



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

## Facoltà di Scienze Statistiche

Corso di Laurea Magistrale in Scienze Attuariali e Finanziarie

TESI DI LAUREA

Il controllo del rischio in Solvency II: nuovi criteri  
per valutare e gestire l'impresa di assicurazione

Relatore:

Chiar.mo Prof. Massimo De Felice

Correlatore:

Chiar.ma Prof.ssa Lucia Vitali

Laureando:

Mauro Piccinini

26 Ottobre 2010  
Anno Accademico 2009/2010

Il controllo del rischio in Solvency II: nuovi  
criteri per valutare e gestire l'impresa di  
assicurazione

Mauro Piccinini

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>La misurazione del rischio</b>	<b>8</b>
2.1	Il Rischio: definizione e formalizzazione . . . . .	8
2.1.1	Rischio e incertezza . . . . .	8
2.1.2	Formalizzazione . . . . .	10
2.2	Misurare il rischio: finalità e approcci . . . . .	11
2.2.1	Quattro approcci alla misurazione . . . . .	12
2.3	Sulla coerenza delle misure di rischio . . . . .	14
2.3.1	Gli Assiomi di coerenza . . . . .	14
2.4	Il problema delle dipendenze e il consolidamento dei rischi . . . . .	15
2.4.1	Le Copule . . . . .	16
2.4.2	Le misure di dipendenza . . . . .	18
2.4.2.1	Correlazione Lineare . . . . .	18
2.4.2.2	Rank Correlation . . . . .	18
2.4.2.3	Coefficienti di Tail Dependence . . . . .	19
2.4.3	L’allocazione di capitale . . . . .	20
2.4.3.1	La procedura operativa . . . . .	20
2.4.3.2	L’inquadramento formale . . . . .	21
2.4.3.3	Il Principio di Eulero . . . . .	21
2.4.3.4	Interpretazioni “economiche” del principio di Eulero e nozione di equità . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Il margine di solvibilità: l’evoluzione normativa</b>	<b>24</b>
3.1	L’evoluzione normativa . . . . .	24
3.2	L’attuale formula di calcolo del Margine di Solvibilità . . . . .	25
3.2.1	Rami danni . . . . .	25
3.2.2	Rami Vita . . . . .	26
3.2.3	I principali limiti della normativa vigente . . . . .	27
3.3	La direttiva 2009/138/CE: l’iter normativo . . . . .	28
3.3.1	Il Lamfalussy Process . . . . .	28
3.4	La struttura a tre pilastri . . . . .	30
3.4.1	Minimum Financial Requirements . . . . .	31
3.4.2	Supervisory Review Process . . . . .	31

3.4.3	Public disclosure . . . . .	32
3.5	Verso un'autorità di vigilanza unica . . . . .	33
<b>4</b>	<b>I nuovi principi di valutazione</b>	<b>35</b>
4.1	L'affermazione della logica ALM (Asset Liability Management) . . . . .	36
4.2	Il calcolo delle riserve tecniche (technical provisions) . . . . .	37
4.2.1	Best Estimate e Risk Margin . . . . .	39
4.2.2	Formalizzazione del valore <i>market consistent</i> delle riserve . . . . .	40
4.2.3	Probabilità naturali e probabilità <i>risk-neutral</i> . . . . .	42
4.2.4	Il caso di un'unica fonte di rischio . . . . .	42
4.2.5	Sulla replicabilità dei flussi di cassa futuri . . . . .	43
4.3	Il Solvency Capital Requirement . . . . .	44
4.3.1	Formalizzare la definizione . . . . .	45
4.3.2	Coerenza tra SCR e riserve tecniche . . . . .	46
4.3.3	Il Minimum Capital Requirement . . . . .	47
4.4	La Formula Standard . . . . .	48
4.4.1	Il calcolo dell'SCR . . . . .	48
4.4.2	La struttura modulare nel QIS5 . . . . .	49
4.4.3	Il BSCR . . . . .	49
4.4.4	Il SCR per il rischio operativo . . . . .	50
4.4.5	L'aggiustamento per la capacità di assorbimento di perdite delle riserve tecniche e delle imposte differite . . . . .	52
4.4.6	Questioni in fase di discussione . . . . .	53
4.4.6.1	Financial reporting . . . . .	53
4.4.6.2	Le equivalenze con altri sistemi normativi . . . . .	54
4.4.6.3	Estrapolazione della struttura risk-free . . . . .	54
4.4.6.4	Cenni sui fondi propri . . . . .	55
4.4.6.5	Il liquidity premium . . . . .	58
4.4.6.6	Trattamento del Value of Business in Force . . . . .	59
4.4.6.7	Altre questioni aperte . . . . .	60
<b>5</b>	<b>I modelli interni delle imprese di assicurazione</b>	<b>61</b>
5.1	Own Risk and Solvency Assessment . . . . .	61
5.2	Definizione e finalità . . . . .	62
5.2.1	Modelli interni completi e parziali . . . . .	63
5.3	Caratteristiche . . . . .	63
5.3.1	La <i>governance</i> del modello interno . . . . .	64
5.3.1.1	La <i>governance</i> di alto livello . . . . .	64
5.3.1.2	La <i>detailed governance</i> . . . . .	65
5.3.2	Qualità dei dati . . . . .	66
5.3.3	Lo <i>use test</i> . . . . .	66
5.3.4	L'infrastruttura organizzativa e informatica . . . . .	68
5.4	Consolidamento, validazione e approvazione . . . . .	68
5.4.1	Il processo di consolidamento . . . . .	68
5.4.2	Standard di convalida . . . . .	69
5.4.3	<i>Disclosure</i> e procedura di approvazione . . . . .	70

5.5	Stress test e management actions . . . . .	71
5.5.1	Gli stress test . . . . .	71
5.5.1.1	Stress test stocastici . . . . .	71
5.5.2	Backtesting . . . . .	72
5.5.3	Reverse stress testing e long term business plan nell'esperienza britannica . . . . .	72
5.5.4	Le <i>risk mitigation techniques</i> e le <i>future management actions</i> . . . . .	74
5.5.4.1	Risk mitigation techniques . . . . .	74
5.5.4.2	<i>Management actions</i> . . . . .	74
5.5.4.3	Future discretionary benefits e modello interno . . . . .	75
5.5.4.4	SCR lordo e netto . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Un modello di valutazione "Solvency II compliant"</b>	<b>77</b>
6.1	Il profit test di una polizza rivalutabile con minimo garantito . . . . .	77
6.1.1	Flussi di cassa e tariffa . . . . .	78
6.1.2	Il meccanismo di rivalutazione . . . . .	79
6.1.3	La valutazione delle opzioni implicite . . . . .	80
6.2	Il modello di mercato . . . . .	82
6.2.1	Modelli bivariati . . . . .	82
6.2.2	Sulla volatilità . . . . .	84
6.2.3	Il modello CIR++ . . . . .	84
6.3	Determinazione del valore intrinseco . . . . .	86
6.4	I risultati del <i>Profit Test</i> . . . . .	88
6.4.1	Scomposizione <i>put</i> e <i>call</i> . . . . .	92
6.4.2	Analisi di sensitività . . . . .	94
6.4.3	Controllo della rischiosità . . . . .	98
6.4.4	Sulla redditività . . . . .	98
<b>7</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>101</b>
7.1	Il punto di vista delle società di rating . . . . .	101
7.2	Come si evolve la figura dell'attuario . . . . .	102
7.3	La "cultura" dei modelli interni: il <i>pragmatismo</i> . . . . .	103
<b>8</b>	<b>APPENDICE</b>	<b>106</b>
8.1	A. Il VaR, il T-VaR e loro coerenza . . . . .	106
8.1.1	Il Value-at-Risk . . . . .	106
8.1.2	Altre misure basate sulla distribuzione di probabilità . . . . .	109
8.2	B. La simulazione stocastica . . . . .	111
8.3	C. Esempio di modello di valutazione market-consistent . . . . .	112

# Capitolo 1

## Introduzione

Il presente lavoro si propone di condurre un'analisi delle tecniche di valutazione e gestione dei rischi concernenti l'impresa di assicurazione alla luce del nuovo panorama normativo introdotto dalla Direttiva 2009/138/CE, nota come "Solvency II", con un'approfondimento delle questioni legati alla solvibilità dell'impresa attraverso l'utilizzo di formule "standard" o di modelli interni realizzati "su misura" per la singola impresa. La trattazione ripercorre lo spirito e gli articoli della Direttiva, sottolineandone gli aspetti "operazionali" e tenendo conto di quanto dibattuto a livello internazionale intorno alle tecniche di gestione quantitativa del rischio. La tesi è organizzata in sette capitoli, di cui uno introduttivo e uno conclusivo, e un'appendice.

Dopo il capitolo introduttivo, nel *secondo capitolo* è impostata l'analisi di alcuni concetti propri della cultura attuariale alla base della disciplina del Quantitative Risk Management (nozione di rischio, sua misurabilità, tecniche di aggregazione dei rischi e di allocazione di capitale) che costituiscono un robusto sostegno tecnico di cui spesso occorrerà avvalersi per la completa trattazione dei capitoli successivi strumenti e tecniche quantitative a cui ci si è utilizzati come base formale nello sviluppo dei capitoli successivi.

Il *terzo capitolo* è dedicato all'analisi dell'evoluzione normativa in merito alla questione della solvibilità, ovvero della ricerca del trade-off rischio-rendimento ottimale; vengono tratteggiati alcuni aspetti del sistema "Solvency I", in ottica prevalentemente critica, e presentate alcune caratteristiche "qualitative" della nuova Direttiva (il Lamfalussy process, la struttura a tre pilastri e la spinta verso un unico sistema di vigilanza a livello europeo sulle istituzioni finanziarie).

Il *quarto capitolo* è dedicato all'analisi dei nuovi principi di valutazione delle attività, delle passività e dei rischi propri dell'impresa, ripercorrendo gli articoli della Direttiva, inquadrandoli in uno schema formale rigoroso, e alcune fondamentali indicazioni tecniche proposte dal CEIOPS. Vengono affrontati i principi "rivoluzionari" della valutazione delle attività (mark to market) e delle passività (market consistent), secondo la logica della *replicabilità* e in uno schema ALM (Asset Liability Management, per cui l'impresa deve essere gestita "so that decisions on assets and liabilities are coordinated"); l'ultima sezione del capitolo è

dedicata alla formula standard elaborata dal CEIOPS, di cui vengono analizzate la struttura modulare ed alcune questioni tecniche ancora in via di discussione.

Nel *quinto capitolo* l'analisi si focalizza sui modelli interni, con i quali le compagnie di assicurazione possono decidere di sostituire la formula standard per il calcolo del Solvency Capital Requirement: ne vengono indicate definizione, finalità, caratteristiche, metodi di governance e modalità di validazione e approvazione. Seguono alcune considerazioni tecniche su stress test e management action (concetti strettamente legati); vengono quindi introdotte le tecniche di stress test (scenario based e stocastic) e le management actions, per ribadire ancora una volta lo stretto rapporto tra analisi statistico-attuariali e azioni del top management, che è uno dei principi cardine di Solvency II. L'ultimo e *sesto capitolo* è dedicato all'analisi di un modello di valutazione "Solvency II compliant", attraverso cui tradurre i principi analizzati nel corso della dissertazione nella realtà operativa del *profit test* di una polizza rivalutabile (ramo primo, settore vita) con minimo garantito (*embedded option*); la polizza viene formalizzata, valutata coerentemente con un modello di mercato a due fattori di rischio e sottoposta ad analisi di sensitività del *Value of Business in Force* rispetto alle caratteristiche contrattuali e alle circostanze di mercato.

Il lavoro si conclude con *tre riflessioni conclusive*. La prima è dedicata al punto di vista delle società di rating; la seconda all'evoluzione del ruolo della figura professionale dell'attuario nell'impostazione della nuova normativa; il terzo al contesto "culturale" in cui si inserisce il dibattito intorno ai modelli interni. Un modello interno è *summa* di tutto quanto esposto nei capitoli precedenti, "simbolo" dell'evoluzione normativa in termini di infrastruttura organizzativa, di "cultura del rischio" e centralità della funzione attuariale anche negli aspetti gestionali e strategici dell'impresa.

In *appendice*, sono riportate alcune specificazioni su misure di *Value - at - Risk* e di *Expected Shortfall*, e su altri aspetti tecnici trattati nel corso della tesi, nonché un esempio di come i calcoli del valore intrinseco di una polizza possano essere resi automatici utilizzando il linguaggio di programmazione in Visual Basic.

## La gestione di un'impresa di assicurazione.

L'International Actuarial Association suggerisce che la gestione complessiva di un'impresa d'assicurazioni include:

- il design, il pricing, la commercializzazione e la sottoscrizione delle proprie polizze assicurative;
- la selezione delle attività sottostanti le polizze;
- la stima del valore e della volatilità delle passività associate a dette polizze;
- la determinazione dei requisiti di capitale dell'impresa;
- la gestione delle prestazioni da erogare;

- l'aggiornamento di tali elementi nel tempo a mano a mano che ulteriori dati e informazioni diventano disponibili;
- adeguati processi di comunicazione (trasparenza) nei confronti degli stakeholders “chiave” (es. management, autorità di vigilanza, policyholders e investitori);
- analisi delle condizioni finanziarie future, per una visione prospettica “multi-scenario” dell'intera compagnia.

Ingredienti essenziali per il miglior funzionamento della “macchina assicurativa” sono il “business environment” in cui opera (in termini di contesto legale, sociale, competitivo, economico, politico etc.) ed il livello di professionalità dei propri impiegati[IAA04] .

Il rischio è inerente a ciascuno degli “step” sopra citati (che costituiscono il cosiddetto *actuarial control cycle*), ed una sua corretta valutazione è un elemento chiave nella gestione della Compagnia. Dal momento che gli attuari<sup>1</sup> sono specialisti della misurazione e gestione finanziarie del rischio e degli eventi contingenti, le scienze attuariali ricoprono *naturalmente* un ruolo fondamentale in molti dei punti dell'*actuarial control cycle*.

### Introduzione alla questione della solvibilità

L’IIA sottolinea la centralità del *capitale*, come buffer, “cuscinetto” a garanzia che l’assicuratore possa onorare i propri obblighi contrattuali, nei confronti degli assicurati e dei danneggiati (dove l’interesse “pubblico” delle scienze attuariali), in funzione di un definito orizzonte temporale e di un livello di probabilità (“sufficientemente” elevata). Quando l’impresa mantiene viva tale garanzia, allora è “*solvibile*”. A ciascun livello di capitale è dunque associato un determinato livello di “sicurezza”.

Dal punto di vista dell’impresa la questione è di individuare l’ottimale trade-off rischio/rendimento, cioè un virtuoso compromesso tra un adeguato livello di sicurezza ed una opportuna remunerazione del capitale investito. Le operazioni dell’Impresa, al netto dei rischi in esse inerenti, devono realizzare un rendimento ragionevole per i *providers of the insurers capital*.

E’ facile individuare elementi di continuità tra pricing delle polizze, solvibilità, rischiosità e remunerazione del capitale; se le imprese richiedono un livello di capitale superiore a quello richiesto per garantire la solvibilità con un adeguato livello di confidenza, allora il capitale economico assorbito (richiesto per) l’attività assicurativa aumenta, diminuendone il rendimento, e le imprese

<sup>1</sup>Gli inglesi *Institute of Actuaries* e *Faculty of Actuaries* danno della professione attuariale la seguente definizione:

Actuaries are respected professionals whose innovative approach to making business successful is matched by a responsibility to the public interest. Actuaries identify solutions to financial problems. They manage assets and liabilities by analysing past events, assessing the present risk involved and modelling what could happen in the future.



attrarranno capitali inferiori a meno di scaricare il costo del capitale addizionale sui policyholders, attraverso un aumento dei premi; al contrario, requisiti di capitale insufficienti si risolverebbero in un livello dei prezzi inadeguato e aumenterebbero l'esposizione dell'impresa al rischio di insolvenza.

Come si evince, essere in grado di valutare "precisamente" il valore del proprio portafoglio e di misurare "coerentemente" i rischi cui si è esposti, è un problema *centrale* per la rigorosa ed efficiente gestione di un'impresa d'assicurazione. Nel corso dei capitoli seguenti, ci si concentrerà sugli strumenti formali che la teoria del Quantitative Risk Management fornisce e sul potente incentivo che in questo senso è stato dato dal nuovo panorama normativo intorno alle Compagnie d'Assicurazioni noto come Solvency II.

## Capitolo 2

# La misurazione del rischio

Nel corso del seguente capitolo sono analizzati alcuni concetti alla base della disciplina del Quantitative Risk Management ed alcuni strumenti utili per la gestione quantitativa del rischio. Essi saranno utilizzati come base formale nello sviluppo dei capitoli successivi: la nozione di rischio (un confronto con quella di incertezza, definizione di modello probabilistico e di funzione “perdita”), la sua misurabilità (misure “notional amount”, “factor-sensitivity”, “distribution based” e “scenario based”, coerenza delle misure di rischio), le tecniche di aggregazione dei rischi (le misure di dipendenza: correlazione lineare, rank correlation, tail dependencies) e le funzioni copula.

Il capitolo si conclude con il cruciale argomento dell’allocazione del capitale di rischio di portafoglio ai rischi individuali<sup>1</sup>, tema fondamentale per una corretta misura della performance del portafoglio e per una coerente pianificazione dell’attività dell’istituzione finanziaria (il capital budgeting).

### 2.1 Il Rischio: definizione e formalizzazione

#### 2.1.1 Rischio e incertezza

Pur se esistono diverse definizioni di rischio, l’International Actuarial Association dà credito all’impostazione australiana suggerendo che il rischio è “la possibilità che si verifichi qualcosa che abbia effetto sugli obiettivi”, e quindi “è misurato in termini di conseguenze e probabilità” e può “portare effetti sia positivi sia negativi”; dunque il risk management “consiste nell’identificare opportunità per eliminare o limitare le perdite”<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>Il sistema risk based britannico ha introdotto diversi anni prima che iniziasse il dibattito intorno a Solvency II l’Individual Capital Assessment (ICA) quale grandezza fondamentale per misurare il capitale economico assorbito da singoli rischi.

<sup>2</sup>O, più in generale, “a discipline for living with the possibility that future events may cause adverse effects”[Klo90]. Più precisamente, McNeil Frey ed Embrechts suggeriscono che le istituzioni finanziarie hanno nei confronti del rischio un atteggiamento “non passivo e difensivo”, ma lo gestiscono attivamente “repackaging and transferring them to markets in

Interessante anche l'analisi sul rapporto tra rischio e incertezza fatta da Rebonato in apertura del suo lavoro dedicato agli stress test coerenti [Reb-10], in cui vengono citati, in particolare, Knight [Kni-21], il quale sosteneva che

...the practical difference between (...) risk and uncertainty, is that in the former the distribution of the outcome in a group of instances is known (either through calculation a priori or from the statistics of past experience), while in the case of uncertainty, this is not true, the reason being in general that it is impossible to form a group of instances, because the situation dealt with is in a high degree unique...

e Robertson [Rob-36]:

[under uncertainty] there is no scientific basis on which to form any calculable probability whatever. We simply don't know. Nevertheless, the necessity for action and for decision compels us as practical men to do our best to overlook this awkward fact and to behave exactly as we should if we had behind us [...] a series of prospective advantages and disadvantages, each multiplied by its appropriate probability waiting to be summed...

Sembra ragionevole concludere che una delle caratteristiche che definiscono il concetto di rischio rispetto a quello di incertezza è quello della misurabilità con strumenti quantitativi, o, più precisamente, probabilistici, che fornisce una base necessaria per impostare una teoria delle decisioni in condizioni di incertezza<sup>3</sup>. Occorre operare, citando de Finetti, [deFi-70]

una caratterizzazione delle opinioni coerenti, fase formale da trattare matematicamente, (e poi una) scelta di una tra tali opinioni possibili, da lasciare alla pratica, al buon senso, al criterio di ogni singolo individuo

La probabilità, continua de Finetti, deve tracciare una “teoria normativa per la *coerenza* del comportamento” in condizioni di incertezza (il background “filosofico” sarà ampiamente ripreso nelle conclusioni, in 7.3), servendosi, ove necessario, di *modelli stocastici*<sup>4</sup>.

---

customized ways [...] using techniques like asset liability management to earn an adequate return on funds investend”.

<sup>3</sup>Le origini, almeno “filosofiche”, della questione sono antiche: un famoso pensiero di Pascal (il pensiero 234, dell'edizione Brunschvicg) cita

Ordonque quando lavoriamo per il domani, e per l'incerto, ci comportiamo ragionevolmente; perchè si deve agire per l'incerto in base al calcolo delle probabilità, calcolo dimostrato.

<sup>4</sup>La parola “stocastico” deriva dal greco *stocházesthai* (l'arte di indovinare, dedurre, calcolare ed indagare) o *stochastichòs* (abile nel fare ipotesi, sagace). L'etimologia suggerisce l'utilizzo dei modelli che ne hanno preso il nome, basati su ipotesi precise e deduzioni guidate dai calcoli in condizioni di incertezza (in cui non “si sa”, ma “si indovina” coerentemente con le proprie ipotesi e i propri algoritmi deduttivi).

### 2.1.2 Formalizzazione

La nozione di rischio è dunque intrinsecamente legata a quella di probabilità, la cui definizione assiomatica è dovuta al matematico russo A. N. Kolmogorov [Ko33]. Un modello probabilistico è descritto da una tripletta  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  (spazio di probabilità), ove  $\omega \in \Omega$  (realizzazione di un esperimento/stato di natura),  $\mathcal{F}$  è l'insieme di tutti gli eventi possibili,  $P$  la funzione di probabilità associata agli eventi.

Si consideri un portafoglio costituito da azioni, obbligazioni, titoli derivati o, in generale, la posizione complessiva di un'istituzione su titoli rischiosi. Il valore del portafoglio al tempo  $t$  è  $V(t)$ ; tale valore è modellizzato come una funzione del tempo e di un vettore casuale  $d$ -dimensionale  $\mathbf{Z}_t = (Z_{t,1}, \dots, Z_{t,d})'$  di *fattori di rischio*:

$$V_t = f(t, \mathbf{Z}_t) \quad (2.1)$$

per qualche funzione misurabile  $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . Una rappresentazione del valore del portafoglio come la 2.1 si chiama *mapping of risks*. La scelta dei fattori di rischio e della funzione  $f$  è ovviamente una *modelling issue* e dipende dalla tipologia di portafoglio considerato e dal desiderato livello di precisione. La serie delle variazioni dei fattori di rischio  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  è definita come  $X_t = Z_t - Z_{t-1}$ .

Su un orizzonte temporale  $\Delta$  (1 giorno, 10 giorni, 1 anno) la perdita del portafoglio (*portfolio loss*) nel periodo  $[t, t + \Delta]$  è dato da

$$L_{[t, t+\Delta]} = -[V(t + \Delta) - V(t)] = -(f(t + \Delta, \mathbf{Z}_t + X_{t+\Delta}) - f(t, \mathbf{Z}_t)) \quad (2.2)$$

5

Introduciamo ora la funzione *loss operator*, cioè  $l(t): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , che mappa i risk factor changes in losses, così che (utilizzando 2.2):

$$l_t(x) = -(f(t + 1, \mathbf{Z}_t + x) - f(t, \mathbf{Z}_t)), \quad x \in \mathbb{R}^d \implies L_{t+1} = l_t(X_{t+1}) \quad (2.3)$$

È utile, inoltre, distinguere tra conditional e unconditional loss distributions. Denominando  $\mathcal{F}_t = \sigma(\{X_s; s \leq t\})$  la sigma algebra rappresentante tutta l'informazione disponibile pubblicamente al tempo  $t$ , la *conditional distribution* di  $X_{t+1}$  data l'informazione  $\mathcal{F}_t$  è data da  $F_{X_{t+1}|\mathcal{F}_t}$ . Naturalmente, se  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  è una serie di variabili indipendenti ed identicamente distribuite (*iid*), allora le distribuzioni conditional e unconditional coincidono, i.e.  $F_{X_{t+1}|\mathcal{F}_t} = F_X$ .

La distribuzione condizionata delle perdite è allora data da

$$F_{L_{t+1}|\mathcal{F}_t}(l) = P(l_t(X_{t+1}) \leq l | \mathcal{F}_t) = P(L_{t+1} \leq l | \mathcal{F}_t)$$

---

<sup>5</sup>Si noti che questa definizione di perdita assume implicitamente che la composizione del portafoglio rimanga costante nel corso dell'orizzonte temporale considerato  $\Delta$ , ipotesi molto forte nel contesto di portafogli assicurativi, in cui l'orizzonte temporale considerato è spesso quello di un anno.

mentre la distribuzione non condizionata  $F_{L_{t+1}}$  è definita come la distribuzione di  $l_t(\cdot)$  secondo la distribuzione  $F_X$  dei risk factor changes, che si ipotizza stazionaria.<sup>6</sup>

Le tecniche di risk management basate sulla distribuzione condizionata delle perdite rientrano all'interno del panorama del *conditional* o *dynamic risk management*. Le tecniche basate sulla distribuzione non condizionata costituiscono invece l'approccio statico al risk management, e sono maggiormente utilizzate per orizzonti temporali larghi, situazione usuale nel contesto del credit risk management e delle assicurazioni.

## 2.2 Misurare il rischio: finalità e approcci

Riepilogando alcuni elementi menzionati nei paragrafi introduttivi, i principali utilizzi pratici della misurazione del rischio sono i seguenti:

- Determinazione del risk capital e del capital adequacy: determinare la quantità di capitale che un'istituzione finanziaria deve trattenere come “cuscinetto” contro perdite future inattese di portafoglio, per soddisfare l'autorità di vigilanza in merito alla propria solvibilità;
- Strumento utile al top management per limitare il livello di rischio cui un'unità dell'impresa potrebbe esporsi;
- Pricing di prodotti assicurativi: i premi assicurativi compensano la compagnia d'assicurazioni per il rischio assunto. L'entità di questo compenso (chiamato risk margin, risk loading, premio al rischio o caricamento per il rischio) può essere visto come una misura del detto rischio.<sup>7</sup>

<sup>6</sup>[JD97]Un processo stocastico  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$  è *covariance stationary* se la media non varia nel tempo e se la sua funzione di autocovarianza dipende solo dall'intervallo temporale considerato:

$$E[X_t] = \mu, \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$Cov(x_t, x_s) = \gamma(t, s) = \gamma(t + k, s + k), \quad t, s, k \in \mathbb{Z}.$$

<sup>7</sup>Nella tecnica attuariale danni tradizionale, ad esempio, il processo di acquisizione dei premi puri (al netto quindi dei caricamenti di gestione, acquisizione e incasso)  $P_t$  deve eguagliare il processo di danno cumulato  $S_t$ , attraverso un funzionale della funzione di ripartizione  $F_S(x)$ ; dunque si ha:

$$P = \mathcal{S}[F_S(x)]$$

La scelta del principio di equivalenza tra premi e funzionale dà luogo a diverse tipologie di risk premia:

1.  $\mathcal{S}[F_S(x)] = (1 + \lambda)E(S)$  (principio del valor medio), risk premium =  $\lambda E(S)$
2.  $\mathcal{S}[F_S(x)] = E(S) + \alpha\sigma(S)$  (principio dello scarto quadratico medio), risk premium =  $\lambda E(S)$
3.  $\mathcal{S}[F_S(x)] = E(S) + \beta\sigma^2(S)$  (principio della varianza), risk premium =  $\lambda E(S)$
4.  $\mathcal{S}[F_S(x)]$  t.c.  $E[U(P - S)] = 0$  (principio dell'utilità attesa), nel caso in cui la funzione d'utilità scelta sia quadratica (del tipo  $U(x) = x - \beta x^2$ ) fornisce gli stessi risultati ottenuti seguendo il principio della varianza[?].

L'impostazione di questa sezione riprende quella proposta da [Art-99] e sviluppato da [McNFE05]<sup>8</sup>.

### 2.2.1 Quattro approcci alla misurazione<sup>9</sup>

**Approccio “notional-amount”.** Si tratta dell'approccio più “antico” per quantificare il rischio di un portafoglio di titoli rischiosi, ed è definito come la somma dei valori nozionali dei singoli titoli che lo compongono pesati per un fattore che rappresenta la rischiosità della classe cui il titolo appartiene. Una variante è utilizzata nello *standardized approach* del Comitato di Basilea.

Questo approccio presenta molteplici svantaggi, tra cui la mancata differenziazione tra posizioni long e short (per cui, ad esempio, una posizione long in un titolo coperta da una short su un forward dello stesso titolo genererà una misura di rischio di entità doppia rispetto alla posizione long non coperta) e la non considerazione dei positivi effetti della diversificazione sul rischio complessivo del portafoglio.

**Misure “factor-sensitivity”.** Queste misure sono basate sulla variazione del valore di portafoglio per una data variazione predeterminata dei fattori di rischio sottostanti. Importanti misure di questo tipo sono la duration per i portafogli obbligazionari e le *Greeks* per i portafogli di derivati, che misurano, rispettivamente, l'esposizione al rischio di tasso d'interesse delle obbligazioni e la sensibilità dei titoli derivati alle diverse fonti di rischio che ne influenzano il pricing (il prezzo e la volatilità del sottostante, il tempo, il tasso d'interesse).

Pur fornendo informazioni molto interessanti sulla robustezza del portafoglio rispetto a certi eventi ben definiti, esse non sono in grado di misurare la rischiosità complessiva della posizione; inoltre, presentano problemi di aggregazione, in quanto non è possibile aggregare, da una parte, la sensibilità di un portafoglio rispetto a risk factors differenti (non ha senso sommare il delta e il vega di un portafoglio di opzioni), nè, dall'altra, le misure factor-sensitivity propri di mercati diversi (è difficile quantificare la rischiosità complessiva di una istituzione finanziaria operativa su diverse lines of business).

**Misure basate sulla distribuzione di probabilità.** Questa tipologia di misurazione raccoglie la maggior parte delle misure di rischio proposte dalla normativa in epoca recente, e sono basate su statistiche<sup>10</sup> che descrivono la distribuzione condizionata o non condizionata delle perdite del portafoglio su

---

Questa impostazione, per quanto tradizionale, presenta molte analogie con quella avanzata proposta dalla nuova normativa, che verrà analizzata nel corso del Capitolo 4.

<sup>8</sup>Nello sviluppo di [McNFE05], ripreso in questo lavoro, la v.a. utilizzata per descrivere la perdita di valore è la *perdita della posizione l* registrata da un generico agente economico  $I$ , invece del valore netto della posizione (*net worth, surplus, S*). Questo comporta un cambio di segni rispetto alla trattazione di [Art-99]. Come ricordano [CdFM-09a], “è significativo pensare ad  $S$ ” (cioè a  $-l$ ) “come alla differenza  $X - Y$  tra il valore  $X$  degli *asset* e il valore  $Y$  delle *liability* dell'agente”.

<sup>9</sup>[McNFE05]

<sup>10</sup>Ad esempio la varianza, la maximum probable loss, il Value-at-Risk e il Tail-Var.

qualche orizzonte temporale predeterminato. I vantaggi sono nel fatto che la *loss distribution* ha senso, come concetto, ad ogni livello di aggregazione (dal singolo titolo alla posizione complessiva di un'istituzione finanziaria) e non solo a livello di media (pur se "caricata" con dei caricamenti per il rischio); essa, invece, tiene conto, distinguendole, delle posizioni long e short utilizzate per coprire i rischi, considera gli effetti della diversificazione, e può essere confrontata tra portafogli diversi.

I problemi risiedono nel fatto che le distribuzioni sono basate su dati passati, e, in quanto tali, generate da contesti diversi (sono influenzate, ad esempio, cambiamenti nel contesto normativo che regola i mercati finanziari in una determinata area geografica) rendono i dati conosciuti di scarsa utilità nella previsione del rischio futuro<sup>11</sup>.

Si noti che questo è l'approccio seguito dalla Direttiva [09/138/CE], che verrà analizzata nel corso dei seguenti capitoli, e quasi tutte le misure che verranno menzionate nel corso della trattazione seguono questo approccio; la misura di rischio è definita all'articolo 13, comma 33, come

a mathematical function which assigns a monetary amount to a given probability distribution forecast and increases monotonically with the level of risk exposure underlying that probability distribution forecast.

In Appendice 8.1.1 è presente un approfondimento formale sulla misura scelta dalla normativa europea (il Value-at-Risk, VaR) e su altre misure distribuzionali, come il Tail-VaR.

**Misure scenario-based.** Secondo questo approccio il rischio è valutato come il valore della perdita in tutti gli scenari possibili, pesato con un coefficiente che ha lo scopo di mitigare gli effetti degli scenari estremi sul risultato; il rischio del portafoglio viene dunque misurato come la perdita massima del portafoglio (pesata per la quota di composizione) sotto tutti gli scenari. Si ha, ad esempio:

Insieme degli scenari (variazioni dei risk factors) possibili  $= \mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$

Vettore dei pesi  $= w = (w_1, \dots, w_n)' \in [0, 1]^n$

Misura di rischio del portafoglio  $= \psi_{[\mathcal{X}, w]} = \max \{w_1 l_t(x_1), \dots, w_n l_t(x_n)\}$

Questo approccio è utilizzato per portafogli esposti ad un insieme relativamente piccolo di risk factors; ad esempio, il Chicago Mercantile Exchange (CME) lo utilizza per determinare i margin requirements di strumenti derivati, ed è utile per fornire informazioni complementari a misure basate sulle statistiche della loss distribution; le principali criticità risiedono nel determinare un

<sup>11</sup>“l'incertezza 'è ineliminabile (i modelli non prevedono il futuro); i modelli aiutano a essere consapevoli delle situazioni e a decidere in modo coerente". Essi "sono necessariamente "approssimanti", non possono tenere "al di là" delle ipotesi; sono uno strumento potente di formazione culturale"[DFe09].

I problemi legati alla prevedibilità dei valori futuri di una v.a. utilizzando modelli stocastici sono considerati nel corso del quarto capitolo (in particolare nella nota 10). Per una trattazione completa si veda [deFi-70].

insieme appropriato di scenari e di fattori di ponderazione, e nelle difficoltà di comparazione tra portafogli interessati da fattori di rischio diversi.

La formalizzazione delle misure di rischio scenario based e distribuzionali sarà ripresa, anche, nella trattazione del calcolo del Solvency Capital Requirement secondo la Direttiva Solvency II 4.3.1.

## 2.3 Sulla coerenza delle misure di rischio

Dopo aver fornito una panoramica sui diversi approcci esistenti per la misurazione del rischio nelle istituzioni finanziarie, in questa sezione l'analisi si sposta su alcune proprietà teoretiche che buone<sup>12</sup> misure di rischio dovrebbero soddisfare, con uno sguardo particolare alle proprietà d'aggregabilità.

### 2.3.1 Gli Assiomi di coerenza

La definizione assiomatica delle misure di rischio colgono l'eredità della sistematizzazione dei principi per il calcolo dei premi propri della letteratura attuariale, partendo dall'assiomatizzazione Von Neumann Morgenstein sulla misurabilità della funzione di utilità[Da89].

Per formalizzare la nozione di *misura di rischio* occorre definire  $\mathcal{M} \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$  come l'insieme di perdite generate dal proprio portafoglio possibili su qualche orizzonte temporale  $\Delta$ , ove  $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$  è l'insieme di tutte le variabili casuali  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Si farà spesso l'ipotesi che  $\mathcal{M}$  sia un cono convesso, cioè che

$$\begin{cases} L_1 \in \mathcal{M} \Rightarrow L_1 + L_2 \in \mathcal{M} \\ L_2 \in \mathcal{M} \\ \lambda > 0 \Rightarrow \lambda L_1 \in \mathcal{M} \end{cases}$$

Una *misura di rischio* è una funzione reale  $\rho : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\rho(L)$  può essere interpretato come la quantità di capitale che dovrebbe essere aggiunta perché una posizione con una perdita  $L$  diventi accettabile per un risk controller esterno o interno. Una posizione in cui  $\rho(L) < 0$ , è accettabile prelevare capitale finché  $\rho(L) = 0$ . Una misura di rischio  $\rho(L)$ , per essere coerente, deve soddisfare i seguenti assiomi.

**Invarianza per traslazione.** Sommando o sottraendo una quantità deterministica  $l$ , il requisito di capitale viene alterato esattamente della stessa entità:

$$\forall L \in \mathcal{M}, l \in \mathbb{R} \implies \rho(L) + l \tag{2.4}$$

<sup>12</sup>Ovviamente la "bontà" di una misura di rischio dipende dalla definizione che si dà di misura di rischio. La direttiva Solvency II [09/138/CE] dà di misura di rischio la definizione in 2.2.1, e quindi non considera necessaria la caratteristica di subadditività 2.3.1.



**Subadditività.**

$$\forall L_1, L_2 \in \mathcal{M}, \quad \rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$$

Questo assioma è sintetizzato efficacemente da [Art-99] con l'osservazione che "a merger does not create extra risk", ed è difeso da almeno tre ordini di ragionamento:

- garantisce che il rischio possa essere ridotto attraverso la diversificazione, principio ben noto alla teoria matematica dei portafogli finanziari [CdFM-05b];
- se un'autorità di vigilanza proponesse una misura di rischio non subadditiva per la determinazione del capitale regolamentare di un'istituzione finanziaria, allora quest'ultima avrebbe un incentivo a dividersi legalmente in diverse sotto-imprese per ridurre i requisiti complessivi di capitale;
- rende possibile il decentramento delle funzioni di risk management: se due risk managers mantengono i propri settori (1 e 2, tali che  $L = L_1 + L_2$ ) ad un livello di rischio inferiore, rispettivamente, a  $M_1$  ed  $M_2$  (cioè  $\rho(L_i) \leq M_i$ ) in modo tale che  $M_1 + M_2 \leq M$ , allora la subadditività di  $\rho$  garantirà che  $\rho(L) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2) \leq M_1 + M_2 \leq M$ .

**Omogeneità positiva.**

$$\forall L \in \mathcal{M}, \lambda > 0 \implies \rho(\lambda L) = \lambda \rho(L)$$

Si noti che gli assiomi di subadditività e di omogeneità positiva, insieme, implicano che la misura di rischio  $\rho$  è convessa su  $\mathcal{M}$ .

**Monotonia.**

$$L_1, L_2 \in \mathcal{M} \text{ t.c. } L_1 \leq L_2 \implies \rho(L_1) \leq \rho(L_2) \text{ quasi certamente} \quad (2.5)$$

Questo assioma garantisce che posizioni che generano perdite maggiori in ogni scenario possibile richiedano un capitale (o *risk margin*) maggiore.

## 2.4 Il problema delle dipendenze e il consolidamento dei rischi

Definito uno schema formale in cui inquadrare il rischio, la sua misurabilità e le misure di rischio coerenti, il passo successivo per iniziare ad entrare nel merito della questione della solvibilità d'impresa è quello di aggregare i rischi, per poter misurare il rischio implicito in un portafoglio di titoli rischiosi, che può consistere anche nella posizione di un'istituzione finanziaria nel suo complesso. Per compiere questo passo, è necessario studiare modelli che catturino la dipendenza tra i componenti di un vettore aleatorio di fattori di rischio; in questa sezione

questo è stato fatto dapprima definendo le funzioni copula, utilizzate per passare dalle distribuzioni marginali alla distribuzione congiunta, poi analizzando le misure di dipendenza tra rischi diversi.

### 2.4.1 Le Copule

Questa sottosezione è dedicata all'analisi di modelli che catturino la dipendenza tra i componenti di un vettore aleatorio di fattori di rischio utilizzando il concetto di copula. Ogni distribuzione congiunta per un vettore aleatorio di risk factors, infatti, contiene implicitamente informazioni sia sulle distribuzioni marginali dei singoli fattori sia sulla loro struttura di dipendenza. Le funzioni copula sono un modo di isolare la seconda, fornendo una misura di dipendenza differenziata per ogni percentile; esse facilitano, inoltre, un approccio “dal basso” nella costruzione della distribuzione congiunta a partire dalle distribuzioni marginali, senza dover fare ipotesi forzate sulla struttura di dipendenza, su cui spesso è più difficile ottenere informazioni affidabili.

**Definizione e proprietà.** Una copula  $n$  dimensionale è una funzione di ripartizione definita in  $[0, 1]^n$  a partire da  $n$  distribuzioni marginali uniformi (gli  $n$  fattori di rischio), cioè una mappatura dell'ipercubo  $n$  dimensionale sull'intervallo unitario, ovvero

$$C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$$

Le proprietà che una funzione copula deve soddisfare sono le seguenti:

1.  $C(u_1, \dots, u_n)$  è crescente con ogni componente  $u_i$  (come per tutte le funzioni di ripartizione);
2.  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall u_i \in [0, 1], C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$  (requisito delle distribuzioni marginali);
3.  $\forall (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$  si ha che

$$a_i \leq b_i \implies \sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} C(u_{1i_1}, \dots, u_{ni_n}) \geq 0$$

ove  $u_{j1} = a$  e  $u_{j2} = b \forall j = 1, \dots, n$  (questa è la cosiddetta *rectangle inequality*, che assicura la non negatività della funzione).

**Teorema di Sklar.** L'importanza operativa dell'elegante strumento della copula è implicita nel teorema enunciato in [Sk-59], riassumibile in due punti principali:

1. tutte le distribuzioni multivariate contengono copule;
2. le copule possono essere utilizzate con distribuzioni univariate per costruire distribuzioni multivariate.

Utilizzando il linguaggio matematico, si può dire che:

Data la distribuzione congiunta  $F$  con distribuzioni marginali  $F_1, \dots, F_n$ ,

$$\exists C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$$

tale che  $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  si ha che

$$F(x_1, \dots, x_n) = C[F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)] \quad (2.6)$$

Se le marginali sono continue, allora  $C$  è unica.

Simmetricamente, se  $C$  è una copula e  $F_1, \dots, F_n$  sono distribuzioni univariate, allora la funzione  $F$  definita in 2.6 è una distribuzione congiunta con marginali  $F_1, \dots, F_n$ . Il risultato 2.6 mostra dunque che una distribuzione congiunta può essere *costruita* a partire dalle marginali utilizzando una copula.

Inoltre, utilizzando la trasformazione in quantile descritta in appendice, la 2.6 può essere riscritta come

$$F\left[\overleftarrow{F}_1(u_1), \dots, \overleftarrow{F}_n(u_n)\right] = C(u_1, \dots, u_n) \quad (2.7)$$

La 2.7 esprime come le copule possano essere *estratte* da distribuzioni multivariate con marginali continue, e suggerisce che le copule esprimono dipendenza su una scala-quantile, caratteristica preziosa per studiare la dipendenza tra due fattori di rischio (cfr. 2.4.2.1).

**Copule di distribuzioni multivariate.** Se il vettore aleatorio  $X$   $n$ -dimensionale ha distribuzione congiunta  $F$  con distribuzioni marginali  $F_1, \dots, F_n$ , allora si definisce la copula  $C$  di  $F$  (o di  $X$ ) come la funzione di ripartizione di  $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$ .

Proprietà importante della copula di una distribuzione multivariata è la *invarianza* rispetto a trasformate strettamente crescenti delle marginali, cioè:

$$\left\{ \begin{array}{l} (X_1, \dots, X_n) \text{ vettore aleatorio con marginali continue} \\ C \text{ copula di } (X_1, \dots, X_n) \\ T_1, \dots, T_n \text{ funzioni strettamente crescenti} \end{array} \right. \implies [(T_1), \dots, T_n(X_n)] \text{ ha copula } C$$

**La stima dei parametri.** Per le copule aventi forma chiusa è necessario, inoltre, procedere alla stima dei parametri. Ipotizzando che il vettore dei fattori di rischio (che descrivono, ad esempio, la perdita di un portafoglio di titoli rischiosi, aventi tutti f.r.  $F$ ) sia  $X = (X_1, \dots, X_n)$  si assuma che  $F$  abbia marginali continue  $F_1, \dots, F_n$  e quindi, per il teorema di Sklar, una rappresentazione unica  $F(x) = C[F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)]$ . I parametri di  $C$  possono essere calibrati utilizzando il metodo dei momenti (che ha il vantaggio di non dover stimare le distribuzioni marginali) o il metodo di massima verosimiglianza.

La scelta della copula utilizzata per aggregare i rischi rappresenta uno dei questioni principali a cui occorre rispondere nel momento in cui si mette a punto un modello interno per monitorare la situazione complessiva di rischio di un'impresa di assicurazione, e rappresenta una questione che verrà ripresa nel corso dell'ultimo capitolo.

### 2.4.2 Le misure di dipendenza

Nei prossimi paragrafi verranno analizzate tre tipologie di misura di dipendenza, tutte aventi come output una misura scalare per una coppia di variabili aleatorie  $(X_1, X_2)$ , i fattori di rischio.

#### 2.4.2.1 Correlazione Lineare

La correlazione lineare tra due variabili aleatorie  $(X_1, X_2)$ , definita come

$$\rho_{ij} = \rho(X_i, X_j) = \frac{\text{cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\text{var}(X_i)\text{var}(X_j)}} \quad (2.8)$$

è una misura di dipendenza lineare, ha codominio  $[-1, 1]$  e propone implicitamente di costruire modelli multivariati partendo dalle distribuzioni marginali. Tralasciando le sue note proprietà descrittive (vedere, ad esempio, la trattazione in [Le-83]), ci si concentrerà sulle criticità di questa misura, la quale:

- è invariante per trasformate lineari, ma non per trasformate non lineari: per la funzione non lineare  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si ha, in generale, che

$$\rho(T(X_1), T(X_2)) \neq \rho(X_1, X_2)$$

- è definita solo per variabili aleatorie  $X_1$  e  $X_2$  aventi varianze finite (il che può essere un problema per i rischi *heavy tail* coperti da polizze rami non vita)
- assume che le distribuzioni marginali e la matrice di covarianza di un vettore aleatorio ne determina univocamente la distribuzione congiunta; in generale, infatti,  $\forall X_1$  e  $X_2$  aventi distribuzioni marginali  $F_1$  e  $F_2$ , distribuzione congiunta  $C(F_1(x_1), F_2(x_2))$  e correlazione lineare  $\rho(X_1, X_2) = \rho$ , è possibile trovare un'altra copula  $C_2 \neq C$  tale che

$$\exists (Y_1, Y_2) \text{ con } df C_2(F_1(x_1), F_2(x_2)) \text{ t.c. } \rho(Y_1, Y_2) = \rho$$

- assume che per ogni coppia di distribuzioni univariate  $F_1$  e  $F_2$  e ogni valore di  $\rho \in [-1, 1]$  è sempre possibile costruire una distribuzione congiunta  $F$  con distribuzioni marginali  $F_1$  e  $F_2$  e correlazione lineare  $\rho$  (vero per distribuzioni ellittiche, non in generale).

#### 2.4.2.2 Rank Correlation

Le correlazioni di rango sono misure scalari di dipendenza il cui valore dipende solo dalla copula della distribuzione bivariata, non dalle distribuzioni marginali, diversamente dalla correlazione lineare, che dipende da entrambe. Il loro scopo operativo risiede nell'essere utilizzate per calibrare le copule sui dati empirici.

Le due tipologie principali di correlazioni di rango sono le seguenti:

- *tau di Kendall*, che è definito come la probabilità di concordanza meno la probabilità di discordanza per coppie di punti  $(x_1, x_2)$  e  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  in  $\mathbb{R}^2$ :

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = P \left[ (X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) > 0 \right] P \left[ (X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) < 0 \right]$$

- *rho di Spearman*, ottenuto, per variabili aleatorie  $X_1$  e  $X_2$ , come correlazione lineare delle trasformate delle v.a. secondo la loro funzione di ripartizione:

$$\rho_S(X_1, X_2) = \rho(F_1(X_1), F_2(X_2))$$

Le correlazioni di rango assumono valori compresi tra -1 (se le variabili sono contromonotoniche) e 1 (se le variabili sono comonotoniche) e il valore di 0 per v.a. indipendenti.

### 2.4.2.3 Coefficienti di Tail Dependence

I coefficienti di dipendenza delle code misurano la dipendenza nelle code della distribuzione bivariata  $(X_1, X_2)$  ( $X_1$  e  $X_2$  sono v.a. con distribuzioni marginali continue), e dipendono solo dalla loro copula.

L'interesse suscitato da questo tipo di misura di dipendenza, soprattutto nel contesto assicurativo, risiede proprio nel fatto che si tratti di una misura di dipendenza per valori estremi. Nel caso di dipendenza della coda destra<sup>13</sup>, viene considerata la probabilità che  $X_2$  ecceda il proprio quantile  $q$  (ad esempio quello al 99,5%), condizionatamente al fatto che  $X_1$  lo ecceda. Il coefficiente di tail dependence, quindi, sarà dato da

$$\lambda_d = \lambda_d(X_1, X_2) = \lim_{q \rightarrow 1^-} P \left[ X_2 > \overleftarrow{F}_2(q) \mid X_1 > \overleftarrow{F}_1(q) \right] \quad (2.9)$$

(se  $\exists \lim \in [0, 1]$ ); se  $\lambda_u = 0$ , allora le due v.a. sono asintoticamente indipendenti nella coda destra.

Dal momento che  $F_1$  e  $F_2$  sono continue, per la definizione di probabilità condizionata si ha che

$$\lambda_d = \lim_{q \rightarrow 1^-} P \left[ X_2 > \overleftarrow{F}_2(q) \mid X_1 > \overleftarrow{F}_1(q) \right] = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{P \left( X_2 > \overleftarrow{F}_2(q), X_1 > \overleftarrow{F}_1(q) \right)}{P \left( X_1 > \overleftarrow{F}_1(q) \right)}$$

Per la 2.7 e la definizione di quantile, inoltre, si ha che

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{P \left( X_2 > \overleftarrow{F}_2(q), X_1 > \overleftarrow{F}_1(q) \right)}{P \left( X_1 > \overleftarrow{F}_1(q) \right)} = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{C(1-q, 1-q)}{1-q}$$

ottenendo, da ultimo,

$$\lambda_d = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C(q, q)}{q}$$

<sup>13</sup>si parla, dunque, di *loss distribution*, piuttosto che di *profit*, ma considerazioni del tutto analoghe sono applicabili alla coda sinistra

E' importante tenere presente che rank correlation e i coefficienti di Tail Dependence sono misure di dipendenza copula-based, a differenza della correlazione lineare, e possono essere usate per la calibrazione della copula<sup>14</sup>.

**Il consolidamento dei rischi in Solvency II.** Secondo l'impostazione dei *Quantitative Impact Studies* (cfr. 3.3.1), il consolidamento dei rischi avviene secondo la tecnica *bottom up*, descritta in 4.4.3 a proposito del *Basic Solvency Capital Requirement* (nella formula standard, la misura di dipendenza utilizzata è la correlazione lineare). La questione sarà ripresa anche in 5.4.1.

### 2.4.3 L'allocazione di capitale

Nei paragrafi precedenti si è cercato di affrontare in maniera sintetica ma puntuale il problema della misura della dipendenza dei rischi, requisito essenziale per la loro aggregazione, e per dare risposta alla questione di quale sia il livello ottimo di capitale da allocare per un portafoglio rischioso.

Nell'ottica di Solvency II, il processo di consolidamento porta al calcolo del capitale assorbito dall'intera attività dell'impresa; il passo successivo è quello di "ridistribuire il capitale" (*capital allocation*) tra le singole linee di business.

Si consideri un'impresa che può investire in un insieme di  $n$  diverse possibili lines of business, ciascuna avente la propria funzione perdita  $L_i$ <sup>15</sup>. La performance del portafoglio si misura con indici di redditività ex-post<sup>16</sup> "corretti per il rischio", come l'EVA (Economic Value Added) e RORAC (Return On Risk-Adjusted Capital), del tipo

$$\text{expected profit/risk capital}$$

Per risk capital si intende generalmente il capitale economico, cioè la misura di rischio associata alla perdita inattesa, piuttosto che alla perdita assoluta. Questo spiega perché il concetto di redditività di un investimento è strettamente legato con quello di misura di rischio, attraverso l'allocazione di capitale.

#### 2.4.3.1 La procedura operativa

In pratica viene seguita una procedura basata su due fasi:

1. calcolo del risk capital complessivo  $\rho(L)$ , cioè di una misura di rischio associata alla perdita di portafoglio  $(L_1, \dots, L_n)$ ;
2. allocazione del capitale alla singola opportunità d'investimento  $(AC_i, i = 1, \dots, n)$ , seguendo qualche principio matematico di allocazione del capitale

<sup>14</sup>Alcuni esempi di calibrazione sono presenti in [McNFE05].La questione presenta ancora, comunque, ancora diverse difficoltà tecniche [CdFM-09a].

<sup>15</sup>Il problema del *performance measurement* coincide con quello di *general investment* (se, invece di un'istituzione finanziaria, si consideri un investitore che ha  $n$  investimenti in titoli diversi, ciascuno con la propria  $L_i$ ), e con quello di *loan pricing* (un loan book manager che vuole prezzare  $n$  prestiti).

<sup>16</sup>Il tema della redditività sarà trattato nel corso dell'ultimo capitolo, in 6.4.4.

(del tipo  $\rho(L) = \sum_{i=1}^n AC_i$ , anche noto come proprietà di allocazione piena, perchè il risk capital complessivo è interamente allocato alle possibilità di investimento).

### 2.4.3.2 L'inquadramento formale

Riprendendo lo schema formale definito in 2.3.1, definito lo spazio probabilistico  $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , i rischi finanziari sono rappresentati da un insieme  $\mathcal{L} \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , costituito dal sottospazio (che si ipotizza convesso<sup>17</sup>) delle perdite subite dal portafoglio sull'orizzonte temporale  $\Delta$ , e la misura di rischio  $\rho(L)$  definisce se la posizione ammette la liberazione o l'iniezione di capitali.

Il vettore  $(L_1, L_2, \dots, L_n)$  rappresenta, quindi, le perdite (o i profitti) provenienti dalle  $n$  opportunità d'investimento (o linee di business). La posizione che l'impresa ha sulle singole sorgenti di rischio (cioè la composizione del suo portafoglio) è individuata da  $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; segue che la perdita generata da  $\lambda$  (una delle posizioni sull'insieme delle possibilità d'investimento) è  $L(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i$ .

Il capitale di rischio richiesto per la posizione  $\lambda$  è dato dalla funzione di misura del rischio  $r_\rho : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $r_\rho(\lambda) = \rho(L(\lambda))$ .

Il principio di allocazione di capitale individuale consiste in una mappatura  $\pi^{r_\rho} : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tale che

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \pi_i^{r_\rho}(\lambda) = r_\rho(\lambda) \quad (2.10)$$

ove  $\pi_i^{r_\rho}(\lambda)$  è l'ammontare del capitale allocato per una unità di esposizione all' $i$ -ma line of business.

### 2.4.3.3 Il Principio di Eulero

Uno dei più rinomati principi matematici di allocazione del capitale è il principio di Eulero:

Se la misura di rischio  $r_\rho$  è una funzione positiva differenziabile in  $\lambda \in \Lambda$ , allora il principio di allocazione individuale del capitale di Eulero (anche chiamata "allocazione secondo il gradiente") è dato dalla mappatura

$$\pi_i^{r_\rho} : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \pi_i^{r_\rho}(\lambda) = \frac{\delta r_\rho}{\delta \lambda_i}(\lambda) = \nabla r_\rho(\lambda) \quad (2.11)$$

### 2.4.3.4 Interpretazioni "economiche" del principio di Eulero e nozione di equità

Tasche [Tas-99] dimostra che il principio per l'allocazione di capitale individuale di Eulero è l'unico ad essere adatto a misurare la performance di una linea di

---

<sup>17</sup>  $\mathcal{L}$  è un cono convesso se e solo se  $L_1, L_2 \in \mathcal{L} \Rightarrow \begin{cases} L_1 + L_2 \in \mathcal{L} \\ \lambda L_1 \in \mathcal{L} \end{cases} \quad \forall \lambda$

business (o investimento); nella sua impostazione, un principio  $\pi^{r_\rho}$  è ritenuto “adatto” se

$$\forall \lambda \in \Lambda, \quad \frac{\delta}{\delta \lambda_i} \left( -\frac{E(L(\lambda))}{r_\rho(\lambda)} \right) \begin{cases} > 0, & \text{if } -\frac{E(L_i)}{\pi_i^{r_\rho}(\lambda)} < -\frac{E(L(\lambda))}{r_\rho(\lambda)} \\ < 0, & \text{if } -\frac{E(L_i)}{\pi_i^{r_\rho}(\lambda)} > -\frac{E(L(\lambda))}{r_\rho(\lambda)} \end{cases}$$

cioè se un aumento del peso  $\lambda_i$  di un’opportunità d’investimento che mostra una performance (calcolata come rendimento individuale diviso per risk capital individuale) migliore delle altre porta al miglioramento della prestazione complessiva del portafoglio (calcolata con lo stesso principio di allocazione).

Un’altra “giustificazione” economica al principio di Eulero è fornito da Darnault, e si basa sul concetto di *equità*. In [Dan-01] si mostra infatti che per una funzione misura di rischio differenziabile  $r_\rho$  derivante da una misura coerente  $\rho$ , il principio di Eulero è l’unico principio di allocazione equo.

L’argomentazione consiste nel fatto che quando la misura di rischio  $r_\rho$  deriva da una misura coerente  $\rho$ , si ha che  $\rho(L) \leq \sum_{i=1}^n \rho(L_i)$  (cioè il capitale di rischio complessivo richiesto per il portafoglio è minore della somma dei capitali individuali di rischio, per le singole *business units*); segue che ogni BU usufruisce di un diversification benefit, così che

$$AC_i \leq \rho(L_i)$$

In generale, il principio di allocazione di capitale individuale è detto *equo* se,  $\forall \lambda \in \Lambda$  e  $\forall \gamma \in [0, 1]^n$ , si verifica la disuguaglianza

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i \lambda_i \pi_i^{r_\rho}(\lambda) \leq r_\rho(\gamma_1 \lambda_1, \dots, \gamma_n \lambda_n)$$

che deriva dalla proprietà di subadditività delle misure di rischio coerenti e di cui il principio di allocazione di capitale individuale rappresenta il caso particolare in cui  $\gamma = 1$ . Il vettore  $\gamma$  può essere interpretato come una sorta di vettore dei “fattori di riduzione” del portafoglio originario (ad esempio,  $\gamma \in \{0, 1\}^n$  rappresenta il caso in cui si consideri, come portafoglio “ridotto”, quello composto solo da alcune delle  $n$  lines of business, cioè quelle  $i$  per cui  $\gamma_i = 1$ ). La parte sinistra della disuguaglianza, allora, sarà il capitale allocato per il portafoglio ridotto (composto dalle  $n$  lines of business “riscalate” secondo il vettore  $\gamma$ ) considerato come parte del portafoglio complessivo (che ha funzione di perdita  $L(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i$ ); la parte destra, invece, è il capitale allocato per il portafoglio “ridotto” considerato come un’entità *stand alone*. La nozione di equità suggerisce che gli investimenti del portafoglio “ridotto” si avvalgono di un beneficio di diversificazione in quanto richiedono l’allocazione di una quantità di capitale inferiore rispetto a quello che riciederebbero se considerati separati dal portafoglio complessivo.

L’analisi delle misure di rischio e delle tecniche di aggregazione hanno portato ad affrontare il tema dell’allocazione di capitale risk-based. Nel capitolo successivo ci si concentrerà su come la questione della solvibilità e dell’allocazione di capitale siano stati affrontati in Europa, fino all’avvento della direttiva



Solvency II. Nel terzo (4.4.2) e nel quarto capitolo il problema verrà ripreso considerandone, rispettivamente, la soluzione standard proposta dal CEIOPS e quella, invece, su misura per il particolare profilo di rischio della compagnia.

## Capitolo 3

# Il margine di solvibilità: l'evoluzione normativa

Nel presente capitolo viene fornita una breve panoramica sintetica sul sistema normativo in vigore in merito al calcolo dei requisiti di capitale per garantire la solvibilità, concetto già introdotto nel corso del primo capitolo 1, dell'impresa d'assicurazione, suggerendo alcuni degli elementi e delle questioni principali che hanno portato alla necessità dell'importante evoluzione normativa che porta il nome generico di "Solvency II"<sup>1</sup>; nel corso del capitolo vengono poi analizzati alcuni aspetti della direttiva comunitaria, dall'iter normativo seguito fino all'analisi dell'impostazione scelta (cd. "a tre pilastri").

### 3.1 L'evoluzione normativa

Fino al recepimento in Italia delle Direttive Danni *73/239/CEE* e Vita *79/267/CEE*, alle compagnie di assicurazione in Italia veniva richiesto solo un capitale sociale minimo (leggermente differenziato secondo i rami esercitati) che non dipendeva in alcun modo dal volume dei premi né dalla loro ripartizione nei singoli rami; le due direttive sono state recepite in Italia nel 1978 (L. 295/1978, rami Danni) e nel 1986 (L. 742/1986, Rami Vita). Con l'adozione di queste Direttive, per le compagnie è richiesto un patrimonio libero (Elementi costitutivi del Margine di Solvibilità - ECMS) almeno pari ad un Margine di Solvibilità, quest'ultimo calcolato in funzione del volume dei Premi/Sinistri per i rami danni e delle Riserve Matematiche/Capitali sottorischio per i rami Vita, opportunamente rettificato secondo la politica di riassicurazione dei rischi.

---

<sup>1</sup>Le soluzioni proposte ed utilizzate negli ultimi decenni al problema dell'identificazione di una misura minima di patrimonio libero sono: il Margine di Solvibilità (MdS) nell'Unione Europea; il Risk Based Capital (RBC) negli USA (adottato a partire dalla prima metà degli anni '90, in precedenza era in vigore il c.d. sistema EWS - Early Warning System); il RBC in Giappone (dalla seconda metà anni '90); lo Swiss SolvencyTest (SST) in Svizzera (dal 2006/2007). Per ulteriori approfondimenti, ad esempio per quanto riguarda i rami vita, è utile consultare [PI-07].

Dopo alcuni interventi normativi operati con i decreti legislativi 174 e 175 del 1995 in attuazione delle direttive, rispettivamente, *92/96/CEE* (rami vita) e *92/49/CEE* (rami non vita), il Muller Report [Mu-97] pone con forza il dibattito per una revisione delle regole per la solvibilità, avviando il progetto "Solvency I"; questo si materializza con l'emanazione delle Direttive *2002/12/CE* e *2002/113/CE* del Parlamento Europeo e del Consiglio, che vengono recepite in Italia nel 2003 con il decreto legislativo 307 del 2003 e seguite dal *provvedimento* ISVAP n. *2322* del 2004.

Il *Codice delle Assicurazioni*[CdA-05], approvato con D. Lgs. n. 209/2005, con effetto dal 1° gennaio 2006, all'Art. 44 definisce "nel dettaglio solo il Margine di Solvibilità Disponibile (MSD) mentre per quanto concerne il Margine di Solvibilità Richiesto (MSR) la sua determinazione sarà fissata dall'ISVAP con un apposito Regolamento". Il 14 Marzo 2008 viene pubblicato il *Regolamento* ISVAP 19[ISV-05], che attua le disposizioni del Codice senza apportare significative modifiche al criterio di calcolo secondo la normativa europea. Viene previsto un innalzamento delle fasce di applicazione per i rami danni. Infine, il *provvedimento* ISVAP 2768 del 29 Dicembre 2009 innalza ulteriormente le fasce di applicazione per i rami danni e i limiti assoluti delle quote di garanzia.

## 3.2 L'attuale formula di calcolo del Margine di Solvibilità

### 3.2.1 Rami danni

Secondo la normativa comunitaria, il *Minimo Margine di Solvibilità Richiesto* (MMS) è pari al valore più elevato tra quelli ottenuti mediante i criteri di calcolo basati rispettivamente sull'ammontare annuo dei premi e sull'onere medio dei sinistri degli ultimi tre anni (sette per i rischi credito, tempesta, grandine e gelo) (si vedano Art. 6-11 Regolamento Isvap 19[CdA-05, ISV-05]):

$$MMS = \alpha * \max \{ \text{margine}(\text{premi}), \text{margine}(\text{sinistri}) \} \quad (3.1)$$

ove:

$$\text{margine}(\text{premi}) = \begin{cases} 0,18 * 57.500.000 + 0,16 * (B - 57.500.000), & B > 57.500.000 \\ 0,18 * B, & B \geq 57.500.000 \end{cases}$$

$$\text{margine}(\text{sinistri}) = \begin{cases} 0,26 * 40.300.000 + 0,23 * (S - 40.300.000), & S > 40.300.000 \\ 0,26 * S, & S \geq 40.300.000 \end{cases}$$

e  $B$  =premi lordi contabilizzati dell'esercizio trascorso (il valore è aumentato del 50% per i rami 11,12,13);

$S$  = un terzo (o a un settimo) della somma dei sinistri pagati negli ultimi tre (o sette) anni, più le riserve lorde finali, meno le riserve lorde all'inizio del triennio (o dei sette anni). Il valore è aumentato del 50% per i rami 11,12,13;

$\alpha$  : considera il grado di conservazione ed è pari al rapporto tra la somma dell'onere dei sinistri degli ultimi tre esercizi al netto riassicurazione e l'identica grandezza valutata al lordo riassicurazione, ipotizzando un valore minimo del 50%

La *Quota di garanzia* (art. 46 [CdA-05]) è così calcolata:

$$\begin{cases} \max \left\{ \frac{MMS}{3}, 3.500.000 \right\}, & \text{rami 10, 11, 12, 13, 14, 15} \\ \max \left\{ \frac{MMS}{3}, 2.300.000 \right\}, & \text{altri rami} \end{cases}$$

E' prevista un'indicizzazione automatica del fondo di garanzia minimo qualora esso registri una diminuzione di almeno il 5% in riferimento all'indice europeo dei prezzi al consumo pubblicato da Eurostat (adeguamento comunicato con Provvedimento Isvap).

Si ha inoltre che, se il MMS diminuisce rispetto a quello calcolato nell'esercizio precedente, allora:

$$MMS(t) = MMS(t-1) * \frac{RS(t)}{RS(t-1)}.$$

Alcuni studi empirici (ad esempio [Sa-10]) suggeriscono che il criterio di calcolo in base ai premi e quello in base ai sinistri forniscono gli stessi risultati quando il rapporto S/P è prossimo al 70% circa, mentre per valori più elevati (contenuti) il calcolo sarà effettuato sui Sinistri (Premi). La *ratio* di questo doppio calcolo risiede infatti nel proposito di dissuadere le Compagnie da volontà di sottotariffazione allo scopo di ottenere un margine inferiore.

Dalla 3.1 si evince, inoltre, che al crescere del volume dimensionale dell'impresa il MMS ha una incidenza più contenuta.

### 3.2.2 Rami Vita

I fattori di rischio a fronte dei quali sono state fissate le regole per la costituzione del margine di solvibilità delle imprese di assicurazione operanti nei rami vita sono il rischio di investimento, di mortalità (demografico) e di gestione (spese). Il margine di solvibilità è calcolato diversamente in funzione della presenza di tali rischi nei diversi rami esercitati, attraverso l'applicazione di percentuali diverse alle riserve matematiche e ai capitali sottorischio positivi, come si evince dalla seguente formula:

$$MMS = 4\% * \sum RM_i * x + k\% * \sum (C_i - RM_i) * y \quad (3.2)$$

ove  $x$  è il fattore di conservazione della Compagnia in termini di Riserve Matematiche (mai inferiore all'85%),  $y$  è il fattore di conservazione in termini di Capitale Sotto Rischio (mai inferiore al 50%), e  $k$  è il 30% per polizze con capitale sotto rischio non negativo (nel caso di temporanee caso morte può scendere fino

al 10%). La formula è valida con l'eccezione, nell'ambito dei contratti di ramo III e VI, del caso in cui l'impresa non assuma rischi di investimento (in questo caso, se il contratto determini l'ammontare delle spese di gestione per un periodo maggiore di 5 anni, la quota del 4% viene ridotta all'1%, mentre qualora il periodo sia superiore ai 5 anni, il MMS diviene pari al 25% delle altre spese di amministrazione e delle provvigioni di incasso dell'ultimo esercizio).

La Quota di garanzia (art. 46 Codice delle Assicurazioni) è così calcolata:

$$Quota\ di\ garanzia = \max \left\{ \frac{MMS}{3}, 3.500.000 \right\}$$

E' inoltre prevista un'indicizzazione automatica del fondo di garanzia minimo qualora esso registri una diminuzione di almeno il 5% in riferimento all'indice europeo dei prezzi al consumo pubblicato da Eurostat (adeguamento comunicato con Provvedimento Isvap).

Se gli Elementi Costitutivi del Margine di Solvibilità (ECMS) scendono al di sotto del MMS o della quota di garanzia, viene richiesto dall'Autorità di Vigilanza un Piano di Risanamento o, rispettivamente, un piano di rifinanziamento a breve termine.

### 3.2.3 I principali limiti della normativa vigente

Se, da una parte, la normativa Solvency I ha rappresentato una prima armonizzazione normativa a livello europeo in cui il calcolo e i criteri valutativi risultano "easy to understand and unexpensive to monitor" [McNFE05], il sistema appare "mainly volume based and not explicitly risk based".

Alcuni dei limiti presenti nella normativa sopra rapidamente sintetizzata consistono nei seguenti punti:

- il calcolo del MMS per i rami danni fa riferimento al totale della gestione, senza alcuna differenziazione in base ai rami;
- le aliquote da applicare sui premi e sui sinistri non risultano correlate alla tipologia dei rami ed alla loro effettiva rischiosità. Inoltre, tali aliquote sembrano basarsi su studi alquanto limitati e riferibili ad uno scenario del mercato assicurativo ormai obsoleto;
- il rischio finanziario non è considerato nei rami danni;
- l'asset allocation degli investimenti non è in alcun modo contemplata nel calcolo del MMS (né danni né vita);
- Vengono considerati solo i capitali sottorischio positivi. Non viene, di fatto, considerato il rischio demografico per i contratti di rendita (aventi capitali sottorischio negativi[Pi-07]);

- nel calcolo del grado di conservazione non viene considerata la tipologia del trattato riassicurativo (Quota, XL, SL, ecc.) né le caratteristiche contrattuali (ad esempio la reinsurance commission); in particolare, la struttura della formula del grado di conservazione privilegia in larga parte le coperture proporzionali rispetto a quelle non proporzionali;
- la formula del MMS fa riferimento quasi esclusivamente all'underwriting risk (senza considerare gli effetti di eventuali livelli significativi di correlazione tra i vari rami), e non prende in alcuna considerazione l'asset risk, il run-off risk (claim reserving), il credit risk, il liquidity risk e l'operational risk, tutti aspetti che verranno ripresi nel prosieguo della dissertazione.

In definitiva, l'assetto normativo comunitario ha costituito solo una sorta di *rule of thumb* per ottenere un valore benchmark del margine di solvibilità; il fatto di non considerare il valore market consistent di attività e passività secondo una logica ALM e di annullare l'aleatorietà degli importi considerando misure di rischio che ignorano la distribuzione di probabilità delle v.a., rappresentano alcuni degli oggetti principali della sfida di Buhlmann ([Bu-02]), ovvero la sfida a definire una finanza dell'impresa d'assicurazione che sia adeguata alle esigenze della gestione e della *governance* e che superi alcune semplificazioni proprie dell'impostazione attuariale classica (ad esempio, quello di "trasformare" i flussi aleatori generati dai contratti d'assicurazione in flussi deterministici nel calcolo della riserva di bilancio<sup>2</sup>), a costo di cambiare le basi su cui si fondano le valutazioni, mettendo in discussione "our cherished traditional actuarial model". Solvency II, come verrà esposto nel corso del presente lavoro, rappresenta proprio una fortissima e, a tratti, rivoluzionaria spinta in questa direzione.

### 3.3 La direttiva 2009/138/CE: l'iter normativo

Il 17 Dicembre 2009 è stato pubblicato nella Gazzetta Ufficiale dell'Unione Europea il testo della Direttiva 2009/138/CE in materia di accesso ed esercizio delle attività di assicurazione e riassicurazione, comunemente nota come direttiva "Solvency II". La *Direttiva* è stata accolta dai principali mezzi di informazione attivi nel settore assicurativo come l'affermazione di un nuovo regime di solvibilità che conferisce, rispetto al regime vigente, maggiore enfasi alla qualità della gestione dei rischi e alla solidità dei controlli interni [As-10].

Il testo era stato approvato prima dal Parlamento Europeo il 22 Aprile 2009, poi dal consiglio ECOFIN (*Economic and Financial Affairs Council*) il 5 Maggio dello stesso anno. La ratificazione della Direttiva all'interno di ciascun Paese membro è prevista entro il 31 Ottobre 2012.

#### 3.3.1 Il Lamfalussy Process

L'implementazione della Direttiva è prevista con il Lamfalussy process, ovvero la procedura standard per lo sviluppo e l'adozione della legislazione dell'Unione

<sup>2</sup>Una discussione puntuale dell'argomento nel contesto dei rami vita è in [DeFM-09]

Europea in ambito di servizi finanziari [EC]. Si tratta di una procedura comunitaria prevista per elaborare un sistema normativo originale armonizzando standards eterogenei propri dei vari Paesi membri.

Il primo livello (*Framework principles*), conclusosi con il voto del 22 Aprile 2009, consiste nell'elaborazione del testo della Direttiva, che include i principi cardine e l'impostazione scelta (ad esempio, la forma generica della Standard Formula), ed è sviluppata dalla Commissione Europea (attraverso l'Insurance Committee, IC<sup>3</sup>) e approvata dal Parlamento e dal Consiglio Europeo secondo le modalità dell'EU legislation.

Il secondo livello (*Implementing measures*) consta delle dettagliate misure d'implementazione che traducono in regole i principi generali della direttiva (include, ad esempio, la precisa calibrazione dei parametri della standard formula), che vengono approvate dalla Commissione Europea e dallo *European Insurance and Occupational Pensions Committee* (EIOPC).

Nell'ambito del terzo livello vengono definiti i *supervisory standards*, cioè le linee guida e le raccomandazioni per garantire la convergenza delle Autorità e dei meccanismi di vigilanza (ad esempio, in merito alla trasparenza dell'informativa); la responsabilità di questo livello è interamente affidata al CEIOPS (*Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors*), ovvero l'organo consultivo della Commissione Europea, che raccoglie tutti gli organismi di vigilanza delle assicurazioni e dei fondi pensione dell'Unione Europea e fornisce un supporto tecnico alla Commissione Europea (o, meglio, all'IC) per lo sviluppo del nuovo sistema di solvibilità.

Il monitoraggio della corretta implementazione ed applicazione della normativa a livello nazionale è affidata alla Commissione Europea con l'ausilio tradizionale della Corte di Giustizia Europea, e rappresenta il quarto livello del *Lamfalussy process*, che inizierà a partire dalla ratificazione della Direttiva nei singoli Stati membri (Ottobre 2012).

Allo stato attuale, il CEIOPS ha pubblicato le *level 2 implementing measures* attraverso i *consultation papers*<sup>4</sup>. Parallelamente, il CEIOPS ha avviato una serie di studi di impatto quantitativo (*Quantitative Impact Studies, QIS*) con l'obiettivo di ottenere indicazioni in merito agli effetti delle nuove regole sui bilanci delle imprese. Ad oggi, sono stati effettuati quattro<sup>5</sup> studi di impatto

<sup>3</sup>Organo legislativo e di regolamentazione della Commissione Europea, responsabile per la predisposizione di nuove direttive. I membri dell'IC sono nominati dalle autorità di vigilanza assicurativa dei 27 Stati Membri.

<sup>4</sup>Pareri tecnici di approfondimento per tutte le parti interessate su aspetti qualitativi, raccomandazioni e criteri standard che facilitino il processo di recepimento della Direttiva. Sono emanati su diverse tematiche anche allo scopo di ricevere commenti e suggerimenti dagli operatori del mercato (imprese, organismi di vigilanza, associazioni di imprese etc.) per definire le future Implementing Measures. Il consultation paper 56, ad esempio, è esplicitamente dedicato all'internal modelling, di cui vengono definiti requisiti di natura organizzativa, disposizioni per la qualità dei dati e i test da superare per l'approvazione da parte dell'autorità di vigilanza.

<sup>5</sup>Il Summary report del QIS1 è stato pubblicato nel Marzo 2006, il QIS2 è stato emanato nel maggio 2006, il QIS3 nell'Aprile 2007; i risultati definitivi del QIS4, svolto tra l'Aprile e il Luglio 2008, sono stati pubblicati il 18 maggio 2010.

Interpretazione “aziendale” dei tre pilastri di Solvency II

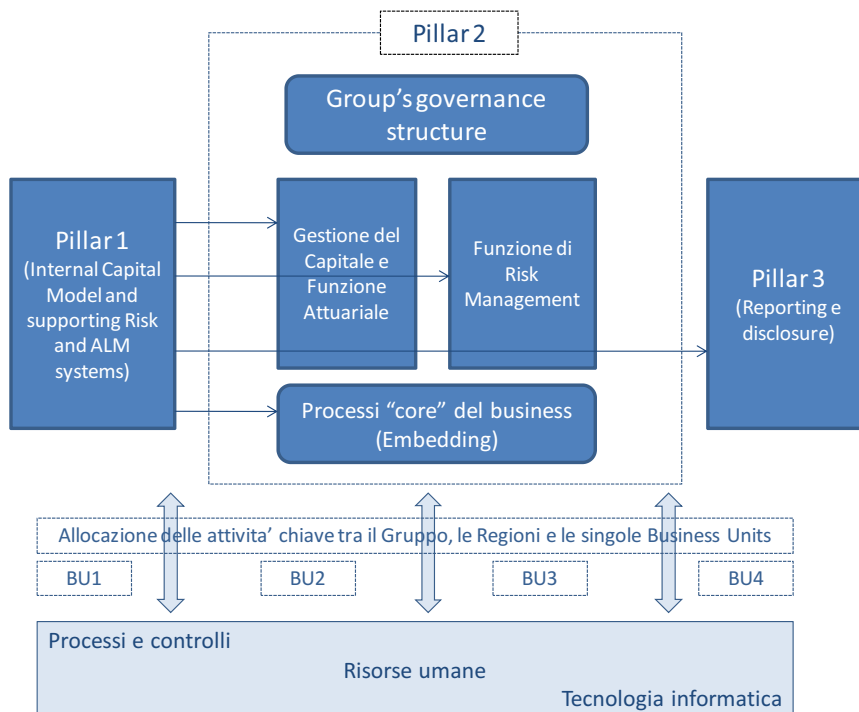


Figura 3.1: Organizzazione di un gruppo assicurativo basata sui tre pilastri di Solvency II

quantitativo ed è attualmente in corso il quinto, ed ultimo, studio (QIS 5<sup>6</sup>, si veda la sottosezione 4.4.6).

### 3.4 La struttura a tre pilastri

La Direttiva Solvency II riprende la struttura a tre pilastri che già si era affermata con “Il Nuovo Accordo sui requisiti minimi di capitale firmato a Basilea” (Basilea II, firmato nel giugno del 2004 ed entrato in vigore nel gennaio 2007).

La struttura a tre pilastri ha l’obiettivo di raggiungere, secondo una felice sintesi di McNeil, Frey ed Embrechts[McNFE05], *a more holistic approach to risk management that focuses on the interaction between different risk categories*, alcune delle quali quantificabili, altre non quantificabili.

<sup>6</sup>Il QIS5, dopo il periodo di pubblica consultazione della bozza di specifiche tecniche pubblicata il 15 aprile 2010, è stato pubblicato il 1 luglio 2010 e si svolgerà dal 1 agosto al 31 ottobre (per le singole imprese) o al 15 novembre 2010 (per i gruppi); la pubblicazione del Final Report QIS 5 è prevista per Aprile 2011



### 3.4.1 Minimum Financial Requirements

Il primo pilastro prevede il calcolo di Minimum Financial Requirements e comprende disposizioni relative a:

- i criteri di valutazione di attività e passività (art. 75);
- il calcolo delle riserve tecniche (artt. 75-86);
- i fondi propri: determinazione, classificazione e criteri di ammissibilità ai fini della copertura dei requisiti patrimoniali (artt. 87-99);
- il calcolo dei requisiti patrimoniali di solvibilità (Solvency Capital Requirement, SCR), in funzione dell'intero set dei rischi che impattano la stabilità finanziaria dell'impresa, secondo la formula standard e secondo un modello interno (artt. 100-127);
- il calcolo dei requisiti patrimoniali minimi (Minimum Capital Requirement, MCR) (artt. 128-131);
- gli investimenti a copertura delle riserve tecniche (artt. 132-135).

Salvo alcune disposizioni specifiche, l'impostazione è la stessa sia per imprese di assicurazione sia per imprese di riassicurazione. Altre disposizioni specifiche sono dedicate al calcolo dei requisiti patrimoniali per i gruppi di imprese.

In funzione dell'SCR e del MCR sono individuate, inoltre, le soglie di intervento della vigilanza, in analogia con il sistema Risk Based Capital in vigore negli Stati Uniti d'America.

### 3.4.2 Supervisory Review Process

Dal momento che ogni approccio quantitativo al Risk Management per essere efficace deve essere inserito in una struttura di *corporate governance* ben funzionante, il secondo pilastro (Supervisory Review Process) prevede proprio che le strutture di vigilanza locali vigilino sul fatto che ciascuna impresa metta a punto la più solida ed efficiente valutazione e controllo interni dei rischi e della posizione di solvibilità (*Internal Risk and Capital Assessment*)<sup>7</sup>; a tal proposito, vengono specificati:

- le regole generali del processo di supervisione da parte dell'Autorità di Vigilanza su aspetti quantitativi (riserve, SCR, MCR, fondi propri, investimenti), sulla politica di gestione da parte del management e sullo sviluppo di modelli interni;

---

<sup>7</sup>In Italia l'ISVAP ha affermato con forza questo aspetto, approvando il 26 Marzo 2008 il Regolamento N. 20 recante disposizioni in materia di controlli interni, gestione dei rischi, compliance ed esternalizzazione delle attività delle imprese di assicurazione, affermando il principio e delineando la struttura del sistema dei controlli interni, definendone obiettivi, organi sociali coinvolti, cultura e flussi informativi.

- le condizioni necessarie per la gestione del business (gli artt. 41-50 definiscono come un sistema di governance efficiente rappresenti un prerequisito per un regime di solvibilità efficace); in particolare, l'art. 45 introduce la valutazione interna del rischio e della solvibilità (*Own Risk and Solvency Assessment*, ORSA), su cui in seguito ci soffermeremo maggiormente;
- le responsabilità degli organi sociali;
- i criteri e le modalità per lo sviluppo dei modelli interni.

Il *sistema di governance* comprende il rispetto dei requisiti di competenza e di onorabilità del management, la gestione e valutazione dei rischi e della solvibilità, il controllo interno (art. 46), l'internal audit (art. 47), la funzione attuariale (art. 48) e la gestione e il controllo delle attività in outsourcing (esternalizzazioni, art. 49).

Nell'ambito di questo pilastro vengono disciplinate le attività, gli strumenti e i poteri della vigilanza, come quello di controllare l'adeguata capitalizzazione dell'impresa e quello di imporre, in presenza di circostanze prefissate, requisiti patrimoniali aggiuntivi (*capital add-on*).

### 3.4.3 Public disclosure

La Direttiva prevede una disciplina di mercato in termini di informativa al pubblico (*public disclosure*), attraverso due diversi canali informativi:

1. *privato con l'autorità*: a tutela degli azionisti, l'impresa deve dimostrare che i dati forniti in relazione ai primi due pilastri sono affidabili;
2. *pubblico con il mercato*: a tutela dei sottoscrittori, l'impresa deve fornire al mercato tutti i dati e le informazioni necessarie per valutare l'adeguatezza del loro investimento (ad esempio, il livello del premio in relazione al mandato di gestione dei fondi propri nelle polizze vita rivalutabili di ramo I).

In prospettiva, ipotizzando una crescente alfabetizzazione finanziaria dei policyholders, il secondo canale dovrebbe giocare un ruolo molto importante nella scelta della Compagnia da parte della clientela, avendo a disposizione un'informativa sull'effettivo grado di sicurezza della compagnia rispetto al sistema di Solvency I, scelta che investitori "razionali" e "informati" opererebbero in base al trade-off tra pricing (rendimento) e solvibilità (rischio) dei singoli assicuratori.

Nel merito, l'art. 51 della Direttiva prevede la pubblicazione annuale, da parte delle imprese, di una relazione sulla loro solvibilità e condizione finanziaria, contenente informazioni sull'attività e i risultati dell'impresa, sul suo sistema di governance, sul suo risk profile (esposizione, concentrazioni, attenuazioni e sensibilità al rischio per ogni tipologia di rischio), sulle base e i metodi utilizzati per la valutazione delle attività, delle riserve tecniche e delle altre passività ed, infine, sulla gestione del capitale (struttura e importo dei fondi propri, del SCR, del MCR).

### 3.5 Verso un'autorità di vigilanza unica

Nel momento in cui viene riconosciuto che tutte le diverse sorgenti di rischio che interessano l'attività assicurativa devono essere trattate con un'impostazione *olistica*, pur se *granulare*, risulta cruciale l'obiettivo di sviluppare una convergenza in materia di strumenti e di pratiche di vigilanza nell'applicazione delle disposizioni previste nel contesto di Solvency II. Il quadro normativo unico, infatti, non è che la base per l'ottenimento di reali condizioni di parità tra imprese operanti in Paesi diversi; altra condizione necessaria è, infatti, l'affermazione di pratiche comuni in materia di sorveglianza dell'implementazione delle norme tra le autorità di vigilanza. Se, da un lato, questo rientra pienamente nell'attività del CEIOPS nell'ambito del terzo livello del Lamfalussy process, dall'altro si inserisce nel pieno del dibattito internazionale posto in merito alla prociclicità delle crisi finanziarie: poiché, infatti, esistono sorgenti di rischio comuni (e spesso la stessa impresa è sottoposta al controllo di tre autorità di vigilanza diverse le cui competenze e giurisdizioni talvolta si confondono), è stato proposto ed è in discussione un processo di fusione tra autorità di controllo, che nell'arco di alcuni anni potrebbe portare all'affermazione di un unico organismo di vigilanza<sup>8</sup>, come suggerito anche da illustri esponenti del mondo accademico [Ma-07, Sp-08, Sar-08]<sup>9</sup>.

In particolare [BdI-09], in occasione della riunione del Consiglio dei Ministri economici e finanziari e dei Governatori delle banche centrali dell'Unione Europea (ECOFIN), tenutasi a Praga il 3 e 4 aprile, è stato raggiunto un accordo sui principi fondamentali per la riforma della supervisione finanziaria in ambito europeo. Il processo ha portato il Parlamento europeo, nella sessione plenaria del 22 Settembre 2010 [BdI-10], ad approvare la riforma dell'architettura finanziaria in Europa. La riforma introduce un nuovo sistema europeo delle autorità di vigilanza finanziaria (*European System of Financial Supervision*), fondato su due pilastri. Da una parte, per rafforzare la sorveglianza macroprudenziale, viene istituito un nuovo organismo, lo *European Systemic Risk Board* (ESRB), incaricato di identificare i rischi e le vulnerabilità che minacciano la stabilità del sistema finanziario e di fornire raccomandazioni sulle azioni da intraprendere. Dall'altra, in materia di regolamentazione e di vigilanza sulle singole istituzioni cross-border, vengono istituite tre autorità europee (denominate ESA, *European Supervisory Authorities*), distinte per settore; si tratta della European Banking

<sup>8</sup>Nell'Aprile 2008 il Financial Stability Forum, presieduto dal Governatore della Banca d'Italia Mario Draghi e in collaborazione con l'International Accounting Standard Board (IASB), ha pubblicato, su richiesta dei Ministri delle finanze e i Governatori delle Banche centrali del G7, un'analisi delle cause e delle debolezze che hanno portato alle turbolenze sui mercati finanziari, con 65 raccomandazioni in cui sono individuabili cinque macroaree d'intervento, una delle quali rappresentata appunto dall'esigenza di accelerare il coordinamento internazionale in termini di scambi di informazioni e di regolamentazione (istituzione di un gruppo di autorità di vigilanza volto a gestire le crisi dei maggiori intermediari finanziari *cross border*).

<sup>9</sup>Masera, in particolare, suggerisce che occorre

superare la frammentazione delle autorità di supervisione e di controllo a livello nazionale e internazionale, con la quale tutti gli interventi di natura macroeconomica risulterebbero lenti ed inefficienti.

Authority (EBA), la European Securities and Markets Authorities (ESMA) e la European Insurance and Occupational Pensions Authority, che sostituiranno gli attuali Comitati tecnici di terzo livello della procedura Lamfalussy (CEBS, CESR e CEIOPS); in prospettiva il sistema potrebbe essere semplificato prevedendo solo due autorità distinte per la vigilanza prudenziale e per la trasparenza e la correttezza dei comportamenti.

Il nuovo sistema continuerà a basarsi sul decentramento dei compiti operativi presso le autorità nazionali e sul rafforzamento dei collegi dei supervisori per le istituzioni cross-border; le nuove autorità opereranno come unità di coordinamento, svolgendo alcuni compiti a livello europeo, tra i quali l'emanazione di standards di vigilanza comuni, l'introduzione di meccanismi di mediazione tra le autorità e l'adozione, in caso di disaccordo tra le medesime, di decisioni tecniche direttamente applicabili nei confronti delle istituzioni finanziarie (come, ad esempio, l'approvazione dei modelli interni per il calcolo dei requisiti patrimoniali), l'autorizzazione ad operare e la vigilanza su specifiche istituzioni di rilievo paneuropeo (agenzie di rating e infrastrutture post-trading).

## Capitolo 4

# I nuovi principi di valutazione

In questo capitolo verrà analizzato il cardine dell'impostazione "rivoluzionaria" della Direttiva Solvency II in merito alla valutazione delle attività, delle passività e dei rischi della Compagnia, ovvero il primo pilastro, i cui contenuti sono esplicitati nel CAPO VI del Titolo I della Direttiva, intitolato "Disposizioni inerenti alla valutazione delle attività e delle passività, delle riserve tecniche, dei fondi propri, del requisito patrimoniale di solvibilità, del requisito patrimoniale minimo e disposizioni in materia di investimenti"[09/138/CE].

Occorre ribadire che le metodologie di calcolo di attività e passività sono armonizzate a livello europeo, come sancito nella premessa n° 53

The principles and actuarial and statistical methodologies underlying the calculation of those technical provisions should be harmonised throughout the Community in order to achieve better comparability and transparency.

Un importante aspetto su cui ci si concentrerà nel corso del capitolo è la valutazione delle attività e delle passività a valori di mercato. Secondo la Direttiva, infatti,

assets shall be valued at the amount for which they could be exchanged between knowledgeable willing parties in an arm's length transaction (Art. 75, comma 1).

Le passività sono a loro volta interpretate *come current exit value*:

The value of technical provisions should therefore correspond to the amount an insurance or reinsurance undertaking would have to pay if it transferred its contractual rights and obligations immediately to another undertaking (art. 75, comma 2).

Segue che

the value of technical provisions should correspond to the amount another insurance or reinsurance undertaking (*reference undertaking*) would be expected to require to take over and meet the underlying insurance and reinsurance obligations (Art.76, comma 2).

#### 4.1 L'affermazione della logica ALM (Asset Liability Management)

La nuova normativa prevede la necessità di operare una valutazione omogenea di attivi e passivi:

The calculation of technical provisions should be consistent with the valuation of assets and other liabilities, market consistent and in line with international developments in accounting and supervision (premessa n°54).

Viene quindi accettata e promossa la logica dell' Asset Liability Management (ALM). L'Actuarial Specialty Guide definisce l'ALM come

the practice of managing a business so that decisions on assets and liabilities are coordinated; it can be defined as the ongoing process of formulating, implementing, monitoring, and revising strategies related to assets and liabilities in an attempt to achieve financial objectives for a given set of risk tolerances and constraints [ALM]

E' questa sua caratteristica "totalizzante"<sup>1</sup> che rende l'ALM fondamentale sia per misurare la situazione dell'impresa (in termini di valutazione e controllo del livello di rischiosità e di solvibilità), per la sua gestione strategica (*profit testing*) e per l'implementazione di specifiche azioni tecniche (scelte finanziarie, attuariali e di marketing) [DeFM-09].

La figura 4.1 fornisce una prima immagine (fotografica, e dunque semplificata) della logica ALM. Il valore delle attività (a sinistra) "copre" quello delle passività, in cui rientrano le riserve tecniche e il SCR (che include il MCR).

Le figure, invece, mostrano una comparazione più "operativa" del passaggio dall'impostazione "contabile" a quella "economica"

Come già detto, secondo l'impostazione di Solvency II attività e passività sono valutati come "valori di mercato". I paragrafi successivi sono dedicati alla valutazione di queste singole componenti.

<sup>1</sup>Redington per primo propose, nel controllo dell'equilibrio finanziario dell'impresa d'assicurazione, un'impostazione fondata sull'analisi congiunta (dei valori e delle rischiosità) dei flussi di cassa di attivo e passivo generati dai contratti che costituiscono il portafoglio dell'impresa.

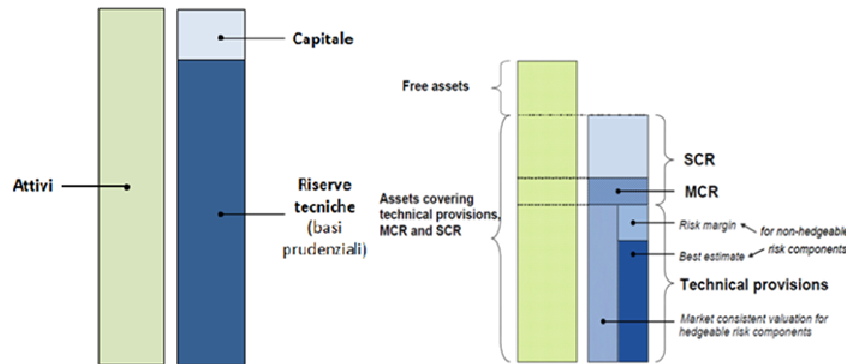


Figura 4.1:

## 4.2 Il calcolo delle riserve tecniche (technical provisions)

L'art. 76 fornisce una chiara definizione delle riserve tecniche e della modalità del loro calcolo.

Esse sono costituite dalle imprese di assicurazione e riassicurazione (comma 1)

a fronte di tutte le obbligazioni nei confronti dei contraenti e dei beneficiari dei contratti di assicurazione o di riassicurazione.

Il loro valore è inteso come (comma 2)

importo attuale che le imprese di assicurazione e di riassicurazione dovrebbero pagare se dovessero trasferire immediatamente le loro obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione ad un'altra impresa.

Tale importo, inoltre, è calcolato utilizzando (comma 3)

coerentemente le informazioni fornite dai mercati finanziari e i dati generalmente disponibili sui rischi di sottoscrizione (*coerenza con il mercato*).

Nel calcolo delle riserve tecniche occorre distinguere tra componenti di rischio hedgeable e non-hedgeable. I rischi hedgeable (quelli che possono essere replicati, e quindi coperti, con strumenti finanziari 4.2.5) sono, ad esempio, i rischi di tasso e il rischio di prezzo (contratti ad alta componente hedgeable sono, ad esempio, le polizze vita rivalutabili); quelli non hedgeable sono, invece, i rischi tecnico-attuariali.

Nel caso in cui i flussi di cassa futuri siano interessati da rischi non-hedgeable, il valore delle riserve tecniche è pari alla somma della migliore stima (*Best Estimate*) e del margine di rischio (*Risk Margin*), componenti che devono essere

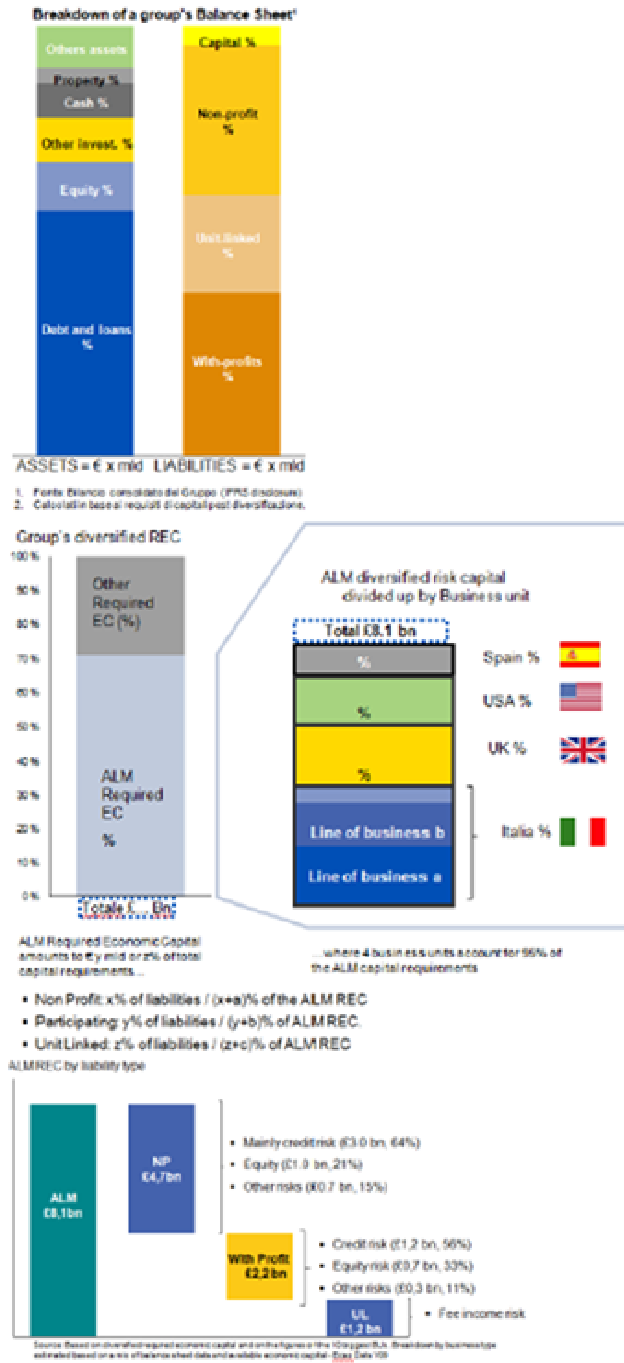


Figura 4.2: Analisi ALM di un'impresa (o di un gruppo) su base "IFRS" o "Economic capital"



valutate separatamente per ogni livello di segmentazione (senza effetto diversificazione). Nel paragrafo seguente si procederà con l'analisi di questo secondo caso.

#### 4.2.1 Best Estimate e Risk Margin

Nel caso in cui le passività producano flussi di cassa da rischi non-hedgeable, esse sono valutate come somma della migliore stima (*Best Estimate*) e del margine di rischio (*Risk Margin*).

**Best Estimate.** La Best Estimate (BE) è calcolata come il valore attuale atteso dei futuri cash-flows attualizzati utilizzando la curva dei tassi *risk-free* fornita dal CEIOPS 4.4.6.3. Evidentemente, (art. 77, comma 2)

il calcolo della BE è basato su informazioni aggiornate e credibili e su ipotesi realistiche e dovrà essere compiuto usando adeguate metodologie statistiche ed attuariali.

Per valutare i cash-flows in uscita, in particolare, occorre considerare sia gli impegni in termini di prestazioni sia tutte le spese derivanti dal contratto, e formulare ipotesi sull'andamento futuro di tutte le variabili che influiscono sul loro valore (basi tecniche demografiche, finanziarie ed economiche)<sup>2</sup>. I cash-flows in entrata (i premi futuri, o impegni contrattuali al versamento da parte dell'assicurato) dovranno essere considerati, secondo l'impostazione ALM, parallelamente agli impegni in uscita (prestazioni e spese) generati dai nuovi versamenti. Il CEIOPS ha proposto di inserire nel *balance sheet* solo i premi collegati alla liquidazione degli impegni esistenti alla data di valutazione (ie. portafoglio in run-off). Occorre considerare, dunque, tutti i premi futuri legalmente richiedibili sulla base dei contratti in essere (ad esempio, i premi annui) ed eventuali taciti rinnovi per i quali è già trascorso il periodo di "cancellazione", che quindi verranno senz'altro rinnovati pur se il rinnovo non è stato ancora effettuato al momento della valutazione<sup>3</sup>.

**Risk Margin.** Lo scopo del Risk Margin (RM) è quello di (art. 77, comma 3)

garantire che il valore delle riserve tecniche sia equivalente all'importo di cui le imprese di assicurazione e di riassicurazione avrebbero bisogno per assumersi e onorare le [proprie] obbligazioni.

<sup>2</sup>E' necessario, ad esempio, formulare ipotesi in merito ai tassi di esercizio delle opzioni presenti nei contratti (riscatto, conversione, etc.) anche in funzione di futuri cambiamenti negli scenari finanziari ed economici [CE-09a]

<sup>3</sup>Il CEIOPS, in ottica prudenziale, ha stabilito che se sono presenti diritti unilaterali da parte dell'impresa a rivedere le condizioni (ad es. garanzie) sui premi futuri o a cancellare il contratto, tali premi non devono essere compresi; inoltre, se sono previsti diritti futuri a reinvestire a condizioni agevolate (ad es. le condizioni di rinnovo), tali situazioni devono essere valutate e incluse solo se aumentano il valore della Best Estimate. [CE-08]

La valutazione del RM è effettuata mediante un approccio Cost of Capital (CoC). Il tasso CoC da utilizzare è identico per tutti gli operatori ed (art. 77 comma 5)

è pari alla maggiorazione rispetto al tasso d'interesse privo di rischio pertinente in cui un'impresa di assicurazione o di riassicurazione incorrerebbe detenendo un importo di fondi propri ammissibili (...) pari al requisito patrimoniale di solvibilità necessario per far fronte alle obbligazioni di assicurazione o di riassicurazione per tutta la loro durata di vita.

Il CEIOPS, confermando la scelta del QIS4, ha fissato il tasso del costo del capitale al 6% (oltre il tasso risk-free).

Il risk margin è calcolato proiettando il SCR fino al run off del portafoglio (ipotesi di portafoglio chiuso), moltiplicando i futuri SCR per il tasso CoC, e attualizzando, infine, utilizzando il tasso risk-free; la formula indicata nelle Technical Specifications del QIS5 [CE-10] è:

$$RM = \sum_{t=0}^T CoC \times v(0, t + 1) \times SCR_t$$

Dunque il RM può essere interpretato come il costo derivante dall'obbligo di possedere fondi propri pari al Solvency Capital Requirement per supportare le obbligazioni fino a completa estinzione.

Nel caso in cui i flussi di cassa futuri siano interessati da rischi hedgeble, cioè (art. 77, comma 4)

quando i flussi di cassa futuri connessi con le obbligazioni di assicurazione o di riassicurazione possono essere riprodotti in modo affidabile utilizzando strumenti finanziari per i quali sia osservabile un valore di mercato affidabile, il valore delle riserve tecniche associato a tali futuri flussi di cassa è determinato sulla base del valore di mercato di tali strumenti finanziari.

In altre parole, quando i cash-flows del contratto sono replicabili utilizzando strumenti finanziari per i quali sia osservabile un valore di mercato "affidabile" (quindi basato sul principio di arbitraggio, cfr. 4.2.5), allora la riserva potrà essere calcolata *as a whole* (in un colpo solo), e *separate calculation of the best estimate and the risk margin shall not be required*.

#### 4.2.2 Formalizzazione del valore *market consistent* delle riserve

Si consideri<sup>4</sup> al tempo di valutazione  $t = 0$  una passività (ad esempio il valore delle prestazioni derivanti da una polizza emessa dall'impresa d'assicurazioni) aleatoria  $Y_T$ , esigibile al tempo  $T > 1$ . Dunque il valore "market-consistent" di

<sup>4</sup>Questa trattazione segue l'impostazione di [CdFM-09a]

tale passività al tempo di valutazione è  $V_0 = V(0; Y_T)$ ; questo valore, secondo l'impostazione della direttiva [09/138/CE], è noto e pari a

$$V_0 = \begin{cases} E[\varphi_{0,T} Y_T | \mathcal{F}_0] + \rho[Y_T | \mathcal{F}_0], & \text{se } Y_T \text{ è non-hedgeable} \\ \widehat{E}[\xi_{0,T} Y_T | \mathcal{F}_0], & \text{se } Y_T \text{ è hedgeable} \end{cases} \quad (4.1)$$

Ove:

- $\mathcal{F}_0$  è l'informazione rilevante disponibile al tempo di valutazione 0;
- $E[\cdot]$  è l'aspettativa condizionata, calcolata con la probabilità "naturale"  
 $P$ : è la *Best Estimate* di  $Y_T$ ;
- $\rho[\cdot]$  è il *Risk Margin* richiesto al tempo 0, calcolato con una misura di rischio basata sulla distribuzione probabilistica di  $Y_T$  e sulle caratteristiche della funzione di utilità del valutatore (*risk aversion*);
- $\widehat{E}[\cdot]$  è l'aspettativa condizionata, calcolata con la probabilità "risk-neutral"  
 $\widehat{P}$ ;
- $\varphi_{0,T}$  è lo state price deflator nell'intervallo temporale  $[0, T]$ ;
- $\xi_{0,T}$  è il fattore di sconto stocastico di mercato sull'intervallo temporale  $[0, T]$ ; in un modello nel tempo continuo si ha

$$\xi_{0,T} = e^{-\int_0^T r_\tau d\tau}, \quad \tau \leq T$$

dove  $r_\tau$  è l'intensità istantanea di interesse osservata sul mercato al tempo  $\tau$ .

La valutazione market consistent implica la definizione di un modello di mercato che costruisca, coerentemente con le informazioni di mercato disponibili al momento della valutazione, una struttura per scadenza dei tassi d'interesse<sup>5</sup>.

Nel caso il titolo, o la polizza, dia luogo ad una prestazione unitaria certa (i.e.  $Y_T = 1$ ), il valore della passività al tempo 0 sarà uguale al fattore di sconto di mercato sull'orizzonte  $[0, T]$  (ovvero il prezzo di mercato in 0 di uno *zero coupon bond* unitario con scadenza in  $T$ ); formalmente (si noti che  $Y_T$ , in questo caso, è evidentemente "hedgeable"):

$$V(0; 1) = \widehat{E} \left[ e^{-\int_0^T r_\tau d\tau} | \mathcal{F}_0 \right] = v(0, T) = e^{-y_T T} \quad (4.2)$$

Dove  $y_T = -\frac{\log[v(0, T)]}{T}$  = *yield-to-maturity* a  $T$  anni osservato in  $t = 0$ .

Se si ipotizza un tasso d'interesse deterministico e costante ( $r_\tau = r, \forall \tau$ )<sup>6</sup>, allora si ha

<sup>5</sup>Per approfondimenti sulla costruzione della struttura per scadenza dei tassi d'interesse coerente con le informazioni di mercato disponibili in una determinata epoca di valutazione, vedere i capitoli 9 e 11 di [CdFM-05a]

<sup>6</sup>Cioè si considera il caso "senza rischio di tasso d'interesse"

$$\xi_{0,T} = e^{-r(T-0)} = v(0,T)$$

Riprendendo la 4.1, segue che

$$V_0 = \begin{cases} e^{-rT} E[Y_T | \mathcal{F}_0] + \rho[Y_T | \mathcal{F}_0], & \text{se } Y_T \text{ è non-hedgeable} \\ e^{-rT} \widehat{E}[Y_T | \mathcal{F}_0], & \text{se } Y_T \text{ è hedgeable} \end{cases} \quad (4.3)$$

### 4.2.3 Probabilità naturali e probabilità *risk-neutral*

La misura di probabilità  $P$  è definita nell'articolo 13 [09/138/CE], al comma 32, come

probability distribution forecast<sup>7</sup> (...) a mathematical function  
that assigns to an exhaustive set of mutually exclusive future events  
a probability of realisation

La probabilità *risk-neutral*  $\widehat{P}$  è una misura di probabilità modificata, che consente di calcolare i contratti *hedgeable*, scontando i flussi di cassa del contratto col tasso *risk free* senza dover stimare i premi per il rischio (come se chi valuta fosse, appunto *risk-neutral*). Essa non fornisce informazioni su aspettative reali future (*profit or loss*), come invece fanno le distribuzioni di probabilità naturali. Per i calcoli delle misure di rischio basate su distribuzioni di probabilità (VaR, ES 2.2.1) occorre utilizzare le distribuzioni naturali (“osservabili empiricamente”).

La distribuzione *risk-neutral*, utilizzata invece per apprezzare un titolo rischioso in maniera coerente con l’informativa di mercato disponibile, è ottenuta calibrando il modello sui dati di mercato, realizzando il cosiddetto *marking-to-model*<sup>8</sup>.

### 4.2.4 Il caso di un’unica fonte di rischio

Nel caso in cui l’incertezza di  $Y_T$  sia generata da un’unica fonte di rischio, occorre definire un processo stocastico  $\{R_t\}_{t \leq T}$ <sup>9</sup> che descriva la sua dinamica in condizioni di incertezza. Si ha, dunque,  $Y_T = f(R_T)$ ,  $t \leq T$ .

Considerando il caso semplificato  $Y_T = f(R_T)$ , e assumendo che tutta l’informazione rilevante per la valutazione sia riassunta nel valore corrente (osservabile) di  $R_t$ , il valore *market consistent* è calcolato con la 4.1:

<sup>7</sup>Come suggeriscono [CdFM-09a], il termine *forecast*

non deve evocare l’idea - ambigua e pericolosa - che esista una distribuzione di probabilità “vera in natura” (ma sconosciuta) di cui quella utilizzata (prodotta) dal modello interno sia una “stima”.

<sup>8</sup>Per un approfondimento sull’utilità e gli ambiti di applicazione delle probabilità *risk neutral*, in particolare per esempi di parametrizzazione, stima e calibratura alternative del modello CIR - *risk neutral* e naturali - cfr. [CdFM-06].

<sup>9</sup>Si noti il cambio di notazione (mirato ad evitare confusioni con altre grandezze proprie dei modelli stocastici) rispetto al capitolo 2, in cui i fattori di rischio erano indicati con la lettera  $Z$ .

$$V_1 = \begin{cases} E[\varphi_{1,T} f(R_T) | R_1] + \lambda [f(R_T) | R_1], & \text{se } Y_T \text{ è non-hedgeable} \\ \widehat{E}[\xi_{1,T} f(R_T) | R_1], & \text{se } Y_T \text{ è hedgeable} \end{cases}$$

nel caso di tasso di interesse non deterministico (dunque il rischio di tasso sarà l'unica fonte di rischio, e  $R_T = r_t$ ); nel caso, invece, di tasso di interesse deterministico, si ha (dalla 4.3):

$$V_1 = \begin{cases} e^{-r(T-1)} E[f(R_T) | R_1] + \lambda [f(R_T) | R_1], & \text{se } Y_T \text{ è non-hedgeable} \\ e^{-r(T-1)} \widehat{E}[f(R_T) | R_1], & \text{se } Y_T \text{ è hedgeable} \end{cases}$$

**Cenni sul modello di mercato.** Per la valutazione di polizze del ramo vita particolari (con opzioni implicite), è necessaria la costruzione di un modello di mercato; nella costruzione di modelli stocastici nel tempo continuo, si assume generalmente che l'incertezza sia di tipo diffusivo: la dinamica del risk factor  $R_t$  è di norma rappresentata da un processo di diffusione, descritto da un'equazione differenziale stocastica del tipo:

$$dR_t = f(R_t, t) dt + g(R_t, t) dZ_t \quad (4.4)$$

dove il *coefficiente di drift*  $f(R_t, t)$  e il coefficiente di diffusione  $g(R_t, t)$  sono funzioni opportunamente specificate.

Il differenziale stocastico, cioè l'incremento subito dal processo  $Z_t$  nell'intervallo infinitesimo  $[t, t + dt]$

$$dZ_t = Z_{t+dt} - Z_t,$$

è una variabile aleatoria tale che

$$dZ_t \sim N(0, dt).$$

Nel prosieguo della dissertazione faremo spesso riferimento a un modello di mercato continuo, diffusivo e bivariato, caratterizzato da due fonti d'incertezza: lo *spot rate* (che definisce una struttura per scadenza dei tassi d'interesse) e i prezzi azionari. Un modello di mercato sarà analizzato nel corso del capitolo 5.

#### 4.2.5 Sulla replicabilità dei flussi di cassa futuri

Le implementing measures sviluppate nel Consultation Papers 41 [CE-09b] propongono che il flusso di cassa futuro non possa essere considerato replicabile in maniera affidabile qualora uno o più tratti del flusso (ad esempio il suo valore atteso o la sua volatilità) dipenda:

1. da sviluppi biometrici o dal comportamento del contraente;
2. dall'evoluzione di fattori interni, come spese di gestione o di acquisizione;

3. dall'evoluzione di fattori esterni per i quali non esistano sul mercato strumenti finanziari per i quali siano osservabili valori di mercato affidabili.

I criteri proposti dal CEIOPS hanno suscitato le perplessità di alcuni osservatori accademici e non (si veda, ad esempio, [CdFM-09b]). La prima condizione citata, infatti, impedirebbe la valutazione market-consistent delle polizze vita rivalutabili di ramo I (con minimo garantito); per queste polizze, infatti, il rischio demografico ed il rischio indotto dal comportamento degli assicurati, pur essendo presenti, sono di natura residuale rispetto al preponderante rischio finanziario. Un tale approccio sembrerebbe proporre un ritorno a “valutazioni più liberamente soggettive”, con una rinuncia alla coerenza interna garantita da un modello di pricing basato sul principio di arbitraggio, richiesto, ad esempio, per la valutazione delle opzioni finanziarie implicite nelle polizze. Le perplessità possono essere superate facendo riferimento esplicitamente al fatto che la replicabilità riguarda la molteplicità dei rischi, non la molteplicità dei cash-flows. Riguardo all'affidabilità dei valori market-consistent, “i problemi di spessore e di liquidità dei mercati, evocati dalla crisi finanziaria, (...) non si risolvono rinunciando alla valutazione mark-to-model (...), ma vigilando sull'adeguatezza dei modelli e delle tecniche di calibrazione” dei modelli alle quotazioni osservate<sup>10</sup>.

### 4.3 Il Solvency Capital Requirement

Come già accennato in 3.4.1, il primo pilastro della direttiva è contenuto nel Titolo I, Capo VI, Sezione IV (Requisito Patrimoniale di Solvibilità) e Sezione V (Requisito Patrimoniale Minimo). L'ultimo rappresenta un livello minimo di requisito patrimoniale al di sotto del quale scatta automaticamente l'azione dell'Autorità di Vigilanza; il primo, invece, rappresenta un capitale addizionale destinato ad assorbire perdite impreviste (il famoso “buffer”<sup>1</sup>) che possano influire sulla “salute” dell'impresa (la sua solvibilità).

Come indicano le disposizioni generali (art. 100)

Gli Stati membri prescrivono che le imprese di assicurazione e di riassicurazione detengano fondi propri ammissibili tali da coprire il requisito patrimoniale di solvibilità. Il requisito patrimoniale di solvibilità è calcolato utilizzando la formula standard di cui alla sottosezione 2 o un modello interno come previsto alla sottosezione 3.

---

<sup>10</sup>[deFi-70]Se si fa riferimento ad un modello di mercato operante in condizioni di incertezza,

non ha senso confrontare le previsioni con i risultati per discutere se questi le hanno ‘confermate’ o ‘smentite’, come se di quelle avesse senso chiedersi, col senno di poi, se fossero state ‘esatte’ o ‘sbagliate’.

Se diverse situazioni di mercato generano differenti previsioni, prosegue De Finetti,

non si tratterà di correzione, bensì di una nuova valutazione che coerentemente alla precedente utilizza – mediante il teorema di Bayes – la conoscenza dei nuovi risultati” traendone “valutazioni corrispondenti a questo nuovo stato di informazione.

I rischi presi in considerazione nel calcolo del requisito patrimoniale di solvibilità (cioè tutti quelli quantificabili a cui è esposta l'impresa) sono analizzati nel paragrafo 4.4.2: per ogni modulo considerato la misura di rischio scelta è di tipo Value-at-Risk (8.1.1), con livello di confidenza pari al 99,5% (art. 104, paragrafo 4). L'orizzonte temporale, così come la frequenza di calcolo richiesta (articolo 102), è pari a un anno: occorre, quindi, considerare l'attività esistente nonché le nuove attività previste nel corso dell'anno successivo all'epoca di valutazione (portafoglio *aperto* con orizzonte temporale di dodici mesi), secondo il *presupposto della continuità aziendale dell'impresa interessata* (art. 101 comma 2).

### 4.3.1 Formalizzare la definizione

L'SCR può essere definito come il valore attuale del *worst case value* a fine anno  $W(V_1 | \mathcal{F}_0)$  meno il valore corrente  $V_0$ , ove per  $W$  viene utilizzato il quantile al 99,5% della distribuzione naturale della variabile aleatoria  $V_1$  su un orizzonte temporale di un anno (i.e. il prezzo market consistent al tempo 1 della prestazione aleatoria  $Y_T$ ):

$$SCR_0 = e^{-y_1} Q^{(99,5)} [V_1 | \mathcal{F}_0] - V_0$$

Se, invece, l'SCR è definito come (*discounted*) *unexpected loss*, allora si avrà

$$SCR_0 = e^{-y_1} \left\{ Q^{(99,5)} [V_1 | \mathcal{F}_0] - E[V_1 | \mathcal{F}_0] \right\}$$

I QIS condotti dal CEIOPS hanno invece seguito un approccio *scenario-based*, che conduce alla definizione:

$$SCR_0 = Q^{(99,5)} [V_0 | \mathcal{G}_0] - V_0 \quad (4.5)$$

ove  $\mathcal{G}_0$  rappresenta una base informativa specificata esogenamente, dall'autorità di vigilanza, che esprime i movimenti del mercato con effetti negativi sulla solvibilità della Compagnia che possono svilupparsi nell'arco temporale di un anno (applicati, tuttavia, come shock istantanei).

Qualunque sia la definizione scelta, le considerazioni seguenti sono valide.

**Il caso di un unico risk driver.** Se si rappresenta, coerentemente con l'impostazione del paragrafo 4.2.4,  $V_1$  come funzione  $g$  del valore corrente del risk driver  $R$ , cioè  $V_1 = g(R_1)$ , allora

$$SCR_0 = e^{-y_1} Q^{(99,5)} [g(R_1) | \mathcal{F}_0] - V_0$$

Risulta evidente che l'SCR dipende dalla distribuzione di probabilità naturale  $P$  valutata al tempo 0 del fattore di rischio  $R_1$  da cui dipende il valore della liability  $Y_T$ . Il ruolo "previsionale" è quindi riservato a  $P$ , mentre la distribuzione *risk neutral*  $\hat{P}$  consente la determinazione di  $g(R_1)$ , cioè della *price function*, nel caso in cui la liability  $Y_T$  sia hedgeable.

**Approcci “scenario-based”.** Definita  $g(R_1)$  una funzione monotona, si ha

$$Q^{(99,5)} [g(R_1) | R_0] = \begin{cases} g(Q^{99,5} [R_1 | R_0]), & \text{se } g \text{ è crescente} \\ g(Q^{0,5} [R_1 | R_0]), & \text{se } g \text{ è decrescente} \end{cases}$$

In questo modo abbiamo ricondotto entrambe le notazioni possibili ( $L$  o  $S$ 8.1.1). Segue che il quantile della distribuzione di  $V_1$  puo' essere ricavato calcolando la funzione  $g$  sul quantile  $R_1$ , secondo la logica del “percentile sottostante”, ovvero valutando  $V_1$  in corrispondenza degli stressed scenario  $Q^{99,5} [R_1 | R_0]$  o  $Q^{0,5} [R_1 | R_0]$  (a seconda che si consideri  $L$  o  $S$ ), definiti in corrispondenza dei livelli del risk driver. Si osservi che generalmente  $g(R_1)$  non e' una funzione monotona, ad esempio quando l'SCR è definito in relazione al Net Asset Value (NAV) dell'impresa: anche se il valore degli asset  $X_1$  e delle liabilities  $Y_1$ , se prese singolarmente, sono funzioni monotone di  $R_1$ , il NAV  $X_1 - Y_1$  non e' in generale monotono, quindi lo “scenario approach” potrebbe portare a valutazioni di SCR errate.

Se si segue un approccio scenario-based occorre precisare, inoltre, che un modello e' *deterministico* se gli scenari “stressati” utilizzati derivano da scelte *ad hoc* e non sono legati a una specificata probabilità di accadimento (si tratta di analisi cosiddette “as if”). Se invece gli scenari sono ricavati sulla base di una distribuzione di probabilità sottostante, l'approccio si dice “intrinsecamente *stocastico*”. Segue che un approccio factor-based puo' essere considerato stocastico, purché si possa dimostrare che i fattori utilizzati corrispondono a movimenti del risk driver descritti da un'appropriata distribuzione di probabilità. Secondo quest'ottica, le misure di rischio distribution-based sono ottenute con un metodo stocastico. Al contrario, e' scorretto definire stocastico un approccio solo perché utilizza una procedura di simulazione, cioè un metodo di calcolo utilizzato per ricavare soluzioni numeriche a un problema per il quale non sono disponibili informazioni in forma chiusa.

### 4.3.2 Coerenza tra SCR e riserve tecniche

**Nei contratti hedgeable.** La condizione di coerenza tra la procedura di valutazione dell'SCR e la procedura di calcolo dei valori market consistent della riserve tecniche è necessaria, almeno per quanto riguarda i rischi hedgeable.

Ipotizzando un tasso d'interesse deterministico e un'unica fonte di rischio si ha che

$$Y_T \text{ hedgeable} \implies e^{-y_1} Q^{(99,5)} [g(R_1) | R_0] = e^{-rT} Q^{(99,5)} \left\{ \widehat{E} [f(R_T) | R_1] | R_0 \right\}$$

Confrontando con la 4.5, risulta evidente che il calcolo dell'SCR, quindi, richiede sia probabilità naturali, per il calcolo del VaR ( $Q^{(99,5)}$ ), sia probabilità risk-neutral, per la valutazione della technical provision  $V_0$  (il valore market consistent corrente della passività) e di  $V_1$  (il valore market consistent della passività a fine anno). La probabilità risk-neutral  $\widehat{P}$  è determinata da un vettore  $a$



di parametri, stimati su dati di mercato, indipendenti dalle preferenze (opinioni probabilistiche “soggettive” e avversione al rischio) dell’impresa; la distribuzione naturale  $P$  è ottenuta estendendo il vettore  $a$  con parametri aggiuntivi  $b$ , che contengono informazioni sulle preferenze dell’impresa<sup>11</sup>.

**Coerenza tra SCR e Best Estimate.** Nel caso dei contratti non-hedgeable, si ha

$$e^{-y_1} Q^{(99,5)} [g(R_1) | R_0] = e^{-rT} Q^{(99,5)} \{E[f(R_T) | R_1] + \gamma [f(R_T) | R_1] | R_0\}$$

che pone una prima relazione tra SCR, Best Estimate e Risk Margin. Se si considera la v.a. perdita  $L$ , allora la Best Estimate è (utilizzando una dizione attuariale “tradizionale”) il valore attuale medio della perdita:

$$BE = E(L) = m$$

Il Solvency Capital Requirement, dunque, sarà dato dall’*unexpected loss*

$$SCR = q_{0,995} - m$$

ove  $q_p$  è il  $p$ -esimo percentile di  $L$ . L’SCR viene quindi ottenuto attraverso la stima di  $\hat{q}_{0,995}$  e di  $\hat{m}$ . Per un’approfondita discussione sulle misure di rischio “distribuzionali” si rimanda alla sottosezione 2.2.1.

Un possibile approccio è l’approccio per quozienti, secondo cui si pone

$$L = V_0 R$$

in cui  $V_0$  è una misura di volume, nota in 0, che si può porre pari alla BE  $\hat{m}$ ;  $R = \frac{L}{V_0}$  è invece interpretabile come “loss ratio”, stimata sulla base delle  $n$  osservazioni passate

$$R_i = \frac{L_i}{V_i}, \quad i = -1, -2, \dots, -n$$

### 4.3.3 Il Minimum Capital Requirement

L’articolo 128 della Direttiva prevede che

Gli Stati membri esigono che le imprese di assicurazione e di riassicurazione detengano fondi propri di base ammissibili tali da coprire il requisito patrimoniale minimo.

Dalla Direttiva si possono evincere alcuni chiari punti in merito al MCR:

<sup>11</sup> Ad esempio, nel modello Black-Scholes per la valutazione delle opzioni  $\hat{P}$  è una distribuzione lognormale con parametri  $a = (r, \sigma)$ ; per garantire coerenza, e quindi produrre valutazioni market-consistent, la distribuzione naturale  $P$  dev’essere anch’essa lognormale, con parametri  $(\mu, \sigma)$  (in questo caso  $b$  è dato da  $(\mu - r)$  e fornisce informazioni sull’*excess return* atteso dal contratto considerato rispetto al tasso “risk-free”).

- Facilità di calcolo: l'MCR è "calcolato in modo chiaro e semplice, al fine di garantire la possibilità di una revisione", in base a criteri differenti tra rami vita e non-vita; "la funzione lineare (...) utilizzata per calcolare il requisito patrimoniale minimo, è calibrata sul valore a rischio dei fondi propri di base dell'impresa di assicurazione o di riassicurazione con un livello di confidenza dell'85 % su un periodo di un anno"; con un limite assoluto *volume-based* differenziato per ramo d'esercizio.
- Significato: l'MCR "corrisponde ad un importo di fondi propri di base ammissibili al di sotto del quale i contraenti e i beneficiari sarebbero esposti ad un livello di rischio inaccettabile" (i.e. la Compagnia che dovesse non disporre di fondi propri sufficienti per coprire il MCR non può continuare ad esercitare l'attività assicurativa ed è sottoposta a revoca dell'autorizzazione<sup>12</sup>).

## 4.4 La Formula Standard

Pur lasciando aperte diverse perplessità dovute alla semplicità di calcolo e al fatto di essere, per definizione, una soluzione *one-size-fits-all* (calibrata su dati "medi" provenienti dall'intero mercato assicurativo europeo, e che quindi potrebbe non rispecchiare le peculiari caratteristiche della singola impresa), la formula standard è utile come utile benchmark da considerare accanto agli output dei modelli interni (per le imprese che ne hanno sviluppato uno), oltre che fondamentale per compagnie piccole per le quali sarebbe eccessivamente oneroso sviluppare un modello interno completo, e complicato avere una qualità dei dati sufficientemente alta da garantire la qualità del modello stesso.

### 4.4.1 Il calcolo dell'SCR

Il requisito patrimoniale di solvibilità può essere calcolato secondo una formula standard come la somma di (art. 103):

- Requisito patrimoniale di solvibilità di base ( $BSCR$ );
- Requisito patrimoniale per il rischio operativo ( $SCR_{op}$ );
- Aggiustamento per la capacità di assorbimento delle perdite derivante dalle riserve tecniche e dalle imposte differite ( $Adj$ ).

Di seguito si analizza ciascuno degli elementi alla base della formula

$$SCR = BSCR + SCR_{op} - Adj. \quad (4.6)$$

<sup>12</sup>L'art. 131 detta le disposizioni transitorie riguardanti i tempi entro cui le imprese dovranno adeguarsi al rispetto del requisito patrimoniale minimo, con un orizzonte ultimo pari al 31 ottobre 2013.

#### 4.4.2 La struttura modulare nel QIS5

Il requisito patrimoniale di solvibilità di base (*BSCR*) comprende dei moduli di rischio individuali, i quali, compilati con dati di input specifici, quantificano l'impatto di ciascuno dei seguenti rischi:

- il rischio di sottoscrizione per l'assicurazione non vita (premium/reserve risk e rischio catastrofale);
- il rischio di sottoscrizione per l'assicurazione vita (rischio biometrico - mortalità, longevità, disabilità-, rischio di riscatto, di spese, di revisione e catastrofale);
- il rischio di sottoscrizione per l'assicurazione malattia (rischi legati a *accident & health short term* e *workers compensation*, e a prodotti *health long term*);
- il rischio di mercato (interest rate, equity, property, currency, spread e concentration);
- il rischio di credito (legato al default di controparti finanziarie o riassicurative);
- il rischio per *intangible assets* (introdotto con il QIS5).

La quantificazione di tali rischi avviene, come visto, sulla base di una formula prefissata (factor o scenario based), in un opportuno orizzonte temporale (un anno), una appropriata misura di rischio (VaR) ed un elevato confidence level (99,5%).

Il rischio operativo, anch'esso considerato nel SCR, è previsto invece nel calcolo dell' $SCR_{op}$ .

#### 4.4.3 Il BSCR

Come mostra la ormai celebre immagine 4.4.3 in [CE-10], ciascun modulo è suddiviso in diverse sezioni, ognuna facente riferimento ad un rischio specifico, raggruppate in sottomoduli. Il QIS5 conferma l'approccio *bottom-up* del QIS4, secondo cui ogni sottomodulo fornisce come output il "proprio" SCR con un calcolo standardizzato "scenario based" (l'SCR è cioè calcolato "as the impact of a specified scenario on the net asset value of the undertaking (NAV)" [CE-10], ove il NAV è definito come la funzione perdita precedentemente considerata).

I diversi moduli sono calcolati mediante due differenti approcci:

- *approccio factor-based*: basato sull'applicazione di un fattore ad una misura dell'esposizione al rischio, i fattori sono calibrati per rappresentare le caratteristiche della coda della distribuzione della v.a. considerata (esempi dell'utilizzo di questo approccio sono il calcolo dei moduli relativi a Premium e Reserve Risk per il Non-Life);

- *approccio scenario-based*: basato sull’impatto di scenari avversi sulla posizione finanziaria dell’impresa prevede il ricalcolo di attività e passività a seguito del verificarsi dello scenario avverso e la stima della perdita associata al verificarsi dello scenario, in termini di NAV; gli scenari, definiti separatamente per ogni categoria di rischio, possono essere indicati dall’Autorità di vigilanza nazionale o identificati dall’impresa in funzione delle proprie caratteristiche (i moduli relativi al rischio di sottoscrizione del life, al rischio catastrofale per il Non-Life, all’Interest Rate per il Market Risk sono esempi di approccio scenario-based).

Analizzando la figura, procedendo da sinistra, il modulo riguardante il *rischio di mercato* è calcolato a partire dall’impatto di specifici scenari di market stress per ogni tipo di rischio di mercato (l’SCR è posto pari alla variazione del NAV), ad esempio un aumento del 2% dei tassi d’interesse a dieci anni, un crollo del 40% nei mercati azionari (si noti che nel QIS5 è stato eliminato il volatility stress test), una diminuzione del 25% nel valore degli immobili; il *rischio di default* è calcolato per ogni linea di business, e riguarda sia controparti riassicurative sia finanziarie, cui le imprese sono esposte attraverso la cartolarizzazione.

Il *rischio di sottoscrizione* per l’assicurazione non vita è determinato applicando fattori standard ai premi e alle riserve, separatamente per ogni ramo d’attività; esso è composto dai sottomoduli *premium risk* (il rischio che i premi pagati dagli assicurati non siano sufficienti a coprire spese e sinistri, i.e. combined ratio > 100%) e il *reserve risk*, cioè il rischio che le riserve tecniche siano insufficienti (i.e. rischio catastrofale). Per l’assicurazione vita si considera invece l’approccio scenario based ottenuto stressando i vari tipi di rischio studiati e studiandone l’impatto a livello di NAV; il QIS5 considera, ad esempio, una riduzione della mortalità del 20% (rispetto al 25% considerata dal QIS4), un aumento del 50% nei tassi di riscatto e un aumento dello 0,15% nella mortalità dell’anno successivo.

Per ciascuno dei rischi quantificabili si deve determinare, quindi, un Risk Capital e considerare, nell’attività finale di consolidamento che determina il livello complessivo di capitale da assorbire, l’effetto delle tecniche di attenuazione del rischio e delle correlazioni (con tutte le perplessità su questa forma di misura di dipendenza espresse in 2.4.2.1). Il BSCR è quindi calcolato come

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{ij} \times SCR_i \times SCR_j} + SCR_{intangibles} \quad (4.7)$$

in cui  $\rho_{ij}$  sono i coefficienti di correlazione della matrice scelti dal CEIOPS (nella 4.4.3 sono riportati i valori utilizzati nel QIS5)

#### 4.4.4 Il SCR per il rischio operativo

Il rischio operativo è definito in[CE-10] come

the risk of loss arising from inadequate or failed internal processes, or from personnel and systems, or from external events.

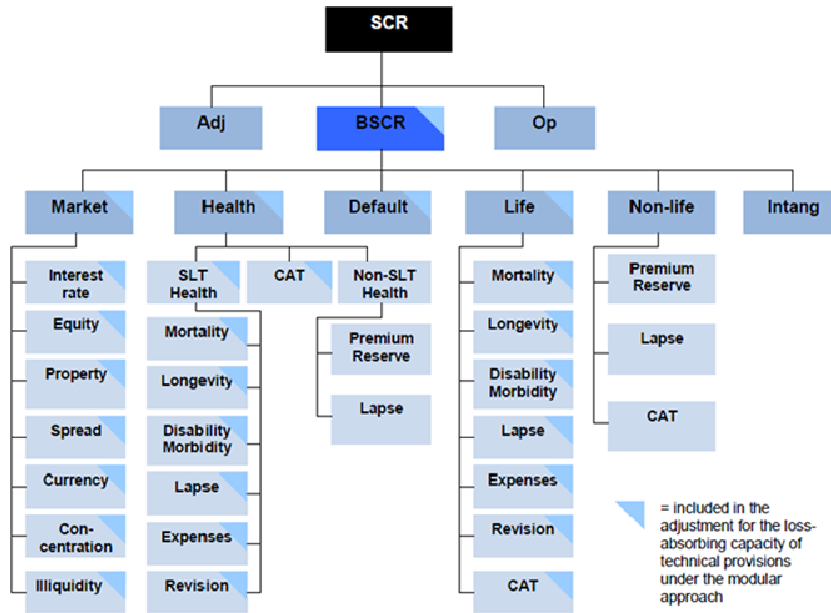


Figura 4.3: La struttura modulare dell'SCR secondo le technical specifications del QIS5

i \ j	Market	Default	Life	Health	Non-life
Market	1				
Default	0.25	1			
Life	0.25	0.25	1		
Health	0.25	0.25	0.25	1	
Non-life	0.25	0.5	0	0	1

Tabella 4.1: la matrice di correlazione utilizzata per il calcolo del BSCR nel QIS5

Include i rischi legali e tutti gli altri rischi che non sono considerati in alcuno degli altri moduli (per questo motivo, non include, invece, quelli legati a decisioni strategiche e quelli “reputazionali”). Il calcolo del requisito patrimoniale per il rischio operativo si determina in funzione del volume complessivo delle operazioni di assicurazione e di riassicurazione<sup>13</sup>; in particolare, il QIS5 indica che

$$SCR_{op} = \min \{0,3 \times BSCR; Op\} + 0,25Exp_{ul}$$

in cui:

$Op$  è il caricamento per il rischio operativo di base per tutte le operazioni assicurative nelle quali il rischio dell’investimento non è a carico dei contraenti (ad esempio, nel vita, nel caso delle polizze di ramo primo); è calcolato come il massimo tra una percentuale dei premi in portafoglio (una quota diversa per i rami vita diversi dal terzo, e per le polizze non life ed health) o delle riserve tecniche;

$Exp_{ul}$  è l’importo annuo delle spese sostenute per le operazioni assicurative in cui il rischio d’investimento è a carico dei contraenti.

Il QIS5 ha alzato le quote per il calcolo di tale caricamento, ma l’approccio scelto rimane *volume based*, fermo restando che il fatto stesso di tenere in conto il rischio operativo ha significato un ulteriore passo in avanti rispetto alla normativa Solvency I.

#### 4.4.5 L’aggiustamento per la capacità di assorbimento di perdite delle riserve tecniche e delle imposte differite

Tale aggiustamento [art. 108 della Direttiva]

riflette la compensazione potenziale di perdite inattese tramite una riduzione simultanea delle riserve tecniche o delle imposte differite o una combinazione delle due.

In particolare, si ha

$$Adj = Adj_{FDB} + Adj_{DT}$$

in cui  $Adj_{FDB}$  “tiene conto dell’effetto di attenuazione del rischio esercitato dalle future partecipazioni agli utili a carattere discrezionale dei contratti di assicurazione”, qualora si possa dimostrare che la riduzione di tali partecipazioni possa essere utilizzata per coprire perdite inattese; le *future discretionary benefits* (vedere 5.5.4.3) sono opzioni che prevedono la retrocessione di bonus agli acquirenti a condizione che si verifichino specifici eventi futuri, e si distingue tra *conditional FDB*, in cui gli eventi sono contrattualmente determinati, e *pure FDB*, che dipendono invece da delibere future discrezionali (con una valenza finanziaria simile per certi aspetti a quella dei dividendi azionari). In

<sup>13</sup>Come stabilisce l’art. 106 della Direttiva, questo è vero ad eccezione dei contratti nei quali il rischio d’investimento è a carico del contraente, nel qual caso si deve tenere conto delle spese annuali sostenute per tali obbligazioni.

questo secondo caso, una parte degli utili può essere utilizzata per finanziare eventuali perdite inattese, comportando un'attenuazione del rischio cui l'impresa è esposta.

Secondo le Technical Specifications del QIS5, alle compagnie viene richiesto il calcolo dei due aggiustamenti attraverso la “scenario equivalente” e l’“approccio modulare”; in entrambi i casi, l’aggiustamento per la presenza di FDB è definito come segue

$$Adj_{FDB} = -\min\{BSCR - nBSCR; FDB\}$$

Il  $BSCR$  è calcolato aggregando gli SCR lordi utilizzando le corrette matrici di correlazione, mentre  $FDB$  rappresenta il valore corrente dei futuri discretionary bonus; il  $nBSCR$ , nel caso dell’*approccio modulare*, costituisce i requisiti di capitale al netto delle attenuazioni per la presenza di partecipazioni agli utili; nel caso dello *scenario equivalente*, invece, esso viene calcolato come la riduzione, in termini di NAV, sotto l’ipotesi dello scenario equivalente, i.e. lo scenario in cui tutti i rischi coperti dalla standard formula si verificano contemporaneamente.

L’aggiustamento per la capacità di assorbimento delle imposte differite è definito dal valore assoluto della riduzione del valore delle imposte differite sotto l’ipotesi di perdita immediata dei fondi di base, perdita pari a

$$SCR_{shock} = BSCR + SCR_{op} - Adj_{FDB}$$

#### 4.4.6 Questioni in fase di discussione

La pubblicazione delle Technical Specifications del QIS5, avvenuta il 5 Luglio 2010, ha suscitato e ravvivato il dibattito su alcune scelte tecniche che comportano immediate ed importanti effetti sulla gestione strategica dell’impresa, intorno alle quali ancora non si è sviluppato un generale consensus e sono, quindi, ancora oggetto di discussione.

##### 4.4.6.1 Financial reporting

Persiste incertezza intorno al modo in cui Solvency II interagirà con gli International Financial Reporting Standards per quanto riguarda la registrazione contabile dei profitti. Il sistema di valutazione mark-to-market che pervade lo spirito della Direttiva è difficilmente conciliabile con le pratiche contabili correnti, basate sul concetto di “costo storico” (misure *book yield*); vi sono dunque aree di potenziale incoerenza tra Solvency II e IFRS, che potrebbero portare ad alcune difficoltà nella *governance* della compagnia:

- introduzione tardiva della fase 2 degli IFRS: lo IASB (International Accounting Standard Board) ed il FASB (Financial Accounting Standard Board) stanno sviluppando una “IFRS - fase 2”, un nuovo standard contabile internazionale basato sui principi di valutazione market consistent; tale disallineamento potrebbe portare risultati incongrui, calcolati con misure diverse e non comparabili, generando confusione anche da parte

	Implicazioni
Equivalenza riassicurativa	Compagnie europee possono usufruire della copertura riassicurativa offerta da imprese di quel paese, senza collaterale addizionale
Non-UE subsidiaries	Se un'impresa ha una subsidiary non-UE, può considerare quella BU sulla propria base locale per il calcolo dell'SCR di gruppo
Gruppi non-UE	Se un gruppo non-UE è "equivalente", allora può calcolare i requisiti di capitale su base locale, ma i calcoli stand alone relativi alle BU europee devono essere condotti in base alla Direttiva

Tabella 4.2: Implicazioni dell'equivalenza di paesi non UE secondo tre aspetti

degli investitori; tuttora, molte compagnie si stanno chiedendo se basare i propri schemi di ALM su valutazioni Solvency II-consistent oppure IFRS-consistent;

- la contabilità delle polizze vita tradizionali con partecipazione agli utili, contabilizzate secondo il principio del costo storico, rende possibile alle imprese di smorzare la volatilità di mercato quotidiana in pagamenti annuali fatti ai beneficiari; appare importante allora stabilire come rendere coerenti i bilanci market consistent con il modo in cui sono strutturati questi prodotti.

#### 4.4.6.2 Le equivalenze con altri sistemi normativi

Dato il fatto che molti gruppi assicurativi europei hanno dimensione internazionale, altra questione aperta è quella di come considerare le subsidiaries non risiedenti nell'Unione Europea. Come appare dalla tabella 4.4.6.2, la questione appare ancor più fondamentale qualora si consideri l'attività di riassicurazione ottenuta da parte di imprese di riassicurazione non domiciliate in Paesi UE. Perché un'impresa possa continuare ad utilizzare le regole locali, il regime regolamentare deve essere dichiarato "equivalente" a Solvency II, in base ad alcuni principi, come che il Paese terzo abbia un regime regolamentare pienamente risk-based (in modo tale che i requisiti di capitale Solvency II based non risultino significativamente più alti rispetto al calcolo in base alle regole locali) e che esistano accordi di mutuo riconoscimento. Il CEIOPS ha raccomandato che una piena equivalenza fosse riconosciuta, a questo livello, solo alle Isole Bermuda e alla Svizzera; è possibile, tuttavia, che le forti relazioni esistenti con il mercato USA porti la Commissione Europea a considerare l'ipotesi di *over-ruling* il CEIOPS, considerando equivalente anche il sistema in vigore negli Stati Uniti.

#### 4.4.6.3 Estrapolazione della struttura risk-free

Come accennato in 4.2.1, la Best Estimate (BE) è calcolata come il valore attuale atteso dei futuri cash-flows attualizzati utilizzando la curva dei tassi *risk-free* fornita dal CEIOPS.



Tutti gli studi di impatto quantitativo precedenti al QIS5 erano basati sull'uso della curva dei tassi offerti dai government bonds come appropriato tasso risk-free utilizzato per scontare i flussi di cassa futuri. Nel QIS4, in particolare, è stata utilizzata una curva dei tassi risk-free nel 2007, dunque in un periodo precedente al fallimento della banca d'investimento Lehman Brothers (15 settembre 2008).

Il quinto studio prevede invece l'utilizzo della curva dei tassi swap, anche in seguito alle recenti difficoltà incontrate da parte di alcuni governi nel garantire la qualità del proprio debito obbligazionario. La forma della curva da utilizzare è, inoltre, di grande importanza se si pensa alla diversa duration delle passività assicurative: le passività non-vita hanno tipicamente duration più breve, ed hanno una sensitività molto maggiore a tassi d'interesse a breve termine, mentre passività dei rami vita (ad esempio rendite vitalizie) sono di gran lunga più sensibili ai tassi a lungo termine<sup>14</sup>. La questione dell'opportuna curva di tassi risk-free da utilizzare è, insomma, tutt'altro che risolta.

Per quanto l'esperienza empirica ci abbia mostrato fino ad alcuni anni fa, i tassi swap tendono normalmente ad assumere valori più alti rispetto a quelli dei government bonds, riflettendo un maggiore rischio di credito. Se il tasso di sconto utilizzato dal QIS5 è più elevato, diminuisce il valore attuale delle passività future, e quindi anche il requisito di capitale che le imprese devono "accantonare" per garantire la propria solvibilità. Nel secondo trimestre del 2010, tuttavia, sui mercati sono stati osservati valori anomali, per cui in alcuni paesi (Italia, Spagna, ma anche Regno Unito e Francia) la curva dei tassi swap è dominata dalla yield curve dei government bonds, situazione in cui è attendibile che le imprese aumentino la propria domanda di titoli sovrani per replicare le proprie passività.

#### 4.4.6.4 Cenni sui fondi propri

La Direttiva introduce regole specifiche sui limiti e l'eligibilità del capitale disponibile, riflettendo la fragilità dei titoli strutturati osservata negli ultimi anni soprattutto nel settore finanziario (CAPO VI, Sezione 3).

I fondi propri sono costituiti dalla somma dei fondi propri di base e dei fondi propri accessori. I primi sono costituiti dall'eccedenza delle attività rispetto alle passività (al netto delle azioni proprie detenute dall'impresa) e dalle passività subordinate; i secondi consistono in altri fondi che possono essere richiamati per assorbire le perdite (come il capitale sociale non versato e non richiamato e le lettere di credito).

La Direttiva prevede che

Poiché non tutte le risorse finanziarie possono assorbire pienamente le perdite in caso di liquidazione e secondo il presupposto

---

<sup>14</sup>Come risultato di considerazioni analoghe, molti gruppi assicurativi, nel condurre i propri stress tests ed interest rate sensitivity analysis, hanno introdotto, oltre ai tradizionali shift paralleli della curva, anche scenari alternativi che ne variassero la forma o prevedessero, ad esempio, uno stress limitato ai tassi d'interesse a lungo o a breve periodo (cosiddetti *tilt scenarios*).

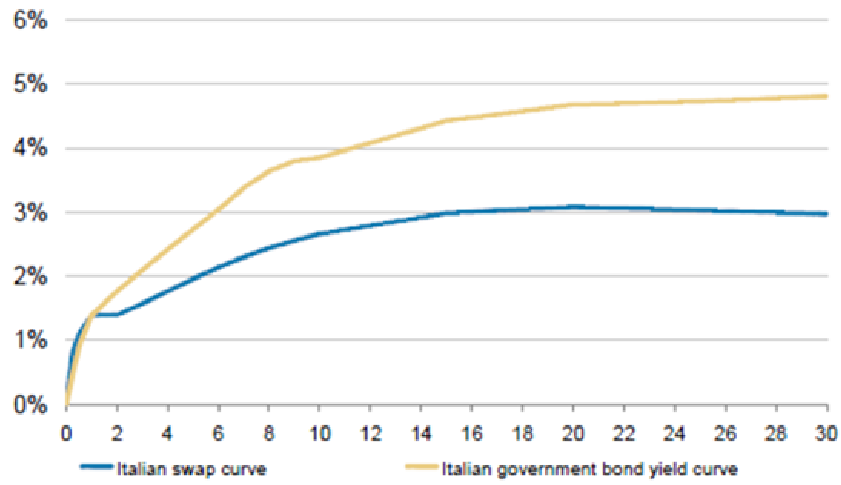


Figura 4.4: ITALIA. Tassi swap e government bond yield curve a confronto (Fonte: Bloomberg)

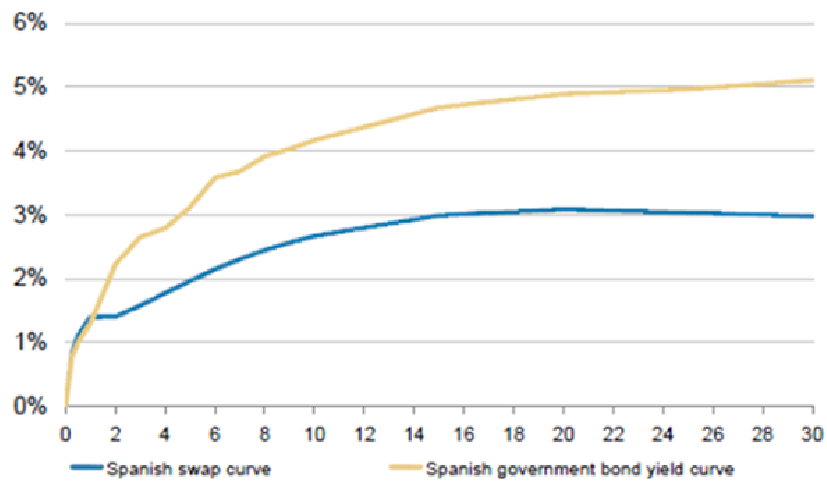


Figura 4.5: SPAGNA. Tassi swap e government bond yield curve a confronto (Fonte: Bloomberg)

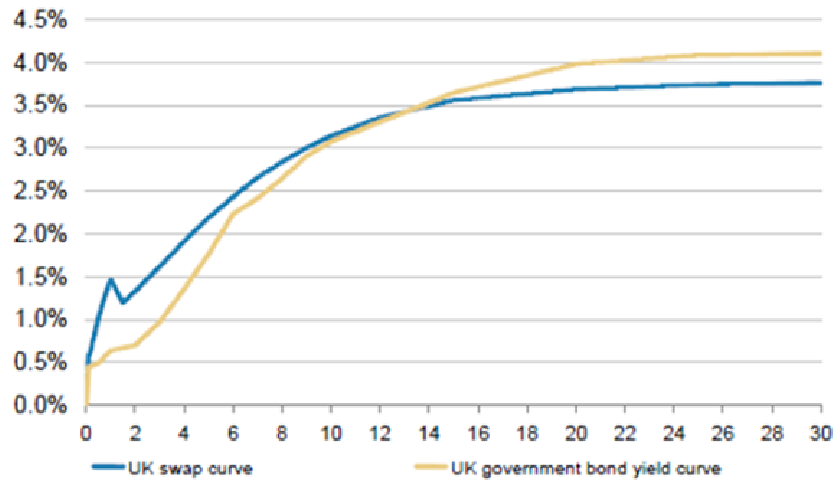


Figura 4.6: REGNO UNITO. Tassi swap e government bond yield curve a confronto (Fonte: Bloomberg)

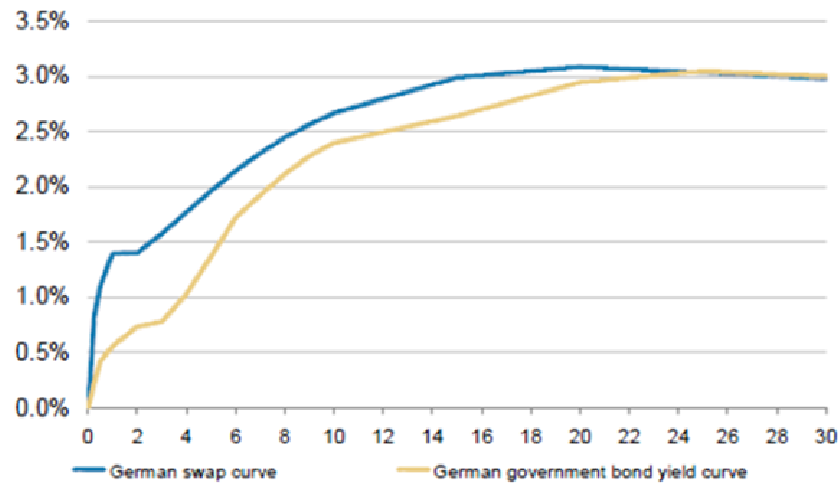


Figura 4.7: GERMANIA. Tassi swap e government bond yield curve a confronto (Fonte: Bloomberg)

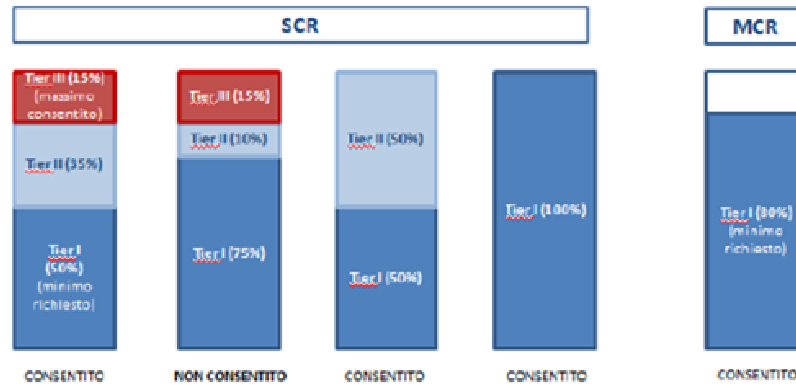


Figura 4.8: Alcuni esempi di come capitale di livello 1, 2 e 3 possa essere combinato per costituire il SCR e il MCR

della continuità aziendale, gli elementi dei fondi propri dovrebbero essere classificati in tre livelli conformemente a criteri di qualità

e che

le attività libere da qualsiasi impegno prevedibile sono disponibili per assorbire le perdite imputabili a fluttuazioni economiche sfavorevoli, nella prospettiva di continuità aziendale e in caso di liquidazione. Pertanto, il grosso dell'eccedenza delle attività rispetto alle passività (...) dovrebbe essere considerato capitale di elevata qualità (livello 1).

La figura mostra alcune delle combinazioni possibili di capitale di primo, secondo e terzo livello che possono o non possono essere utilizzate per coprire il SCR e il MCR; i principi che devono essere rispettati sono che il capitale accettabile per costituire il SCR sia costituito, almeno per il 50%, da capitale tier 1, al massimo per il 15% da capitale tier 3 e che la proporzione di capitale tier 1 sia maggiore della proporzione di capitale tier 2 (a sua volta maggiore del capitale tier 3).

I criteri per la classificazione dei fondi in uno dei tre livelli secondo il QIS5, intorno ai quali esiste però ancora un elevato livello di incertezza, sono indicati nella tabella (sono esplicitate le caratteristiche dei fondi di livello più alto)

#### 4.4.6.5 Il liquidity premium

La Commissione Europea ha proposto una metodologia standard (proposta in [CE-10]) per il calcolo del liquidity premium, che rappresenta una misura della scarsa liquidità delle attività tenute a copertura delle passività (e, quindi, una sorte di "aggravamento" delle attività richieste a copertura delle passività). Tale

Criteriono	Tier 1
Disponibilità permanente	Elemento immediatamente disponibile e richiamabile per assorbire perdite
Subordinazione	In caso di liquidazione, l'elemento è rimborsabile al possessore solo dopo che sono state onorate tutte le altre obbligazioni, incluse quelle nei confronti dei policyholders.
Durata	Titoli senza scadenza, o con almeno 10 anni di vita residua
Incentivi a rimborsare	Non vi è alcun incentivo a rimborsare l'importo nominale del titolo
Costi obbligatori di servizio	Assenza di spese fisse obbligatorie (possibilità di cancellare i cedole in caso di discesa sotto il SCR)
Assenza di gravami	Assenza di connessioni con altre transazioni o di altre restrizioni e garanzie

Tabella 4.3: Criteri per la classificazione dei fondi propri propri di ciascun livello

premio varia in base al paese considerato, in relazione alla sensitività osservata rispetto ai credit spread. Il premio aumenta al diminuire della liquidità del prodotto venduto (nel QIS5 si prescrive che sia pari al 100% per le rendite, al 75% per polizze with-profits, al 50% per altri prodotti con duration più breve. Alcune imprese hanno obiettato che questo premio potrebbe falsare l'attrattività relativa di alcuni prodotti rispetto ad altri.

#### 4.4.6.6 Trattamento del Value of Business in Force

I nuovi criteri di valutazione delle passività, essendo market consistent, eliminano gli elementi prudenziali impliciti nel calcolo delle riserve tecniche tradizionali (basate su basi tecniche del prim'ordine), porteranno ad un aumento del Value of Business in Force (VBIF, cioè il valore atteso dei profitti futuri generati da contratti in essere all'epoca di valutazione), di cui una definizione formale sarà poi fornita in 6.3.

La questione è se considerare il VBIF come capitale di primo livello (come avviene nel QIS5) o di terzo livello, e come trattare il VBIF generato dai premi futuri (*expected profits included in future premiums*, EPIFP). Una ricerca di Oliver Wyman e Morgan Stanley [OW-10] sostiene che l'EPIFP dovrebbe essere considerato parte del VBIF, in quanto se i premi futuri in-force dovessero non essere più ricevuti, allora anche le passività in-force dovrebbero essere ridotte (per la futura scadenza naturale dei contatti assicurativi); inoltre, il VBIF è sottoposto agli *stress tests* prodotti per la determinazione dei requisiti di capitale come ogni altra attività e passività, e quindi dovrebbe essere incluso nel Net Asset Value dell'impresa. Qualora l'EPIFP dovesse essere "retrocesso" a capitale di livello 3, come da proposta del CEIOPS (sostenendo che esso "non ha capacità di assorbimento delle perdite"), e in assenza di un opportuno aggiustamento del calcolo dell'SCR, questo potrebbe avere un forte impatto sulla solvibilità delle

imprese europee, dal momento che l'EPIFP ammonta approssimativamente a €90mld nell'Unione Europea [OW-10].

#### **4.4.6.7 Altre questioni aperte**

Esistono altre questioni ancora aperte, che volutamente non sono state trattate in questa sede ma meriterebbero un'attenzione particolare, come l'esclusione dei fondi pensione dall'oggetto di Solvency II (intorno a cui il dibattito è stato avviato con la pubblicazione, da parte della Commissione Europea, del Green Paper sulle pensioni lo scorso 7 Luglio 2010) o la tassazione (basata, tuttora, sui rendimenti calcolati secondo la normativa Solvency I.

## Capitolo 5

# I modelli interni delle imprese di assicurazione

Il presente capitolo è dedicato ai modelli interni, con i quali le imprese possono scegliere di sostituire la formula standard per il calcolo dei requisiti di capitale. Ne vengono indicate definizione, finalità, caratteristiche e modalità di approvazione. Nelle prime tre sezioni, ne vengono indicati definizione, finalità, caratteristiche e modalità di approvazione; vengono poi ripercorsi alcuni dei concetti salienti affrontati nei capitoli precedenti (*in primis*, i meccanismi di valutazione di attività e passività) e introdotto il concetto e le tipologie di stress test.

### 5.1 Own Risk and Solvency Assessment

Per introdurre il concetto di modello interno occorre tener presente che la gestione dei rischi in un'impresa di assicurazione e di riassicurazione, secondo l'art. 44 della Direttiva (*Own Risk and Solvency Assessment*), consiste nel disporre di un sistema efficace di gestione dei rischi, che comprende le strategie, i processi e le procedure di segnalazione necessarie per individuare, misurare, monitorare, gestire e segnalare, su base continuativa, i rischi a livello individuale ed aggregato ai quali sono o potrebbero essere esposte e le relative interdipendenze. Il sistema deve essere

efficace e perfettamente integrato nella struttura organizzativa e nei processi decisionali dell'impresa di assicurazione o di riassicurazione, con adeguata considerazione delle persone che dirigono effettivamente l'impresa o rivestono altre funzioni fondamentali.

Le grandi macroaree di gestione del rischio individuate dalla direttiva sono le seguenti:

- sottoscrizione e costituzione di riserve;

- gestione delle attività e delle passività;
- investimenti, in particolare derivati e impegni simili;
- gestione dei rischi di liquidità e di concentrazione;
- gestione dei rischi operativi;
- riassicurazione e altre tecniche di attenuazione del rischio.

Tutte queste attività sono concentrate e analizzate nei modelli interni, nel caso delle compagnie che ne abbiano sviluppato uno, che sia parziale o completo; in questo caso, la funzione di gestione dei rischi dell'impresa si occupa anche di:

- costruire e applicare il modello interno;
- testare e convalidare il modello interno;
- documentare il modello interno ed eventuali modifiche successive ad esso apportate;
- analizzare il funzionamento del modello interno e produrre relazioni sintetiche in materia;
- informare l'organo amministrativo, direttivo o di vigilanza in merito ai risultati del funzionamento del modello interno, proponendo i settori passibili di miglioramenti e aggiornando tale organo in merito agli sforzi fatti per migliorare le carenze individuate in precedenza.

Tra le motivazioni principali che spingono un'impresa ad elaborare un internal model, oltre alla possibilità di avere una visione chiara e realistica del profilo di rischio della propria attività, vi è anche quella di poter calcolare requisiti di capitale più appropriati e, spesso, inferiori a quelli calcolati con la standard formula; questa, in quanto tale, è una soluzione *one-size-fits-all*, calibrata su dati "medi" provenienti dall'intero mercato assicurativo europeo, e potrebbe non rispecchiare la peculiarità della singola impresa.

## 5.2 Definizione e finalità

L'International Association of Insurance Supervisors [IAIS-08] definisce il modello interno come

a risk measurement system developed by an insurer to analyze its overall risk position, to quantify risks and to determine the economic capital required to meet those risks.

Lo sviluppo del modello interno è la risposta più completa alla richiesta dell'*Own Risk and Solvency Assessment* (ORSA), descritto nell'articolo 44 della Direttiva. L'ORSA prevede la misurazione dei valori e dei rischi attraverso un processo che innervi tutti i centri aziendali di decisione, garantendo coerenza tra le decisioni



“locali” e il vincolo generale sul rischio “sostenibile” [CdFM-09a]; che permetta di controllare, quindi, l’effetto sulla solvibilità d’impresa di fattori esterni “non controllabili” (andamento dei mercati finanziari e dei sinistri) e di progettare strategie di risposta (di *risk mitigation* 5.5.4.1). Il modello interno è dunque la “formalizzazione” di un processo che ha come risultato ultimo una

risk based evaluation of the whole firm, based on management  
chosen risk appetite and level of capital required to run the business[FSA-08];

le prime esperienze in Italia di applicazione delle logiche di valutazione market consistent di attività e passività (in uno schema di Asset Liability Management) per il controllo dell’esposizione ai rischi e la tutela della profittabilità del business assicurativo risalgono al 1993 [DeFM-94] e riguardano i rami vita (più precisamente alcune gestioni separate di ramo 1).

In estrema sintesi, il modello interno ha due obiettivi principali:

1. calcolo market consistent del Solvency Capital Requirement *su misura* per il profilo della singola impresa;
2. raccolta di informazioni importanti per la gestione del business.

La trattazione di questi aspetti è approfondita nella sottosezione 5.3.3, a proposito degli *use test*.

### 5.2.1 Modelli interni completi e parziali

L’articolo 100 della Direttiva dispone che il requisito patrimoniale di solvibilità (che le imprese di assicurazione e di riassicurazione devono coprire detenendo fondi propri) è calcolato utilizzando la formula standard oppure un modello interno. Oltre che essere utilizzato come alternativa per una valutazione più verosimile della rischiosità globale, un modello interno costituisce un sistema complesso, in grado di integrarsi nella gestione dell’impresa.

L’articolo 112 specifica che il modello interno approvato dall’Autorità di vigilanza può essere totale o parziale. Un modello parziale può riguardare uno o più moduli di rischio, o sottomoduli, del SCR, il rischio operativo oppure l’aggiustamento per la capacità di assorbimento di perdite delle riserve tecniche e delle imposte differite; occorre, tuttavia, motivare l’ambito limitato di applicazione e garantire che sia possibile la sua piena integrazione nella formula standard.

## 5.3 Caratteristiche

Questa sezione è dedicata all’analisi di alcune caratteristiche proprie dei modelli interni, ovvero i sistemi di *governance*, l’attenzione alla qualità dei dati, il ruolo cardine rivestito dal sistema tecnologico e organizzativo dell’impresa, e l’importanza di un continuo monitoraggio dell’effettivo utilizzo del modello stesso.

### 5.3.1 La *governance* del modello interno

In generale, la *governance* del modello interno riguarda l'insieme di accortezze che permettono l'adeguata rappresentazione del profilo di rischio dell'impresa e assicurano l'utilizzo di tecniche, ipotesi e metodi appropriati per la misurazione dei rischi in maniera coerente con le caratteristiche del mercato e dei contratti osservate al momento della valutazione (cioè definiscano formalmente la "posizione" dell'impresa, utilizzando un linguaggio proprio del Capitolo 2); una *governance* efficiente, infatti, e garantita con continuità, riduce il *model risk*, cioè il rischio che le tecniche di valutazione utilizzate siano inadeguate.

Come prevede l'articolo 116 della Direttiva,

l'organo amministrativo, direttivo o di vigilanza ha la responsabilità di porre in essere sistemi che garantiscano che il modello interno funzioni adeguatamente su base continuativa.

L'articolo 44 assegna alla funzione di risk management l' "ownership" del modello.

Strumento di base per una *governance* efficiente è la definizione operativa di un "feedback communication loop", che consenta il collegamento tempestivo, continuo e capillare tra il "corpo direzionale" dell'impresa (*high level governance*) e la funzione di risk management (*detailed governance*)<sup>1</sup>. Tale loop deve coinvolgere anche l'internal audit, la funzione di compliance e la funzione attuariale [CE-09c].

#### 5.3.1.1 La *governance* di alto livello

Il CEIOPS specifica [CE-09c] che le responsabilità dell' "administrative or management body" possono essere sintetizzati nei seguenti 8 punti:

1. approvazione della richiesta (nei confronti dell'Autorità di vigilanza) di utilizzazione del modello interno per il calcolo dell'SCR, e a approvazione di eventuali successive richieste per cambiamenti del modello;

<sup>1</sup>Il seguente rappresenta un esempio di collegamento tra funzione di risk management e top management, preso da un'esperienza propria del mercato inglese.

Le analisi di sensitività, differenziate per fattore di rischio e per linea di business con un livello di dettaglio simile a quello richiesto nel calcolo del SCR dal QIS5, sono condotte su base trimestrale a livello di ogni business unit. Ogni BU riporta, ad esempio, l'effetto di determinate variazioni (stress, determinati dall'autorità di vigilanza o a livello di gruppo) nel valore dei tassi d'interesse, delle azioni, dei credit spread e di altri risk drivers. Le sensitivities vengono poi aggregate a livello di gruppo con modelli basati generalmente su funzioni copula dai team che compongono la funzione di risk management (market risk, credit risk, economic capital team etc.).

I risultati, allo stato attuale, devono essere pubblicati solo con cadenza semestrale (salvo richieste straordinarie di stress test, come quello richiesto dall'FSA alle compagnie inglesi nel Giugno 2010 o dall'ISVAP a quelle italiane nell'estate 2009). Su base trimestrale, tuttavia, le funzioni di risk management devono riportare i propri risultati a livello di ALCO (Asset Liability Committee), ovvero organi senior di incontro tra top management e risk managers, in cui decisioni strategiche e gestionali si fondono con la presa di coscienza della posizione di rischio del gruppo.

2. disegno del “sistema di governance” del modello interno (in termini di ruoli e responsabilità);
3. controllo dell’ “adeguatezza” del modello interno (in termini di struttura e modalità operative) rispetto al profilo di rischio e all’operatività dell’impresa;
4. controllo strategico sull’evoluzione tecnica del modello;
5. monitoraggio dell’adeguatezza delle risorse (umane, tecniche e tecnologiche) per lo sviluppo, il controllo e la manutenzione del modello;
6. controllo della compliance del modello rispetto ai requisiti definiti per l’approvazione (e comunicazione all’autorità di vigilanza degli eventuali disallineamenti); in caso di esito negativo, definizione di un piano di ripristino della compliance;
7. garanzia sull’adeguatezza delle “independent reviews” sulla validazione del modello (cfr. 5.4.2);
8. tutela dell’adeguatezza dei risultati prodotti dal modello, rispetto alle finalità di utilizzazione.

#### 5.3.1.2 La detailed governance

Nello stesso consultation paper, il CEIOPS prescrive che le responsabilità della funzione di risk management riguardano le seguenti 7 attività principali, complementari e, più precisamente, prerequisiti rispetto alle funzione della governance *high level*:

- Progettazione e realizzazione del modello interno (in coordinamento con l’*administrative or management body*);
- processi di test e di validazione;
- redazione e aggiornamento della documentazione;
- verifica della compliance rispetto ai requisiti per l’approvazione del modello;
- individuazione delle aree di miglioramento (a livello tecnico e tecnologico) del modello;
- stretta collaborazione con gli utilizzatori del modello interno (soprattutto nei casi in cui il modello preveda un’aggregazione di dati provenienti da *Business Units* diverse);
- attivazione di un *communication loop* con la funzione attuariale, per garantire la coerenza tecnica.

### 5.3.2 Qualità dei dati

Condizione necessaria per l'elaborazione di un modello interno di qualità<sup>2</sup> è la qualità dei dati utilizzati. I dati disponibili devono essere caratterizzati da granularità (fino ai singoli contratti, le cui caratteristiche devono essere immagazzinate secondo criteri standard), che consentano controlli su più livelli. I file di input devono essere standardizzati, in modo che l'uniformità ne faciliti l'aggregazione. La standardizzazione consente, peraltro, una agevolazione del completamento "dall'esterno" della base informativa, dando una precisa misura delle carenze informative, e quindi delle approssimazioni. Il controllo della qualità è organizzato su almeno tre fasi:

1. fase di immagazzinamento dei dati nel database del modello interno (controlli ortografici, di completezza informativa etc.);
2. fase di calcolo;
3. fase di osservazione e consolidamento degli output (parziali o definitivi) dei calcoli eseguiti.

Riguardo alla prima fase, se, da una parte, imprese più piccole hanno difficoltà a raggiungere gli standard di qualità statistica che sarebbe necessaria per il trattamento dei propri dati, i grandi gruppi internazionali si trovano nella difficile situazione di dover gestire e aggregare enormi quantità di dati provenienti da business units diverse, raccolti in database con formati eterogenei e secondo logiche diverse.

Correzioni in una delle tre fasi indicate portano a ricominciare l'attività dal livello precedente. I dati di mercato, a loro volta, devono essere registrati in maniera automatica e tempestiva, in modo da assicurare l'aggiornamento del modello utilizzato.

I dati utilizzati devono essere caratterizzati da "adeguatezza"<sup>3</sup>, "completezza", "accuratezza", "tempestività", "coerenza", "trasparenza" e "pertinenza", secondo le indicazioni di [ISV-08, 09/138/CE], in particolare dell'articolo 121 della Direttiva sugli standard di qualità statistica.

L'aggiornamento dei dati deve avvenire in maniera coerente con il ritmo di utilizzazione del modello interno, dettato dallo *use test*.

### 5.3.3 Lo *use test*

L'articolo 120 della Direttiva definisce lo "use test" come la dimostrazione, da parte delle imprese,

che il modello interno è ampiamente utilizzato e svolge un ruolo importante nel loro sistema di governance (...), in particolare:

<sup>2</sup>Si tenga presente che molte delle caratteristiche di un modello interno riportate sono ispirate allo studio del modello IDS (Insurance Data System, cfr. [CdFM-09a]).

<sup>3</sup>Per una definizione "culturale" dell'adeguatezza di un modello interno si rimanda al paragrafo conclusivo 7.3)

## CAPITOLO 5. I MODELLI INTERNI DELLE IMPRESE DI ASSICURAZIONE 67

- a) nel loro sistema di gestione dei rischi (...) e nei loro processi decisionali;
- b) nei loro processi di valutazione e di allocazione del capitale economico e di solvibilità.

Come accennato nella sezione 5.2, il modello interno è utilizzato nella gestione del business assicurativo *day-by-day*, oltre che per le funzioni di quantitative risk management. In particolare, in [CdFM-09b] sono indicate alcune precise funzioni caratterizzanti del modello interno, alcune delle quali saranno trattate specificatamente nel prosieguo del lavoro:

1. misurazione quantitativa dei rischi;
2. calcolo dell'SCR;
3. valutazione delle azioni di mitigazione del rischio 5.5.4.1;
4. valutazione delle management actions 5.5.4;
5. controllo delle technical provisions (riconciliazione);
6. sviluppo di nuovi prodotti (progettazione e tariffazione);
7. definizione e controllo dei piani di riassicurazione;
8. gestione del capitale (capital allocation 2.4.3) e politiche di underwriting (ad esempio, per linea di business);
9. misurazione e controllo del valore (VBiF) e del valore creato (VBiF della nuova produzione), dell'embedded value e della redditività risk-adjusted 6.4.4;
10. attività di budgeting e di pianificazione strategica;
11. definizione e controllo delle esposizioni e dei limiti (risk appetite);
12. definizione e controllo delle politiche di incentivazione (risk-oriented);
13. decisioni di investimento ("strategic, tactical and operational decisions");
14. produzione time-efficient di report (con diversi livelli di dettaglio a seconda della finalità e dei destinatari);
15. valutazioni per trasferimenti di portafoglio e per M&A (*mergers and acquisitions*).

L'"ampiezza" di utilizzo risiede nel fatto che "la valutazione interna del rischio e della solvibilità è parte integrante della strategia operativa ed è presa sistematicamente in considerazione nelle decisioni strategiche dell'impresa" (art. 43).

La frequenza di utilizzo garantisce che le imprese eseguano la valutazione in maniera tempestiva, "dopo qualsiasi variazione significativa del loro profilo di rischio"; il modello interno, dunque, deve soddisfare accortezze, oltre che tecniche, organizzative e tecnologiche.

### 5.3.4 L'infrastruttura organizzativa e informatica

**L'infrastruttura organizzativa.** Un modello interno efficace è composto da un sistema di calcolo (insiemi di dati e algoritmi), da uno schema di organizzazione (che definisca ruoli, responsabilità e tempi) e dal linguaggio d'impresa (un vocabolario formale e preciso che dia senso operativo alle formule e favorisca la comunicazione efficiente all'interno e la *disclosure* verso l'esterno); dev'essere, quindi, “a combination of software, methods, processes and skills” [CE-09a], in cui si incontrino competenze informatiche, attuariali, finanziarie e gestionali.

**L'infrastruttura informatica.** Altro elemento fondamentale a garanzia della qualità di un modello interno è costituito dalla sua infrastruttura informatica. Il CEIOPS suggerisce esplicitamente che le responsabilità della funzione IT non sono limitate alle soluzioni a livello di software e hardware, ma includono anche i processi per il controllo della performance e degli standard [CE-09a]. Le accortezze tecniche che devono essere soddisfatte dall'infrastruttura informatica (ad esempio quelle di poter gestire ingenti quantità di dati e tecniche di simulazione Monte Carlo) rendono sconsigliabile l'utilizzo dei “tradizionali” fogli elettronici, facilmente utilizzabili anche da non esperti ma che comportano un elevato rischio operativo, nonché una scarsa trasparenza di modalità d'utilizzo. E' auspicabile, invece, “automatizzare” i calcoli per ottenere una struttura chiara, veloce e, quindi, efficiente.

## 5.4 Consolidamento, validazione e approvazione

Riprendendo alcuni dei concetti introdotti nel corso del secondo capitolo, il processo di risk management di un'impresa d'assicurazione può essere sintetizzato, con evidenti semplificazioni, come segue: il portafoglio viene analizzato a livello di singoli rischi secondo un'impostazione ALM e ne viene valutata la “rischiosità” complessiva attraverso logiche di aggregazione che si basano sulla misura di dipendenza dei rischi scelta (cfr. 2.4); il capitale viene poi redistribuito alle singole aree del business secondo determinati principi di *capital allocation*, fornendo indicazioni sugli *individual capital assessment* (ICA, per utilizzare un'espressione cara alla cultura attuariale britannica), su cui si basano i calcoli degli indici di redditività della gestione.

### 5.4.1 Il processo di consolidamento

Come già analizzato a proposito della formula standard in 4.4.3 e già accennato dal punto di vista formale in 2.4.3, il CEIOPS propone un consolidamento “standard” dei rischi utilizzando la tecnica *bottom up* (aggregazione a strati utilizzando lo strumento delle correlazioni lineari).

Nella costruzione di un modello interno le dipendenze tra le componenti del vettore casuale di fattori di rischio  $(X_1, \dots, X_n)$  vengono modellate utilizzando matrici di correlazioni lineari (sul modello di quella fornita dal CEIOPS, magari

con valori aggravati quando i dati non soddisfano determinati requisiti di qualità) oppure funzioni copula; se le prime comportano limitazioni teoriche pesanti, l'utilizzo delle seconde implica ancora rilevanti problemi di stima.

Il processo di consolidamento è alla base della definizione del capitale economico dell'impresa, cioè il capitale da essa assorbito. Il capitale viene poi "ridistribuito", allocato, alle diverse linee di business del portafoglio (o Business Units se si parla di Gruppi assicurativi), utilizzando una specifica tecnica di capital allocation (cfr. 2.4.3).

### 5.4.2 Standard di convalida

Il processo di validazione del modello interno da parte dell'autorità di vigilanza è regolato dall'articolo 124 della Direttiva. *In primis*, l'internal model dev'essere approvato all'interno dell'impresa stessa, attraverso un monitoraggio continuo del suo buon funzionamento, dell'adeguatezza dei suoi parametri ed ipotesi e della sua coerenza con l'evidenza empirica; le distribuzioni di probabilità utilizzate devono essere coerenti non soltanto con l'esperienza passata, ma anche con tutti i nuovi dati rilevanti. Inoltre, il Legislatore prevede che "la procedura di convalida del modello interno include un'analisi della sua stabilità ed in particolare la verifica della sensibilità delle sue risultanze a variazioni delle principali ipotesi sottostanti. Essa include altresì la valutazione dell'accuratezza, della completezza e dell'adeguatezza dei dati utilizzati nel modello interno".

La politica di validazione deve essere formalizzata e applicata con un *validation tool*, cioè un insieme di tecniche di verifica (sia con test quantitativi sia con criteri qualitativi) dell'appropriatezza e dell'affidabilità del modello interno.

Si evince, dunque, che a differenza della normativa precedente Solvency II pone la responsabilità della politica di validazione non sull'autorità di vigilanza, ma sull'impresa stessa, in particolare sulla funzione di risk management, seppur con il coinvolgimento dell'alta direzione.

E' necessario tener presente, infine, che i processi di validazione devono essere separati ed indipendenti dai processi aziendali di calcolo e di misurazione dei rischi dell'impresa: l'attività di controllo non può coinvolgere parte degli organi operativi dell'impresa che sono sottoposti a controllo [ISV-08].

In sintesi, l'iter che porta alla validazione e all'approvazione del modello interno è il seguente<sup>4</sup>:

1. Preparazione e discussione interna (*scoping and planning meetings*, preparazione del *pre-application pack* dell'impresa, discussione dei requisiti);
2. completamento del *self-assessment* e proposta di approvazione nei confronti dell'autorità di vigilanza;
3. rapporti di aggiornamento mensili e riunioni trimestrali finalizzati alla messa a punto del modello;
4. desk based review e onsite assessment da parte dell'autorità di vigilanza;

<sup>4</sup>Questa procedura è quella proposta dall'autorità inglese [FSA-10]

5. Raggiungimento della *milestone* e richiesta formale di approvazione del modello.

### 5.4.3 *Disclosure* e procedura di approvazione

Come previsto dall'articolo 125 della Direttiva, la documentazione prodotta dall'impresa deve fornire un panorama completo e preciso del modello interno, in merito a metodi e tecniche di valutazione, algoritmi utilizzati, basi di dati, calibrazione dei parametri, struttura informatica e significato dei dati di input e dei risultati. Il CEIOPS [CE-09c] suggerisce che tale documentazione costituisca un vero *audit trail*, una sorta di “libro d'istruzioni” per l'utilizzo e la “navigabilità” del modello.

In particolare, è opportuno che eventuali evoluzioni e cambiamenti in merito di metodi e tecniche siano motivati dettagliatamente; le indicazioni sulla calibrazione dei parametri devono essere tale da poter permettere la *replicazione* delle stime ottenute; i metodi e le tecniche utilizzate devono essere definite individuando chiaramente, per citare alcuni esempi, i fattori di rischio considerati, il loro impatto sul NAV, le modalità di formalizzazione dei flussi di cassa generati dai contratti e i criteri di approssimazione.

La procedura di approvazione, cronologicamente successiva a quella di validazione, spetta all'autorità di vigilanza che esige una dettagliata documentazione di tutte le procedure di validazione, che chiarisca con precisione ruoli e responsabilità principali.<sup>5</sup> Per avviare tale procedura, l'impresa deve certificare che il modello interno sia stato già testato per un periodo “ragionevolmente” lungo. Le informazioni che l'impresa deve fornire nella richiesta di approvazione del modello interno sono sintetizzabili in 5 blocchi principali:

- finalità dell'applicazione del modello: individuazione dei fattori di rischio trattati quantitativamente nel modello e prova dell'adeguatezza della rappresentazione dell'effettivo profilo di rischio dell'impresa;
- processo di risk management e profilo di rischio: il modello deve essere inserito in un sistema di risk management adeguato ed efficiente, in grado di rispettare i livelli di *risk appetite*<sup>6</sup> dichiarati;
- caratteristiche tecniche: devono essere esplicitate le ipotesi alla base degli algoritmi di calcolo, le relazioni tra le variabili significative e le scelte metodologiche operate;
- precisazioni sul capital requirement (in confronto al livello calcolato con la formula standard);
- governance del modello: devono essere fornite informazioni dettagliate in merito alle caratteristiche della struttura del modello in relazione a quanto già descritto nella sottosezione 5.3.1.

<sup>5</sup>Nel caso dell'approvazione di modelli interni parziali sono previste disposizioni specifiche (art.113), come già accennato in 5.2.1

<sup>6</sup>Una misura di risk appetite molto utilizzata già da alcuni anni nei paesi anglosassoni è, ad esempio, dato dal rapporto tra *available economic capital* e *required economic capital*.



## 5.5 Stress test e management actions

### 5.5.1 Gli stress test

L'ISVAP ha reso gli stress test obbligatori con il Regolamento 20 [ISV-08]: alle imprese è richiesta la capacità di effettuare “stress test standardizzati sulla base di fattori di rischio e parametri prefissati dall'ISVAP” (comma 5), basandoli “su modelli deterministici o stocastici” (comma 2). Dall'impostazione dell'autorità di vigilanza italiana, seppur va riconosciuta l'importanza di introdurre il concetto di stress test a livello di normativa, sorgono alcune perplessità rilevanti:

1. Permettere di basare lo stress test su un modello deterministico, significa accettare che le imprese non considerino la distribuzione di probabilità del fattore di rischio stressato, e, di fatto, ne “annullino” l'incertezza;
2. gli stress standardizzati consistono nell'applicare parametri prefissati dall'ISVAP, come nel caso dell' “Indagine conoscitiva stress test” emanata con la circolare del Luglio 2010[ISV-09]: le simulazioni degli shock “vanno effettuate sul bilancio individuale”, misurandone le eventuali perdite “in termini di effetti sul margine di solvibilità (...) separatamente per il settore vita e danni”; gli shock consistevano, ad esempio, in shift paralleli della curva dei tassi d'interesse e in svalutazioni (30%) del valore dei titoli azionari in portafoglio per quanto riguarda gli attivi, in un incremento del 10% dell'aliquota di eliminazione per riscatto, ipotesi di stress per quanto riguarda il rendimento prevedibile delle gestioni separate (nel vita) e un aumento dei loss ratios (nei rami danni); questo tipo di stress tests considerano alcuni fattori di rischio ma non ne colgono minimamente altri (ad esempio, la volatilità dei tassi d'interesse: nel modello CIR si possono stimare più set di parametri aventi un buon fitting con la struttura osservata ma presentano livelli di volatilità diversi, producendo valori sempre differenti).

In proposito è utile richiamare alle considerazioni fatte in merito agli approcci scenario-based per la determinazione del SCR in 4.3.1.

#### 5.5.1.1 Stress test stocastici

Uno stress test efficace e coerente con la struttura del modello interno va realizzato con un modello stocastico, secondo l'impostazione della teoria delle decisioni in condizioni di incertezza.

Definito e calibrato il modello sui dati di mercato, lo stress test stocastico viene effettuato studiando le code delle distribuzioni di probabilità dei fattori rilevanti per la gestione, in modo da ottenere risultati rilevanti per effettuare una decisione “in quel certo stato di incertezza che c'è tra tutte le ipotesi possibili”[deFi-70] nell'ambito del modello prescelto. Gli stress test deterministici, invece, sono analisi della sensitività del modello ai parametri utilizzati per la misurazione del rischio, esercizi utili per conoscere meglio il modello utilizzato

e interpretare la natura del rischio che si sta studiando, ma non fornisce indicazioni operative, poichè ai valori dei parametri non è attribuito alcuna misura di probabilità.

### 5.5.2 Backtesting

Il backtesting è il “processo che si esplica nel confrontare le previsioni del modello con l’esperienza osservata” [CE-09c]. Pur avendo alle spalle una lunga storia soprattutto nel settore bancario, occorre tener presente tutte le cautele di cui occorre armarsi quando si confrontano gli output di un modello con l’esperienza sensibile, già riportate nella nota 10. De Finetti [deFi-70] aggiunge che si può parlare di

’errori’ di previsione soltanto qualora ci si accorgesse di manchevolezze che si sarebbero potute e dovute avvertire già prima, nello stato di informazione originario.

Riprendendo la formalizzazione utilizzata in [McNFE05], un esempio di backtesting è fornito considerando che, per definizione [cfr. Appendice A], il  $VaR$  di una v.a. perdita che ha distribuzione continua è tale che

$$P(L_{t+h} > VaR_{\alpha}^{t,h}) = 1 - \alpha$$

Dunque se il  $VaR$  è stato stimato con un modello adeguato, allora l’indicatore delle violazioni delle stime  $VaR$

$$\hat{I}_{t+h}^{(h)} = I_{\{L_{t+h}^{(h)} > \hat{VaR}_{\alpha}^{t,h}\}}$$

dovrebbe seguire una distribuzione di v.a. Bernoulli con probabilità di successo (cioè violazione) “vicina” a  $(1 - \alpha)$ .

### 5.5.3 Reverse stress testing e long term business plan nell’esperienza britannica

L’FSA definisce il reverse stress test come

a risk management tool requiring firms to identify a range of adverse circumstances which would cause a failure of their business model and assess the likelihood that such events could crystallise. [FSA-09]

Consiste quindi nell’identificazione di scenari estremi che renderebbero l’impresa (o il gruppo) insolvente, con lo scopo di comprendere quali future management actions potrebbero essere intraprese per reagire alla crisi di liquidità o di solvibilità della compagnia.

Il reverse stress test consiste nella ricerca delle verosimili vettori dei valori dei parametri “stressati” al massimo compatibile con la solvibilità dell’impresa, cioè

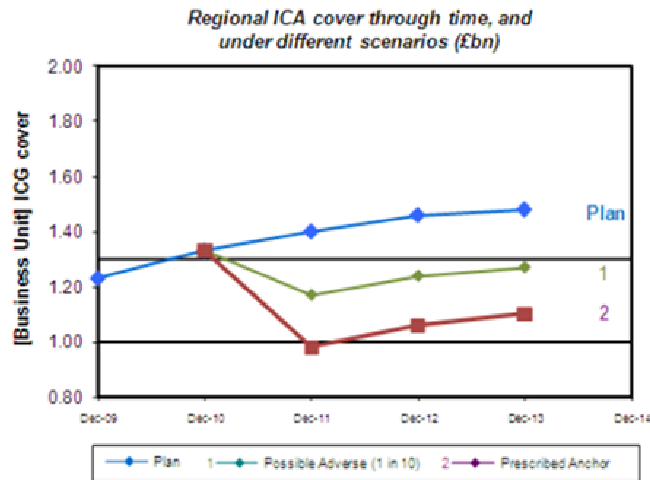


Figura 5.1: Un esempio di proiezione dell'ICA cover secondo due scenari avversi (uno definito dalla singola BU, l'altro determinato a livello centrale)

si propone di trovare, interpretando la solvibilità dell'impresa come differenza tra capitale economico disponibile e richiesto,

$$X = (X_1, \dots, X_n) \text{ t.c. } REC(X) \geq AEC(X)$$

Lo "scenario testing", invece, mostra la solidità della situazione patrimoniale e di liquidità della compagnia, sotto determinati scenari avversi (in figura 5.1 e' indicato un esempio di output proveniente da scenario stress test utilizzato per l'elaborazione di un piano strategico triennale<sup>7</sup>).

L'autorità di vigilanza inglese ha pubblicato nel Dicembre 2009 un Policy Statement [FSA-09] dedicato alle richieste in merito alle tipologie di stress test che le imprese avrebbero dovuto compiere come parte integrante dei propri piani di gestione triennali. Molte imprese stanno conducendo almeno due diverse modalità di stress test, uno basato su uno "storm scenario" standard su base storica (con valori ispirati a quanto effettivamente osservato in occasione delle turbolenze dei mercati finanziari del 2008/2009) e l'altro impostato come reverse stress test, lasciato alla particolarità del profilo della singola impresa.

Lo stesso Consultation Paper 56 [CE-09c] propone l'utilizzo degli stress tests per l'elaborazione del piano di business di lungo periodo, perchè l'impresa possa verificare e monitorare se la propria attività di sottoscrizione dei rischi rispetta il *risk appetite* definito a livello d'alta direzione.

<sup>7</sup>L'ICA cover è il rapporto tra capitale economico disponibile (AEC) e capitale economico richiesto (REC). Nel sistema inglese, quando l'AEC scende al di sotto dell'IGC (Individual Capital Guidance) interviene la FSA l'impresa deve presentare un piano strategico di rientro.

### 5.5.4 *Le risk mitigation techniques e le future management actions*

#### 5.5.4.1 Risk mitigation techniques

La Direttiva definisce le risk mitigation techniques come quelle tecniche “which enable insurance and reinsurance undertakings to transfer part or all their risks to another party”. I rischi indotti dalle azioni di mitigazione del rischio sono detti *secondary risk* [CE-09c].

Per il CEIOPS le tecniche di mitigazione del rischio [DE-09d] sono

both traditional and non traditional risk transfer instruments on the asset side (eg. financial hedging) and on the liability side (eg. reinsurance).

Esse possono comportare sia strategie statiche (ad esempio *hedge and forget*) sia strategie dinamiche (ad esempio di *dynamic delta hedging*).

#### 5.5.4.2 *Management actions*

L'articolo 121 della Direttiva (punto 8) stabilisce che

le imprese di assicurazione e di riassicurazione possono tenere conto, nel loro modello interno, delle future misure di gestione che prevedono ragionevolmente di attuare in circostanze specifiche.

Risulta evidente che qualsiasi stress test (soprattutto quelli *scenario based*) per essere coerente dovrebbe tenere in considerazione anche l'impatto delle future misure di gestione (*future management actions*) che la direzione potrebbe prendere in risposta agli shock simulati<sup>8</sup>.

La normativa richiede che le future misure di gestione siano [CE-09e]:

- oggettive (esistano “some clear trigger points and algorithms showing when and how management actions have assumed to apply”);
- realistiche e verificabili:

assumed management actions should be consistent with the (re)insurance undertakings current principles and practices unless there is sufficient current evidence that the insurer will change its practice

- a seconda che si interpreti i “current principles and practice” come propri della situazione di mercato al momento della valutazione o della situazione di stress, le future management actions si dicono *ordinarie* o *straordinarie*.

---

<sup>8</sup>Si noti che le strategie di hedging dinamico sono qualificate come future management action, pur essendo “currently in place”.

### 5.5.4.3 Future discretionary benefits e modello interno

Un esempio di risk mitigation technique è fornito dalla *risk reduction for profit sharing*, con riferimento alle polizze rivalutabili con minimo garantito. La mitigazione è ottenuta includendo in modo implicito nelle polizze opzioni call vendute agli assicurati (garanzie implicite); essa è conseguenza della presenza di *Future Discretionary Benefits* (FDB). FDB agganciate a eventi futuri osservati, contrattualmente determinati, sono denominati *conditional FDB*, altrimenti si parla di *Pure FDB*. I primi sono interpretabili come payoff delle opzioni call implicite nelle polizze: il loro valore market-consistent è il prezzo corrente  $C$  di queste opzioni.

La riserva stocastica, cioè il valore market-consistent complessivo delle prestazioni originate dal contratto, è data da

$$V_t = G_t + C_t$$

dove  $G_t$  è la componente garantita delle prestazioni valutata in  $t$ .

La riduzione del rischio deriva dal fatto che la sensitivity del prezzo della componente opzionale  $C$  ai principali fattori di rischio ha segno opposto alla sensitivity del prezzo della componente garantita  $G$ .

Si noti che le opzioni implicite in queste tipologie di polizza sono “scritte” su un sottostante che è sotto il parziale controllo dell’impresa (la “gestione separata”), attraverso le management actions (cioè le strategie di gestione degli asset).

Un buon modello interno dovrebbe dunque considerare management actions e tecniche di mitigazione del rischio definendoli in modo parametrico, attraverso un’alterazione dei parametri utilizzati nella valutazione della posizione dell’impresa, a livello di:

- modifica delle caratteristiche proprie dei mandati di gestione del portafoglio di attivi (composizione, livelli di volatilità tollerabili, duration della componente obbligazionaria, “periodo di rigiro” del portafoglio sono le leve principali su cui può agire la direzione);
- inserimento di contratti di copertura (ad esempio opzioni put su titoli azionari e contratti *interest rate swap* per coprire il rischio di tasso d’interesse);
- variando i coefficienti di retrocessione del rendimento nelle polizze rivalutabili;
- cambiamento dei parametri utilizzati nel modello delle spese;
- alterazione dei parametri caratteristici della politica di riassicurazione (passiva).

#### 5.5.4.4 SCR lordo e netto

L'SCR netto è ottenuto includendo nel calcolo delle variazioni del NAV (quando l'SCR lordo è definito in funzione di esso) tutte le risk mitigation techniques, di cui al 5.5.4.1, e le future management actions consentite. Tuttavia la Direttiva richiede una misurazione esplicita della “loss-absorbing capacity of technical provisions”, rendendo necessario il calcolo dell'SCR lordo, cioè senza considerare gli effetti del trasferimento del rischio. Dal confronto dei due livelli di SCR si possono dedurre informazioni sulla struttura dei contratti (entità della reduction of profit sharing) e delle strategie di gestione (politica di trasferimento del rischio, qualità delle management actions) utili sia per l'autorità di controllo sia per l'impresa stessa. Dal punto di vista tecnico per calcolare l'SCR lordo è necessario costruire un “portafoglio equivalente” che sia non profit-sharing.

## Capitolo 6

# Un modello di valutazione “Solvency II compliant”

L'ultimo capitolo è dedicato alla definizione e all'analisi di un modello “Solvency II compliant”, cioè di un modello che traduca nella realtà di una specifica polizza i principi analizzati nel corso del presente lavoro, applicando l'impostazione di Solvency II e delle nuove logiche di calcolo in un'analisi di tipo *profit test*.

In particolare, viene specificato un modello di mercato utilizzato per la formalizzazione e valutazione market-consistent di polizze vita del ramo primo, rivalutabili con minimo garantito, percorrendo uno studio [DeF-10] presentato per l'Istituto Italiano degli Attuari. A partire dalla definizione del tipo di polizza, ne viene calcolato il valore intrinseco, la scomposizione *call* e *put*, vengono mostrate alcune analisi di sensitività a diverse caratteristiche contrattuali e circostanze di mercato.

Il capitolo si conclude con un accenno alle misure di redditività, in cui vengono ripresi concetti menzionati nell'Introduzione.

### 6.1 Il profit test di una polizza rivalutabile con minimo garantito

Il profit test è la valutazione economica delle polizze che l'impresa di assicurazione può emettere con una determinata tariffa. La valutazione è effettuata con riferimento al momento della decorrenza ed ha quindi come oggetto la tariffa.

Il profit test di una tariffa si basa su un “progetto” di produzione futura e i suoi risultati dipendono dai “valori caratteristici” della polizza, che sono sintetizzabili in:

- valori contrattuali (tariffa, tipologia degli assicurati, altri parametri contrattuali);

- valutazioni sui principali fattori di rischio, quali mortalità (longevità), ipotesi “comportamentali” (ad esempio sui riscatti), costi e situazione di mercato.

Come già visto nei primi capitoli,

nell’accezione attuariale tradizionale, il termine “valutazione” denota il calcolo di valori attuali (a tasso deterministico) attesi (in senso demografico) di importi futuri e aleatori, relativi alle prestazioni (...)

generati dal contratto [Pi-07]. Secondo l’impostazione di Solvency II, invece, la “valutazione” è market-consistent, cioè il valore di una passività è dato dal prezzo di scambio della posizione sul mercato [cfr. Capitolo 3].

### 6.1.1 Flussi di cassa e tariffa

**Flussi di cassa rilevanti.** Per definire formalmente una polizza è necessario individuarne una tariffa, gli assicurati e i parametri contrattuali. L’assicurato è definito da alcuni caratteri, quali l’età, il sesso e lo stato di salute. I parametri contrattuali sono, ad esempio, la durata  $m$  del contratto assicurativo, l’eventuale differimento  $d$ , il numero di premi pattuiti  $n$ , l’ammontare del premio iniziale  $Z_0$  e la misura di reversibilità  $j$ .

Una polizza è caratterizzata da 4 flussi di cassa:

- i premi (flussi in entrata)  $(+\tilde{Z})$ ;
- le prestazioni assicurate (flussi in uscita), in cui occorre considerare anche i riscatti  $(-\tilde{Y})$ ;
- i costi contrattualizzati (i costi delle provvigioni, per delega gestionale, per servizi in outsourcing);
- i costi attribuiti (costi di amministrazione, gestione e acquisizione).

I flussi di cassa sono espressi da vettori le cui componenti sono funzione di eventi aleatori, come morte (sopravvivenza) dell’assicurato, riscatto del contratto (ipotesi comportamentali) e numeri aleatori, come il rendimento del fondo a cui sono (eventualmente) indicizzati premi e prestazioni.

**Tariffa** La tariffa è l’insieme delle regole (traducibili in funzioni) con le quali vengono calcolati i flussi di cassa dei premi e delle prestazioni generati da una polizza

Le funzioni che occorre definire sono:

1. forma delle prestazioni, che dipende dal tipo di polizza (mista, temporanea caso morte, rendita temporanea differita etc.) e dalle caratteristiche del fondo di riferimento (la cosiddetta “gestione separata”), in base al quale avviene la rivalutazione;



2. modalità di pagamento dei premi (premio unico, premi ricorrenti, premi periodici.);
3. tipologia di indicizzazione delle prestazioni e dei premi (rivalutabile);
4. funzione di caricamento;
5. funzione di riscatto.

Per procedere al calcolo è necessario assumere opportune ipotesi, che sono denominate basi tecniche attuariali, e richiedono un’ampia e granulare (nel senso definito in 5.3.2) base dati in merito a:

- Tavole di mortalità: le frequenze di mortalità osservate nel portafoglio dell’impresa vengono rappresentate in rapporto alle frequenze di mortalità registrate nella popolazione italiana; le analisi vengono condotte a livello di impresa, di tipologia di polizza e di gruppo ministeriale, e sono realizzate dall’attuario interno, revisionate dall’attuario incaricato vita e utilizzate per il pricing dei nuovi prodotti e per le negoziazioni dei trattati di riassicurazione.
- Eventi di portafoglio: con frequenza mensile vengono controllati i rapporti tra capitali riscattati e capitali assicurati, e tra premi pagati e premi attesi; l’attuario analizza le frequenze di riscatto e di sospensione del pagamento dei premi (statistiche che possono essere utilizzate anche per valutare la capacità della rete di vendita a gestire gli eventi di portafoglio e le correlazioni di queste con le azioni commerciali intraprese dalla compagnia).
- Costi: ad ogni testa assicurata sono attribuiti indici di costo operativo definiti dal management dell’impresa, che sono utilizzati come basi tecniche per la definizione dei caricamenti delle nuove tariffe, per l’analisi di profit test e per la verifica della sufficienza delle riserve per spese future (*Liability Adequacy Test*).

### 6.1.2 Il meccanismo di rivalutazione

In questa sottosezione verrà considerata una polizza mista a premio unico.

Si consideri una polizza a premio unico  $X_0$  in cui il capitale iniziale sia pari a  $C_0$ . Il capitale assicurato, relativo al premio unico versato, nell’anno  $T$ , con  $T > 0$ , è pari a

$$C_T = C_0 \prod_{k=1}^T (1 + \rho_k) \quad (6.1)$$

in cui il fattore di rivalutazione aleatorio è

$$\phi(0, T) = \prod_{k=1}^T (1 + \rho_k) \quad (6.2)$$

$$\rho_k = \frac{\max\{\min\{\beta * I_k; I_k - \eta\} - i; \delta^c\}}{1 + i} \quad (6.3)$$

dove  $\beta$  è il coefficiente di retrocessione,  $\eta$  la quota minima trattenuta,  $\delta^c$  la rivalutazione minima garantita cliquet (definita oltre il tasso tecnico  $i$ ) e  $I_k$  il rendimento della gestione separata (il “fondo”  $F$ ).

E’ evidente, dunque, che il meccanismo di rivalutazione include opzioni implicite nelle polizze, cui già si è accennato a proposito dei *future discretionary benefits*, come un caso particolare di risk mitigation technique 5.5.4.3. La polizza, dal punto di vista dell’assicurato, può essere vista come (e può essere replicata da<sup>1</sup>):

- una posizione composta da un investimento “rischioso” nel fondo  $F$  e da un’opzione put protettiva;
- una posizione composta da un investimento “certo” (*fixed income*) e da un’opzione call (che garantisce l’extra-rendimento);
- in generale, una posizione che genera guaranteed benefits più future discretionary benefits (come definiti in 5.5.4.3).

La polizza rivalutabile con minimo garantito può essere vista, quindi, come un contratto strutturato<sup>2</sup>, con sottostante il rendimento del fondo.

### 6.1.3 La valutazione delle opzioni implicite

Nell’impostazione attuariale tradizionale, la presenza di opzioni finanziarie nelle polizze non è considerata: la valutazione della riserva è effettuata nell’ipotesi che il valore dell’opzione di minimo rendimento sia costantemente nullo, cioè vada *out of the money* (i.e. al titolare della polizza non conviene esercitare l’opzione). Le imprese risultano così pesantemente esposte al rischio finanziario (rischio che i rendimenti dei propri fondi non siano sufficienti a coprire le garanzie contrattuali offerte agli assicurati).

Le opzioni implicite in una polizza rivalutabile con minimo garantito hanno un costo che dipende dal meccanismo di rivalutazione (la regola di calcolo del

<sup>1</sup>Il concetto della “replicazione” di una polizza con titoli scambiabili sui mercati finanziari è un concetto importante, oltre che per la valutazione della passività in ottica market consistent (come visto in 4.3.1), anche per elaborare le migliori strategie di copertura della posizione (*hedging*).

<sup>2</sup>Il valore di mercato, secondo il modello stocastico di mercato, degli impegni della compagnia relativi ad una determinata passività è chiamata *riserva stocastica*, ed è interpretabile come il costo degli impegni netti dell’impresa. Essa è espressa come

$$V_t = V(t, \tilde{Y}) - V(t, \tilde{X}) \quad (6.4)$$

cioè la differenza tra il valore corrente coerente con il mercato (*fair value*, tipico di contratti il cui valore non è direttamente osservabile sul mercato) dei flussi di entrata e dei flussi di uscita futuri, secondo le basi tecniche attuariali considerate.

Nel caso considerato, la riserva stocastica è scomponibile tra una parte garantita e una parte opzionale. Per una trattazione appropriata della scomposizione put e call della riserva stocastica, si rimanda a [DeFM-09].

payoff) e dalle caratteristiche del bene sottostante su cui è scritta l’opzione. Per la corretta valutazione della polizza, dunque, occorre definire il mandato di gestione, che influenza direttamente il valore del sottostante (il fondo).

Il rendimento del fondo è definito come

$$I_k = \frac{F_k - F_{k-1}}{F_{k-1}}$$

E’ importante tener presente che il rendimento del fondo è definito con “regola contabile”, quindi non “a valori di mercato” ma “a costo storico” (*book value*). Segue che se i titoli non vengono movimentati le plusvalenze o le minusvalenze, che riflettono l’aumento o la diminuzione di valore del fondo, non vengono realizzate (rimangono implicite); l’impresa ha quindi la possibilità di “controllare” il rendimento del fondo attraverso un’attenta strategia di gestione delle plus e minusvalenze (*unrealised capital gains, UCGs, e unrealised capital losses, UCLs*). Di conseguenza, nella definizione del mandato di gestione sarebbe opportuno specificare anche tale strategia<sup>3</sup>; si verifica, inoltre, uno sfasamento temporale tra rendimento del fondo (contabile) e rendimento di mercato.

Ipotizzando che il fondo sottostante sia composto da una componente azionaria e da una componente obbligazionaria (si trascura, ad esempio, la componente immobiliare), il valore del fondo (l’ “underlying”) può essere descritto come

$$F_t = \alpha_S S_t + (1 - \alpha_S) W_t \quad (6.5)$$

in cui  $S_t$  è un indice di capitalizzazione azionario,  $W_t$  un indice di capitalizzazione obbligazionaria,  $\alpha_S$  la quota azionaria. Per precisare il mandato di gestione, allora, occorre definire:

- la componente azionaria  $\alpha_S$ ;
- la volatilità della parte azionaria,  $\sigma$ ;
- la duration della parte obbligazionaria,  $D$ , da cui dipende l’ampiezza dell’intervallo di “rigiro” del portafoglio, cioè il periodo di tempo entro il quale occorre aggiornare la *duration*<sup>4</sup> del portafoglio obbligazionario per riportarla al livello obiettivo.

<sup>3</sup>Queste osservazioni sono valide nel caso di polizze rivalutabili del ramo 1; non è vero lo stesso per le polizze in cui il rischio d’investimento è a carico dell’assicurato, cioè le polizze index-linked o unit-linked. In questo caso la prestazione è legata, ad esempio, alla performance di un fondo d’investimento (non ad una gestione separata, che peraltro è sempre caratterizzata da criteri di prudenza e da una maggioritaria componente obbligazionaria); segue che l’impresa non può influire sul rendimento della gestione attraverso la strategia di realizzazione delle plus-minus valenze.

<sup>4</sup>La *duration di Macauley* di un’obbligazione è interpretabile come la sensitività del suo prezzo al tasso d’interesse  $r$ ,  $D = \frac{\partial W}{\partial r}$ . In generale, la duration di un bond è la sua durata media finanziaria (intuitivamente, all’aumentare dell’orizzonte temporale medio in cui avviene il pagamento, aumenta l’impatto che ha un cambiamento dei tassi d’interesse sul valore dell’obbligazione). Per una discussione formale appropriata sull’argomento, si rimanda a [CdFM-05a].

## 6.2 Il modello di mercato

Per valutare in maniera market consistent (*fair valuation*) una posizione di titoli rischiosi occorre servirsi di un modello che catturi la legge di evoluzione di tante fonti d’incertezza quante quelle che influenzano il valore dei singoli assets (e liabilities, in un’ottica ALM). Generalmente il modello è definito sotto le ipotesi di perfezione del mercato, in particolare:

- mercato aperto con continuità;
- esclusione di arbitraggi non rischiosi;
- vendite allo scoperto consentite;
- divisibilità infinita dei titoli;
- assenza di costi di transazione;
- presenza di agenti razionali (massimizzatori di profitto) e *price takers*.

In questa sede, dopo aver definito un modello bivariato coerente con la tipologia di contratto che si sta analizzando (ispirato alla trattazione in [CdFM-09a]), ci si concentrerà sul modello per il rischio di tasso d’interesse.

### 6.2.1 Modelli bivariati

Nel caso di un fondo composto da contratti *Interest Rate Sensitive* (IRSE, ad esempio obbligazioni) e titoli azionari, le fonti di incertezza sono il rischio di tasso d’interesse e il rischio azionario; occorre dunque costruire un modello continuo diffusivo bivariato, utilizzando

1. il modello di Cox, Ingersoll, Ross (CIR) per il rischio di tasso d’interesse, che catturi la dinamica dello spot rate  $r_t$

$$dr_t = f^r(r, t)dt + g^r(r, t)dZ_t^r \quad (6.6)$$

con il coefficiente di drift definito come

$$f^r(r, t) = \alpha(\gamma - r_t)$$

( $\alpha$  è il coefficiente di richiamo,  $\gamma$  il tasso di lungo periodo), e coefficiente di diffusione

$$g^r(r, t) = \rho\sqrt{r}$$

Questo modello ipotizza che la distribuzione del tasso d’interesse spot di chi-quadro non centrato, e dà luogo ad un prezzo di mercato<sup>5</sup> del rischio di tasso pari a

$$q(r_t, t) = \frac{\pi\sqrt{r_t}}{\rho}$$

---

<sup>5</sup>Per un approfondimento teorico delle tecniche di valutazione utilizzate in questa sottosezione si veda [DeFM-09].

2. il modello di Black e Scholes per i prezzi azionari

$$dS_t = f^S(r, t)dt + \sigma S_t dZ_t^S \quad (6.7)$$

con

$$f^S(r, t) = \mu S_t$$

e

$$g^S(S, t) = \sigma S_t$$

Il modello B-S ipotizza una distribuzione di  $S_t$  lognormale

$$S_t \sim LN \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau, \sigma \sqrt{\tau} \right]$$

e un prezzo di mercato del rischio azionario pari a

$$q(S_t, t) = \frac{\mu - r_t}{\sigma}$$

I due processi sono correlati

$$Cov [dZ_t^r; dZ_t^S] = \rho^{rS} dt = \eta dt$$

ove  $\eta = \rho^{rS}$  è il coefficiente di correlazione istantanea.

Il modello di CIR, proposto originariamente nel 1985, è un modello *mean reverting square root*, e presenta il vantaggio di mantenere significatività su orizzonti temporali molto lunghi (in riferimento a polizze assicurative di lunga durata, come le rendite), condizione necessaria per garantire coerenza al modello utilizzato. Il modello a due fattori di Hull e White (generalizzazione del modello di Vasicek - modello *Extended Vasicek*) ha l'inconveniente di poter incorrere, per scadenze molte lunghe, a valori dei tassi negativi.

Sotto l'ipotesi di perfezione del mercato, sulla base dell'argomentazione di hedging, si ottiene che il prezzo  $V$  (il valore della riserva stocastica di una polizza) deve soddisfare la seguente equazione differenziale alle derivate parziali di tipo parabolico:

$$\frac{\delta V}{\delta t} + rS \frac{\delta V}{\delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} + [\alpha(\gamma - r) + \pi r] \frac{\delta V}{\delta r} + \rho^{rS} \sigma S \rho \sqrt{r} \frac{\delta^2 V}{\delta r \delta S} + \frac{1}{2} \rho^2 r \frac{\delta^2 V}{\delta r^2} = rV$$

in cui i drift naturali  $r_t$  ed  $S_t$  possono essere sostituiti dai drift aggiustati per il rischio  $\alpha(\gamma - r_t) + \pi r_t$  e  $r_t S_t$ .

Si dimostra ([DeFM-09]) che il valore della soluzione dell'equazione generale di valutazione può essere rappresentata in forma integrale o di aspettativa; in particolare, il valore in 0 di un generico fattore di rivalutazione aleatorio (per come definito in 6.2) è

$$u(0, T) = V(0, \phi(0, T)) = E_0 \left[ \phi(0, T) e^{-\int_0^T r(\tau) d\tau} \right] \quad (6.8)$$

cioè l’aspettativa condizionata, calcolata in ambiente risk neutral, del pay-off a scadenza, scontato mediante un fattore di sconto stocastico. Questo risultato è utilizzato come punto di partenza per tecniche di pricing basate su simulazioni “Monte Carlo” (vedere Appendice B; per dettagli sulle logiche di calcolo alla base della simulazione Monte Carlo, si rimanda a [CdFM-06]).

### 6.2.2 Sulla volatilità

Per quanto riguarda il rischio azionario, il parametro di riferimento è la volatilità  $\sigma$ ; questa può essere calcolata secondo due criteri diversi: la stima su serie storica (come semplice standard deviation dei prezzi osservati, misura statistica della loro variabilità) o il calcolo della volatilità implicita (nei prezzi delle opzioni scritte sull’indice azionario considerato, osservati al momento della valutazione). Il CEIOPS ha più volte suggerito che le volatilità implicite sono maggiormente appropriate per valutazioni di tipo *market-consistent*, perchè riflettono l’effettivo grado di rischio dei prodotti sottostanti percepito dal mercato; d’altronde esse risentono di effetti economico-finanziari di natura ciclica (tendono ad essere più alte nei periodi di crisi, più basse nei periodi di stabilità, come osservato in occasione delle recenti turbolenze sui mercati finanziari); questo provoca forti conseguenze sul valore delle opzioni implicite nelle polizze oggetto di analisi, dal momento che i valori di put e call potrebbero aumentare sensibilmente in momenti di crisi. Le volatilità ottenute su base storica, invece, non riflettono le condizioni correnti del mercato, ma si basano su orizzonti temporali del passato piuttosto lunghi e si caratterizzano per un buon livello di stabilità.

### 6.2.3 Il modello CIR++

**Specificazioni del modello.** Come visto nei paragrafi precedenti, condizione necessaria per l’elaborazione di qualunque *fair valuation* di un’operazione assicurativa è la costruzione di un modello stocastico di mercato che definisca una teoria generale per la struttura per scadenza dei tassi d’interesse in maniera coerente con i dati di mercato disponibili al momento della valutazione.

Il modello utilizzato nello studio oggetto di analisi è il CIR++, un’estensione con shift deterministico del modello CIR, che permette un migliore adeguamento con i tassi osservati sul mercato. Il modello CIR++ è definito nel tempo continuo ed è caratterizzato da un’unica fonte d’incertezza, lo spot rate  $r_t$ , che assume la dinamica

$$r(t) = x(t) + \phi(t)$$

in cui  $x(t)$  segue la dinamica caratteristica del modello CIR, cioè è un processo stocastico *mean reverting square root*

$$dx(t) = \tilde{\alpha}[\tilde{\gamma} - x(t)] dt + \rho\sqrt{x(t)}d\tilde{Z}(t)$$

e  $\phi$  è una funzione deterministica di  $t$ .

$\tilde{Z}$  è un processo di Wiener rispetto alla misura di probabilità risk-neutral  $Q$  e  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\gamma}$  e  $\rho$  sono parametri positivi, con condizione  $2\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} \geq \rho^2$ , aggiustati per il

rischio<sup>6</sup>. I parametri  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\gamma}$  e  $\rho$  e la funzione  $\phi$  sono scelti in modo che la struttura per scadenza dei tassi d'interesse prodotta dal modello coincida esattamente con la struttura osservata.

Poichè il processo  $\{x(t)\}$  è strettamente positivo (per definizione), il processo  $\{r(t)\}$  è certamente positivo a condizione che  $\forall t, \phi(t) \geq 0$ ; come  $x(t)$ , anche  $r(t)$  ha distribuzione di probabilità di tipo chi-quadro non centrata.

la dinamica di  $r(t)$  avrà la forma

$$dr(t) = \tilde{\alpha} \left[ \tilde{\gamma} + \phi(t) + \frac{1}{\tilde{\alpha}} \phi'(t) - r(t) \right] dt + \rho \sqrt{r(t) - \phi(t)} d\tilde{Z}t \quad (6.9)$$

Nel modello è possibile ricavare soluzioni in forma chiusa per il prezzo di zero-coupon bond (ZCB) e per alcuni derivati su tasso d'interesse (ad esempio, gli *Interest Rate Swap plain vanilla*); il prezzo in  $t$  di uno ZCB unitario con scadenza in  $s > t$  è dato da

$$v(t, s) = v_x(t, s)v_\phi(t, s) \quad (6.10)$$

in cui il prezzo di dello ZCB nel caso che  $\forall t \phi(t) = 0$ , cioè  $r(t) = x(t)$  è

$$v_x(t, s) = A(s - t)e^{-x(t)B(s-t)}$$

e la correzione dovuta alla presenza della funzione  $\phi$  è

$$v_\phi(t, s) = e^{-\int_t^s \phi(u) du}$$

Dalla 6.10 segue che l'intensità di rendimento a scadenza si decompone nella somma di due specifiche funzioni, l'intensità del modello CIR e una correzione dovuta a  $\phi(t)$ :

$$h(t, s) = -\frac{1}{s-t} \log [v(t, s)] = h_x(t, s) + h_\phi(t, s)$$

in cui le due funzioni sono

$$h_x(t, s) = -\frac{1}{s-t} \log [v_x(t, s)], \quad h_\phi(t, s) = -\frac{1}{s-t} \log [v_\phi(t, s)]$$

<sup>6</sup>La misura di probabilità risk-neutral  $Q$  è ottenuta dalla misura naturale  $P$  ipotizzando che il prezzo di mercato del rischio sia

$$q(t, r) = \pi \frac{\sqrt{r - \phi(t)}}{\rho}$$

I parametri risk-neutral  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\gamma}$  sono determinati a partire dai parametri naturali con le relazioni

$$\tilde{\alpha} = \alpha - \pi, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha - \pi}$$

**Calibrazione.** Una delle componenti cruciali nel processo di controllo e valutazione dei rischi dell’impresa è la *calibratura* dei modelli di mercato. La stima dei parametri è, infatti, il risultato di complesse procedure econometriche non possono essere resi automatici (richiedono, cioè, l’*expert judgement*), perchè condizionano pesantemente i risultati. Le basi tecniche attuariali sono certificate dall’attuario incaricato.

Uno dei principali aspetti positivi del modello CIR++ è la possibilità di preservare la positività dello spot rate (componente CIR) ottenendo il *perfect fitting* con la struttura per scadenza dei tassi di interesse in vigore all’istante  $t = 0$ . La parametrizzazione alla Brown e Dybvig consiste nel correggere la stima in ambiente risk-neutral del modello CIR “abbassando”  $r_0$  e  $\nu$  lasciando inalterati  $d$  e  $\phi$ , ed è effettuata a partire dalle quotazioni dei tassi swap o dai prezzi degli zcb quotati sul mercato.

La procedura di stima consiste nella soluzione di un problema dei minimi quadrati: se si denomina  $v^*(\tau_k)$  la quotazione in  $t$  dello zcb con scadenza in  $t + \tau_k$  e  $v(\tau_k; \hat{\beta})$  il prezzo prodotto dal modello, il vettore dei parametri risk neutral  $\hat{\beta}$  si determina risolvendo

$$\min \sum_{k=1}^n \left[ v(\tau_k; \hat{\beta}) - v^*(\tau_k) \right]^2$$

Il modello stocastico di mercato, come detto in apertura della sottosezione 6.2, deve essere in grado di valutare tutte le tipologie di contratto che caratterizzano il portafoglio. Per il pricing di obbligazioni indicizzate all’inflazione, ad esempio, (o di polizze inflation linked) occorre che il modello incorpori una seconda fonte d’incertezza (ad esempio l’Indice dei Prezzi al Consumo) e sia, pertanto, bivariato; per la valutazione di obbligazioni denominate in una valuta estera è necessario considerare l’impatto dei tassi di cambio; per la valutazione di un portafoglio assicurativo esposto ad una grande varietà di rischi (basti pensare alla figura 4.4.3) è chiaro che il modello si complica ulteriormente. Nasce, quindi, la questione della ricerca del giusto *trade-off* tra la *precisione* dell’accuratezza tecnica e la *parsimonia* richiesta per la trattabilità matematica. Il modello univariato proposto rappresenta il punto di partenza per possibili sviluppi, anche molto complessi, a seconda della peculiarità dei titoli da trattare.

### 6.3 Determinazione del valore intrinseco

**Riserva stocastica e Value of Business in Force.** Il valore della riserva stocastica prestazioni del primo ordine, di cui alla nota 2, si ottiene moltiplicando i fattori di rivalutazione  $u^X(0, k)$ , cioè il prezzo di uno zero-coupon bond indicizzato con scadenza in  $k$  e valore nominale unitario (si tratta del valore di mercato in 0 del fattore di rivalutazione aleatorio della prestazione da 0 a  $k$ ), e i flussi probabilizzati in base alle probabilità del primo ordine ( $P^I$ ), “prudenziali”:



$$V(0, \tilde{Y}) = \sum_{k=1}^T \tilde{Y}_0(k) u^Y(0, k) \quad (6.11)$$

Utilizzando diverse basi tecniche per una polizza, è possibile definire definizioni alternative di riserva stocastica:

- $V_t^2$ : riserva stocastica calcolata in base ai premi puri con basi tecniche del secondo ordine (probabilità  $P^{II}$  “realistiche” per il caso morte);
- $V_t^3$ : riserva stocastica calcolata in base ai premi puri con basi tecniche del terzo ordine (probabilità  $P^{III}$  realistiche, con uscita sia per morte sia per riscatto);
- $\tilde{V}_t^3$ : riserva stocastica calcolata in base ai premi *di tariffa* con basi tecniche del terzo ordine (probabilità  $P^{III}$  realistiche, con uscita sia per morte sia per riscatto).

Il *valore intrinseco* della polizza è dato dalla differenza tra riserva di bilancio  $R_t$  (ottenuta attualizzando i flussi probabilizzati al tasso tecnico della polizza, cioè

$$R_t = \sum_{k=1}^T Y_0^I(k) (1+i)^{-k} \quad (6.12)$$

in cui  $Y_0^I(k)$  è il valore delle prestazioni da effettuare in  $k$  probabilizzate secondo le b.t. del primo ordine disponibili in 0)

e la riserva ai premi di tariffa con basi tecniche del terzo ordine:

$$E_t = R_t - \tilde{V}_t^3 \quad (6.13)$$

Esso rappresenta il valore in  $t$  dell’utile complessivo generato dal contratto. L’utile complessivo può essere scomposto come segue:

- $E_t^I = R_t - V_t$ : utile da sovrainteresse;
- $E_t^D = V_t - V_t^2$ : utile da sottomortalità;
- $E_t^R = V_t^2 - V_t^3$ : utile da riscatti;
- $E_t^I = V_t^3 - \tilde{V}_t^3$ : utile da caricamenti.

L’*embedded value*, la cui componente fondamentale è il valore intrinseco, è il valore di mercato dei profitti futuri complessivi relativi al portafoglio di polizze esistenti, aumentato del patrimonio libero d’impresa.

Un’analisi delle singole componenti di utile di una polizza, cioè una sorta di profit test a valori di mercato, fornisce preziose informazioni in merito alla redditività della polizza. Essa è utilizzata nell’ambito della gestione assicurativa dell’impresa per prendere decisioni in merito, ad esempio, all’emissione di nuovi prodotti (ad esempio per la scelta dei valori contrattuali), per la valutazione di una parte o dell’intero portafoglio (ad esempio per operazioni di fusione ed acquisizione) e per condurre analisi volte all’eventuale stipula di trattati riassicurativi.

## 6.4 I risultati del *Profit Test*

I risultati da produrre per l’elaborazione di una relazione tecnica completa di profit test sono:

1. il valore dei premi;
2. il valore delle prestazioni assicurate (con la scomposizione put e call);
3. il valore dei costi (provvisori e gestionali);
4. il valore creato per l’impresa (come definito in 6.3, cioè differenza tra valore dei premi e valore delle prestazioni e dei costi);
5. i risk capital (di tasso, azionario, di mortalità e di riscatto).

Esistono poi schemi di controllo dell’esposizione del portafoglio ai rischi:

- analisi di sensitività delle ipotesi (sensitività della redditività del portafoglio rispetto a singoli risk driver);
- analisi di sensitività dei parametri caratteristici della tariffa (fase di progettazione);
- analisi della rischiosità complessiva di portafoglio (calcolo del Solvency Capital Requirement, per fonte di rischio).

Vengono analizzati di seguito i risultati dello studio [DeF-10] presentato per l’Istituto Italiano degli Attuari il 14 Giugno 2010 e di cui già si è accennato, volto alla presentazione di un profit test Solvency II compliant che utilizza un modello stocastico bivariato del tipo analizzato nella sottosezione 6.2<sup>7</sup>.

Molte delle funzioni utilizzate nella valutazione sono state trattate nei paragrafi precedenti, e vengono qui elencate per chiarezza espositiva:

1. Fattore di rivalutazione (delle prestazioni): formula 6.2;
2. Fattore di valutazione (delle prestazioni): formula 6.8;
3. Fattore di attualizzazione (market-consistent), ottenuto con il modello CIR++, come in 6.10:

$$v(0, T) = E_0^Q \left( e^{-\int_0^T r(\tau) d\tau} \right) \quad (6.14)$$

4. Valore corrente delle prestazioni (riserva stocastica secondo le basi tecniche dell’*i - mo* ordine):

$$Y_0 = V(0, \bar{Y}) = \sum_{k=1}^T \bar{Y}_0(k) u^Y(0, k) \quad (6.15)$$

---

<sup>7</sup>Una semplificazione del modello utilizzato per calcolare il valore intrinseco di una polizza, ottenuta utilizzando il linguaggio di programmazione visual basic e che ben si presta soprattutto ad analisi di sensitività, è in Appendice C 8.3.

in cui  $\bar{Y}$  è l'importo della prestazione “probabilizzato” secondo le basi tecniche dell' $i - mo$  ordine (si noti che si ipotizza indipendenza tra incertezza finanziaria e incertezza “tecnico-attuariale”);

5. Riserva (di bilancio): formula 6.12;
6. Scomposizione “call” della riserva stocastica, tra valore dei guaranteed benefits

$$G_0 = \sum_{k=1}^T \bar{Y}_0(k)v(0, k)$$

e valore dei future discretionary benefits

$$C_0 = Y_0 - G_0$$

7. Scomposizione “put” della riserva stocastica, tra valore “base” delle prestazioni

$$B_0 = \sum_{k=1}^T \bar{Y}_0(k)u^B(0, k)$$

(in cui  $u^B(0, k)$  è calcolato come  $u(0, k)$ , ma con regola di rivalutazione  $\rho_k$  tale che  $\delta^c = -1$ , cioè senza garanzia di minimo rendimento) e valore della “componente put”

$$P_0 = Y_0 - B_0$$

I passi che occorre compiere per elaborare un profit test sono gli stessi specificati nel paragrafo 6.1.1:

- Definizione della “forma” tariffaria:  $\mathcal{F} = "3"$  (*mista*);
- Modalità di pagamento del premio:  $\mathcal{X} = 1$  (*unico*);
- Tipo di indicizzazione:  $\mathcal{I} = 1$  (*rivalutabile*), con tasso di rivalutazione  $\rho_k$  come definito in 6.3, con i seguenti parametri:

$$\beta = 90,00\%$$

$$\eta = 1,10\%$$

$$i = 0,00\%$$

$$\delta^c = 2,00\%$$

e rivalutazione certificata (contabilizzata) del fondo pari a

$$I_k = (1 - \theta)J_k$$

in cui  $J_k$  è il rendimento “lordo” del fondo e  $\theta$  la commissione generale di gestione (che è ipotizzata pari a zero);

- Definizione del sottostante, intesa come specificazione della componente azionaria, della volatilità della parte azionaria e della duration in mesi della componente obbligazionaria

$$\alpha_S = 5,00\%$$

$$\sigma = 25,00\%$$

$$d = 48$$

e della strategia per la “realizzazione” delle plus-minus valenze “latenti” della gestione separata (caratterizzata da un “rendimento target” pari a

$$I_k = \max \left[ \tilde{\delta}, \tilde{\beta}i(k, k + \tilde{\tau}) \right]$$

in cui  $\tilde{\delta} = 2,00\%$  è il rendimento nominale target ipotizzato,  $\tilde{\beta} = 80\%$  è la componente del rendimento obiettivo e  $\tilde{\tau} = 48$  l’indice temporale del rendimento obiettivo (espresso in mesi);

- Funzione di caricamento, definito come

$$H_0 = (h_1 + h_2m)(X_0 - d_0) + d_0$$

in cui  $X_0$  è il premio unico,  $h_1 = 3,00\%$  l’aliquota della parte fissa del caricamento,  $h_2 = 0,00\%$  l’aliquota della componente variabile del caricamento (proporzionale alla durata) e  $d_0 = \text{€}10$  il caricamento in cifra fissa (caricamento per spese d’emissione);

- Funzione di riscatto, definita da

$$W_t = C_t(1 - f)$$

in cui  $f$  è la penalità proporzionale al capitale.

Definiti questi punti, è possibile definire diverse polizze (in questo caso ne vengono considerate otto) in base ai propri parametri caratteristici, come indicato nella tabella 6.4

Segue la calibrazione dei parametri del modello CIR, coerentemente con la situazione corrente di mercato, che può essere “fotografata” osservando la curva dei tassi e della volatilità swap (la data di valutazione è il 30 Aprile 2010).

Sui dati di mercato vengono calcolati i valori dei parametri CIR++, cioè lo spot rate, la costante di richiamo (risk-neutral), il tasso di lungo periodo (risk-neutral) e il coefficiente di volatilità:

$$r_0 = 0,005603841 \tag{6.16}$$

$$\hat{\alpha} = 0,303682969$$

$$\hat{\gamma} = 0,043672795$$

$$\rho = 0,136813073$$

Poi vengono definite le altre basi tecniche attuariali:

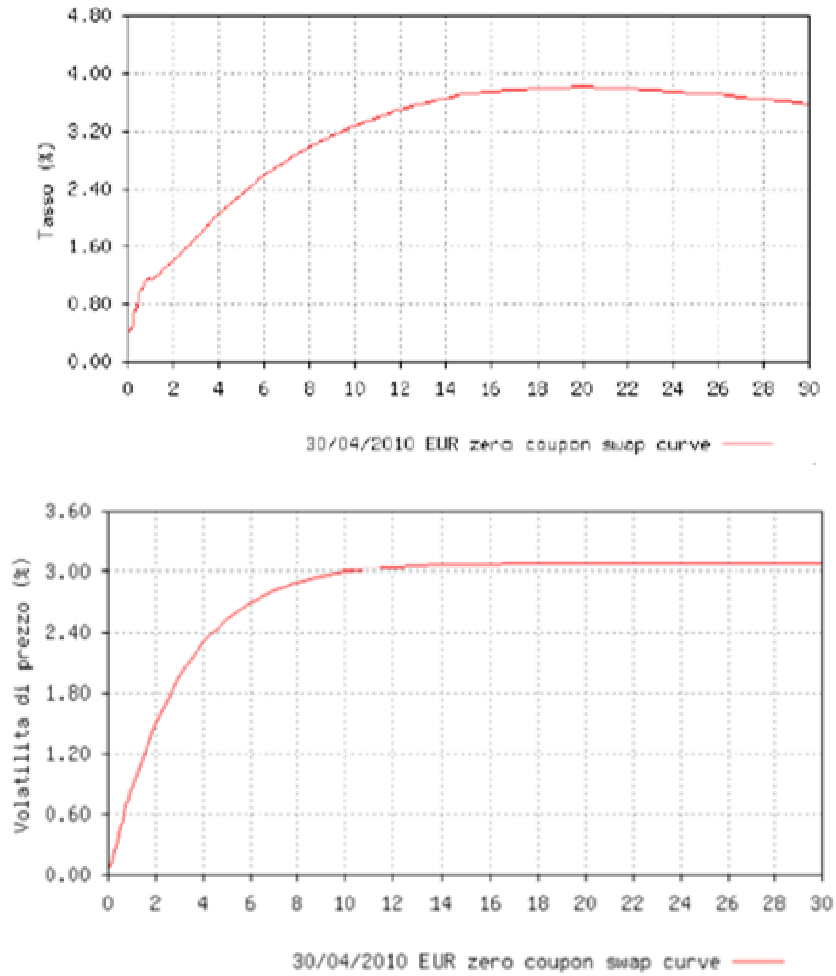


Figura 6.1: Curva dei tassi swap e della volatilità del prezzo swap al 30 Aprile 2010

numero polizza	parametri contratto-assicurato				parametri tariffa					caricamento su premio $H$
	età	durata	sezzo	premio versato $X_0$	tasso tecnico $i$	com.ne gestione $\theta$	retro-cessione $\beta$	garantito cliquet $\delta^c$	minimo trattenuto $\eta$	
	$x$	$m$	$s$							
1	30	20	ma	20.000,00	0,00%	0,00%	90,00%	2,00%	1,10%	3,05%
2	35	20	ma	20.000,00	0,00%	0,00%	90,00%	2,00%	1,10%	3,05%
3	40	15	ma	15.000,00	0,00%	0,00%	90,00%	2,00%	1,10%	3,06%
4	45	15	ma	15.000,00	0,00%	0,00%	90,00%	2,00%	1,10%	3,06%
5	50	10	ma	10.000,00	0,00%	0,00%	90,00%	2,00%	1,10%	3,10%
6	55	10	ma	10.000,00	0,00%	0,00%	90,00%	2,00%	1,10%	3,10%
7	60	5	ma	5.000,00	0,00%	0,00%	90,00%	2,00%	1,10%	3,19%
8	65	5	ma	5.000,00	0,00%	0,00%	90,00%	2,00%	1,10%	3,19%

Tabella 6.1: Definizione delle polizze in base al valore dei parametri caratteristici dell’assicurato, di tariffa e di contratto

- Ipotesi demografiche: la tavola di mortalità “prudenziale” scelta è la SIM e la SIF 2002 (tavole per contemporanei), mentre quella “realistica” è ottenuta con applicando un fattore di mortalità pari a  $\theta = 60\%$ ;
- Ipotesi comportamentali: per la stima dei riscatti viene utilizzata la tavola  $1k$  con un tasso di riscatto annuo pari a  $\lambda = 4,00\%$ ; si ipotizza che in caso di riscatto non ci siano penalità (cioè l’eventuale prestazione anticipata a carico dell’impresa corrisponde al capitale effettivamente accumulato al momento del riscatto).

Seguono le ipotesi sui costi contrattualizzati, definiti da

$$S_t^c = \begin{cases} g_1(X_0 - d_0) & \text{se } t = 0 \\ g_2R_t & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

in cui l’aliquota del costo contrattualizzato di acquisizione è  $g_1 = 1,00\%$  e l’aliquota del costo contrattualizzato di gestione è  $g_2 = 0,20\%$ , e le ipotesi sui costi attribuiti, cioè

$$S_t^a = \begin{cases} a_1X_0 & \text{se } t = 0 \\ a_2R_t & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

in cui l’aliquota del costo attribuito di acquisizione è  $a_1 = 0,40\%$ , e l’aliquota del costo attribuito di gestione è dato da  $a_2 = 0,15\%$ .

### 6.4.1 Scomposizione *put* e *call*

Secondo le definizioni di cui sopra, si ottiene il valore delle prestazioni, dei costi, delle opzioni implicite e, per differenza, del valore intrinseco della polizza, come mostrato dalla tabella 6.2; si noti che tutte le grandezze sono espresse in percentuale di premio (unico).

Il valore della riserva stocastica (prestazioni) può essere scomposto evidenziando il valore della garanzia implicita (scomposizione *put* e scomposizione *call*), come è stato fatto nella tabella 6.3. Il valore della garanzia di minimo

numero polizza	età $x$	durata $m$	valori <i>market-consistent</i> su valore premi				
			valore contratto $E$	prestazioni $Y$	costi attribuiti $S^a$	costi contrattati $S^c$	opzione put $P$
1	30	20	3,99%	90,07%	2,35%	3,59%	6,62%
2	35	20	3,98%	90,09%	2,34%	3,59%	6,62%
3	40	15	3,06%	91,77%	2,02%	3,15%	6,11%
4	45	15	3,04%	91,81%	2,01%	3,14%	6,10%
5	50	10	1,71%	94,10%	1,60%	2,60%	5,39%
6	55	10	1,68%	94,14%	1,59%	2,58%	5,37%
7	60	5	0,19%	96,86%	1,07%	1,89%	4,08%
8	65	5	0,19%	96,87%	1,06%	1,88%	4,05%

Tabella 6.2: Valori market-consistent ottenuti, per ciascuna polizza

rendimento si ottiene sottraendo al valore di  $V_0$ , in una logica di scomposizione put, la componente di “puro” investimento (senza garanzie). La componente base dell’importo a scadenza ad una scadenza  $k$ , con  $k = 1, \dots, n$  è data da

$$B_k = R_0 \prod_{h=1}^k (1 + \min[\beta I_h, I_h - h])$$

e il valore in 0 della garanzia di minimo da

$$P_0 = V_0 - B_0;$$

parallelamente, il valore della call si ottiene calcolando il valore dell’investimento a reddito deterministico (secondo il tasso annuo garantito) e sottraendo tale importo dal valore della riserva stocastica. In particolare, per una scadenza di  $k$  anni, con  $k = 1, \dots, n$  si ha

$$G_k = R_0(+\delta)^k$$

e il valore in 0 della call

$$C_0 = V_0 - G_0$$

Si noti che all’aumentare della durata del contratto aumenta anche il valore della componente opzionale; questo risultato è rafforzato dal fatto che si sta considerando garanzie di tipo cliquet, che, quindi, prevedono il consolidamento annuo dei risultati raggiunti; una garanzia cliquet, rispetto ad una opzione il cui valore dipende esclusivamente dal suo valore a scadenza, ha evidentemente un valore più elevato, ed il valore aumenta all’aumentare dell’orizzonte temporale, in quanto cresce la probabilità che l’opzione vada *in-the-money* (cioè che sia conveniente, per l’assicurato, esercitarla).<sup>8</sup>

<sup>8</sup>Si osservi, infine, che “in situazioni di mercato “non patologiche” il valore della call è sempre superiore a quello della put corrispondente. La coincidenza si avrebbe quando il livello dei tassi di mercato si avvicina al livello del tasso minimo garantito (rendendo le opzioni at the money forward)” [DeFM-09].

numero polizza	età $x$	durata $m$	valori <i>market-consistent</i> su valore premi				
			prestazione	componente base	opzione put	componente garantita	opzione call
			$Y$	$B$	$P$	$G$	$C$
1	30	20	90,07%	83,45%	6,62%	80,70%	9,37%
2	35	20	90,09%	83,48%	6,62%	80,74%	9,35%
3	40	15	91,77%	85,66%	6,11%	84,56%	7,21%
4	45	15	91,81%	85,71%	6,10%	84,65%	7,16%
5	50	10	94,10%	88,71%	5,39%	89,71%	4,39%
6	55	10	94,14%	88,77%	5,37%	89,79%	4,35%
7	60	5	96,86%	92,78%	4,08%	95,32%	1,53%
8	65	5	96,87%	92,82%	4,05%	95,35%	1,52%

Tabella 6.3: Scomposizione put e call del valore market-consistent delle prestazioni

numero polizza	durata $m$	tipo garanzia	garantito cliquet $\delta^c$	valori <i>market-consistent</i> su valore premi				
				valore contratto	prestazioni $Y$	costi attribuiti $S^a$	costi contrat.ti $S^c$	opzione put $P$
				$E$	$Y$	$S^a$	$S^c$	$P$
2	20	cliquet	0,00%	10,37%	83,94%	2,24%	3,45%	0,47%
2	20	cliquet	1,00%	8,46%	85,78%	2,27%	3,49%	2,30%
2	20	cliquet	2,00%	3,98%	90,09%	2,34%	3,59%	6,62%
2	20	cliquet	2,50%	0,57%	93,38%	2,39%	3,66%	9,90%
5	10	cliquet	0,00%	6,79%	89,13%	1,55%	2,53%	0,42%
5	10	cliquet	1,00%	5,18%	90,70%	1,57%	2,55%	1,99%
5	10	cliquet	2,00%	1,71%	94,10%	1,60%	2,60%	5,39%
5	10	cliquet	2,50%	-0,78%	96,54%	1,62%	2,62%	7,83%

Tabella 6.4: Analisi di sensitività rispetto al minimo garantito per polizze con diverso orizzonte temporale

### 6.4.2 Analisi di sensitività

Formalizzata la polizza e calcolati i primi valori market-consistent, un’esercizio interessante è costituito da un’analisi della sensitività dei valori market consistent considerati al variare di alcuni parametri:

1. minimo garantito (cliquet) 1;
2. coefficiente di retrocessione e aliquota minima trattenuta (dall’impresa) 2;
3. Epoca di valutazione (sensitività alla situazione di mercato 3).

I risultati mostrati in tabella 3 possono essere spiegati osservando le curve dei tassi e della volatilità caratteristici dei prezzi swap in relazione a tre istanti di valutazione diversi, in figura 6.4.2; per ognuno di essi occorre ricalcolare i



CAPITOLO 6. UN MODELLO DI VALUTAZIONE "SOLVENCY II COMPLIANT"95

numero polizza	durata $m$	coefficiente retrocessione $\beta$	minimo trattenuto $\eta$	valori <i>market-consistent</i> su valore premi				
				valore contratto $E$	prestazioni $Y$	costi attribuiti $S^a$	costi contratti $S^c$	opzione put $P$
2	20	100,00%	1,10%	3,98%	90,10%	2,34%	3,59%	6,62%
2	20	90,00%	1,10%	3,98%	90,09%	2,34%	3,59%	6,62%
2	20	80,00%	1,10%	4,39%	89,69%	2,34%	3,58%	6,59%
2	20	90,00%	0,20%	-1,00%	94,92%	2,40%	3,67%	2,91%
5	10	100,00%	1,10%	1,71%	94,10%	1,60%	2,60%	5,39%
5	10	90,00%	1,10%	1,71%	94,10%	1,60%	2,60%	5,39%
5	10	80,00%	1,10%	1,85%	93,96%	1,60%	2,59%	5,39%
5	10	90,00%	0,20%	-1,06%	96,82%	1,62%	2,62%	2,39%

Tabella 6.5: Analisi di sensitività rispetto al coefficiente di retrocessione e all'aliquota minima trattenuta

numero polizza	durata $m$	data valutazione	valori <i>market-consistent</i> su valore premi				
			valore contratto $E$	prestazioni $Y$	costi attribuiti $S^a$	costi contratti $S^c$	opzione put $P$
2	20	30.04.2010	3,98%	90,09%	2,31%	3,59%	6,62%
2	20	31.12.2009	5,96%	88,18%	2,31%	3,55%	4,78%
2	20	30.09.2009	5,11%	88,99%	2,33%	3,57%	5,39%
2	20	30.06.2009	5,88%	88,26%	2,31%	3,55%	4,65%
2	20	31.12.2008	6,54%	87,66%	2,29%	3,52%	4,29%
2	20	30.06.2008	10,19%	84,14%	2,23%	3,44%	0,71%
2	20	31.12.2007	9,96%	84,36%	2,24%	3,45%	0,89%
2	20	31.12.2006	9,24%	85,06%	2,25%	3,46%	1,70%
2	20	31.12.2005	6,98%	87,23%	2,28%	3,51%	3,83%
5	10	30.04.2010	1,71%	94,10%	1,60%	2,60%	5,39%
5	10	31.12.2009	3,26%	92,58%	1,58%	2,58%	3,97%
5	10	30.09.2009	2,42%	93,40%	1,59%	2,59%	4,58%
5	10	30.06.2009	3,00%	92,83%	1,59%	2,58%	4,06%
5	10	31.12.2008	4,40%	91,48%	1,56%	2,55%	3,14%
5	10	30.06.2008	7,29%	88,66%	1,54%	2,52%	0,38%
5	10	31.12.2007	7,00%	88,94%	1,54%	2,52%	0,60%
5	10	31.12.2006	6,51%	89,42%	1,55%	2,53%	1,18%
5	10	30.12.2005	4,62%	91,26%	1,56%	2,55%	2,94%

Tabella 6.6: Analisi di sensitività rispetto all'epoca di valutazione

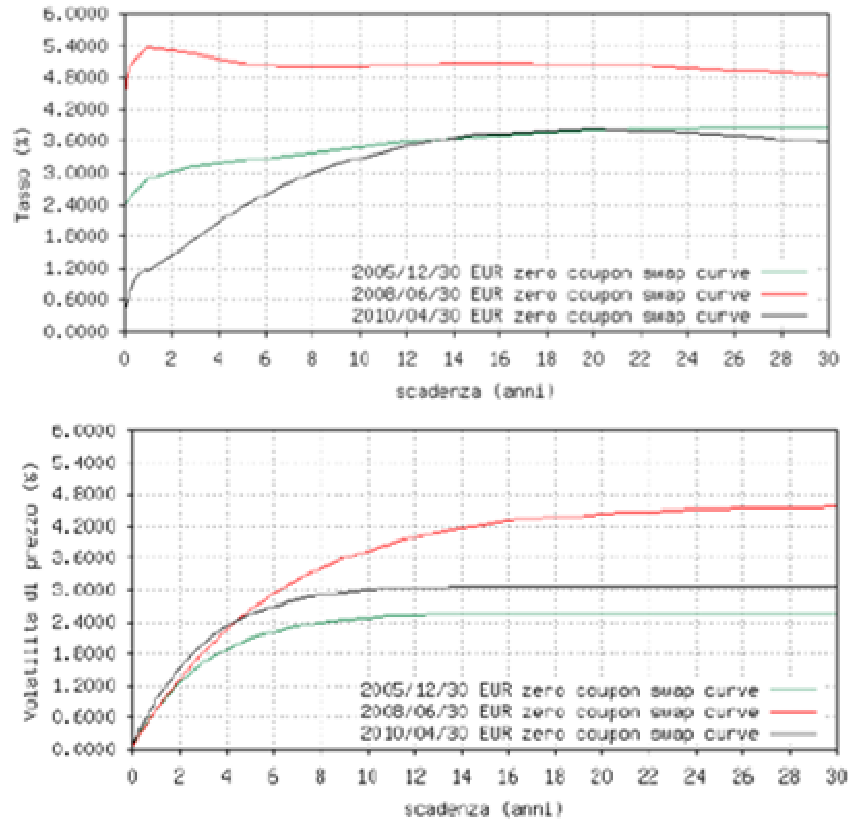


Figura 6.2: Curva dei tassi e delle volatilità swap rispetto a tre epoche di valutazione differenti

parametri CIR, ottenendo per il giorno 30.12.2005 i parametri risk-neutral

$$r_0 = 0,024961417; \quad \alpha = 0,324039904; \quad \gamma = 0,039354185; \quad \rho = 0,053447768$$

e per il giorno 30.06.2008

$$r_0 = 0,050676053; \quad \alpha = 0,162794273; \quad \gamma = 0,048597711; \quad \rho = 0,033949908.$$

(per il 30.04.2010 i parametri sono quelli indicati in 6.16)

Per quanto riguarda il valore della garanzia implicita, ad esempio, le condizioni di mercato proprie del giorno 30.06.2010 lasciano presupporre una probabile caduta *deep-out-of-the-money* delle opzioni put protettive su base annua: i rendimenti annui della gestione separata saranno, cioè, superiori al minimo garantito. Il valore dell'opzione put protettiva, infatti, risulta più bassa se confrontato con quello dello stesso contratto considerato in un altro momento (per

numero polizza	durata $m$	comp.te azionaria $\alpha$	duration $d$	valori <i>market-consistent</i> su valore premi				
				valore contratto $E$	prestazioni $Y$	costi attribuiti $S^a$	costi contrattati $S^c$	premi opzione put $P$
2	20	0,00%	48	6,82%	87,34%	2,30%	3,53%	3,86%
2	20	5,00%	48	3,98%	90,09%	2,34%	3,59%	6,62%
2	20	10,00%	48	-1,40%	95,29%	2,42%	3,69%	11,84%
2	20	20,00%	48	-14,56%	108,04%	2,59%	3,92%	24,89%
5	10	0,00%	48	3,65%	92,19%	1,58%	2,58%	3,45%
5	10	5,00%	48	1,71%	94,10%	1,60%	2,60%	5,39%
5	10	10,00%	48	-1,79%	97,54%	1,62%	2,63%	8,87%
5	10	20,00%	48	-9,68%	105,29%	1,68%	2,71%	16,88%
2	20	5,00%	24	2,52%	91,51%	2,36%	3,61%	8,03%
2	20	5,00%	36	3,45%	90,60%	2,35%	3,60%	7,14%
2	20	5,00%	48	3,98%	90,09%	2,34%	3,59%	6,62%
2	20	5,00%	60	4,22%	89,86%	2,34%	3,59%	6,23%
2	20	5,00%	72	4,36%	89,72%	2,34%	3,58%	6,01%
5	10	5,00%	24	1,01%	94,79%	1,60%	2,60%	6,28%
5	10	5,00%	36	1,50%	94,30%	1,60%	2,60%	5,70%
5	10	5,00%	48	1,71%	94,10%	1,60%	2,60%	5,39%
5	10	5,00%	60	1,76%	94,05%	1,60%	2,60%	5,14%
5	10	5,00%	72	1,76%	94,05%	1,60%	2,60%	5,00%

Tabella 6.7: Sensitività rispetto alla quota azionaria e alla duration della parte obbligazionaria.

la polizza 2, ad esempio, 0,71% se valutata al 30.06.2008, 6,62% se valutata al 30.04.2010). Si noti che questi aspetti non riuscirebbero ad essere apprezzati attraverso un ricorso alle logiche di bilancio tradizionali (contabilizzazione della riserva tradizionale), e richiamano la necessità di ricorrere a valutazioni di tipo mark-to-market, le quali implicano la costruzione di modelli interni di valutazione, come richiesto nella direttiva Solvency II.

Seguono alcune indicazioni sulla sensitività dei valori caratteristici della polizza rispetto a:

- *componente azionaria e duration* (tabella 6.4.2): all’aumento della componente azionaria, aumenta la rischiosità dell’investimento, dunque aumenta il valore della componente opzionale e diminuisce il valore del contratto; parimenti, all’aumentare della duration diminuisce il valore dell’opzione put, a patto che il tempo di rigiro del portafoglio rimanga costante;
- *ipotesi demografiche e comportamentali*: se le basi tecniche “realistiche” riflettono una riduzione più alta della mortalità rispetto alle ipotesi “prudenziali”, allora il valore intrinseco aumenta; se il tasso annuo di riscatto aumenta, in assenza di penalità, l’uscita anticipata produce effetti negativi per l’impresa, e il valore intrinseco diminuisce (nonostante anche il valore dell’opzione put diminuisca).

numero polizza	durata $m$	fattore mortalità $\vartheta$	t. annuo riscatto $\lambda$	valori <i>market-consistent</i> su valore premi				
				valore contratto $E$	prestazioni $Y$	costi attribuiti $S^a$	costi contratti $S^c$	opzione put $P$
5	10	100,00%	4,00%	1,69%	94,14%	1,59%	2,58%	5,37%
5	10	80,00%	4,00%	1,70%	94,12%	1,59%	2,59%	5,38%
5	10	60,00%	4,00%	1,71%	94,10%	1,60%	2,60%	5,39%
5	10	40,00%	4,00%	1,72%	94,08%	1,60%	2,60%	5,41%
5	10	20,00%	4,00%	1,73%	94,06%	1,61%	2,61%	5,42%
5	10	60,00%	0,00%	2,20%	93,08%	1,82%	2,90%	6,07%
5	10	60,00%	4,00%	1,71%	94,10%	1,60%	2,60%	5,39%
5	10	60,00%	5,00%	1,60%	94,32%	1,55%	2,53%	5,24%
5	10	60,00%	10,00%	1,16%	95,26%	1,33%	2,25%	4,58%
5	10	60,00%	20,00%	0,62%	96,47%	1,05%	1,86%	3,60%
5	10	60,00%	30,00%	0,37%	97,13%	0,87%	1,63%	2,94%

Tabella 6.8: Sensitività rispetto alle ipotesi demografiche e comportamentali

### 6.4.3 Controllo della rischiosità

Analisi di rischiosità di polizze come quelle appena considerate sono essenzialmente di due tipi. Il primo consiste nel calcolare la semielasticità del valore del contratto rispetto alla variabile di base. Se si considera il rischio di tasso occorre calcolare la duration stocastica  $\Omega^r(t) = -\frac{\delta V_t}{V_t \delta r}$ ; se si considera il rischio di sottostante, in generale, la misura è dipendente dal “delta” dell’opzione implicita nella polizza, cioè  $\Omega^S(t) = -\frac{\delta V_t}{V_t \delta S}$ . Se si vuole calcolare, invece, un’indicatore “complessivo” della rischiosità associata ad una polizza, allora la misura scelta è, coerentemente con le specificazioni tecniche del secondo capitolo e con le considerazioni normative del terzo capitolo, una misura “distribuzionale” *Value-at-Risk*. Per il calcolo degli indici di rischiosità è necessario considerare (stimare) la distribuzione delle probabilità naturali del fattore di rischio considerato, e procedere, poi all’opportuna aggregazione dei rischi. Per le polizze considerate, il risk-capital per le quattro maggiori fonti di rischio è mostrato in tabella, in cui il risk-capital è inteso come Solvency Capital Requirement, ovvero VaR calcolato sull’orizzonte temporale di un anno e con un livello di confidenza pari al 99,5%<sup>9</sup>.

### 6.4.4 Sulla redditività

Dopo aver trattato gli aspetti normativi della Direttiva Solvency II, quelli tecnici della valutazione di attività e passività e quelli “pratici” della costruzione dei modelli interni, la trattazione si conclude riprendendo alcuni degli strumenti tecnici di misurazione del rischio che sono stati trattati nel capitolo due, quasi in una sorta di “composizione ad anello”. Richiamando, allora, le considerazio-

<sup>9</sup>Un esempio di modello di come il calcolo del Solvency Capital Requirement puo’ essere ottenuto a partire da *risk factors* stocastici, utilizzando *loss functions* e distinguendo gli SCR attribuibili ai singoli *shreds* (insiemi di uno o piu’ risk factors) è presente nel file “Modello semplificato calcolo SCR e allocazione per risk factor.xlsx”, allegato a questa tesi.

numero polizza	età $x$	durata $m$	risk capital su valore premi			
			interest rate	equity	mortality	lapse
1	30	20	0,24%	2,23%	0,06%	2,59%
2	35	20	0,24%	2,23%	0,08%	2,59%
3	40	15	0,12%	2,23%	0,06%	1,73%
4	45	15	0,12%	2,23%	0,10%	1,72%
5	50	10	0,00%	2,23%	0,06%	0,82%
6	55	10	0,00%	2,23%	0,11%	0,80%
7	60	5	0,15%	2,22%	0,02%	0,11%
8	65	5	0,17%	2,22%	0,04%	0,11%

Tabella 6.9: SCR per quattro fonti rischio, calcolato come  $VaR_{0,995}$

ni fatte in merito all’analisi della redditività e della questione dell’allocazione di capitale, quest’ultimo paragrafo è dedicato a fornire un accenno formale<sup>10</sup> agli indici di redditività “ex-post”, strumento essenziale per valutare la buona gestione (quantitativa dei rischi) dell’impresa d’assicurazione.

Si definisce *capitale immobilizzato* al tempo  $t$

$$K_t = \max \{ \text{risk capital}, \text{margine di solvibilità} \}$$

e l’*Embedded Value Earnings* (EVE) il *valore intrinseco* generato dal business in force in  $t = 0$  e dall’attività nell’esercizio  $[0, 1]$

$$\Delta E_1 = E_1 - E_0 = \Delta E_1^M + \Delta E_1^O + \Delta E_1^N$$

(scomponibile come somma di variazione di valore per spostamenti di mercato, variazione di valore per invecchiamento del portafoglio e valore generato dal nuovo portafoglio<sup>11</sup>), definito al netto di spese e tasse.

Posto  $j$  il rendimento dell’investimento di  $K_0$  e  $\rho$  il livello di remunerazione richiesto dagli shareholders (*hurdle rate*) in  $[0, 1]$ , il *return on equity* (ROE o RORAC se  $K_0$  è aggiustato per il rischio) è pari a

$$ROE = \frac{U}{K_0} = \frac{\Delta E_1}{K_0} + j$$

in quanto l’*utile netto*  $U$  è

$$U = \Delta E_1 + jK_0 = ROE \times K_0.$$

L’*Economic Value Added* si può ottenere come

$$EVA = U - \rho K_0 = \Delta E_1 - K_0(\rho - j) = K_0(ROE - \rho)$$

<sup>10</sup>La notazione e lo schema segue l’impostazione di [CdFM-09a]

<sup>11</sup>Cfr. 4.4.6.6

CAPITOLO 6. UN MODELLO DI VALUTAZIONE "SOLVENCY II COMPLIANT" 100

in cui  $K_0(\rho - j)$  è il Cost of Capital (CoC).

Infine, l'*EVA rate of return* (*EVAR*) si ottiene come

$$EVAR = \frac{EVA}{K_0} = ROE - \rho$$

ovvero, dato che  $ROE = \frac{U}{K_0} - \rho$ , l'*EVAR* è la differenza tra il rendimento fornito dal portafoglio e l'extrarendimento richiesto dagli shareholders

$$EVAR = \frac{\Delta E_1}{K_0} - (\rho - j).$$

## Capitolo 7

# Conclusioni

### 7.1 Il punto di vista delle società di rating

Solvency II è già riconosciuta dalla stampa specializzata (ad esempio [InsT-10]) come un potentially leading global standard per la regolamentazione in materia di solvibilità, e la valutazione realistica di attività e passività potrebbe costituire un vantaggio comparativo per le imprese europee, a livello di requisiti di capitale, modelli organizzativi interni e “ultimately” anche di valutazione delle società di rating.

Le società di rating, infatti, applicano da anni tecniche risk-based capital nel processo di calcolo del rating di un’istituzione finanziaria, pur non raggiungendo la raffinatezza e la completezza che sono richiesti da Solvency II ai modelli interni. La qualità del modello interno è definita da Standard & Poor’s, ad esempio, come “a critical rating driver”; oltre a qualificare lo stile della gestione (attraverso lo use test), il modello interno è uno strumento utile nel confronto dei risultati con i modelli utilizzati da alcune società di rating. Il modello interno è valutato con una griglia di valutazione che, coerentemente con l’impostazione del CEIOPS, tiene conto della qualità metodologica (dati disponibili, tecniche di calcolo attuariali e finanziarie), tipologia dei risultati prodotti (per singolo prodotto, aggregabili fino a livello di impresa) e radicamento nell’organizzazione d’impresa (sia da un punto di vista culturale attraverso una costante attività di formazione sia attraverso l’attività di budgeting).

L’impostazione di Solvency II, basata sul concetto di economic capital<sup>1</sup>, è coerente con quella delle agenzie di rating: se nell’ambito della prima il rischio è misurato in termini economici (piuttosto che con regole contabili, come previsto dalla normativa precedente) e tradotto in un requisito di capitale in linea con la target financial strength (risk appetite) dell’impresa, le seconde si occupano

---

<sup>1</sup>L’economic capital è inteso come [McNFE05]

capital that shareholders should invest in the company in order to limit the probability of default to a given confidence interval over a given time horizon.

di tradurre il capitale disponibile e la situazione complessiva della compagnia in un credit rating. Evidentemente, l'impostazione seguita è quella dei modelli *strutturali* per il rischio di credito<sup>2</sup>.

Un'efficiente gestione dei rischi può minimizzare i requisiti di capitale richiesti dal regolatore e, a parità di livello di rischio, massimizzare la redditività del business assicurativo (bancario) per gli shareholders e, a parità di redditività, massimizzare la sicurezza per i policyholders<sup>3</sup>.

## 7.2 Come si evolve la figura dell'attuario

L'articolo 48 della Direttiva prevede che la funzione attuariale

- coordini il calcolo delle *technical provision* (valutazione delle passività, coerentemente con quello delle attività "sottostanti"), garantendone l'adeguatezza delle metodologie, dei modelli sottostanti utilizzati e delle basi tecniche;
- valuti la sufficienza e la qualità dei *dati* utilizzati nel calcolo delle riserve tecniche;
- raffronti le migliori stime con i dati tratti dall'esperienza;
- informi l'organo amministrativo, direttivo o di vigilanza in merito all'affidabilità e all'adeguatezza del calcolo delle riserve tecniche;
- esprima un parere sulla politica di sottoscrizione globale e sull'adeguatezza degli accordi di riassicurazione;
- contribuisca attivamente ad applicare in modo efficace il sistema di gestione dei rischi (ORSA), in particolare rispetto alla modellizzazione dei rischi sottesa al calcolo dei requisiti patrimoniali.

L'articolo prevede, inoltre, che "la funzione attuariale è esercitata da persone che dispongono di conoscenze di matematica attuariale e finanziaria, commisurate alla natura, alla portata e alla complessità dei rischi inerenti all'attività dell'impresa di assicurazione o di riassicurazione e che sono in grado di dimostrare un'esperienza pertinente in materia di norme professionali e di altre norme applicabili."

L'importanza strategica di una corretta e "realistica" valutazione della posizione di un'impresa, in termini di profilo di rischio e solvibilità, fa dell'attuario un ruolo di notevole e crescente valore gestionale per l'impresa. La Direttiva

<sup>2</sup>A titolo d'esempio, basti citare il modello di Merton, che associa la probabilità di default dell'azienda a caratteristiche strutturali, endogene, proprie dell'impresa, come il *leverage ratio* (cfr. [Hu06]).

<sup>3</sup>A questa "sicurezza", di interesse pubblico, si riferisce la definizione di "attuari" di cui si parlerà nel prossimo paragrafo.



assume implicitamente che l'attuario sia *an actuary of the third kind*<sup>4</sup>, per citare la famosa espressione di Buhlmann [Bu-02] con cui si ridefinisce l'impostazione attuariale tradizionale classica in condizioni di incertezza, con l'utilizzo di modelli stocastici<sup>5</sup>.

L'attenzione ai dati, lo sviluppo di sistemi informatici e organizzativi più integrati tra loro, efficienti e capillari sia dal punto di vista geografico sia di momenti diversi del processo di risk management, permetteranno alle figure qualificate come "esperti del rischio" di dedicare crescente attenzione ai risvolti gestionali delle analisi condotte, meno a quelle di pura data analysis (fermo restando che non si può gestire un'impresa senza avere un'informazione completa e costantemente aggiornata sui dati di portafoglio dell'impresa).

Un'ottima sintesi del ruolo degli attuari è quella fornita dagli inglesi Institute of Actuaries e Faculty of Actuaries, per cui

Actuaries are respected professionals whose innovative approach to making business successful is matched by a responsibility to the public interest. Actuaries identify solutions to financial problems. They manage assets and liabilities by analysing past events, assessing the present risk involved and modelling what could happen in the future.

Dalla definizione si evince l'approccio "olistico" alla valutazione e gestione dell'impresa d'assicurazione confermato da Solvency II, per cui si sceglie un approccio integrale che consideri tutte le tipologie di rischio (ad esempio, secondo la struttura modulare della formula dell'SCR, 4.4.3) valutando "coerentemente" attività e passività.

### 7.3 La "cultura" dei modelli interni: il *pragmatismo*

Come più volte sottolineato nel corso della trattazione, la realizzazione in pratica dei principi della Direttiva richiede la traduzione "operazionale"<sup>6</sup> dei concetti in formule, processi di calcolo, protocolli di controllo dei dati, soluzioni tecnologiche e sistemi di organizzazione.

<sup>4</sup>Buhlmann (1995) definisce "gli attuari del terzo tipo" come "a new group of mathematical expert who unfold their skills on the investment side of insurance or banking", per i quali è evidente, ad esempio, "to assume a stochastic interest rate".

<sup>5</sup>Si parla sempre più frequentemente di "attuari del quarto tipo", con riferimento al nuovo ruolo che gli attuari si apprestano ad assumere nella valutazione e controllo dei rischi di "operativa", in relazione al crescente sviluppo delle pratiche di *Enterprise Risk Management*, che potrebbe rendere necessaria l'applicazione delle metodologie proprie delle scienze attuariali anche in altri ambiti propri del *general business administration*.

<sup>6</sup>Al termine "operazionale", utilizzato per la prima volta da Bridgman in *The Logic of Modern Physics* (New York, 1927), fa riferimento spesso anche de Finetti [deFi-89]

il significato di un concetto risulta dall'uso di esso nelle proposizioni costruibili con il suo ausilio e in ciò si esaurisce.

Il modello, per funzionare, vincola l'impresa a standard di qualità statistica elevati, impone modelli organizzativi efficienti, e “costringe” alla chiarezza degli algoritmi informatici<sup>7</sup>. La “chiave operativa” consiste nel trovare l'ottimale trade-off tra standard di precisione e trattabilità matematica:

il modello che si costruisce per rappresentare una situazione non deve essere nè troppo semplice nè troppo complesso, ma soltanto adeguato allo scopo. Il modello è come la carta geografica: serve per avere un'idea della situazione “in scala”, e la scala va definita in base alla finalità dell'utilizzazione. [DFGMoPiSal-10]

I risultati cui si giunge con i modelli (anche in termini di *forecast*), pur se coerenti con la situazione di mercato, vanno costantemente controllati e aggiornati. Sulla necessità di mettere sempre in discussione le conclusioni cui si giunge con i propri modelli, de Finetti, inquadrando la questione nel più ampio contesto scientifico in [deFi-06], scrive che, quando i risultati della scienza vengono contraddetti,

si sviluppano allora concezioni nuove e verità nuove, che si affermano al posto delle concezioni e delle verità di ieri divenute false;

I risultati ottenuti, quindi, secondo un'impostazione tipicamente bayesiana, sono indissolubilmente legati dallo stato di informazione, che, in quanto tale, è mutabile<sup>8</sup>. L'illusione di aver raggiunto qualche verità “fuori discussione per l'eternità” nasce da quella “*pigrizia*” che consiste nell'elevare la “circostanza momentanea” a “criterio per escludere in futuro il sorgere e l'aprirsi di nuove necessità e possibilità”. L'antidoto a tale pigrizia consiste nel “chiedersi (...) quale sia il significato” di qualsiasi concetto, ovvero “analizzare i motivi profondi ed essenziali che hanno costituito, sia pure inconsciamente, lo scopo per cui quel concetto è stato introdotto, e che spiegano la ragione intima della sua *utilità*”.

Il controllo *ongoing* dei risultati ottenuti e delle grandezze calcolate è un elemento essenziale perchè il modello interno dia indicazioni strategiche e gestionali all'alta direzione; è possibile, infatti, attribuire senso a una proposizione “soltanto in quanto vi siano delle conseguenze controllabili”. Segue che

---

<sup>7</sup>A titolo d'esempio, l'impiego del primo calcolatore elettronico in Banca d'Italia fu salutato da Guido Carli come “un regolo ferreo al quale agganciare la propria decisione (...)”. Il modello va inteso come elemento di disciplina tanto per lo sforzo di analisi quanto per la risolutezza dell'azione, rafforza la discrezionalità degli atti, non già l'arbitrio delle decisioni da intraprendere”. Fulminanti appaiono i collegamenti a concetti come *use test* (sforzo costante di analisi), *management actions* e coerenza delle decisioni in condizioni di incertezza, di cui la probabilità è *teoria normativa*.

<sup>8</sup>Piccinato [DFGMoPiSal-10] osserva che

tutti ricordano la frase di Einstein secondo cui “Dio non gioca a dadi”; la frase sintetizza un'opposizione ai modelli probabilistici nella fisica, che tipicamente sono basati su probabilità oggettive. Con la concezione di de Finetti, Dio è l'unico soggetto che non userbbe la probabilità perchè, se esiste, sicuramente è dotato di una informazione perfetta. Se usiamo modelli probabilistici, non è dunque perchè Dio gioca a dadi, ma perchè nella nostra indagine sulla natura siamo costretti a tener conto della nostra incertezza.

per dare effettivamente senso a una nozione (e non una parvenza di senso metafisico-verbalistica), occorre una definizione operativa, cioè basata su un criterio che permette di misurarla. [deFi-70]

L'impostazione definetiana, di cui la normativa Solvency II sembra essere erede, suggerisce che il *pragmatismo* è la corrente filosofica in cui può inserirsi il concetto e la finalità "operazionale" dell'*internal modelling*. Un barlume per chiarire le idee sullo spirito di questa impostazione è fornito da Tilgher in [Ti-44]:

il pensiero non è (...) quale lo crede la coscienza volgare: uno specchio in cui si riflette immutata una realtà esterna a noi (...); è semplicemente (...) un mezzo per orientarsi nella vita, per conservarla e arricchirla, per rendere possibile e facile l'azione, per fare i conti con la realtà e dominarla.

## Capitolo 8

# APPENDICE

### 8.1 A. Il VaR, il T-VaR e loro coerenza

#### 8.1.1 Il Value-at-Risk

Il Valore a Rischio (Value-at-Risk, o VaR) è la misura di rischio più utilizzata nel *risk management* e nel controllo di solvibilità degli intermediari finanziari, e rientra nel gruppo di quelle basate sulla distribuzione di probabilità della variabile “perdita”, di cui ci si propone di trovare una statistica che misuri il rischio di tenere un determinato portafoglio per un orizzonte temporale  $\Delta > 0$ .<sup>1</sup>

**Il caso di f.r. continua e monotona.** Dato un livello di confidenza (nel senso di livello di fiducia, di sicurezza)  $\alpha \in (0, 1)$ , il VaR di un portafoglio è dato dall' $\alpha$ -quantile della loss distribution. Se la funzione di ripartizione (f.r.) della perdita  $F_L(l) = P(L \leq l)$  è continua e strettamente crescente, si ha

$$VaR_\alpha(L) = l_\alpha(F) = F_L^{-1}(\alpha) \quad (8.1)$$

(i.e.  $VaR_\alpha$  rappresenta la *perdita massima possibile* dell'agente  $I$  al livello di confidenza  $\alpha$ ).

Un modo, secondo certi aspetti, più rigoroso di formulare la definizione di  $VaR$  è seguendo la notazione di [Art-99] (cfr. 8), per cui se la f.r. del surplus  $S = X - Y = -L$ , cioè  $F_S(x) = P(S \leq x)$ , è continua e strettamente crescente, si ha

$$VaR_\epsilon(S) = -x_\epsilon = -F_S^{-1}(\epsilon) \quad (8.2)$$

dove la probabilità  $\epsilon$  (che conviene pensare 'piccola', ad esempio pari a 0,01) è pari a  $1 - \alpha$ . È chiaro, dunque, che  $-VaR_\epsilon(S)$  è un valore 'pessimistico'

---

<sup>1</sup>Una statistica utilizzabile è la *maximum probable loss*, una misura spesso utilizzata nel contesto della riassicurazione, data da  $\inf \{l \in \mathbb{R} : F_L(l) = 1\}$ . Tuttavia, poiché nei modelli maggiormente utilizzati il supporto di  $F_L$  non è limitato superiormente, la maximum probable loss risulta non essere un numero reale.

del valore netto  $S$ , al disotto del quale si reputa si possa scendere solo con probabilità  $\varepsilon$ .

Se seguendo la notazione di [Art-99] si considera la coda sinistra della distribuzione di  $S$ , con [McNFE05] si pone l'attenzione sulla coda destra di  $l$  (vedere 8.1).

Si noti, tuttavia, che la 8.1 e la 8.2 sono equivalenti, dato che le condizioni  $P(S \leq -x) = \varepsilon = 1 - \alpha$  e  $P(L \leq l) = \alpha$  implicano che  $l = -x$ .

**Il caso generale.** Se la f.r. di  $l$  non soddisfa le proprietà di continuità e di monotonia stretta, la 8.1 si generalizza nella:

$$VaR_\alpha(L) = \inf \{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} = \inf \{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}. \quad (8.3)$$

Si può anche scrivere la 8.3 come:

$$VaR_\alpha(L) = F_L^{\leftarrow}(\alpha)$$

dove l'inversa generalizzata  $F^{\leftarrow}(y)$  è definita come:

$$F^{\leftarrow}(y) = \inf \{x : F(x) \geq y\}, \quad y \in (0, 1).$$

Analogamente, la 8.2 si generalizza nella:

$$VaR_\varepsilon(S) = -x_\varepsilon = -F_S^{\leftarrow}(\varepsilon) = -\inf \{x \in \mathbb{R} : P(S \leq x) > \varepsilon\}$$

Valori tipici di  $\alpha$  sono 0,95 (limiti imposti da una banca ai propri traders), 0,99 (Basilea II capital adequacy) e 0,995 (Solvency II SCR), mentre l'orizzonte temporale  $\Delta$  è, rispettivamente nei casi considerati sopra, 1 giorno e 10 giorni nel contesto del market risk management (orizzonti brevi sono preferibili per l'ipotesi che la composizione del portafoglio rimanga invariata), 1 anno nel credit, nell'operational risk management e nel mondo delle compagnie di assicurazione.

**Il mean-VaR.** Per propositi di capital-adequacy, le autorità di vigilanza richiedono un capitale economico come garanzia contro perdite inattese pari alla statistica *mean-VaR*, definita come

$$VaR^{mean} = VaR_\alpha - E(L)$$

che deriva dalla definizione della v.a. *unexpected loss* (*perdita inattesa*)

$$U_L = L - E(L)$$

Segue che, poiché  $P(X - k \leq x) = P(X \leq x + k)$ , la 8.1 diventa

$$VaR_\alpha(L) = F_L^{-1}(1 - \varepsilon) - E(L)$$

Quando l'orizzonte temporale  $\Delta$  ha ampiezza ridotta (è nell'ordine di pochi giorni lavorativi), si usa spesso l'approssimazione  $E(S) = S_0$ , ove  $S_0$  è il valore corrente della posizione (si trascura, cioè, il *time-decay* della posizione  $E(S) - S_0$ ).

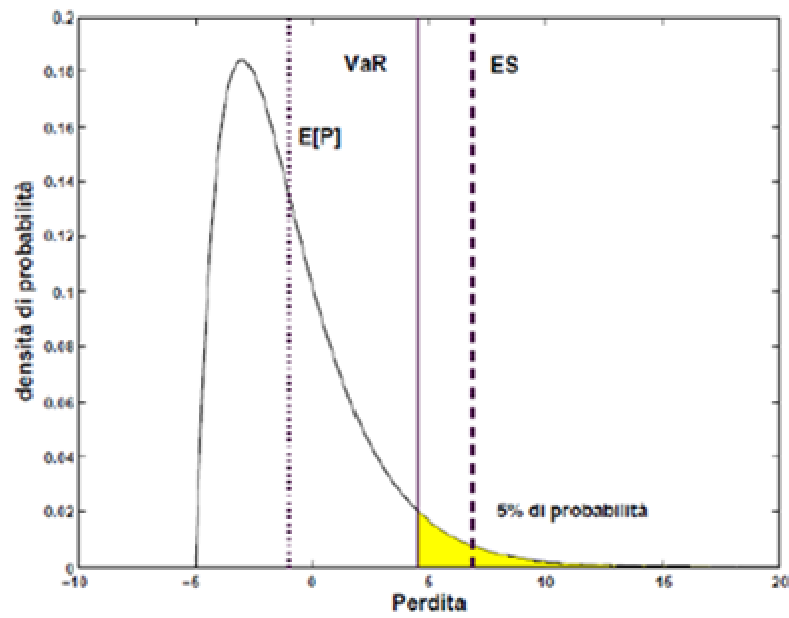


Figura 8.1: Un esempio di loss distribution con indicate alcune statistiche rilevanti: la perdita media (negativa, i.e. ci si aspetta un profitto), il VaR e il T-VaR (Expected Shortfall, ES). Si noti che la coda destra della distribuzione, come spesso accade, è molto pesante rispetto a quella sinistra ( $E[L] > \text{median}[L] \Rightarrow$  la distribuzione di  $L$  presenta un'asimmetria negativa).

**Casi particolari.** Si può dimostrare, inoltre, che nei casi in cui la loss distribution sia Normale o  $t$ -Student, allora si ottiene, rispettivamente,

$VaR_{\alpha,N} = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$ , con  $\Phi^{-1}(\alpha)$   $\alpha$ -quantile della ddp normale standard, e

$VaR_{\alpha,t} = \mu + \sigma t_v^{-1}(\alpha)$ , con  $t_v^{-1}(\alpha)$   $\alpha$ -quantile della ddp  $t$  con  $\nu$  gradi di libertà.

**Criticità.** Il VaR presenta tuttavia diverse criticità. In primo luogo, non è una misura coerente, in quanto non rispetta sempre la proprietà di *subadditività* (cfr. 2.3). Inoltre, esso è colpito da rischio di modello, cioè il rischio che i modelli di risk management siano *misspecified* rispetto ai dati d'origine o le ipotesi sottostanti il modello scelto non siano rispettati nella realtà (ad esempio, scegliere una distribuzione normale quando la distribuzione reale è fortemente asimmetrica). McNeil, Frey ed Embrechts suggeriscono che “ogni modello di risk management è affetto da rischio di modello, almeno in parte”, dal momento che “ogni modello finanziario è per definizione una rappresentazione semplificata e quindi imperfetta di un mondo economico e dei modi in cui gli agenti economici prendono le proprie decisioni” [Gi00]. Altra problematica intorno al VaR è costituita dal fatto che non viene considerato in alcun modo il *rischio di liquidità*, intesa come liquidità di mercato (possibilità di vendere sul mercato senza provocare forti escursioni di prezzo) [Sar-08]. Lawrence e Robinson [LR95] pongono l'accento sul fatto che “ogni misura di VaR deve tener conto dei costi di liquidazione delle perdite prospettive”, perché tra il momento della decisione di liquidare la posizione e la liquidazione effettiva, il costo di liquidazione potrebbe diventare significativo, soprattutto per chiudere posizioni molto grandi<sup>2</sup>.

### 8.1.2 Altre misure basate sulla distribuzione di probabilità

La misura di rischio, intesa come variabilità del payoff realizzabile da un investimento, utilizzata dalla teoria del portafoglio di Markovitz [Ma-52] è la *Varianza*. Le due critiche principali che si potrebbero muovere a questa misura risiedono nell'ipotesi che esista il momento secondo della distribuzione della perdita (condizione forte, soprattutto per certe lines of business delle assicurazioni non vita) e nel fatto che non distingue deviazioni positive e negative (quindi risulta essere una buona misura del rischio solo per loss distributions simmetriche).

**Expected Shortfall.** Per una perdita  $L$  con  $E[|L|] < \infty$  e df  $F_L$ , il Tail-VaR, o Expected Shortfall (ES), al livello di confidenza  $\alpha \in (0, 1)$  è definito come

<sup>2</sup>Il problema della liquidità intesa sia come market liquidity sia come funding liquidity (facilità di accesso al finanziamento) è stato ed è ampiamente discusso in relazione alla crisi finanziaria generata dai mutui subprime (basti pensare a [Sar-08, Bu07, MR07, IMF-07] per citare alcuni lavori in materia)

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 q_u(F_L) du = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(L) du \quad (8.4)$$

L'ES è dunque una media tra i VaR per tutti i livelli di confidenza superiori ad  $\alpha$ , e si propone di “look further into the tail of the loss distribution” [McNFE05], e si propone come strumento utile per chi sia interessato alla severità delle perdite che superino il  $VaR_\alpha$ . Inoltre, per distribuzioni di perdita continue si dimostra [McNFE05] che l'ES può essere interpretato come la perdita attesa condizionatamente al fatto che la perdita superi l' $\alpha$ -quantile, cioè

$$ES_\alpha = \frac{E(L; L \geq q_\alpha(L))}{1-\alpha} = E(L | L \geq VaR_\alpha), \quad \forall \alpha \in (0, 1)$$

In generale, si può scrivere

$$E(L | L \geq VaR_\alpha) = VaR_\alpha + m_L(VaR_\alpha)$$

dove  $m_L(VaR_\alpha)$  è la funzione di *eccedenza media*, definita come

$$m_L(VaR_\alpha) = E(L - VaR_\alpha | L \geq VaR_\alpha)$$

L'ES è una misura subadditiva e rispetta, in generale, gli assiomi di coerenza di cui al 2.3.

**Casi particolari.** Analogamente a quanto fatto per il VaR, consideriamo il caso *Normale* e *t-Student*, rispettivamente::

$$L \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow ES_\alpha = \mu + \sigma \frac{\Phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}, \quad (8.5)$$

con  $\Phi^{-1}(\alpha)$   $\alpha$ -quantile della ddp normale standard, e

$$L' = \frac{L - \mu}{\sigma} \sim t_\nu \Rightarrow ES_\alpha = \mu + ES_\alpha(L') = \mu + \frac{g_\nu(t_\nu^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \left( \frac{\nu + (t_\nu^{-1}(\alpha))^2}{\nu - 1} \right), \quad (8.6)$$

con  $t_\nu$  è la df e  $g_\nu$  la densità della t-standard.

**Un confronto tra VaR ed ES.** E' interessante fare alcune ulteriori considerazioni sul rapporto tra VaR ed ES, facendo riferimento ad un esempio in particolare, ripreso da [McNFE05].

Si consideri un portafoglio che al tempo  $t$  valga  $V_t = 10000$  ed abbia una volatilità annua del 20%. La tabella 8.1 mostra i valori del VaR e dell'ES per diversi livelli di confidenza secondo il modello normale (utilizzando la 8.5) e il modello t-student (utilizzando la 8.6). Si noti che la distribuzione t è simmetrica con code molto pesanti (cioè valori assoluti molto grandi sono più probabili che in una distribuzione normale); per questa ragione, per  $\alpha = 99\%$  e  $\alpha = 99,5\%$ ,



Tabella 8.1:  $VaR_\alpha$  e  $ES_\alpha$  in un modello *normale* e *t* per diversi valori di  $\alpha$ 

Modello	$\alpha$	0,90	0,95	0,99	0,995
Normale	$VaR_\alpha$	162,1	208,1	294,3	325,8
	$ES_\alpha$	222,0	260,9	337,2	365,8
t	$VaR_\alpha$	137,1	190,7	335,1	411,8
	$ES_\alpha$	223,4	286,3	465,8	563,5

il modello t è molto “più rischioso” di quello normale, cioè genera valori delle misure di rischio molto più elevati; al contrario, per livelli di confidenza minori, la differenza appare molto meno evidente, anzi il VaR calcolato con il modello normale ha un valore superiore a quello calcolato secondo il modello t.

## 8.2 B. La simulazione stocastica

Data la funzione di ripartizione  $G$  e la sua inversa generalizzata  $\overleftarrow{G}$  tale che  $\overleftarrow{G}(y) = \inf \{x : G(x) \geq y\}$ , si ha:

- Trasformata quantile:

$$U \sim U(0, 1) \implies P\left(\overleftarrow{G}(U) \leq x\right) = G(x)$$

- Trasformata di probabilità:

$$Y \text{ ha f.r. } G \implies G(Y) \sim U(0, 1)$$

Questa proposizione, di cui si ha una chiara e semplice dimostrazione, ad esempio, in [McNFE05], è la chiave per la simulazione stocastica: è possibile trasformare fattori di rischio aventi una particolare funzione di ripartizione continua in ogni altra distribuzione continua, attraverso la distribuzione uniforme. Ad esempio, se  $Y \sim N(0, 1)$ , allora la trasformata di probabilità  $\Phi(y)$  è uniforme, e ad ogni suo valore sarà associata un quantile  $\overleftarrow{G}(\Phi(y))$ , per cui sarà possibile generare osservazione fittizie, simulate, della v.a.  $y$ .

**Aspetti critici** La tecnica di simulazione maggiormente utilizzata e quella di Monte Carlo. Due sono gli aspetti critici che, nell’ambito del dibattito intorno ai modelli interni, occorre considerare [DE-09d]:

1. la scelta del *random generator seed* (il “seme”): se il seme è prodotto “automaticamente” con un meccanismo fisico (per esempio dall’orologio del computer) simulazioni diverse potrebbero dare luogo a risultati diversi anche utilizzando lo stesso algoritmo, e quindi si perderebbe la possibilità di replicare quei risultati (la *reproducibility* dei risultati è un importante elemento per la valutazione di un modello interno [CdFM-09a]);

2. il numero di simulazioni  $n$  da effettuare: l'affidabilità dei risultati ottenuti dipende dall'errore numerico, che è funzione del numero di simulazioni da effettuare; in generale, la precisione è tanto minore quanto più alta è la volatilità delle traiettorie da simulare, quindi  $n$  dipende dalle caratteristiche del contratto da valutare.

La riproducibilità dei risultati è garantita quando il seme della simulazione è un dato di input, che quindi viene regolarmente archiviato tra gli input i riferimento dei risultati ottenuti dal modello; la qualità della simulazione è salva, perché l'esito dell'algoritmo di generazione di numeri pseudo-casuali non dipende dalla scelta del seme.

Anche il numero di simulazioni dovrebbe essere fissato come un dato di input, scelto in dipendenza dell'errore standard della stima considerato accettabile.

### 8.3 C. Esempio di modello di valutazione market-consistent

Le figure 8.2, 8.3 e 8.4 mostrano un esempio di modello per la valutazione market consistent del valore intrinseco di una polizza mista, scritto in codice Visual Basic. Il vantaggio del modello, che pure presenta alcune pesanti semplificazioni rispetto a quello analizzato nel capitolo 6, è che essendo legato a precise celle di input excel fornisce facilmente buone analisi di sensitività al variare dei parametri contrattuali e di mercato.

```

Sub Main()
'Lista durata di n anni a premio unico, per una testa di x anni
'definizioni
Dim epocrate As Double 'parametri CIR
Dim alpha As Double
Dim gamma As Double
Dim rho As Double
Dim D As Double 'parametri CIR risk-neutral
Dim xi As Double
Dim r(1 To 1000, 1 To 150) 'output CIR
Dim su(1 To 120)
Dim del(1 To 120)
Dim A(1 To 120)
Dim su2(1 To 120)
Dim B(1 To 120)
Dim v(1 To 120) 'prezzi zero coupon bonds
Dim lo(1 To 120) 'struttura per assenza dei tassi CIR
Dim w(1 To 1000, 1 To 120) 'montanti obbligazionari

Dim sigma As Double 'parametri Black-Scholes
Dim ar(1 To 1000, 1 To 1000) 'output Black-Scholes
Dim h As Integer 'ipotesi contrattuali
Dim premium As Double
Dim fixedcost As Double
Dim variablecost As Double
Dim loading As Double
Dim riskpremium As Double

'accessori
Dim sum(1 To 1000, 1 To 1000) 'funzione cumulativa
Dim prod(1 To 1000, 1 To 1000) 'produttore
Dim sum1(1 To 150) 'tassi probabilizzati del primordine
Dim sum2(1 To 150) 'secondordine
Dim sum3(1 To 150) 'terzordine

Dim i As Integer
Dim j As Integer
Dim k As Integer
Dim q As Integer
Dim l As Integer
Dim y As Integer
Dim m As Integer
Dim o As Integer
Dim w As Integer

Dim s As Integer '# simulazioni

Dim im As Double
Dim wal_rate As Double
Dim h As Double
Dim del As Double
Dim beta As Double
Dim qbond As Double

```

Figura 8.2:

```

Dim requity As Double
Dim step As Double
Dim tau(1 To 120)
Dim obs As Integer
Dim nobe As Integer

Dim Fel To 1000, 1 To 1000 'valore del fondo
Dim Net(1 To 1000, 1 To 1000) 'rendimento del fondo
Dim rc(1 To 1000, 1 To 120) 'rendimento cliquet
Dim vil To 1000, 1 To 120 'fattore di sconto
Dim voliqu(1 To 1000, 1 To 120) 'fattore di valutazione cliquet
Dim bb(1 To 120)
Dim uc(1 To 120)
Dim us(1 To 120)
Dim jjo(1 To 120) 'tassi di valutazione cliquet
Dim tatt(1 To 120)
Dim sumact(1 To 120)
Dim YG As Double 'capitale iniziale

Dim vpolicy1 As Double 'riserva stocastica del primo ordine
Dim vpolicy2 As Double 'riserva stocastica del secondo ordine
Dim vpolicy3 As Double 'riserva stocastica del terzo ordine
Dim EV As Double 'componente base (primo ordine)

'VB limiti: occorre definire tutte le variabili "a priori"...

Dim sum As Double
Dim prod As Double

Dim primordine(1 To 150)
Dim secondordine(1 To 150)
Dim terzordine(1 To 150)

' si puo' inserire la variabile "seco" per differenziare il calcolo maschi/femmine, con link a IPSS5 MASCHI o FEMMINE

'ipotesi di simulazione
s = [simulazioni]
obs = [n_osservazioni]

'ipotesi contrattuali
n = [anni]
premium = [premio] 'premio versato
fixedcosts = [caricamento1] 'caricamenti
variablecosts = [caricamento2]
loadings = [caricamento3]
riapremium = [premium - fixedcosts] * (1 - variablecosts) 'premio puro
val_rate = [tasso_tecnico] 'tasso tecnico
limb = [tasso_minimo] 'tasso minimo garantito
b = [minimo_trattenuto] 'minimo trattenuto
beta = [retrocessione] 'aliquota di retrocessione

'ipotesi di mercato
sigma = [volatilita] 'volatilita' azionaria
rho = [rhoazum]

'composizione del portafoglio
qbond = [parte_obbligazionaria] 'quote obbligazionaria
requity = 1 - qbond 'quote azionaria
dur = [duration] 'duration della parte obbligazionaria (trimestri)
step = [tasso] 'tempo di rigo (anni)
obs = [n_osservazioni] 'osservazioni del tasso spot in un anno
nobs = obs * n 'osservazioni del tasso spot nel corso della vita del contratto

'ipotesi demografiche
For i = 1 To n
primordine(i) = [tbl].Offset(1, 0) 'I ordine, IPSS5 con AGE SHIFTING
secondordine(i) = [tbl].Offset(1, 0) 'II ordine, IPSS5 * 804
terzordine(i) = [tbl].Offset(1, 0) 'III ordine
Next i

'parametri CIA
spotrate = [spot_rate]
rho = [rho]
alpha = [alpha_value]
gamma = [gamma_value]
D = Sqr((spotrate - 2) Or 2 * (rho - 2))
[d_value] = D 'output
ni = (2 * alpha + gamma) / (rho - 2)

'bisognerebbe fare un unico For i = 1 To s

'simulazione valori del tasso spot
For j = 1 To s
If spotrate < 0 Then
r(j), li = 0
Else: r(j), li = spotrate
End If
For k = 1 To nobe
If r(j), k - 1 + (alpha * (gamma - r(j), k - 1) * (1 / obs)) + (rho * Sqr(r(j), k - 1) * (1 / obs)) * random < 0 Then
r(j), k) = 0
Else: r(j), k) = r(j), k - 1 + (alpha * (gamma - r(j), k - 1) * (1 / obs)) + (rho * Sqr(r(j), k - 1) * (1 / obs)) * random
End If
'dinamica dell'indice azionario
as(j), k) = as(j), k - 1 + Exp((r(j), k - 1) - (sigma ^ 2) / 2) * (1 / obs) + sigma * Sqr(1 / obs) * random)
Next k
'parametri prezzi zero coupon bonds
For t = 2 To 120
tau(t) = step
tau(t) = tau(t - 1) + step
Next t
For o = 1 To 120 ]
sol(o) = 2 * D * Exp((alpha - D) * (tau(o) / 2))

```

Figura 8.3:

```

del(0) = (alpha + D) * (Exp(D * tau(0)) - 1) + 2 * D
A(0) = (sum1(0) / del(0)) * (A1)
sum2(0) = 2 * (Exp(D * tau(0)) - 1)
B(0) = (sum2(0) / del(0))
w(0) = A(0) * (Exp(-spotrate) * B(0))
s0(0) = (1 / w(0)) * (1 / tau(0)) - 1
Next 0

'montanti obbligazionari
w(1, 1) = w(0) / w0(dur) * ((A(dur - 1) * (Exp(-r(1, 1) * step * cba) * B(dur - 1)))
For l = 2 To 120
  w(l, 1) = w(l, 1 - 1) * (A(dur - 1) * (Exp(-r(l, 1) * step * cba) * B(dur - 1))) / (A(dur) * (Exp(-r(l, 1 - 1) * step * cba) * B(dur)))
Next l

'valutazione market-to-market del fondo
For y = 1 To n
  F(y, y) = spond * w(l, y * 4) * equity * ax(l, y * cba)
Next y

'simulazione rendimento del fondo
Ret(2, 1) = F(1, 1) - 1
For m = 2 To n
  Ret(2, m) = (F(2, m) - F(2, m - 1)) / F(2, m - 1)

  If beta * Ret(2, m) < Ret(2, m) - h Then 'rendimento cliquet
    If beta * Ret(2, m) - val_rate > imax Then
      rc(2, m) = 1 + (beta * Ret(2, m) - val_rate) / (1 + val_rate)
    Else rc(2, m) = 1 + (imax) / (1 + val_rate)
    End If
  Else
    If Ret(2, m) - h - val_rate > lmin Then
      rc(2, m) = 1 + (Ret(2, m) - h - val_rate) / (1 + val_rate)
    Else rc(2, m) = 1 + (lmin) / (1 + val_rate)
    End If
  End If

  sum1(2, 1) = r(2, 1)
  For q = 1 To m
    sum1(2, q) = r(2, q) + sum1(2, q - 1)
  Next q

  w(2, m) = Exp(-(sum1(2, m) / cba) 'fattori di sconto

  prod(2, 1) = rc(2, 1)
  For q = 1 To m
    prod(2, q) = rc(2, q) * prod(2, q - 1)
  Next q

  vliq(2, m) = (prod(2, m) * v(2, m) 'fattore di valutazione cliquet

Next 2

For y = 1 To n
  w(y) = vliq(2, m) / m
  s0(y) = (1 / w(y)) * (1 / y) - 1 'tasso di valutazione da 1 a 120 cliquet

Next y

For l = 1 To n
  tatti(l) = ((1 / (1 + val_rate)) * 1) * primordine(l)
  sumtatt(0) = 0
  sumtatt(1) = sumtatt(1 - 1) + tatti(1)
Next l
Y0 = riskpremium / sumtatt(n)

'riserva di bilancio
risbil = riskpremium

'riserva stocastica
For y = 1 To n
  sum3(y) = w(y * 1) * primordine(y * 1) + w(y) * primordine(y)
Next y
vpolicy1 = Y0 * sum3(n - 1) 'r.s. del primo ordine

For y = 1 To n
  sum3(y) = w(y * 1) * secondordine(y * 1) + w(y) * secondordine(y)
Next y
vpolicy2 = Y0 * sum3(n - 1) 'r.s. del secondo ordine

For y = 1 To n
  sum3(y) = w(y * 1) * terzordine(y * 1) + w(y) * terzordine(y)
Next y
vpolicy3 = Y0 * sum3(n - 1) 'r.s. del terzo ordine

'valore intrinseco
EV = risbil - vpolicy3
'cella di output
[valore_intrinseco] = EV

'NOTA: sulla base di questa impostazione e delle grandezze definite e' possibile facilmente
' ottenere la scomposizione put e call della riserva stocastica e la scomposizione del
' valore intrinseco in utile da sovrainteresse, sottomortalita', riscatto e caricamento.

End Sub

```

Figura 8.4:

# Ringraziamenti

Una tesi di laurea, oltre che un lavoro di ricerca, è il coronamento di un intero percorso universitario. Per questo desidero ringraziare tutte le persone che mi sono state accanto in tutti questi cinque anni di studio. In primis coloro che in maniera particolare mi hanno spinto ed ispirato, soprattutto nell'ultima parte degli studi, ovvero la prof.ssa Vitali ed il prof. De Felice, dimostrando che l'università italiana può essere sia intellettualmente stimolante sia professionalmente "competitiva".

Ringrazio la mia famiglia, in particolare mia madre e mio padre, che sempre mi hanno sostenuto e stimolato a dare il meglio, e i miei fratelli Giulio, un modello per tanti aspetti, Giorgio, l' "artista", e la "piccola" Livia.

Un pensiero particolarmente forte va a Giulia, la persona che più mi è stata accanto nei due splendidi anni magistrali, regalandomi entusiasmo e sorrisi nei momenti belli ed energia e speranza in quelli più difficili. Ringrazio poi gli amici "di sempre" (Simone, Francesco, Fabrizio, Angelo, Francesca, Claudia ...), i compagni di battaglie politiche e culturali, e ai colleghi di università, con cui abbiamo condiviso ben più di un semplice percorso di formazione.

Proprio alla Facoltà di Scienze Statistiche è indirizzato l'ultimo ringraziamento, per aver formato in ogni anno della propria esistenza centinaia (forse meno, ma i numeri a volte sono reticenti e non dicono tutto) di laureati accademicamente preparati e professionalmente competenti, e per avermi dato ottimi strumenti per percorrere strade variegata e di alto livello, con l'auspicio che la sua missione culturale (pur se sotto spoglie diverse e "ingegneristiche") non rimanga schiacciata dalla pesantezza di un approccio italiano all'università e alla ricerca che forse deve ancora imparare a riconoscere e valorizzare i propri veri potenziali centri d'eccellenza.

# Bibliografia

- [Art-99] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., Heath, D., Coherent measures of risk, *Mathematical Finance*, 9:203-228, 1999.
- [As-10] Assinews, [www.assinews.it](http://www.assinews.it), Gennaio 2010.
- [BdI-09] Banca d'Italia, *Bollettino Economico* n.56., Aprile 2009.
- [BdI-10] Banca d'Italia, *Bollettino Economico* n. 62, Ottobre 2010.
- [Bu-02] Buhlmann, H., *New Math for Life Insurance*, *Astin Bulletin*, 2002.
- [Bu07] Buitter, W. H., *Lessons from the 2007 Financial Crisis*, *Policy insight*, dicembre 2007.
- [CdFM-09a] Castellani, G., De Felice, M., Moriconi, F., *L'internal Model delle Imprese d'Assicurazione, Finalità, Metodi e Tecnologia. Un'esperienza di organizzazione*, Milano: ANIA, IRSA, 2009.
- [CdFM-09b] Castellani, G., De Felice, M., Moriconi, F., *L'internal Model delle Imprese d'Assicurazione, Considerazioni sui "consultation papers" del CEIOPS*, Milano: ANIA, IRSA, 2009.
- [CdFM-05a] Castellani, G., De Felice, M., Moriconi, F., *Manuale di finanza, I volume: Tassi d'interesse. Mutui e obbligazioni*, il Mulino Strumenti, 2005.
- [CdFM-05b] Castellani, G., De Felice, M., Moriconi, F., *Manuale di finanza, II volume: Teoria del portafoglio e del mercato azionario*, il Mulino Strumenti, 2005.
- [CdFM-06] Castellani, G., De Felice, M., Moriconi, F., *Manuale di finanza, III volume: Modelli stocastici e contratti derivati*, il Mulino Strumenti, 2006.
- [CE-08] CEIOPS, *Consultation Paper n. 30*, 2008.
- [CE-09e] CEIOPS, *Consultation Paper n. 32, Technical provisions - Assumptions about future management actions*, Marzo 2009.

- [CE-09a] CEIOPS., Consultation Paper n. 39, 2009.
- [CE-09b] CEIOPS, Consultation Paper n. 41, Technical provisions, Article 85c. Circumstances in which technical provisions shall be calculated as a whole, Luglio 2009.
- [CE-09c] CEIOPS, Consultation Paper n. 56, Tests and standards for internal model approval, Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors, Luglio 2009.
- [DE-09d] CEIOPS, Stock-taking report on the use of internal models in insurance, Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors, Gennaio 2009.
- [CE-10] CEIOPS, QIS5 Technical Specifications, Annex to Call for Advice from CEIOPS on QIS5, European Commission, Internal Market and Services DG, Brussels, 5 Luglio 2010.
- [CdA-05] Codice delle Assicurazioni private, Ministero delle attività produttive, Settembre 2005.
- [CGM] Crouhy, M., Galai, D., Mark, R.. A comparative analysis of current credit risk models, *Journal of Banking and Finance*, 24:59-117, 2000.
- [Da89] Daboni, L., *Lezioni di tecnica attuariale per le assicurazioni contro i danni*, Lint Editoriale, 1989.
- [Dan-01] Danault, M., Coherent allocation of risk capital. *Journal of Risk*, 2001.
- [DFe09] De Felice, M., E' misurabile il rischio? Intuito, scienza, razionalità, caso nella scelta finanziaria, *Sapienza Università di Roma*, 2009.
- [DeF-10] De Felice, M., Il profit test (delle polizze rivalutabili) tra Regolamento 21 e Solvency II, *Istituto Italiano degli Attuari*, Giugno 2010.
- [DFGMoPiSal-10] De Felice, Giorello, Moriconi, Piccinato, Salinetti, *Conoscere de Finetti, Per il governo dell'incertezza*, Mondadori Università, 2010.
- [DeFM-09] De Felice, M., Moriconi, F., *Finanza dell'Assicurazione sulla vita - principi per l'asset-liability management e per la misurazione dell'embedded value*, *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, 1-2 ed., 2002.
- [DeFM-94] De Felice, M., Moriconi, F., *Un modello per la progettazione e la valutazione di polizze indicizzate e rivalutabili*, *Rapporto per l'INA*, Roma, Giugno 1994.



- [deFi-89] de Finetti, B., *La logica dell'incerto*, il Saggiatore, Milano, 1989.
- [deFi-70] de Finetti, B., *Teoria della probabilità*, Torino, Einaudi, 1970.
- [deFi-06] de Finetti, B., *L'invenzione della verità*, Raffaello Cortina, Milano, 2006.
- [09/138/CE] DIRETTIVA 2009/138/CE DEL PARLAMENTO EUROPEO E DEL CONSIGLIO del 25 novembre 2009 in materia di accesso ed esercizio delle attività di assicurazione e di riassicurazione, *Gazzetta Ufficiale dell'Unione Europea*, 2009.
- [DV-99] Donati, A., Volpe Putsolu, G., *Manuale di diritto delle assicurazioni*, Giuffrè Editore, 1999.
- [EC] European Commission. [http://ec.europa.eu/internal\\_market/index\\_en.htm](http://ec.europa.eu/internal_market/index_en.htm).
- [FSA-08] Financial Services Authority, *Insurance Risk Management: The Path of Solvency II*, FSA, Settembre 2008.
- [FSA-09] Financial Services Authority, *Policy Statement 09/20 Stress and scenario testing - feedback on CP08/24 and final rules*, FSA, Dicembre 2009.
- [FSA-10] Financial Services Authority, *Solvency II - IMAP update Pre-application processes*, Aprile 2010.
- [Fi-03] Fischer, T., Risk capital allocation by coherent risk measures based on one-sided moments. *Insurance: Mathematics and Economics* 32:135-146, 2003.
- [Gi00] Gibson, R., *Model Risk, Concepts, Calibration and Pricing*. London: Risk Waters Group, 2000.
- [Hu06] Hull, J.C., *Options, Futures and Other Derivatives*, Pearson, 2006.
- [InsT-10] Insurance Times, Insurers told not to "waste" Solvency II opportunity, *Insurance Times*, 11 Ottobre 2010.
- [IAA04] Insurer Solvency Assessment Working Party, *A Global Framework for Insurer Solvency*, International Actuarial Association, 2004.
- [IAIS-08] International Association of Insurance Supervisors, *Guidance paper on the use of internal models for regulatory capital purposes*, Ottobre 2008.
- [IMF-07] International Monetary Fund, *Financial market Turbulence: Causes, Consequences and Policies*, Global Financial Stability Report, IMF, Settembre 2007.

- [ISV-05] ISVAP, Regolamento n. 19, 2008.
- [ISV-08] ISVAP, Regolamento recante disposizioni in materia di controlli interni, gestione dei rischi, compliance ed esternalizzazione delle attività delle imprese di assicurazione n. 20, 26 Marzo 2008.
- [ISV-09] ISVAP, Indagine conoscitiva stress test, lettera circolare, Luglio 2009.
- [JD97] Johnson, J., Dinardo, J., *Econometric Methods*, MacGraw-Hill, 1997.
- [Kni-21] Knight, F. N., *Risk, Uncertainty and Profit*, Houghton Mifflin, New York, 1921.
- [Ko33] Kolmogorov, A. N., *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ergebnisse der Mathematik*, Springer, 1993.
- [Klo90] Kloman, H. F., Risk management agonists. *Risk Analysis*, 10:201-205, 1990.
- [LR95] Lawrence, C., Robinson, G., Liquid measures. *Risk* 8: 52-55, 1995.
- [Le-83] Leti, G., *Statistica Descrittiva*, il Mulino, 1983.
- [Ma-52] Markovitz, H. M., Portfolio Selection. *Journal of Finance* 7:77-91.
- [Ma-07] Masera, R., The Recent Disruptions in Financial Markets: implications for the implementation of Basel II, Lehman Brothers and University G. Marconi, 2007.
- [MR07] Mason, J. R., Rosner, J., Where Did the Risk Go? How Misapplied Bond Ratings Cause Mortgage Backed Securities and Collateralized Debt Obligation Market Disruptions. Maggio 2007.
- [McNFE05] McNeil, A. J., Frey, R., Embrechts, P., *Quantitative Risk Management. Concepts, Techniques and Tools*, Princeton Series in Finance, 2005.
- [MvN-44] Morgenstein, O., Von Neumann, J., *Theory of Games and Economic Behavior*, 1944.
- [Mu-97] Muller et al., Report of the Working Group "Solvency of Insurance Undertakings", Conference of the European Union Member States, [www.ceiops.org](http://www.ceiops.org), 1997.
- [OW-10] Olive Wyman, Morgan Stanley, European Insurance: Solvency 2, 22 Settembre 2010.
- [Pi-07] Pitacco, E., *Matematica e tecnica attuariale delle assicurazioni sulla durata di vita*, Trieste, Lint, 2007.

- [ALM] Professional Actuarial Specialty Guide, Society of Actuaries, Gennaio 1998.
- [Reb-10] Rebonato, R., Coherent stress testing, A Bayesian Approach to the Analysis of Financial Stress, Wiley, 2010.
- [Red-52] Redington, F. M., Review of the Principles of Life Office Valuations, Journal of the Institute of Actuaries, vol. 78, pages 286-340, 1952.
- [Rob-36] Robertson, D. H., Some notes on Mr. Keynes' General Theory of Employment, The Quarterly Journal of Economics, 51(1), 168-191, 1936.
- [Sar-08] Sarcinelli, 2007: la crisi dei subprime, Roma, 2008.
- [Sa-10] Savelli, N., Testimonianze sul tema: Il progetto Solvency II, Sapienza Università di Roma, Maggio 2010.
- [Sk-59] Sklar, A., Funzioni di ripartizione n dimensionali e loro marginali, Istituto di Statistica dell'Università di Parigi, 8, 1959.
- [Sp-08] Spaventa, Una crisi nella nuova finanza, Sapienza Università di Roma, Febbraio 2008.
- [Tas-99] Tasche, D., Risk Contributions and performance measurement, Preprint, Department of Mathematics, 1999.
- [Ti-44] Tilgher, A., Relativisti contemporanei G. Bardi, Roma, 1944.