraire, il est optimal d'entreprendre le projet immédiatement. L'hypothèse iii) assure, quant à elle, que le processus relatif au projet d'investissement est toujours strictement positif. A priori, il n'y a pas de contrainte sur le paramètre de dérive α.

Dans le contexte décrit ci-dessus, le "prix"[1] de l'option réelle au temps $t = 0$ est défini par

$$C_0 = \sup_{\tau \in \Upsilon} \mathbb{E}\left[\exp(-\mu\tau)(S_\tau - 1)^+\right]$$

[1] Notons ici que la notion de "prix" est moins évidente que dans le cas des options financières classiques. Les options réelles sont, nous l'avons souligné, un outil d'aide à la prise de décision. Ainsi, le "prix" donne un critère de choix mais n'est pas vraiment le "prix" d'un contrat physique donné.
Pour prendre en compte cette ambiguité de notions, nous utiliserons la notation entre " ".

où μ désigne le taux d'actualisation et Υ l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $[0,+\infty[$. Le "prix" de l'option est une fonction des différents paramètres du modèle. Toutefois, par souci de simplicité, nous le notons généralement C_0.

Notons qu'il s'agit d'évaluer un "call" américain perpétuel dont le sous-jacent est S et le prix d'exercice est égal à 1. Or, une option d'achat américaine perpétuelle n'a de sens que sous l'hypothèse $(H1)$:

$$\mu > \sup(\alpha; 0) \tag{$H1$}$$

Cette hypothèse assure les conditions d'intégrabilité requises (cf. A.N. Shiryaev [14]).

On en déduit que la valeur du projet en $t = 0$ est donnée par :

$$C_0 = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\mu\tau^*\right)\left(S_{\tau^*} - 1\right)\right]$$

où :

$$\tau^* = \inf\left\{t \geq 0; S_t \geq 1\right\}$$

est le temps optimal d'entreprise du projet d'investissement.

Cette expression, écrite par rapport au temps, peut se reformuler, en terme d'espace comme (cf., par exemple D. Lamberton et B. Lapeyre [8]) :

$$C_0 = \sup_{L \geq 1} \mathbb{E}\left[\exp\left(-\mu\tau_L\right)\left(S_{\tau_L} - 1\right)\right]$$

où

$$\tau_L = \inf\left\{t \geq 0; S_t \geq L\right\} \tag{10.2}$$

On note

$$L^* = \arg\max\left\{\mathbb{E}\left[\exp\left(-\mu\tau_L\right)\left(S_{\tau_L} - 1\right)\right]\right\}$$

la frontière d'exercice de l'option et $\tau_{L^*} = \inf\left\{t \geq 0; S_t \geq L^*\right\}$ est le temps d'exercice optimal. Tant que le processus S n'a pas atteint la frontière L^*, il est optimal pour son détenteur de ne pas exercer son droit et d'attendre. Par contre, dès que S dépasse ce seuil (de façon continue ou non), il est alors optimal d'exercer l'option, comme cela a été rappelé dans la note introductive. Notons que le niveau optimal de la frontière d'exercice dépend du taux d'actualisation μ.

La résolution explicite de l'équation de C. Doléans permet d'écrire S_t solution de (10.1) sous la forme :

$$S_t = s_0 \exp(X_t)$$

avec :

$$X_t = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda(\varphi - \ln(1+\varphi))\right)t + \sigma W_t + \ln(1+\varphi) M_t$$

10.1.3 Choix de modélisation des sauts et propriété de monotonie

A priori, deux choix de modélisation sont envisageables :

$$(A) \qquad \begin{cases} dS_t = S_{t^-}\left[\alpha dt + \sigma dW_t + \varphi dM_t\right] \\ S_0 = s_0 \end{cases}$$

$$(B) \qquad \begin{cases} dS_t = S_{t^-}\left[\overline{\alpha} dt + \sigma dW_t + \varphi dN_t\right] \\ S_0 = s_0 \end{cases}$$

Bien évidemment, les deux écritures sont équivalentes. Il suffit de poser :

$$\alpha = \overline{\alpha} + \lambda\varphi$$

Cependant, le choix de (A) ou de (B) n'est pas neutre dès lors que l'on désire étudier le comportement des caractéristiques de l'option réelle en fonction de l'amplitude des sauts. En effet, la modélisation (A) assure, sous une hypothèse "raisonnable", la monotonie de la transformée de Laplace du temps optimal d'exercice. La seconde modélisation entraîne, quant à elle, la monotonie de la valeur de l'investissement en fonction de l'amplitude des sauts. Plus précisément, on a :

Proposition 52 *1) Soit $(S_t)_{t\geq 0}$ défini par la modélisation (A).*
Il existe $\widetilde{s}_0 < 1$ tel que si $\widetilde{s}_0 < s_0 < 1$ alors la fonction $\varphi \mapsto \mathbb{E}(\exp(-\mu\tau^*))$ est monotone.
2) Soit $(S_t)_{t\geq 0}$ défini par la modélisation (B).
Alors la fonction $\varphi \mapsto C_0(\varphi)$ est monotone.

Preuve :
Ces résultats sont établis dans le Lemme 58 et la Proposition 62.
Notons que la deuxième assertion de la Proposition 52 est valable sans condition sur s_0. ■

10.2 Premiers résultats

Comme dans tout ce chapitre nous supposons que $-1 < \varphi < 0$, la frontière d'exercice ne peut être franchie que de façon continue et l'on a

$$S_{\tau_{L^*}} = L^* \tag{10.3}$$

Ce cas a été déjà étudié dans la littérature (cf. par exemple, N. Bellamy [1], M. Chesney [3] ou H. Pham [11]). Nous rappelons les principaux résultats.

10.2.1 Exposant de Lévy

Nous rappelons maintenant l'expression de la transformée de Laplace de $(X_t)_{t\geq 0}$.

Definition 53 *On appelle exposant de Lévy du processus* $(X_t,\ t \geq 0)$ *sous la probabilité* $\mathbb{P}$*, la fonction* Ψ *définie par*

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(kX_t\right)\right) = \exp\left(t\Psi\left(k\right)\right) \qquad \forall t \geq 0 \qquad \forall k \in \mathbb{R}$$

Lemma 54 *i) L'exposant de Lévy du processus* $(X_t,\ t \geq 0)$ *sous la probabilité* $\mathbb{P}$ *est donné par :*

$$\Psi\left(k\right) = k^2\frac{\sigma^2}{2} + k\left(\alpha - \varphi\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \lambda\left(1 - \left(1+\varphi\right)^k\right)$$

ii) Il existe un unique réel, noté $k_\varphi^{(\mu)}$ *tel que :*

$$k_\varphi^{(\mu)} > 1 \quad \textit{et} \quad \Psi\left(k_\varphi^{(\mu)}\right) = \mu$$

Notation : $k_\varphi^{(\mu)}$ est une fonction de plusieurs variables dont μ, φ et λ (mais aussi de α et de σ). Selon les études de dépendance réalisées par la suite, par souci de simplicité et lorsqu'il n'y aura aucune ambiguité, nous noterons ce réel k_φ.

Preuve : La preuve s'effectue en utilisant l'indépendance, sous la probabilité $\mathbb{P}$, des processus W et M.

On établit i) en remarquant que, quel que soit le réel k, on a

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(kX_t\right)\right) \;= \mathbb{E}\left[\exp\left(k\left(\alpha - \tfrac{\sigma^2}{2} - \lambda\varphi\right)t + k\sigma W_t + k\ln\left(1+\varphi\right)N_t\right)\right]$$

L'étude de la fonction Ψ permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
\Psi'\left(k\right) &= k\sigma^2 + \alpha - \varphi\lambda - \frac{\sigma^2}{2} + \lambda\left(1+\varphi\right)^k\ln\left(1+\varphi\right) \\
\Psi''\left(k\right) &= \sigma^2 + \lambda\left(1+\varphi\right)^k\left[\ln\left(1+\varphi\right)\right]^2 > 0
\end{aligned}$$

Notons que sur $]1;+\infty[$, $\Psi'(k) > 0$. Par conséquent, la fonction Ψ est strictement croissante sur $]1;+\infty[$. De plus, il s'agit d'une fonction convexe sur $]1;+\infty[$ et $\lim_{k\to+\infty} \Psi(k) = +\infty$.
L'existence et l'unicité de $k_\varphi^{(\mu)}$ découlent de la convexité de la fonction Ψ sur $]1;+\infty[$.
De plus, l'étude des variations de la fonction Ψ, l'égalité $\Psi(1) = \alpha$ et la condition $(H1)$ donnent le résultat suivant :

$$k_\varphi^{(\mu)} > 1$$

■

10.2.2 Valeur de l'investissement et date optimale d'entrée dans le projet

Dans le cadre précédemment défini, il est possible non seulement de donner des expressions explicites pour le "prix" de l'option et la frontière d'exercice mais aussi de caractériser le temps optimal d'investissement par l'intermédiaire de sa transformée de Laplace. Ces formules sont obtenues grâce à l'égalité (10.3) et au Lemme 54. Notons d'autre part que le taux d'actualisation, μ, est supposé fixé de façon a priori dans tout ce chapitre (sauf mention contraire).

Lemma 55 *Soit k_φ l'élément de $]1;+\infty[$ défini par le Lemme 54. Alors :*
i) la frontière d'exercice L^* vérifie

$$L^* = \frac{k_\varphi}{k_\varphi - 1}$$

ii) la valeur de l'investissement en $t = 0$ est donnée par

$$C_0 = \left(\frac{s_0}{k_\varphi}\right)^{k_\varphi} \left(\frac{1}{k_\varphi - 1}\right)^{1-k_\varphi} \tag{10.4}$$

iii) la date optimale d'entrée dans le projet τ_{L^*} est caractérisée par

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau_{L^*}\right)\right) = \left(\frac{s_0\left(k_\varphi - 1\right)}{k_\varphi}\right)^{k_\varphi} \tag{10.5}$$

Preuve : Nous rappelons ici les étapes essentielles de la preuve (pour la démonstration précise, voir par exemple N. Bellamy [1] ou M. Chesney [3]) :

- La première étape consiste à déterminer la transformée de Laplace du temps d'atteinte par le processus S d'un niveau L, tel que $L > s_0$:

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau_L\right)\right)$$

où τ_L est défini par l'équation (10.2).

On montre que le processus $(\exp(kX_t - t\Psi(k)); t \geq 0)$ est une martingale uniformément intégrable et que le temps d'arrêt τ_L est fini $\mathbb{P}$ *p.s.*. L'argument essentiel est ensuite l'utilisation du théorème d'arrêt pour la martingale $(\exp(kX_t - t\Psi(k)); t \geq 0)$ et en regardant l'égalité obtenue en $k = k_\varphi$.

De $S_{\tau_L} = L$, nous en déduisons :

$$\mathbb{E}(\exp(-\mu\tau_L)) = \left(\frac{s_0}{L}\right)^{k_\varphi}$$

- La seconde étape consiste à déterminer la frontière optimale L^*. Ce niveau correspond à un niveau maximal i.e. L^* est solution de :

$$\frac{\partial}{\partial L}\{(L-1)\mathbb{E}(\exp(-\mu\tau_L))\} = 0$$

Finalement :

$$L^* = \frac{k_\varphi}{k_\varphi - 1}$$

On a bien $L^* > 1$ et à fortiori, $L^* > s_0$ est bien satisfait puisque $s_0 < 1$ par hypothèse. De plus, on vérifie que la valeur obtenue correspond bien à un maximum. Alors, il vient :

$$\mathbb{E}(\exp(-\mu\tau_{L^*})) = \left(\frac{s_0(k_\varphi - 1)}{k_\varphi}\right)^{k_\varphi} \tag{10.6}$$

- La dernière étape consiste à déterminer le "prix" de l'option. Pour cela, il suffit de remplacer L^* par la valeur précédemment obtenue dans :

$$C_0 = (L^* - 1)\mathbb{E}(\exp(-\mu\tau_{L^*}))$$

Nous obtenons alors :

$$C_0 = \left(\frac{s_0}{k_\varphi}\right)^{k_\varphi}\left(\frac{1}{k_\varphi - 1}\right)^{1-k_\varphi}$$

■

Remark 12 *Notons que ce lemme généralise les formules classiques pour les options américaines perpétuelles obtenues dans un modèle sans saut.*

10.3 Taux d'actualisation optimal et temps d'attente moyen

Avant de commencer l'étude de la robustesse de la transformée de Laplace du temps d'exercice en fonction des paramètres de saut, il est intéressant de s'intéresser au choix du taux d'actualisation. En effet, la question du choix optimal du taux d'actualisation μ est crucial dans la théorie des options réelles. L'évaluation se faisant sous la probabilité historique, le choix de μ incombe à l'investisseur. Ce n'est plus le taux sans risque instantané utilisé pour l'évaluation des options classiques, mais un taux de préférence pour le présent ou d'aversion pour le futur. Ce choix est d'autant plus important qu'il s'agit d'une option perpétuelle : le taux est donc le même pour toutes les dates entre aujourd'hui et un horizon de temps infini. De nombreux auteurs se sont interrogés sur un critère de choix optimal pour μ (par exemple, C. Gollier [6] ou C. Gollier et J.C. Rochet [7]).

Nous présentons ici un critère pour choisir optimalement ce taux d'actualisation. Il s'agit de maximiser la transformée de Laplace du temps d'exercice. Nous justifions ce choix dans la Remarque 13.

Proposition 56 *Il existe un unique réel $\widetilde{\mu}$ strictement positif tel que :*

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(-\widetilde{\mu}\tau_{L^*(\widetilde{\mu})}\right)\right) = \max_{\mu} \mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau_{L^*(\mu)}\right)\right)$$

Le réel $\widetilde{\mu}$ correspond à un choix optimal du taux d'actualisation μ.

Nous rappelons que le niveau de la frontière optimale dépend du choix du taux d'actualisation.

Preuve : L'étude de la fonction :

$$k \to \left(\frac{s_0\,(k-1)}{k}\right)^k$$

définie pour tout $k > 1$ montre qu'elle admet un maximum, atteint en $\widetilde{k}$, défini par :

$$\ln s_0 + \ln \frac{\widetilde{k}-1}{\widetilde{k}} + \frac{1}{\widetilde{k}-1} = 0 \tag{10.7}$$

L'étude précédente (preuve du Lemme 54) permet d'affirmer qu'il existe une unique valeur de μ, notée $\widetilde{\mu}$, telle que $\widetilde{\mu} > \alpha$ et $k_{\varphi}^{(\widetilde{\mu})} = \widetilde{k}$. De plus, l'équation (10.6) assure que la valeur $\widetilde{\mu}$ de μ satisfait

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(-\widetilde{\mu}\tau_{L^*(\widetilde{\mu})}\right)\right) = \max_{\mu} \mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau_{L^*(\mu)}\right)\right)$$

Pour ce choix particulier du taux d'actualisation, seul paramètre que l'investisseur peut librement choisir, la transformée de Laplace de $\tau_{L^*(\mu)}$ est optimale, ce qui correspond intuitivement à un temps d'atteinte (en espérance) minimal. Ainsi, selon ce critère, $\widetilde{\mu}$ est le choix optimal du taux d'actualisation μ. ■

Ainsi, le taux d'actualisation optimal est défini implicitement à partir de :

$$\arg\max \mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau_{L^*(\mu)}\right)\right)$$

Il dépend de toutes les variables du modèle, en particulier de φ et de λ, l'amplitude et l'intensité des sauts. Nous étudions numériquement comment évolue ce taux en fonction de ces deux paramètres. En considérant les valeurs suivantes pour les paramètres de dérive et de volatilité :

α	σ
10%	20%

nous pouvons tracer les courbes suivantes de $\widetilde{\mu}$ en fonction de φ pour différentes valeurs de λ :

Le taux d'actualisation optimal est une fonction décroissante de l'amplitude et de l'intensité des sauts. Ceci est tout à fait logique, puisque l'occurence et la fréquence de sauts négatifs dans le futur font diminuer la valeur du projet et représentent un risque supplémentaire pour l'investisseur. Plus l'intensité des sauts et plus leur taille sont importantes, plus l'investisseur privilégiera le présent. Pour ce faire, il choisira un taux d'actualisation plus élevé.

Remark 13 *On aurait pu envisager d'autres critères pour déterminer un taux optimal. A priori, on* *aurait pu également considérer la maximisation de C_0 en fonction de μ. Mais l'étude de la fonction*

$$\mu \mapsto k_\varphi^{(\mu)} \mapsto C_0 = \left(\frac{s_0 \left(k_\varphi^{(\mu)} - 1 \right)}{k_\varphi^{(\mu)}} \right)^{k_\varphi^{(\mu)}} \left(\frac{k_\varphi^{(\mu)}}{k_\varphi^{(\mu)} - 1} - 1 \right)$$

permet d'établir que C_0 est une fonction strictement décroissante de μ. L'utilisation du premier critère est donc pertinente.

D'autre part, une autre question relative au temps d'exercice se pose naturellement : celle de la détermination d'un temps d'attente moyen, noté T_c. Celui-ci est défini comme l'unique élément de $\mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(-\widetilde{\mu}\tau_{L^*(\widetilde{\mu})}\right)\right) = \exp\left(-\widetilde{\mu}T_c\right)$$

Alors T_c correspond au temps d'attente moyen avant l'entrée dans le projet. Il s'agit en fait de l'équivalent certain de $\tau_{L^*(\widetilde{\mu})}$ lorsque le critère d'utilité est exponentiel et que le coefficient d'aversion pour le risque est $\widetilde{\mu}$. Ce dernier peut facilement être interprété comme un paramètre d'aversion pour le futur ou de préférence pour le présent. T_c peut alors être explicitement déterminé :

$$T_c = -\frac{1}{\widetilde{\mu}} \ln \mathbb{E}\left(\exp\left(-\widetilde{\mu}\tau_{L^*(\widetilde{\mu})}\right)\right)$$

10.4 Robustesse de la transformée de Laplace du temps d'exercice

Afin de mettre en pratique les résultats donnés par un modèle, il convient avant tout de le calibrer. Ainsi, les différents paramètres du modèle doivent-ils être estimés à l'aide de données historiques ou d'anticipations stratégiques. Toute procédure d'estimation et de calibration peut conduire à une erreur sur le choix des valeurs attribuées aux différents paramètres d'entrée. Il est par conséquent très important que le résultat obtenu par le modèle ne soit pas trop sensible à des variations de valeurs de ces paramètres. Une certaine stabilité (ou robustesse) des résultats est indispensable pour que le modèle soit vraiment utilisable en pratique.

Or, comme cela a été souligné précédemment, le temps optimal d'investissement τ_{L^*} est la préoccupation essentielle de l'agent. De ce fait, il nous apparaît pertinent d'étudier la robustesse de la transformée de Laplace de ce temps d'exercice optimal. Nous nous attachons particulièrement à l'étude de la sensibilité à l'amplitude des sauts.

10.4.1 Etude de la robustesse

Dans cette section, on cherche le comportement de la transformée de Laplace du temps optimal d'exercice si on ne connait pas précisément la valeur du paramètre de l'amplitude des sauts. On suppose que l'amplitude des sauts est une variable aléatoire Φ dont on sait seulement qu'elle vérifie $\Phi \in \left]\underline{\varphi};\overline{\varphi}\right[\subset \left]-1;0\right[$. Tous les autres paramètres sont supposés fixés.

Lemma 57 *1) La fonction $\varphi \mapsto k_\varphi$ est croissante et vérifie :*

$$k_{-1} < k_\varphi < k_0$$

avec :

$$k_0 = \frac{\frac{\sigma^2}{2} - \alpha + \sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{2} - \alpha\right)^2 + 2\mu\sigma^2}}{\sigma^2} \tag{10.8}$$

$$k_{-1} = \frac{\frac{\sigma^2}{2} - (\alpha+\lambda) + \sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{2} - (\alpha+\lambda)\right)^2 + 2\sigma^2(\mu+\lambda)}}{\sigma^2} \tag{10.9}$$

2) La fonction $\varphi \mapsto L^*_\varphi$ est décroissante et vérifie :

$$\frac{k_0}{k_0 - 1} < L^*_\varphi < \frac{k_{-1}}{k_{-1} - 1}$$

Preuve :

1) Soit F la fonction de $\left]-1;0\right[\times \left]1;+\infty\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$F(\varphi,k) = k^2\frac{\sigma^2}{2} + k\left(\alpha - \varphi\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \lambda\left(1 - (1+\varphi)^k\right) - \mu = \Psi(k) - \mu$$

Les dérivées partielles premières de F par rapport à φ et à k sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \varphi}(\varphi,k) &= \lambda k\left[(1+\varphi)^{k-1} - 1\right] < 0 \\
\frac{\partial F}{\partial k}(\varphi,k) &= \sigma^2 k + \alpha - \varphi\lambda - \frac{\sigma^2}{2} + \lambda\ln(1+\varphi)(1+\varphi)^k = \Psi'(k)
\end{aligned}$$

Pour tout couple $(\varphi,k_\varphi) \in \left]-1;0\right[\times\left]1;+\infty\right[$ tel que $F(\varphi,k_\varphi) = 0$, i.e. $\Psi(k_\varphi) = \mu$, on vérifie facilement que $\Psi'(k_\varphi) > 0$. Par le théorème des fonctions implicites, il vient :

$$\frac{\partial k_\varphi}{\partial \varphi} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \varphi}(\varphi,k_\varphi)}{\frac{\partial F}{\partial k}(\varphi,k_\varphi)} > 0$$

Donc la fonction $\varphi \mapsto k_\varphi$ est bien strictement croissante.

De plus, d'après ce qui précède, on peut déterminer la limite de k_φ lorsque φ tend vers 0. Cette quantité, notée k_0, est obtenue comme la solution positive de :

$$k^2\frac{\sigma^2}{2}+k\left(\alpha-\frac{\sigma^2}{2}\right)=\mu$$

soit :

$$k_0=\frac{\frac{\sigma^2}{2}-\alpha+\sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{2}-\alpha\right)^2+2\mu\sigma^2}}{\sigma^2}$$

De la même façon, on peut déterminer la limite de k_φ lorsque φ tend vers -1. Cette quantité, notée k_{-1}, est obtenue comme solution positive de :

$$k^2\frac{\sigma^2}{2}+k\left(\alpha+\lambda-\frac{\sigma^2}{2}\right)-\lambda=\mu$$

soit :

$$k_{-1}=\frac{\frac{\sigma^2}{2}-(\alpha+\lambda)+\sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{2}-(\alpha+\lambda)\right)^2+2\sigma^2\left(\mu+\lambda\right)}}{\sigma^2}$$

2) est une conséquence immédiate de la décroissance de la fonction $k\rightarrow\frac{k}{k-1}$ et de l'assertion 1). ■

Lemma 58 *Il existe un niveau $\widetilde{s_0}$ tel que si $0<\widetilde{s_0}<s_0<1$ alors la transformée de Laplace du temps d'atteinte de la frontière optimale est une fonction croissante de l'amplitude des sauts.*

Preuve : Soit $\widetilde{k}$ défini par l'équation (10.7). Alors pour tout k_φ, $1<k_\varphi<\widetilde{k}$, la fonction $\varphi\mapsto\mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau_{L^*(\varphi)}\right)\right)$ est croissante.

Or d'après la première assertion du Lemme 57, on a :

$$k_\varphi<k_0$$

La condition $k_0\leq\widetilde{k}$ se traduit par

$$s_0\geq\widetilde{s_0}$$

où

$$\widetilde{s_0}=\frac{k_0}{k_0-1}\exp\left(-\frac{1}{k_0-1}\right)$$

On vérifie aisément que $0<\widetilde{s_0}<1$. ■

Remark 14 *L'hypothèse $\widetilde{s_0}\leq s_0$ traduit le fait que l'on ne considère que des projets d'investissement dont la valeur initiale n'est pas trop faible. D'un point de vue économique, cette hypothèse n'est pas très restrictive. En effet, l'investisseur cessera de s'intéresser au projet dès que s_0 est en dessous d'un* *certain seuil. Nous notons $(H2)$ l'hypothèse :*

$$\widetilde{s_0} \leq s_0 < 1 \tag{$H2$}$$

Proposition 59 *Soit Φ une variable aléatoire vérifiant :*

$$-1 < \underline{\varphi} \leq \Phi \leq \overline{\varphi} < 0$$

Alors, sous l'hypothèse $(H2)$:

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau_{L^*\left(\underline{\varphi}\right)}\right)\right) \leq \mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau_{L^*(\Phi)}\right)\right) \leq \mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau_{L^*(\overline{\varphi})}\right)\right)$$

Preuve : Ceci est une conséquence immédiate du Lemme 58 et du caractère borné de la transformée de Laplace du temps d'atteinte :

$$0 \leq \mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau_L\right)\right) \leq 1 \qquad \forall L > 1$$

■

10.4.2 Bornes de la transformée de Laplace du temps optimal d'investissement

De façon évidente, la transformée de Laplace du temps d'atteinte d'un niveau quelconque est bornée par 0 et 1. La proposition suivante précise l'intervalle dans lequel celle-ci prend ses valeurs. On suppose que l'amplitude des sauts est une variable aléatoire Φ, à valeurs dans $]-1, 0[$, inconnue de l'investisseur.

Proposition 60 *Soit Φ une variable aléatoire à valeurs dans $]-1, 0[$. Alors, sous l'hypothèse $(H2)$, il existe deux réels Γ_{-1} et Γ_0 tels que*

$$\Gamma_{-1} < \mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau_{L^*(\Phi)}\right)\right) < \Gamma_0$$

Preuve :

La preuve est une conséquence immédiate de l'égalité (10.5) et de la Proposition 59. ■

Remark 15 *Il est possible de donner les valeurs explicites de Γ_0 et de Γ_{-1}. En effet, par un argument* *de continuité de la fonction* $\varphi \mapsto \left(\frac{s_0(k_\varphi - 1)}{k_\varphi}\right)^{k_\varphi}$, *on en déduit que :*

$$\Gamma_0 \triangleq \lim_{\varphi \to 0^-} \left(\frac{s_0\,(k_\varphi - 1)}{k_\varphi}\right)^{k_\varphi} = \left(\frac{s_0\,(k_0 - 1)}{k_0}\right)^{k_0}$$

$$\Gamma_{-1} \triangleq \lim_{\varphi \to -1^+} \left(\frac{s_0\,(k_\varphi - 1)}{k_\varphi}\right)^{k_\varphi} = \left(\frac{s_0\,(k_{-1} - 1)}{k_{-1}}\right)^{k_{-1}}$$

où k_0 *et* k_{-1} *sont définis dans le Lemme 57.*

Notons que Γ_0 *est une fonction de* α, σ *et* μ, *alors que* Γ_{-1} *est une fonction de* α, σ, μ *et* λ.

En considérant les valeurs suivantes pour les paramètres de dérive, de volatilité et de taux d'actualisation, i.e. :

α	σ	μ
10%	20%	15%

nous pouvons tracer les courbes suivantes donnant l'évolution de la transformée de Laplace du temps d'atteinte de la frontière optimale en fonction de φ pour différentes valeurs de λ :

D'autre part, lorsque λ tend vers 0, k_{-1} tend vers k_0 et Γ_{-1} tend vers Γ_0. Par simple encadrement, la transformée de Laplace tend donc vers celle du modèle sans saut.

Lorsque λ tend vers $+\infty$, k_{-1} tend vers $+\infty$ et Γ_{-1} tend vers 0. Plus précisément, pour les valeurs suivantes des paramètres :

s_0	α	σ	μ
$0,8$	10%	20%	15%

nous pouvons représenter graphiquement la région dans laquelle se trouve la transformée de Laplace du temps d'atteinte de la frontière optimale pour différentes valeurs de λ :

Pour de petites valeurs de λ, la borne inférieure Γ_{-1} tend vers la borne supérieure Γ_0 de façon linéaire, comme le souligne le graphe ci-dessous :

Pour de grandes valeurs de λ, la borne inférieure tend vers 0. L'intervalle de valeurs possibles pour la transformée de Laplace du temps d'atteinte de la frontière optimale augmente. La précision de l'estimation par les bornes Γ_{-1} et Γ_0 diminue, ceci est logique puisque l'intensité des sauts devient augmente :

10.4.3 Etude du "prix" de l'option comme fonction de l'amplitude des sauts

Dans les sections précédentes, la préoccupation essentielle a été d'étudier le temps optimal d'exercice. Les calculs associés permettent naturellement d'obtenir des propriétés de la valeur de l'investissement. On s'intéresse ici à l'existence d'une taille des sauts "optimale" pour le prix de l'option, au sens où elle maximise la valeur du projet. Ce qui est remarquable est que cette valeur optimale ne correspond pas nécessairement à la valeur limite du modèle sans saut. Ce résultat provient du double impact de l'amplitude des sauts sur la dynamique du processus (dérive et crochet droit). En effet, on a :

Proposition 61 *Soient* $\kappa = \frac{1+\sqrt{1+\frac{4s_0^2}{e^2}}}{2}$ *,* k_{-1} *déterminé par la formule (10.9) et* k_0 *donné par la formule (10.8). Alors*

- Si $\kappa > k_{-1}$*, il existe une unique valeur* φ*, notée* $\widehat{\varphi}$*, qui maximise la valeur du projet. De plus,*

$$\text{(i) si } k_{-1} < \kappa < k_0 \text{ alors } \widehat{\varphi} \in \left]-1;0\right[$$

$$\text{(ii) si } k_{-1} < k_0 < \kappa \text{ alors } \widehat{\varphi} = 0$$

- *Si $\kappa < k_{-1}$, la valeur limite optimale du projet est obtenue lorsque φ tend vers -1.*

Preuve :

(i) Supposons $k_{-1} < \kappa < k_0$. Alors, il existe $\widehat{\varphi}$ tel que $\kappa = k_{\widehat{\varphi}}$. La monotonie de la fonction $\varphi \to k_\varphi$, prouvée dans le Lemme 57, assure l'unicité de $\widehat{\varphi}$.

D'autre part :

$$\frac{\partial C_0}{\partial \varphi} = \frac{\partial k_\varphi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial C_0}{\partial k_\varphi}$$

Or $\frac{\partial k_\varphi}{\partial \varphi} > 0$ d'après le Lemme 57. D'autre part $\frac{\partial C_0}{\partial k_\varphi}$ a le même signe que la fonction :

$$g(k) = \ln s_0 - \ln k - 2 - \ln(k-1)$$

i.e. $\frac{\partial C_0}{\partial k_\varphi}$ est positif sur $]1; \kappa[$ et négatif sur $]\kappa; +\infty[$.

On en déduit l'existence d'un unique réel $\widehat{\varphi}$ dans $]-1;0[$ tel que la fonction $\varphi \to C_0(\varphi) = C_0$ est croissante sur $]-1; \widehat{\varphi}[$ et décroissante sur $]\widehat{\varphi}; 0]$. La valeur maximale du projet est donc atteinte en $\widehat{\varphi} \in]-1;0[$.

(ii) Si $k_{-1} < k_0 < \kappa$, cela implique que la fonction $\varphi \to C_0(\varphi) = C_0$ est croissante sur $]-1;0]$. La valeur maximale du projet est donc atteinte en $\widehat{\varphi} = 0$.

(iii) Si $k_{-1} > \kappa$ alors la fonction $\varphi \to C_0(\varphi) = C_0$ est décroissante sur $]-1;0]$. La valeur limite maximale du projet est donc atteinte lorsque $\widehat{\varphi}$ tend vers -1. ■

Remark 16 *Le cas (ii) $k_0 < \kappa$ correspond à de "grandes" valeurs de s_0, puisque l'on a :*

$$k_0 < \kappa \Leftrightarrow s_0^2 > e^2 k_0 \frac{(2k_0 - 1)}{2}$$

Par contre, le cas $k_{-1} > \kappa$ ne peut se réaliser que si :

$$k_{-1} > \kappa \Leftrightarrow s_0^2 < e^2 k_{-1} \frac{(2k_{-1} - 1)}{2}$$

Notons que si s_0 est "petit", le projet n'attirera pas l'intérêt d'un investisseur rationnel.

Comme cela a été souligné précédemment, le "prix" de l'option est une fonction non-monotone de l'amplitude des sauts. Le maximum n'est pas nécessairement atteint pour la valeur limite $\widehat{\varphi} = 0$. Les résultats seraient différents avec la modélisation :

$$\begin{aligned} dS_t &= S_{t^-}\left(\overline{\alpha} dt + \sigma dW_t + \varphi dN_t\right) \\ S_0 &= s_0 \end{aligned} \tag{10.10}$$

Notons que l'hypothèse $(H1)$ dans ce modèle s'écrit sous la forme :

$$\mu > \max(\overline{\alpha} + \lambda\varphi; 0) \tag{$H1'$}$$

Alors :

Proposition 62 *Supposons que la dynamique des flux relatifs au projet d'investissement soit donnée par (10.10) et que l'hypothèse $(H1')$ soit satisfaite. Alors, la valeur de l'investissement en $t = 0$, C_0, est une fonction monotone croissante de l'amplitude des sauts.*

Preuve :

Supposons que S soit défini par l'équation (10.10). Pour un niveau quelconque L, $L > 1$, on note :

$$\mathcal{C}(\varphi, L) \triangleq (L-1) \times \mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau_L^{\varphi}\right)\right)$$

où :

$$\tau_L^{\varphi} = \inf\{t \geq 0; S_t \geq L\}$$

Par conséquent :

$$C_0(\varphi) = \mathcal{C}\left(\varphi, L_{\varphi}^*\right)$$

où L_{φ}^* désigne la frontière optimale.

Pour tout couple (φ_1, φ_2) tel que $-1 < \varphi_2 < \varphi_1 < 0$, on a, d'après la définition même du "prix" :

$$C(\varphi_1) = \mathcal{C}\left(\varphi_1, L_{\varphi_1}^*\right) \geq \mathcal{C}(\varphi_1, L) \qquad \forall L > 1$$

En particulier,

$$C(\varphi_1) \geq \mathcal{C}\left(\varphi_1, L_{\varphi_2}^*\right)$$

De plus, $\varphi_1 > \varphi_2$ entraîne que $\forall t \geq 0$, $S_t(\varphi_1) \geq S_t(\varphi_2)$, avec des notations évidentes. Par conséquent :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau_L^{\varphi_1}\right)\right) \geq \mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau_L^{\varphi_2}\right)\right) \qquad \forall L > 1$$

En particulier, pour $L = L_{\varphi_2}^*$, il vient :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau_{L_{\varphi_2}^*}^{\varphi_1}\right)\right) \geq \mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau_{L_{\varphi_2}^*}^{\varphi_2}\right)\right)$$

D'où

$$C(\varphi_1) \geq \mathcal{C}\left(\varphi_1, L_{\varphi_2}^*\right) \geq \mathcal{C}\left(\varphi_2, L_{\varphi_2}^*\right) = C(\varphi_2)$$

■

10.5 Amplitude aléatoire des sauts

Dans cette section, nous généralisons l'étude précédente au cas où l'amplitude des sauts est une variable aléatoire Φ, indépendante de la filtration naturelle du mouvement Brownien et du processus de Poisson, prenant ses valeurs dans un ensemble fini $\{\varphi_1; ...; \varphi_n\} \subset]-1; 0[$. On note :

$$\forall i \in \{1; ...; n\} \qquad \mathbb{P}(\Phi = \varphi_i) = p_i \qquad \text{et } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

L'investisseur ne connait pas la variable aléatoire Φ. Il n'a à sa disposition que son espérance $\mathbb{E}(\Phi)$ pour l'estimer.

10.5.1 Le modèle

Dans ce cadre d'étude, l'investisseur ne connait pas l'amplitude des sauts Φ. Il l'estime par $\mathbb{E}(\Phi)$. Quel impact aura une telle "erreur" sur sa prise de décision ? Investira-t'il trop tôt ou trop tard ? Pour répondre à ces questions, il va s'agir de comparer dans un modèle simple les transformées de Laplace du temps d'atteinte de la frontière optimale lorsque l'amplitude aléatoire est connue et lorsque l'investisseur n'en connait que l'espérance.

La dynamique du processus relatif au projet d'investissement est désormais donnée par :

$$dS_t = S_{t^-} (\alpha dt + \sigma dW_t + \Phi dM_t)$$

où les notations sont les mêmes que dans le reste du chapitre.

10.5.2 Conséquences de l'aléa sur la décision d'investissement

Le résultat principal de cette partie est donné dans la proposition suivante :

Proposition 63 *Supposons que l'hypothèse $(H2)$ soit satisfaite. Alors :*

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau^{\Phi}_{L^*_{\Phi}}\right)\right) \leq \mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau^{\mathbb{E}(\Phi)}_{L^*_{\mathbb{E}(\Phi)}}\right)\right)$$

où :

$$\tau^{\Psi}_{L^*_{\Psi}} = \inf\{t \geq 0; S_t(\Psi) \geq L^*_{\Psi}\}$$

Preuve : La preuve de cette proposition est obtenue par les étapes suivantes :

1. *Détermination de k_Φ :*

   D'après la section 10.2.1,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(kX_t\right)\right] = \exp\left[t\Psi_\Phi\left(k\right)\right]$$

   avec :

$$\Psi_\Phi\left(k\right) = k^2\frac{\sigma^2}{2} + k\left(\alpha - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\varphi_i\right)\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i\left(1+\varphi_i\right)^k\right)$$

   l'existence d'un unique k_Φ tel que :

$$k_\Phi > 1 \qquad \text{et} \qquad \Psi_\Phi\left(k_\Phi\right) = \mu$$

   découle des arguments suivants : la fonction $k \mapsto \Psi_\Phi\left(k\right)$ est strictement convexe,

$$\Psi_\Phi\left(0\right) = 0 \qquad \Psi_\Phi\left(1\right) = \alpha$$

   et $\alpha < \mu$.

2. *Détermination de $k_{\mathbb{E}(\Phi)}$:*

   De la même façon que précédemment, avec :

$$\Psi_{\mathbb{E}(\Phi)}\left(k\right) = k^2\frac{\sigma^2}{2} + k\left(\alpha - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\varphi_i\right)\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \lambda\left(1 - \left(1 + \sum_{i=1}^{n} p_i\varphi_i\right)^k\right)$$

   l'existence d'un unique $k_{\mathbb{E}(\Phi)}$ tel que :

$$k_{\mathbb{E}(\Phi)} > 1 \qquad \text{et} \qquad \Psi_{\mathbb{E}(\Phi)}\left(k_{\mathbb{E}(\Phi)}\right) = \mu$$

   découle des arguments suivants : la fonction $k \mapsto \Psi_{\mathbb{E}(\Phi)}\left(k\right)$ est strictement convexe,

$$\Psi_{\mathbb{E}(\Phi)}\left(0\right) = 0 \qquad \Psi_{\mathbb{E}(\Phi)}\left(1\right) = \alpha$$

   et $\alpha < \mu$.

3. *Comparaison des fonctions Ψ_Φ et $\Psi_{\mathbb{E}(\Phi)}$ et des réels k_Φ et $k_{\mathbb{E}(\Phi)}$:*

   Comme la fonction $x \to (1+x)^k$ est une fonction convexe pour $k > 1$ et $x > -1$, on peut écrire :

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{n} p_i\varphi_i\right)^k \leq \sum_{i=1}^{n} p_i\left(1+\varphi_i\right)^k$$

Ainsi :

$$\forall k > 1 \qquad \Psi_{\mathbb{E}(\Phi)}(k) \leq \Psi_{\Phi}(k)$$

Comme $k_{\Phi} > 1$ et $k_{\mathbb{E}(\Phi)} > 1$ et que les fonctions Ψ_{Φ} et $\Psi_{\mathbb{E}(\Phi)}$ sont croissantes en k sur $[1;+\infty[$, on obtient finalement :

$$k_{\Phi} \leq k_{\mathbb{E}(\Phi)}$$

4. *Comparaison des transformées de Laplace* :

   Sous l'hypothèse $(H2)$:

$$\widetilde{s_0} \leq s_0 < 1$$

   la fonction $k \mapsto \left(\frac{s_0(k-1)}{k}\right)^k$ est monotone croissante sur $]1;+\infty[$. D'après l'équation (10.6) et l'étape précédente, on déduit :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau^{\Phi}_{L^*_{\Phi}}\right)\right) \leq \mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau^{\mathbb{E}(\Phi)}_{L^*_{\mathbb{E}(\Phi)}}\right)\right)$$

   où :

$$\tau^{\varphi}_{L^*_{\varphi}} = \inf\left\{t \geq 0; S_t(\varphi) \geq L^*_{\varphi}\right\}$$

■

De façon extrêmement heuristique, il est possible de donner l'interprétation suivante de ce résultat : le fait de ne pas connaitre précisément l'amplitude des sauts Φ conduit l'investisseur à entreprendre le projet trop tôt.

10.6 Impact d'une erreur de spécification du modèle

Dans cette section, nous nous intéressons à l'impact d'une erreur de spécification du modèle sur la prise de décision. Cette partie reprend et complète les études portant sur la robustesse des résultats par rapport aux paramètres de sauts (amplitude et intensité). L'investisseur pense que la dynamique sous-jacente est continue et qu'elle ne présente donc aucun saut. Il élabore donc sa stratégie à partir du processus suivant :

$$\frac{d\widetilde{S}_t}{\widetilde{S}_t} = \widetilde{\alpha}dt + \widetilde{\sigma}dW_t$$

avec :

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_0 &= s_0\\ \widetilde{\sigma}^2 &= \sigma^2 + \lambda\varphi^2\\ \widetilde{\alpha} &= \alpha - \lambda\varphi\end{aligned}$$

$\widetilde{S}$ est appelé actif sans saut équivalent. Notons que les paramètres de dérive et de volatilité du modèle sans saut diffèrent des paramètres de dérive et de volatilité du modèle avec saut. En effet, l'absence de saut est "compensée" par une volatilité plus importante, permettant la calibration du modèle sur les mêmes données : pour obtenir ce paramètre de volatilité "équivalent", il suffit d'égaliser les crochets droits dans les deux modèles. D'autre part, les parties déterministes des deux processus doivent coïncider jusqu'au premier instant de saut. Ainsi le paramètre de dérive du modèle sans saut équivalent peut être obtenu.

Notons que pour qu'un call américain puisse avoir un sens à la fois dans le modèle sans saut équivalent eet dans le modèle avec saut, l'hypothèse $(H1)$ doit désormais s'écrire :

$$\mu > \max(\alpha - \lambda\varphi; \alpha; 0) = \max(\alpha - \lambda\varphi; 0)$$

puisque les sauts sont d'amplitude négative.
Une telle hypothèse traduit le fait que la quantité $\lambda\varphi$ doit être suffisamment "petite" en valeur absolue pour que l'investisseur puisse faire une telle erreur de spécification de modèle.

Nous souhaitons déterminer l'impact de cette erreur de spécification sur le "prix" de l'option et sur la transformée de Laplace du temps d'atteinte.

Notation : Dans cette partie, nous noterons avec des $\sim$ tous les paramètres et variables correspondant au modèle sans saut équivalent.

10.6.1 Quelques remarques préliminaires

Dans cette partie, nous présentons rapidement quelques résultats dans la proposition ci-dessous et dans sa preuve nous permettant de dériver les résultats de la sous-section suivante.

Proposition 64 *Le niveau de la frontière optimale dans le modèle avec saut est inférieure à celle du modèle sans saut équivalent :*

$$L^* \leq \widetilde{L}^*$$

Preuve : La preuve de cette proposition s'effectue en trois étapes :

1. *Etude comparée des fonctions* Ψ *et* $\widetilde{\Psi}$ *:*

   D'après la section 10.2.1, nous pouvons écrire :

$$\Psi(k) = k^2 \frac{\sigma^2}{2} + k\left(\alpha - \varphi\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \lambda\left(1 - (1+\varphi)^k\right)$$

$$\widetilde{\Psi}(k) = k^2 \frac{\widetilde{\sigma}^2}{2} + k\left(\widetilde{\alpha} - \frac{\widetilde{\sigma}^2}{2}\right)$$

   De $\widetilde{\sigma}^2 = \sigma^2 + \lambda\varphi^2$ et $\widetilde{\alpha} = \alpha - \lambda\varphi$, on déduit :

$$\widetilde{\Psi}(k) - \Psi(k) = \lambda\left[\frac{\varphi^2}{2} k(k-1) + \left(1 - (1+\varphi)^k\right)\right]$$

   On a donc :

$$\forall k > 1,\ \widetilde{\Psi}(k) - \Psi(k) \geq 0$$

2. *Etude comparée de* k_φ *et de* $\widetilde{k}_\varphi$ *:*

   D'après la section 10.2.1, il existe un unique réel strictement supérieur à 1 tel que :

$$\Psi(k) = \mu$$

   On le note k_φ.

   De la même façon, il existe un unique réel strictement supérieur à 1 tel que :

$$\widetilde{\Psi}(k) = \mu$$

   On le note $\widetilde{k}_\varphi$.

   D'après ce qui précède :

$$\widetilde{k}_\varphi \leq k_\varphi$$

3. *Comparaison des frontières optimales :*

   D'après l'assertion i) du Lemme 55, on en déduit :

$$L^* \leq \widetilde{L}^*$$

■

Une mauvaise spécification du modèle conduit donc l'investisseur à sur-estimer le niveau optimal de la frontière d'exercice, et en ce sens, à sur-estimer le ratio optimal "bénéfices actualisés-coûts actualisés" lié au projet.

10.6.2 Erreur sur la transformée de Laplace du temps d'atteinte de la frontière optimale

Le résultat principal de cette sous-section est donné dans le théorème suivant :

Theorem 65 *Sous l'hypothèse* $(H2)$*, les résultats suivants prévalent :*
i) $\mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau_{L^*}\right)\right) \geq \mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\widetilde{\tau}_{\widetilde{L}^*}\right)\right)$ *;*
ii) $\mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau_{L^*}\right)\right) - \mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\widetilde{\tau}_{\widetilde{L}^*}\right)\right) \leq M\left(k_\varphi - \widetilde{k}_\varphi\right)$
où M *est une constante indépendante de* φ *et :*

$$\tau_{L^*} = \inf\left\{t \geq 0; S_t \geq L^*\right\}$$
$$\widetilde{\tau}_{\widetilde{L}^*} = \inf\left\{t \geq 0; \widetilde{S}_t \geq \widetilde{L}^*\right\}$$

Preuve :

i) Sous l'hypothèse $(H2)$:

$$\widetilde{s_0} \leq s_0 < 1$$

la fonction $k \mapsto \left(\frac{s_0(k-1)}{k}\right)^k$ est monotone croissante sur $]1; +\infty[$. D'autre part, les Lemmes 57 et 64 assurent que :

$$1 < \widetilde{k}_\varphi \leq k_\varphi \leq k_0$$

Le Lemme 55 et la remarque 12 assurent alors que :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau_{L^*}\right)\right) \geq \mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\widetilde{\tau}_{\widetilde{L}^*}\right)\right)$$

ii) Soit la fonction g définie par :

$$\begin{aligned}]1; +\infty[&\to]0; 1[\\ k \mapsto g(k) &= \left(\frac{s_0(k-1)}{k}\right)^k \end{aligned}$$

Alors, sous l'hypothèse $(H2)$, la fonction g est monotone croissante et :

$$g'(k) = \left(\frac{s_0(k-1)}{k}\right)^k \left[\frac{1}{k-1} + \ln\left(\frac{s_0(k-1)}{k}\right)\right]$$

De plus, la fonction $k \mapsto \frac{1}{k-1} + \ln\left(\frac{s_0(k-1)}{k}\right)$ est décroissante sur $]1; +\infty[$.

D'autre part, si θ est un réel de $]0;1[$ alors l'égalité suivante prévaut :

$$\begin{aligned}\Delta Laplace \triangleq \mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau_{L^*}\right)\right) - \mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\widetilde{\tau}_{\widetilde{L}^*}\right)\right) &= g\left(k_\varphi\right) - g\left(\widetilde{k_\varphi}\right) \\ &= \left(k_\varphi - \widetilde{k_\varphi}\right) g'\left(k_\varphi + \theta\left(k_\varphi - \widetilde{k_\varphi}\right)\right)\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\Delta Laplace &\leq \left(k_\varphi - \widetilde{k_\varphi}\right) \times \max_{\widetilde{k_\varphi}<k<k_\varphi} \left\{g'\left(k\right)\right\} \\ &\leq \left(k_\varphi - \widetilde{k_\varphi}\right) \times \max_{\widetilde{k_\varphi}<k<k_\varphi} \left\{\left(\frac{s_0\left(k-1\right)}{k}\right)^k\right\} \times \max_{\widetilde{k_\varphi}<k<k_\varphi} \left\{\frac{1}{k-1} + \ln\left(\frac{s_0\left(k-1\right)}{k}\right)\right\} \\ &\leq \left(k_\varphi - \widetilde{k_\varphi}\right) \times \left(\frac{s_0\left(k_0-1\right)}{k_0}\right)^{k_0} \times \left[\frac{1}{\underline{k}-1} + \ln\left(\frac{s_0\left(\underline{k}-1\right)}{\underline{k}}\right)\right]\end{aligned}$$

où $\underline{k} \triangleq \min_{\varphi\in]-1;0[}\left(\widetilde{k_\varphi}\right)$.

Le résultat souhaité est obtenu en posant simplement :

$$M = \left(\frac{s_0\left(k_0-1\right)}{k_0}\right)^{k_0} \times \left[\frac{1}{\underline{k}-1} + \ln\left(\frac{s_0\left(\underline{k}-1\right)}{\underline{k}}\right)\right]$$

■

Commentaires :

L'assertion i) de ce théorème traduit le fait qu'une erreur de spécification du modèle conduit l'investisseur à sous-estimer la transformée de Laplace du temps d'atteinte de la frontière optimale. De façon intuitive, celui-ci aura tendance à attendre trop longtemps avant d'investir dans le projet.

L'assertion ii) précise l'erreur commise sur la transformée de Laplace. La majoration obtenue dépend de la taille des sauts uniquement au travers des paramètres k_φ et $\widetilde{k_\varphi}$, qui sont parfaitement connus. Cette erreur est très faible comme cela est illustré dans les graphiques de la section suivante.

Remark 17 *Comparer les prix obtenus dans chacun des deux modèles (sans saut équivalent et avec saut) n'est pas aussi simple du fait de la non-monotonie du prix C_0 en fonction de k_φ, comme cela a été montré dans la preuve de la Proposition 61. En effet,*

$$\frac{\partial C_0}{\partial k_\varphi} > 0 \qquad sur\ ]1;\kappa[$$
$$\frac{\partial C_0}{\partial k_\varphi} < 0 \qquad sur\ ]\kappa;+\infty[$$

Le signe de $C_0 - \widetilde{C_0}$ dépend donc de la position de k_φ et de $\widetilde{k_\varphi}$ relativement à κ.

10.6.3 Etude numérique

Nous allons désormais illustrer les résultats théoriques obtenus précédemment. Pour cela, nous considérons les valeurs suivantes des paramètres :

s_0	α	σ	μ
$0,8$	5%	20%	15%

Nous représentons graphiquement l'évolution, en fonction de φ, des transformées de Laplace du temps d'atteinte de la frontière optimale dans le modèle avec saut et celle dans le modèle sans saut pour $\lambda = 0,1$, ainsi que leur écart i.e. la quantité :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\tau_{L^*}\right)\right) - \mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\widetilde{\tau}_{\widetilde{L}^*}\right)\right)$$

L'écart entre les deux transformées reste bien toujours positif et tend vers 0 lorsque l'amplitude des sauts tend vers 0 :

D'autre part, nous représentons également l'évolution, en fonction de φ, des "prix" de l'option du modèle avec saut et de l'option du modèle sans saut pour $\lambda = 0,1$, ainsi que leur écart i.e. la quantité :

$$C_0 - \widetilde{C}_0$$

où $\widetilde{C}_0$ désigne le "prix" de l'option dans le modèle sans saut.

Nous obtenons une quantité qui n'est pas de signe constant, tendant vers 0 lorsque l'amplitude des sauts tend vers 0 et restant toujours très faible. L'écart entre les deux prix est le plus important, en valeur absolue, pour une valeur intermédiaire de l'amplitude des sauts. Cela traduit le double impact de ce paramètre sur les dynamiques. D'autre part, le prix dans le modèle avec saut est toujours inférieur à celui du modèle sans saut équivalent pour des valeurs "raisonnables" de l'amplitude des sauts comme les graphes suivants le soulignent :

10.7 Annexe

10.7.1 Quelques rappels sur les options américaines perpétuelles

Dans cette section, nous procédons à quelques rappels sur les options américaines perpétuelles, dont la logique nous a été extrêmement utile dans cette étude.
Une option est un contrat financier donnant, à son détenteur, le droit et non l'obligation d'acheter ou de vendre (selon le type de l'option) l'actif sous-jacent du contrat à un prix déterminé à la signature (prix d'exercice). Pour une option américaine, ce droit est valable pendant une période donnée, entre

la signature du contrat et la maturité de l'option. Dans le cas d'options perpétuelles (il s'agit plus de contrats théoriques que de contrats réellement échangés sur les marchés financiers), la maturité de l'option est infinie.

Exercice optimal d'une option américaine

La décision d'exercer l'option n'est pas chose triviale. Il faut comparer le prix de l'option à chaque instant avec le payoff que l'on obtiendrait si on exerçait immédiatement l'option (i.e. la valeur intrinsèque de l'option). Ceci revient à analyser la valeur temps de l'option. A un instant t, pour une option d'achat[2] (ou "call") :

Lorsque la valeur temps est strictement positive, il est optimal de ne pas exercer l'option. Il s'agit de la région de continuation. Mais lorsque celle-ci devient nulle, il est alors optimal d'exercer l'option. Le temps de l'attente n'a plus de valeur. Il s'agit de la région d'arrêt. La limite entre ces deux régions est la frontière d'exercice.

[2] Il faut supposer que le sous-jacent verse des dividendes, ou que son paramètre de dérive est inférieur au taux d'actualisation, pour des questions d'intégrabilité.

Il est possible de montrer (cf., par exemple D. Lamberton et B. Lapeyre [8]) que pour un call américain perpétuel (et de la même façon pour une option de vente ou "put"), la frontière d'exercice est une droite :

Détermination de la frontière d'exercice et évaluation d'un call perpétuel

L'univers est représenté par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, où $\mathbb{Q}$ est la probabilité d'évaluation (il s'agit classiquement de "la probabilité risque-neutre", lorsque l'on étudie une option dans un marché financier classique, mais il peut s'agir tout simplement de la probabilité historique, comme nous le verrons dans le cas des options réelles).

L'actif sous-jacent suit la dynamique suivante sous la probabilité $\mathbb{Q}$:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - \delta)\, dt + \sigma dW_t$$

où r est le taux sans risque instantanné, δ est le taux de dividende instantanné et W est un $\mathbb{Q}$-mouvement Brownien.
On considère une option d'achat américaine perpétuelle dont le sous-jacent est S et le prix d'exercice est fixé à K. On cherche à évaluer une telle option et à déterminer le niveau optimal de la frontière d'exercice, notée L^*.

Le problème qu'il faut résoudre est de la forme :

$$C_A = \sup_{\tau \in \Upsilon} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp(-r\tau)(S_\tau - K)^+ \right]$$

où Υ est l'ensemble des temps d'arrêt de la filtration naturelle de W et x^+ désigne la partie positive de x.
Ce problème en "temps" peut se ramener à une formulation en "espace" (cf. par exemple [8]), en introduisant le temps d'atteinte T_L du niveau L par le processus S :

$$C_A = \sup_{L \geq K} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp(-rT_L)(S_{T_L} - K) \right]$$

où

$$T_L = \inf \{t \geq 0; S_t = L\}$$

en particulier, puisque S a des trajectoires continues :

$$S_{T_L} = L$$

D'où :

$$C_A = \sup_{L \geq K} (L - K)\, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp(-rT_L) \right]$$

Tout se ramène ainsi au calcul de la transformée de Laplace :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp(-rT_L) \right]$$

Par un simple changement de probabilité, il vient :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp(-rT_L) \right] = \left(\frac{s_0}{L} \right)^{\frac{-\alpha + \sqrt{2r + \alpha^2}}{\sigma}} \triangleq \left(\frac{s_0}{L} \right)^{\varepsilon}$$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \\ \varepsilon = \frac{-\alpha+\sqrt{2r+\alpha^2}}{\sigma} \end{array} \right.$$

et :

$$\begin{aligned} C_A &= \frac{K}{\varepsilon-1}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\frac{K}{s_0}\right)^{-\varepsilon} \\ L^* &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}K \end{aligned}$$

Ces résultats sont très classiques dans la littérature. Pour la démonstration précise, nous pourrons nous référer aux études suivantes : N. Bellamy [1], D. Lamberton et B. Lapeyre [8], H. Pham [11] ou M. Chesney [3]....

10.7.2 Problématique des options réelles

Pour répondre à la question de l'investissement dans un projet donné, des outils classiques de la théorie des options peuvent être utilisés. En effet, un projet est caractérisé par deux types de flux : les flux représentant les coûts et ceux représentant les gains. Un agent aura interêt à investir dans ce projet à un instant donné si les gains sont supérieurs aux coûts. Afin d'introduire l'aléa dans le projet, ces deux types de flux sont représentés à l'aide de processus stochastiques (habituellement à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$). Evaluer le projet revient donc à évaluer une option américaine (caractère optionnel de la prise de décision à un instant non-déterminé a priori) d'échange entre les flux représentant les gains et les flux représentant les coûts.
D'autre part, la prise de décision n'ayant souvent pas de limite temporelle (l'agent peut décider d'entreprendre le projet à tout moment entre maintenant et un horizon de temps infini), cette option est perpétuelle.

Plus formellement, on suppose que deux actifs évoluent dans un univers représenté par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, où $\mathbb{Q}$ est la probabilité d'évaluation. Leurs prix respectifs à un instant t sont notés S_t^1 et S_t^2. La dynamique de ces deux processus est supposée à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Nous nous intéressons ici à l'évaluation d'une option américaine perpétuelle d'échange entre S^1 et S^2. Le prix d'une telle option peut s'écrire comme :

$$C_{ex} = \sup_{\tau \in \Upsilon} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp(-r\tau) \left(S_\tau^1 - S_\tau^2\right)^+ \right]$$

où Υ est l'ensemble des temps d'arrêt de la filtration naturelle de S^1 et de S^2, que nous désignerons par $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et x^+ désigne la partie positive de x.

Pour se ramener à une situation connue, on va tout réécrire par rapport à S^2, i.e. :

$$S_\tau^1 - S_\tau^2 = S_\tau^2 \left(\frac{S_\tau^1}{S_\tau^2} - 1 \right)$$

alors :

$$C_{ex} = \sup_{\tau \in \Upsilon} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp(-r\tau) S_\tau^2 \left(\frac{S_\tau^1}{S_\tau^2} - 1 \right)^+ \right]$$

ou encore, en appliquant le théorème de Girsanov :

$$C_{ex} = S_0^2 \sup_{\tau \in \Upsilon} \mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{Q}}} \left[\exp(-\widetilde{r}\tau) \left(\frac{S_\tau^1}{S_\tau^2} - 1 \right)^+ \right]$$

ce qui peut se reformuler en termes "d'espace" comme :

$$C_{ex} = S_0^2 \sup_{L \geq 1} (L-1) \mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{Q}}} \left[\exp(-\widetilde{r} T_L) \right]$$

où

$$T_L = \inf \left\{ t \geq 0; \frac{S_t^1}{S_t^2} = L \right\}$$

Notons qu'il est équivalent de travailler avec la différence entre les deux processus et le ratio de ces deux processus. Seule la probabilité sous laquelle l'évaluation est faite ainsi que le taux d'actualisation sont modifiés. Dans cette étude, nous avons privilégié l'approche avec le ratio, qui permet de se ramener dans un cadre d'étude déjà connu.

10.7.3 Petit commentaire sur l'hypothèse $(H2)$

Lors de l'étude de la monotonie de la transformée de Laplace du temps d'atteinte de la frontière optimale en fonction de l'amplitude des sauts, nous avons fait l'hypothèse que $\widetilde{s}_0 < s_0$. En effet, pour de petites valeurs de s_0, la transformée de Laplace n'est plus une fonction monotone, comme cela est visible dans le graphe ci-dessous où nous avons pris $s_0 = 0,1$ et les valeurs classiques des autres paramètres :

Bibliographie

[1] N. Bellamy, *Evaluation et couverture dans un marché dirigé par des processus discontinus.* Thèse de doctorat, Université d'Evry Val d'Essonne, 1999.

[2] M.J. Brennan et E.S. Schwartz, Evaluating Natural Resource Investments. *Journal of Business*, vol.58 n°2, 1985.

[3] M. Chesney, American Options in a Jump-Diffusion Model. Working Paper, 1997.

[4] A.K. Dixit et R. S. Pindyck, *Investment under Uncertainty.* Princeton University Press, 1993.

[5] H.U. Gerber et B. Landry, On the discounted penalty at ruin in a jump-diffusion and the perpetual put option. *Insurance : Mathematics and Economics*, 22, p. 263-276, 1998.

[6] C. Gollier, Time horizon and the discount rate. A paraître dans *Journal of Economic Theory.*

[7] C. Gollier and J.C. Rochet, Discounting an uncertain future. A paraître dans *Journal of Public Economics.*

[8] D. Lamberton, et B. Lapeyre, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.* Ellipses, Paris, 1991.

[9] W. Margrabe, The value of an option to exchange one asset for another. *The Journal of Finance*, 33, p. 177-186, 1978.

[10] R. Mc Donald et D. Siegel, The Value of Waiting to Invest. *The Quarterly Journal of Economics*, 1986.

[11] H. Pham, *Applications des méthodes probabilistes et de contrôle stochastique aux mathématiques financières.* Thèse de doctorat, Université de Paris Dauphine, 1995.

[12] R.S. Pindyck, Irreversibility, Uncertainty, and Investment, *Journal of Economic Literature*, 29, 1991.

[13] D. Revuz et M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, Second Edition. Springer Verlag, 1994.

[14] A.N. Shiryaev, *Essentials of Stochastic Finance*, World Scientific, Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability, vol. 3, 1999.

[15] L. Trigeorgis, *Real Options*. MIT Press, 1998.

[16] X. Zhang, Numerical Analysis of American Options Pricing in a Jump-Diffusion Model, *Mathematics of Operations Research*, 22, p. 668-690, 1996.