



ulm university universität  
**uulm**

Universität Ulm  
Fakultät für Mathematik und  
Wirtschaftswissenschaften

Modelling and Management of non-linear dependencies:  
An application for stress testing

Diplomarbeit  
in Wirtschaftsmathematik

vorgelegt von  
Weidner, Wiltrud  
am 09.02.2010

**Gutachter**  
Prof. Dr. M. Eling  
Prof. Dr. H.-J. Zwiesler

# Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis.....	III
Tabellenverzeichnis.....	V
Symbolverzeichnis.....	VII
1 Einleitung.....	1
2 Grundlagen.....	3
2.1 Praxis des Stress Testing.....	3
2.1.1 Stresstests.....	3
2.1.2 Stressszenarien.....	5
2.1.3 Rechtlicher Rahmen.....	21
2.2 Struktur eines Modells für die Dynamische Finanzanalyse.....	22
2.3 Messung von Risiko, Rendite und Performance in der Dynamischen Finanzanalyse.....	27
2.3.1 Renditemaße.....	27
2.3.2 Risikomaße.....	27
2.3.3 Performancemaße.....	29
2.4 Copulas.....	30
2.4.1 Das Copula-Konzept.....	30
2.4.2 Copula-Familien.....	32
2.4.3 Abhängigkeiten.....	35
2.4.4 Eigenschaften der ausgewählten Copulas.....	37
3 Simulationsmodell.....	40
3.1 Modellrahmen.....	40
3.2 Mathematische Modellierung und Implementierung nichtlinearer Abhängigkeiten.....	43
3.3 Parameterwahl.....	46
4 Ergebnisse.....	49
4.1 Originäres Simulationsergebnis.....	49

---

4.2	Schätzrisiko in Modellen der Dynamischen Finanzanalyse.....	54
4.3	Underwriting Cycle in Modellen der Dynamischen Finanzanalyse.....	60
4.4	Stress Testing.....	64
4.4.1	Integration von Stress Testing in der Dynamischen Finanzanalyse.....	64
4.4.2	Implementierung des Stress Testing im Modell der Dynamischen Finanzanalyse.....	66
4.4.3	Vergleich mit dem BaFin-Stresstest.....	88
5	Schlussfolgerung und Ausblick.....	96
	Anhang: Stressszenarien bei Betrachtung unterschiedlicher Grundgesamtheit.....	99
	Literaturverzeichnis.....	107

## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 01: Grundsätzliche Struktur eines DFA-Modells (vgl. [Zwiesler (2005)], S. 123).....	23
Abbildung 02: Modellstruktur eines Internen Modells in der Schaden- und Unfallversicherung (siehe [Diers (2007)], S. 44).....	24
Abbildung 03: Abhängigkeitsstruktur im DFA-Modell (vgl. [Eling, Toplek (2009)], S. 660).....	44
Abbildung 04: Abhängigkeitsstruktur der vier-dimensionalen hierarchischen Archimedischen Copula im DFA-Modell (vgl. [Eling, Toplek (2009)], S. 660).....	45
Abbildung 05: Anteile der Fallgruppen bei Annahme der Unkorreliertheit.....	73
Abbildung 06: Anteile der Fallgruppen mit der Gauss-Copula.....	76
Abbildung 07: Anteile der Fallgruppen mit der Clayton-Copula.....	79
Abbildung 08: Gesamtübersicht der Stressszenarien von Fall 1 (Grundgesamtheit: 100 schlechteste Szenarien).....	81
Abbildung 09: Gesamtübersicht der Stressszenarien von Fall 1 (Grundgesamtheit: 100, 500, 2.500 schlechteste Szenarien).....	82
Abbildung 10: Gesamtübersicht der Stressszenarien von Fall 2 (Grundgesamtheit: 100 schlechteste Szenarien).....	83
Abbildung 11: Gesamtübersicht der Stressszenarien von Fall 2 (Grundgesamtheit: 100, 500, 2.500 schlechteste Szenarien).....	84
Abbildung 12: Gesamtübersicht der Stressszenarien von Fall 3 (Grundgesamtheit: 100 schlechteste Szenarien).....	85
Abbildung 13: Gesamtübersicht der Stressszenarien von Fall 3 (Grundgesamtheit: 100, 500, 2.500 schlechteste Szenarien).....	85
Abbildung 14: Gesamtübersicht der Stressszenarien von Fall 4 (Grundgesamtheit: 100, 500, 2.500 schlechteste Szenarien).....	87
Abbildung 15: Gesamtübersicht der Stressszenarien von Fall 5 (Grundgesamtheit: 100, 500, 2.500 schlechteste Szenarien).....	87
Abbildung 16: Gesamtübersicht der Stressszenarien von Fall 6 (Grundgesamtheit: 100, 500, 2.500 schlechteste Szenarien).....	88

---

Abbildung 17: Schlussbilanz am 31.12.2008 = Eröffnungsbilanz am 01.01.2009.....	91
Abbildung 18: Bilanzsumme im Simulationsmodell im Jahresverlauf.....	91
Abbildung 19: Bilanz des Beispielunternehmens am 01.01.2009 im Tagesverlauf.....	92
Abbildung 20: Aktienquote der deutschen Versicherungsunternehmen (vgl. [BaFin (1994-2008)] und Geschäftsberichte der Versicherungsunternehmen).....	95

## Tabellenverzeichnis

Tabelle 01: Übersicht über Stresstests.....	3
Tabelle 02: Überblick von in Stresstests verwendeten Szenarien.....	6
Tabelle 03: Abschläge für die Aktien im BaFin-Stresstest 2009 (siehe [BaFin (2008)]).....	8
Tabelle 04: Abschläge für Fixed Income Titel im BaFin-Stresstest 2009 (siehe [BaFin (2004)], Teil A).....	9
Tabelle 05: Überblick von in Solvenzsystemen verwendeten Stressszenarien.....	13
Tabelle 06: Abhängigkeitseigenschaften für die betrachteten elliptischen Copulas (vgl. [Koziol (2006)], S. 671).....	37
Tabelle 07: Abhängigkeitseigenschaften für die betrachteten hierarchischen Archimedischen Copulas mit vollständig monotonen Generatoren und mit dazugehörigem Parameterraum (vgl. [Okhrin, Okhrin, Schmid (2009)], S. 4 und [Koziol (2006)], S. 671).....	37
Tabelle 08: Ergebnisse bei der Simulation für die Null-Strategie.....	49
Tabelle 09: Ergebnisse bei der Simulation für die Solvency-Strategie.....	51
Tabelle 10: Ergebnisse bei der Simulation für die Limited-Liability-Strategie.....	52
Tabelle 11: Ergebnisse bei der Simulation für die Wachstumsstrategie.....	52
Tabelle 12: Ergebnisse bei der Simulation für die Rückversicherungsstrategie.....	53
Tabelle 13: Erwartungswert der Risikomaße für die Null-Strategie bei 10.000 Iterationen und 10.000 Simulationen.....	57
Tabelle 14: Standardabweichung der Risikomaße für die Null-Strategie bei 10.000 Iterationen und 10.000 Simulationen.....	58
Tabelle 15: Variationskoeffizient der Risikomaße für die Null-Strategie bei 10.000 Iterationen und 10.000 Simulationen.....	59
Tabelle 16: Regression der versicherungstechnischen Gewinnquoten über alle Versicherungszweige (vgl. [Cummins, Outreville (1987)], S. 256).....	61
Tabelle 17: Simulationsergebnisse für die Null-Strategie bei unterschiedlicher Modellierung des Underwriting Cycles im Falle der Unkorreliertheit.....	63
Tabelle 18: Anzahl der Szenarien für die Null-Strategie mit $EC < 0$ .....	67
Tabelle 19: Schlechteste 30 Szenarien bei Annahme der Unkorreliertheit.....	68
Tabelle 20: Fallgruppen innerhalb der schlechtesten Szenarien.....	72

---

Tabelle 21: Stressszenarien bei Betrachtung der 100 schlechtesten Szenarien mit Annahme der Unkorreliertheit.....	74
Tabelle 22: Stressszenarien bei Betrachtung der 100 schlechtesten Szenarien mit der Gauss-Copula.....	77
Tabelle 23: Stressszenarien bei Betrachtung der 100 schlechtesten Szenarien mit der Clayton-Copula.....	80
Tabelle 24: Übersicht der Stressszenarien für die Durchführung des BaFin-Stresstests.....	89
Tabelle 25: Stresstest für die Schaden- und Unfallversicherung zum 31.12.2009 nach dem Stresstestmodell der BaFin (vgl. [BaFin (2002/2008)]) mit den Szenarien aus dem BaFin-Stresstest (vgl. Tabelle 24).....	93
Tabelle 26: Stresstest für die Schaden- und Unfallversicherung zum 31.12.2009 nach dem „modifizierten“ Stresstestmodell der BaFin (vgl. [BaFin (2002/2008)]) mit den Szenarien aus dem DFA-Modell (vgl. Tabelle 24).....	94
Tabelle 27: Stressszenarien mit Annahme der Unkorreliertheit.....	99
Tabelle 28: Stressszenarien mit der Gauss-Copula.....	100
Tabelle 29: Stressszenarien mit der t-Copula.....	101
Tabelle 30: Stressszenarien mit der Gumbel-Copula.....	102
Tabelle 31: Stressszenarien mit der Survival-Gumbel-Copula.....	103
Tabelle 32: Stressszenarien mit der Clayton-Copula.....	104
Tabelle 33: Stressszenarien mit der Survival-Clayton-Copula.....	105
Tabelle 34: Stressszenarien mit der Frank-Copula.....	106

## Symbolverzeichnis

$\alpha_{t-1}$	Anteil an riskanten Kapitalanlagen in Periode t
$\beta_{t-1}$	Marktanteil des Versicherers in Periode t
$C_{cat,t}$	Paretoverteilte Katastrophenschäden in Periode t
$E(C_{cat,t})$	Erwartete Schäden in Periode t
$D(C_{cat,t})$	Streuungsparameter in Periode t
$C_{ncat,t}$	Lognormalverteilte Nicht-Katastrophenschäden als Anteil am gezeichneten Marktvolumen in Periode t
$E(C_{ncat,t})$	Erwartete Schäden in Periode t
$\sigma(C_{ncat,t})$	Standardabweichung der Schäden in Periode t
$C_t$	Schäden in Periode t (fallen annahmegemäß am Ende der Periode an)
$cr_{t-1}$	Consumer-Response-Funktion in Periode t
$\delta$	Schadenregulierungskosten als Anteil an den Schäden
$E_t$	Gewinn am Ende der Periode t
$EC_t$	Eigenkapital am Ende der Periode t
$E(G)$	Erwarteter Gewinn pro Periode
EPD	Expected Policyholder Deficit
$Ex^C_t$	Schadenregulierungskosten in Periode t (fallen annahmegemäß am Ende der Periode an)
$Ex^P_{t-1}$	Abschlusskosten in Periode t (fallen annahmegemäß am Anfang der Periode an)
$\eta$	Abschlusskosten hängen quadratisch von der Veränderung des gezeichneten Marktvolumens ab
$\gamma$	Abschlusskosten hängen linear vom gezeichneten Marktvolumen ab
$i$	Marktwachstum
$I_t$	Kapitalanlageergebnis am Ende der Periode t
MV	Volumen des Versicherungsmarktes
$P_{t-1}$	Prämien in Periode t (fallen annahmegemäß am Anfang der Periode an)
$\Pi_t$	Prämienkursniveau in Periode t
$r_f$	Risikolose Rendite
$r_{1t}$	Normalverteilte Rendite der riskanten Kapitalanlagen in Periode t
$E(r_{1t})$	Erwartete Rendite
$\sigma(r_{1t})$	Standardabweichung der Rendite
$r_{2t}$	Normalverteilte Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen in Periode t
$E(r_{2t})$	Erwartete Rendite
$\sigma(r_{2t})$	Standardabweichung der Rendite
ROI	Return on Investment



---

RP	Ruinwahrscheinlichkeit
$r_{pt}$	Portfoliorendite in Periode t
$\rho_{\tau 1}$	Kendall's Rangkorrelation zwischen riskanten und risikoarmen Kapitalanlagen
$\rho_{\tau 2}$	Kendall's Rangkorrelation zwischen Nicht-Katastrophenschäden und Katastrophenschäden
$\rho_{\tau 3}$	Kendall's Rangkorrelation zwischen Assets und Liabilities
$SR_{EPD}$	Sharpe Ratio basierend auf dem Expected Policyholder Deficit
$SR_{RP}$	Sharpe Ratio basierend auf der Ruinwahrscheinlichkeit
$SR_{\sigma}$	Sharpe Ratio basierend auf der Standardabweichung der Renditen
$\sigma(G)$	Standardabweichung des Gewinns pro Periode
t	Betrachtete Periode (eine Periode entspricht einem Jahr)
T	Zeithorizont in Jahren
$TVaR_{\alpha}(L)$	Tail Value at Risk der Zufallsvariablen L zum Konfidenzniveau $(1 - \alpha)$
tr	Steuersatz
$U_t$	Versicherungstechnisches Ergebnis am Ende der Periode t
$VaR_{\alpha}(L)$	Value at Risk der Zufallsvariablen L zum Konfidenzniveau $(1 - \alpha)$

# 1 Einleitung

In einem deregulierten Versicherungsmarkt, in dem nicht staatlich verordnete große Margen Risikobewusstsein ersetzen, haben Kurssprünge an Börsen, Bewertungsänderungen bei ganzen Anlageklassen und neue Großschadenszenarien durch Naturkatastrophen und technischen Fortschritt zur Notwendigkeit geführt, Extremsituationen systematisch in die Unternehmensplanung einzubeziehen. Die Staatsaufsicht über die Versicherungsbranche hat international mit Solvency II und national mit Mindestanforderungen an das Risikomanagement (MaRisk VA) die Entwicklung von zuverlässigen Prozessen für Stresstests erforderlich gemacht.

Das Stress Testing, bei dem besonders ungünstige Entwicklungen getestet werden, ist ein wesentliches Element im Risikomanagement eines Versicherungsunternehmens, um die Risikotragfähigkeit sicherzustellen. Die Entwicklungsszenarien werden dabei deterministisch angenommen. Bei einem Stress Testing werden eher kurze Zeiträume untersucht und bilanzielle Aspekte berücksichtigt. In der Praxis stellt es daher eine wesentliche Ergänzung zu stochastischen, auf ökonomischer Sichtweise basierenden Methoden dar.

Bei der Definition von Stresstests wird in der Regel auf Szenarien zurückgegriffen, die extreme und somit seltene Entwicklungen am Kapitalmarkt beinhalten. So sehen die vier Stressszenarien des Stresstests der Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (BaFin) vor, dass sich der Kapitalanlagebestand an Aktien, Rentenpapieren bzw. Immobilien durch Kursrückgänge stark reduziert. Hintergrund dieser Szenarien sind finanztheoretische Überlegungen auf Basis historischer Daten. Stressszenarien, die auf die unternehmensindividuelle Risikosituation abgestellt sind, können aus Modellen der Dynamischen Finanzanalyse abgeleitet werden (vgl. [Zwiesler (2005)], S. 126). Insbesondere im Zusammenhang mit Extremereignissen ist hier eine Modellierung nichtlinearer Abhängigkeiten wichtig (vgl. [Achleitner, Biebel, Wichels (2002)], S. 280).

Die vorliegende Diplomarbeit baut auf einem Paper und dem dazugehörigen Modell auf, das Prof. Dr. Martin Eling und Dr. Denis Toplek im Journal of Risk and Insurance veröffentlicht haben (vgl. [Eling, Toplek (2009)]). Sie implementierten verschiedene Copulas in

ein Modell der Dynamischen Finanzanalyse und analysierten deren Einfluss auf den Gewinn und das Risiko eines Schaden- und Unfallversicherers. Dabei zeigten sie große Unterschiede bei der Risikobewertung mit den Risikomaßen Expected Policyholder Deficit und Ruinwahrscheinlichkeit abhängig vom Copula-Konzept auf (vgl. [Eling, Toplek (2009)], S. 666 ff.).

Ziel dieser Arbeit ist es nun, Stressszenarien unter unterschiedlichen Abhängigkeitsbeziehungen zu identifizieren und diese im Rahmen des Stress Testing zu nutzen. Dafür wird im Simulationsbeispiel ein Schaden- und Unfallversicherungsunternehmen mit typisch deutschen Merkmalen betrachtet, indem entsprechende Daten und Solvabilitätsregeln verwendet werden. Abweichend von der bisher gebräuchlichen Definition eines Stressszenarios wird ein Stressszenario für diese Analyse allgemein durch ökonomisch negative Ausprägungen aller zugrunde liegenden Risikofaktoren definiert.

Die Analyse zeigt, dass nichtlineare Abhängigkeiten und die Anzahl der betrachteten kritischen Szenarien einen starken Einfluss auf die Ausprägung und die Zusammensetzung der Risikoquellen haben. Das ist ein wesentliches Ergebnis für Aufsichtsbehörden und Rating-Agenturen.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: In Kapitel 2 werden die Grundlagen zur Vorgehensweise beschrieben. Zum einen werden Begrifflichkeiten zum Stress Testing eingeführt, zum anderen die Grundstruktur eines Modells für die Dynamische Finanzanalyse, Kenngrößen zur Messung von Risiko, Rendite und Performance sowie das Copula-Konzept. In Kapitel 3 wird das verwendete Modell vorgestellt und beschrieben, wie in diesem nichtlineare Abhängigkeiten modelliert werden. In Kapitel 4 werden die Auswirkungen der Copulas auf das Risiko und den Gewinn sowie das Schätzrisiko, der Underwriting Cycle und das Stress Testing in der Beispielsimulation analysiert. Die Arbeit wird mit einer Schlussfolgerung in Kapitel 5 abgeschlossen.

## 2 Grundlagen

### 2.1 Praxis des Stress Testing

#### 2.1.1 Stresstests

Bei einem Stresstest findet eine Projektion der Unternehmensdaten unter Annahme bestimmter besonders adverser zukünftiger Szenarien statt (vgl. z.B. [Zwiesler (2005)], S. 125 und [KPMG (2002)], S. 56 f.). Getestet wird, inwiefern die gegenüber dem Versicherungsnehmer eingegangenen Verpflichtungen und die Solvabilitätsanforderungen erfüllbar sind, wenn es zu einer Stresssituation kommt. Stresstests helfen Versicherungsunternehmen, die Auswirkungen von extremen Entwicklungen auf die Bilanz einzuschätzen. Sie liefern dem Versicherungsunternehmen einen Anhaltspunkt dafür, welche Parameter und Situationen im Rahmen des Risikomanagements regelmäßig überprüft werden sollten. Sie sind also ein Baustein im Risikomanagement.

Beispiele für derzeit existierende Stresstests sind in Tabelle 01 zu sehen.

Bezeichnung	Einführung in	Jahr
Stresstest	Deutschland (BaFin)	2002
Stress-Test (LV)	Deutschland (DAV)	2004
Stress-Test (S/U)	Deutschland (DAV)	2005
Stress Test	Europa (CEIOPS)	2009
Resilience Test for Life Insurers	United Kingdom (FSA)	1985
Reverse-Stress Test	United Kingdom (FSA)	2008

**Tabelle 01:** Übersicht über Stresstests

In Deutschland werden Versicherungen jährlich in einem sogenannten „Stresstest“ von der Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (BaFin) überprüft (vgl. [BaFin (2002)], [BaFin (2004)], [BaFinJournal (2008)], S. 19 und [BaFin (2008)]).<sup>1</sup> Die beiden Hauptziele

<sup>1</sup> Nach § 6 der Anlageverordnung (AnIV) haben Versicherungsunternehmen die Einhaltung der Anlage-

bestehen gemäß § 81, Absatz 1 Versicherungsaufsichtsgesetz (VAG) darin, die Belange der Versicherten ausreichend zu wahren und sicherzustellen, dass die Verpflichtungen aus den Versicherungsverträgen jederzeit erfüllbar sind. Der Stresstest überprüft, ob das Versicherungsunternehmen trotz einer eintretenden, anhaltenden Krisensituation auf dem Kapitalmarkt in der Lage wäre, die gegenüber den Versicherungsnehmern eingegangenen Verpflichtungen mit entsprechenden Vermögenswerten zu bedecken.<sup>2</sup>

Die Deutschen Aktuarvereinigung (DAV) hat in mehreren Arbeitsgruppen vor dem Hintergrund der Anforderungen an die Aktuar<sup>3</sup> aktuarielle Methoden und Standards zur Überprüfung der Finanzlage entwickelt (vgl. [DAV (2004)], S. 1-10, [DAV (2005)], S. 1-6 und [DAV (2006)], S. 1-2). Zu untersuchen sind nach der Klassifizierung des Deutschen Rechnungslegungsstandards Nr. 5-20 (DRS 5-20) (vgl. [DRSC (2001)], Abschnitt 2) das Markt- und Bonitäts- sowie Liquiditätsrisiko der Kapitalanlagen. Zur Beurteilung der Marktrisiken sind die Auswirkungen eines Zusammenbruches des Kapitalmarktes auf eine vereinfachte Bilanz im Rahmen eines „Stress-Tests“ zu überprüfen. Normierte Stress-Tests wurden hierzu sowohl von der BaFin (s.o.) als auch von der DAV (vgl. [DAV (2004)], S. 3 ff.) entwickelt.

---

grundsätze des § 54, Absatz 1 Versicherungsaufsichtsgesetz (VAG) und der § 1 bis 5 AnlV „durch ein qualifiziertes Anlagemanagement, geeignete interne Kapitalanlagegrundsätze und Kontrollverfahren, eine perspektivische Anlagepolitik sowie sonstige organisatorische Maßnahmen sicherzustellen“. Zur Konkretisierung der Anforderungen des § 6 AnlV hat die Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (BaFin) im Dezember 2002 die Rundschreiben R 29/2002 (VA) und R 30/2002 (VA) erlassen, die zwischenzeitlich durch die Rundschreiben R 1/2004 (VA) (inkl. Bekanntmachung im [BaFinJournal (2008)], S. 19), R 11/2005 (VA) und R 15/2005 (VA) ersetzt wurden.

- 2 Inhaltlich handelt es sich dabei um das in den 90er Jahren vom Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft (GDV) entwickelte Stresstestmodell (vgl. Rundschreiben R 30/2002 (VA), Teil C).
- 3 Gemäß § 11a, Absatz 3, Nr. 1, Satz 2 VAG muss der Verantwortliche Aktuar „die Finanzlage des Unternehmens insbesondere daraufhin überprüfen, ob die dauernde Erfüllung der sich aus den Versicherungsverträgen ergebenden Verpflichtungen jederzeit gewährleistet ist und das Unternehmen über ausreichende Mittel in Höhe der Solvabilitätsspanne verfügt“. Der Verantwortliche Aktuar hat damit die Pflicht, die künftige Entwicklung der Verpflichtungen, der Solvabilitätsspanne und der sie bedeckenden Aktiva einzuschätzen. Er hat dabei dem Prinzip der Vorsicht Rechnung zu tragen (§ 6, Abs. 4, Nr. 4 AktuarV).

Ein EU-weiter „Stress Test“ wird erstmals im Dezember 2009 von der europäischen Aufsicht Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors (CEIOPS) durchgeführt (vgl. [CEIOPS (2009)], S. 1). CEIOPS verlangt diesen Stresstest von den größten und wichtigsten Versicherungsgruppen Europas, damit die politischen Entscheidungsträger die Belastbarkeit des europäischen Versicherungssektors durch Schocks besser beurteilen können; dies ist ein weiterer Schritt zur Vereinheitlichung der Aufsichtspraktiken. Der Stresstest enthält Szenarien, die sowohl auf die Aktiv- als auch auf die Passivseite der Bilanz Auswirkungen haben.

Auf dem britischen Markt ist ein Stresstest für Lebensversicherungsunternehmen unter der Bezeichnung „Resilience Test“ aus Sicht der Versicherungsaufsicht Financial Services Authority (FSA) verpflichtend (vgl. [FSA (2002)], S. 1). Das Szenario dieses Tests beruht auf den Erfahrungen der schweren Wirtschaftskrise der 80er Jahre in Großbritannien.

Im Dezember 2008 schlug die FSA weiterhin vor, für Unternehmen – sowohl für Banken als auch für Versicherungen – einen sogenannten „Reverse-Stress Test“ einzuführen (vgl. [FSA (2008)], S. 3), der auf einem weiterentwickelten Konzept beruht. Der Reverse-Stress Test soll den Unternehmen einen Anreiz dafür geben (vgl. [FSA (2008)], S. 23),

1. die Schwachstellen ihres Geschäftsplanes umfangreicher zu überprüfen,
2. Entscheidungen darüber zu treffen, Geschäfts- und Investitionspläne besser aufeinander abzustimmen und
3. ihren Notfallplan zu verbessern.

Dazu sollen Unternehmen ihre Solvabilität mit eigens bestimmten Szenarien, abgestellt auf die unternehmensindividuelle Finanz- und Risikosituation, überprüfen (vgl. [FSA (2008)], S. 15).

### **2.1.2 Stressszenarien**

Bei der Definition von Stresstests wird häufig auf Szenarien zurückgegriffen, die extreme und somit seltene Entwicklungen am Kapitalmarkt nach allgemeinen Kriterien beinhalten (siehe Tabelle 02), die im Anschluss beschrieben werden.

Fundstelle	Bezeichnung	Aktivseite			Szenario	Passivseite
		Festver- zinsliche Wertpapiere	Aktien	Immobilien		
Stresstest, Deutschland (BaFin), 2002						
[BaFin (2002)], Teil C, [BaFin (2004)], Teil A, [BaFinJournal (2008)], S. 19, [BaFin (2008)]	R 10  Isoliertes Aktien- szenario  Renten- und Aktien- szenario  Aktien- und Immobilien- szenario	MW: -10 %   MW: -5 %   MW: -10 %	  entsprechend Indexstand zum 31.12.08  entsprechend Indexstand zum 31.12.08  entsprechend Indexstand zum 31.12.08	     MW: -10 %		
Stress-Test (Lebensversicherung / Pensionskasse), Deutschland (DAV), 2004						
[DRSC (2001)], Abschnitt 29, [DAV (2004)], S. 3-5, [DAV (2006)], S. 2	Basisszenario  Szenario mit einjährigem Gedächtnis	i: +2 %  i: +1 % bis +2 %	MW: -35 %  MW: -20 % bis -35 %			
Stress-Test (Schaden- und Unfallversicherung), Deutschland (DAV), 2005						
[DAV (2005)], S. 4-5, [DAV (2006)], S. 2	Szenarien des BaFin- Stresstests					
Stress Test, Europa (CEIOPS), 2009						
[CEIOPS (2009)], S. 1-2	Szenario 1  Szenario 2  Szenario 3				Bad Bear Market 09/08 - 09/09  Rezession  Inflation, höhere Leitzinsen	  berück- sichtigt  berück- sichtigt
Resilience Test for Life Insurers, United Kingdom (FSA), 1985						
[GAD (1985)], [FSA PN (2001)], [FSA (2002)], S. 1-2, [FSA PN (2002)]	1980s V scenario	i: $\pm 3\%$ <sup>*)</sup>	MW: -25 %			
Reverse-Stress Test, United Kingdom (FSA), 2008 (Vorschlag)						
[FSA (2008)], S. 3-4	Unterneh- mensindivi- duell					

MW: Marktwert, i: Zins, \*): long-term interest rate

**Tabelle 02:** Überblick von in Stresstests verwendeten Szenarien

Die Szenarien, mit Hilfe derer die Finanzstärke der Versicherungsunternehmen im „Stresstest“ der BaFin getestet wird, sehen vor, dass sich der Kapitalanlagebestand an Aktien, Rentenpapieren bzw. Immobilien durch Kursrückgänge stärker reduziert. Die vier Stressszenarien sind wie folgt festgelegt (siehe [BaFin (2002)], Teil C, [BaFin (2004)], Teil A, [BaFinJournal (2008)], S. 19, [BaFin (2008)]):

- R 10: Kursrückgang festverzinslicher Wertpapiere um 10 %, Bonitätsabschläge abhängig vom Rating.
- Isoliertes Aktienszenario<sup>4</sup>: Kursrückgang Aktien entsprechend Indexstand zum 31.12.2008, Bonitätsabschläge abhängig vom Rating.
- Renten- und Aktienszenario<sup>5</sup>: Kursrückgang Aktien entsprechend Indexstand zum 31.12.2008 und Kursrückgang festverzinslicher Wertpapiere um 5 %, Bonitätsabschläge abhängig vom Rating.
- Aktien- und Immobilienszenario<sup>6</sup>: Kursrückgang Aktien entsprechend Indexstand zum 31.12.2008 und Marktwertrückgang Immobilien um 10 %, Bonitätsabschläge abhängig vom Rating.

---

4 Die BaFin hat einige Parameter der im Rundschreiben R 1/2004 (VA) vorgegebenen Stresstestszenarien für den Stresstest 2009 ergänzt und damit Szenarien geändert. Bis zum Stichtag 31. Dezember 2008 galt an dieser Stelle das Szenario

A 35: Kursrückgang Aktien um 35 %, Bonitätsabschläge abhängig vom Rating.

5 Die BaFin hat einige Parameter der im Rundschreiben R 1/2004 (VA) vorgegebenen Stresstestszenarien für den Stresstest 2009 ergänzt und damit Szenarien geändert. Bis zum Stichtag 31. Dezember 2008 galt an dieser Stelle das Szenario

RA 25: Kursrückgang Aktien um 20 %, Kursrückgang festverzinslicher Wertpapiere um 5 %, Bonitätsabschläge abhängig vom Rating.

6 Die BaFin hat einige Parameter der im Rundschreiben R 1/2004 (VA) vorgegebenen Stresstestszenarien für den Stresstest 2009 ergänzt und damit Szenarien geändert. Bis zum Stichtag 31. Dezember 2008 galt an dieser Stelle das Szenario

AI 30: Kursrückgang Aktien um 20 %, Kursrückgang Immobilien um 10 %, Bonitätsabschläge abhängig vom Rating.



Der minimale Abschlag für Aktien beträgt 10 %. Der maximale Abschlag im Aktieneinzelszenario beträgt 45 % und im gemischten Szenario 25 %. Die Abschläge ergeben sich aus folgender Tabelle (siehe [BaFin (2008)]):

EuroStoxx 50 (Kursindex)	Stressfaktor (Einzelrisiko)	Stressfaktor (gemischte Szenarien)
von 5246 bis 5435 und höher	45	25
von 5056 bis 5245	45	25
von 4866 bis 5055	45	25
von 4676 bis 4865	45	25
von 4486 bis 4675	44	24
von 4296 bis 4485	41	22
von 4106 bis 4295	38	21
von 3916 bis 4105	35	20
von 3726 bis 3915	32	19
von 3536 bis 3725	29	18
von 3346 bis 3535	27	17
von 3156 bis 3345	24	16
von 2966 bis 3155	22	15
von 2776 bis 2965	20	14
von 2586 bis 2775	18	13
von 2396 bis 2585	16	12
von 2206 bis 2395	14	12
von 2016 bis 2205	13	11
von 1826 bis 2015	11	11
bis 1825	10	10

**Tabelle 03:** Abschläge für die Aktien im BaFin-Stresstest 2009 (siehe [BaFin (2008)])

Bei allen Stressszenarien wird die Bonitätsstruktur bei festverzinslichen Wertpapieren und Darlehen (Fixed Income) berücksichtigt. Die vier Bonitätsklassen sind mit den dazugehörigen Bonitätsabschlägen in folgender Tabelle dargestellt (siehe [BaFin (2004)], Teil A):

Investment-Grade	AAA-BBB	0 %
Non-Investment-Grade	BB-B	-10 %
Non-Investment-Grade	CCC-B	-30 %
Ohne Rating	-	-10 %

**Tabelle 04:** Abschläge für Fixed Income Titel im BaFin-Stresstest 2009 (siehe [BaFin (2004)], Teil A)

Im „Stress-Test“ der DAV für Lebensversicherungsunternehmen und Pensionskassen<sup>7</sup> wird zunächst von einem Basisszenario ausgegangen (vgl. [DAV (2004)], S. 3-5). Dieses Krisenszenario wird aus historischen Werten abgeleitet. Es orientiert sich an den maximalen Aktienkurseinbrüchen bzw. Zinssteigerungen der letzten 20 Jahre – abgesehen von den Jahren 2001 und 2002. Das Basisszenario kann bei bereits eingetretener negativer Veränderung im Berichtsjahr abgeschwächt werden, um ein zu starkes prozyklisches Verhalten zu vermeiden. Im Grenzfall erhält man die Mindestanforderung an einen Stresstest gemäß DRS 5-20 (vgl. [DRSC (2001)], Abschnitt 29). Die Szenarien sind von der DAV wie folgt festgelegt (vgl. [DAV (2004)], S. 4):

- Basisszenario: Die Marktwerte von Aktien fallen um 35 % und die Zinsen für festverzinsliche Wertpapiere steigen um 2 %.
- Szenario mit einjährigem Gedächtnis: Der Satz von 35 % für den Marktwertverlust bei Aktien kann um den im Berichtsjahr tatsächlich eingetretenen Marktwertverlust des Aktienportfolios oder eines dafür repräsentativen Aktienindexes bis auf 20 % reduziert werden. Entsprechend kann der Satz von 2 % für den Zinsanstieg bei festverzinslichen Wertpapieren um den Zinsanstieg des Berichtsjahres bis auf 1 % reduziert werden.

<sup>7</sup> Der Hinweis [DAV (2004)] und die Richtlinie [DAV (2006)] gelten gleichermaßen für Pensionsfonds und Pensionskassen, sofern und soweit gleiche Voraussetzungen wie bei Lebensversicherungsunternehmen gegeben sind, insbesondere die Leistungen und Beiträge ohne jede Einschränkung garantiert werden.

Alternative Szenarioansätze sind grundsätzlich möglich, müssen sich aber an den Standards messen lassen.

Im „Stress-Test“ der DAV für Schaden- und Unfallversicherungsunternehmen wird auf den BaFin-Stresstest verwiesen (vgl. [DAV (2005)], S. 4).<sup>8</sup>

Der „Stress Test“ der CEIOPS sieht drei Szenarien vor (vgl. [CEIOPS (2009)], S. 1):

- Szenario 1: Ein Einbruch der Kapitalmärkte wie zwischen September 2008 und September 2009.
- Szenario 2: Eine lange und schwere Rezession.
- Szenario 3: Eine stark steigende Inflation mit höheren Leitzinsen.

Das Stressszenario im britischen „Resilience Test“ besteht aus einem Marktwertverlust der Aktien um 25 % und eine um 3 Prozentpunkte fallende oder steigende Zinsrate (vgl. [FSA PN (2001)]). Mit dem europäischen Börsencrash im Sommer 2002 hat die FSA das Testszenario abgeschwächt (vgl. [FSA PN (2002)] und [FSA (2002)], S. 1-2), sodass jüngste Aktienkursschwankungen berücksichtigt werden:

Firmen sollten mindestens das Szenario von einem Marktwertverlust der Aktien in Höhe von 10 % betrachten. Falls ein größerer Verlust angesetzt wird, so ist das Minimum aus folgenden Positionen zu wählen (vgl. [FSA (2002)], S. 1, Punkt 3.2):

- 25 % oder ein derart niedrigerer Betrag, der kein Kurs-Gewinn-Verhältnis des FTSE Actuaries All Share Index unter 75 % des Inversen von Kapitalerträgen der Long-Terms auslöst und
- 25 % abzüglich irgendeiner Reduktion des Prozentsatzes zwischen dem aktuellen FTSE Actuaries All Share Index und dem durchschnittlichen FTSE Actuaries All Share Index der letzten 90 Kalendertage<sup>9</sup>.

---

8 Die in der Lebensversicherung angewendeten Methoden und Standards können nicht unverändert in die Schaden- und Unfallversicherung übertragen werden (vgl. [DAV (2005)], S. 3), da es wesentliche Unterschiede zwischen der Lebensversicherung und der Schaden- und Unfallversicherung gibt. Hinzu kommen die in der Schaden- und Unfallversicherung sehr unterschiedlichen Gegebenheiten von Unternehmen zu Unternehmen, sodass die DAV lediglich einen prinzipienorientierten Hinweis darauf gibt, in welcher Form Anlagerisiken durch den Verantwortlichen Aktuar zu überprüfen sind (vgl. [DAV (2005)]).

9 Beispiel: Ist der Preisstand 10 % unterhalb des dreimonatigen Durchschnittes, würde der Versicherer seine Solvabilität für den Fall eines weiteren Preisverfalles um 15 % (d.h. 25 % minus 10 %) überprüfen.

Der von der FSA vorgeschlagene „Reverse-Stress Test“ sieht vor, dass Versicherer ihre eigenen Krisenszenarien identifizieren. Neben den üblichen Kapitalmarktentwicklungen sollen weitere Marktbedingungen bestimmt werden, die eine Unternehmensfortführung gefährden könnten (vgl. [FSA (2008)], S. 23). Dadurch soll die Untersuchung von „Tail-Risiken“ ebenso wie die Untersuchung von milderer adversen Szenarien besser abgedeckt werden (vgl. [FSA (2008)], S. 12).

In den vergangenen Jahren sind in etlichen Ländern neue Vorschriften für Versicherungsunternehmen zur Berechnung der Eigenmittelanforderungen von der zuständigen Aufsichtsbehörde eingeführt worden. Häufig fließen bei der Berechnung Stressszenarien ein. Diese werden in der nachfolgenden Tabelle 05 vorgestellt und dann beschrieben.

Fundstelle	Bezeichnung / Risikoquelle	Szenario Aktivseite	Szenario Passivseite
Schweizer Solvenztest (SST), Schweiz (FOPI), 2006			
[FOPI (2004)], S. 25-27	Industrial explosion		Explosion Chemieanlage
	Pandemic		Spanische Grippe 1918
	Accident (UVG, UVGZ)		a) Unfall auf Betriebsausflug b) Massenpanik im Fußballstadium
	Hailstorm		4 Hagelstürme
	Collapse of water barrage		Staudammbruch
	Disability		Höhere Invaliditätsrate
	Daily allowance		Höhere Tagegeldrate
	Default of reinsurer		Ausfall des Rückversicherers
	Financial distress	MW Aktien -25 %	Neugeschäft -75 % Storno = 25 %
	Reserve		Schadenrückstellung +10 %
	Anti-selection		Anti-Selektion
	Terrorism		Terroranschlag
	Historical Asset Scenarios	a) Börsencrash 1987 b) Nikkei-Crash 1989 c) Europäische Währungskrise 1992 d) US-Zinsentwicklung 1994 e) Währungskrise in Russland / LTCM 1998 f) Börsencrash 2000	d) US-Zinsentwicklung 1994
	Longevity		Abnahme der Sterbewkt.
QIS 4: Marktrisiko-Module, Europa (CEIOPS), 2008			
[CEIOPS (2008)], S. 134-153	Interest rate risk	a) Zinsanstieg b) Zinsrückgang	a) Zinsanstieg b) Zinsrückgang
	Equity risk	MW globale Aktien -32 % MW übrige Aktien -45 %	
	Property risk	MW Immobilien -20 %	
	Currency risk	a) Wechselkursgewinn = 20 % b) Wechselkursverlust = 20 %	
	Spread risk	a) Erweiterung Kreditspread um 300 % b) Verringerung Kreditspread um 75 %	
QIS 4: Versicherungstechnische Risiko-Module (Non-Life), Europa (CEIOPS), 2008			
[CEIOPS (2008)],	Catastrophe		a) Durch Behörde vorgegebene

S. 204-210	risk		regionale Szenarien b) Unternehmensindividuelle Szenarien
QIS 4: Versicherungstechnische Risiko-Module (Life), Europa (CEIOPS), 2008			
[CEIOPS (2008)], S. 160-173	Mortality risk		Sterbewkt. +10 %
	Longevity risk		Sterbewkt. -25 %
	Disability risk		Invaliditätsrate kommendes Jahr +35 %, nachfolgende Jahre +25 %
	Lapse risk		a) Stornowkt. +50 % b) Stornowkt. -50 % c) Kapitalabfluss = 30 %
	Expense risk		Kosten +10 %
	Revision risk		Jährlicher Rentenendwert +3 %
	Catastrophe risk		Sterblichkeitswkt. +1,5 % Invalidisierungswkt. +1,5 %
Enhanced Capital Requirements and individual capital assessments for Life Insurers, UK (FSA), 2004			
[FSA L (2003)], S. 33	Equity risk	MW Aktien mind. -10 %	
	Interest Rate risk	a) $i_1 = i_0 * (1 + 20 \%)^*$ b) $i_1 = i_0 * (1 - 20 \%)^*$	a) $i_1 = i_0 * (1 + 20 \%)^*$ b) $i_1 = i_0 * (1 - 20 \%)^*$
	Real estate risk	MW Immobilien -10 % bis -20 %	
	Credit risk	Spreadanstieg von Unternehmensanleihen	
	Persistency risk		a) Ausscheidewkt. +50 % b) Ausscheidewkt. -50 %
Enhanced Capital Requirements and individual capital assessments for Non-Life Insurers, UK (FSA), 2004			
[FSA P/C (2003)], PRU 2.4	Credit risk	b) Ausfall Schuldner	a) Ausfall Rückversicherer
	Market risk	a) Marktwertverlust Aktien b) Veränderung Zinsrate c) Abnahme Kapitalanlageergebnis d) Ausfall Gegenpartei	b) Veränderung Zinsrate
	Liquidity risk		Mangelnde Kongruenz von Anlagen und Verpflichtungen
	Operational Risk		a) Unangemessene oder fehl geschlagene interne Prozesse b) Mitarbeiter- oder systembedingte Vorfälle c) Externe Vorfälle
	Insurance risk		a) Katastrophenschäden b) Unterdeckung c) Anstieg Schadenquote

MW: Marktwert, i: Zins, Wkt.: Wahrscheinlichkeit, \*): long-term interest rate

**Tabelle 05:** Überblick von in Solvenzsystemen verwendeten Stressszenarien

In der Schweiz hat die Swiss Federal Office of Private Insurance (FOPI) für das neue risikoorientierte Aufsichtssystem – den Schweizer Solvenztest (SST) – szenariobasierte Standardmodelle entwickelt (vgl. [FOPI (2004)], S. 10-28).<sup>10</sup> Der SST besteht aus einer Reihe von Standardmodellen für z.B. Kredit-, Markt- und versicherungstechnische Risiken und aus einer Reihe von Szenarien, mit Hilfe derer die Höhe des verfügbaren Kapitals („risikotragendes Kapital“) und des bezüglich der Risiken erforderlichen Kapitals („Zielkapital“) eines Versicherungsunternehmens berechnet wird. Für seltene Ereignisse und Risiken, die nicht durch Standardmodelle erfasst werden, werden die Auswirkungen über Szenarioansätze bestimmt. Es wird zwischen quantitativen und qualitativen Szenarien unterschieden. Quantitative Szenarien werden mit den Ergebnissen der Standardmodelle zusammengeführt, wohingegen qualitative Szenarien zwar ausgewertet werden, aber nicht in die Berechnung des Zielkapitals einfließen. Die Aufsicht schreibt einzelne Szenarien vor. Zum Beispiel (vgl. [FOPI (2004)], S. 26 f.):

- Industrie-Szenario: Eine Explosion in einer Chemieanlage, welche Personenschäden (Tod, Invalidität, Verletzungen), Sachschäden und Betriebsausfall zur Folge hat.
- Historische Kapitalmarkt-Szenarien:
  - Börsencrash 1987.
  - Nikkei-Crash 1989.
  - Europäische Währungskrise 1992.
  - US-Zinsentwicklung 1994.
  - Währungskrise in Russland / Long-Term Capital Management (LTCM) 1998.
  - Börsencrash 2000.
- Pandemie (Spanische Grippe 1918): Eine Epidemie, welche Personenschäden (Tod, Invalidität, Verletzungen) zur Folge hat.

Zusätzlich sollte der Verantwortliche Aktuar Szenarien definieren, die auf unternehmensspezifische Gefahrenpotentiale abgestimmt sind.

---

<sup>10</sup> Alternativ können zur Berechnung der erforderlichen Eigenmittel Interne Modelle eingesetzt werden, sofern diese den aufsichtsrechtlichen Anforderungen genügen.

Großbritannien führte das Konzept der „Enhanced Capital Requirements and individual capital assessments“ für Lebensversicherungsunternehmen (vgl. [FSA L (2003)]) und Nicht-Lebensversicherungsunternehmen (vgl. [FSA P/C (2003)]) ein. Die Ansätze zur Berechnung der neuen risikoorientierten Eigenmittel von Lebensversicherern und Nicht-Lebensversicherern unterscheiden sich voneinander:

Lebensversicherer verwenden als Standardmodell ein stochastisches Simulationsmodell bezogen auf das nächste Jahr, um die Marktwerte der Aktiva und Passiva unter Annahme bestimmter Managementaktionen und Stressszenarien fortzuschreiben und um schließlich die Eigenmittel zu bestimmen (vgl. [FSA P/C (2003)], S. 17-43). Zusätzlich sind „Stress Tests“ durchzuführen (vgl. [FSA P/C (2003)], S. 9). Es werden verschiedene Positionen gestresst (vgl. [FSA P/C (2003)], S. 33):

- Aktienrisiko: Marktwertverlust der UK-Aktien in Höhe von mindestens 10 %. Falls ein größerer Verlust angesetzt wird, so ist das Minimum aus folgenden Positionen zu wählen (vgl. [FSA (2002)], S. 1, Punkt 3.2):
  - Ein Abfall des Prozentsatzes derjenigen Aktien, die eine Gewinnrendite des FTSE Actuaries All Share Index entsprechend 75 % der Erträge der Long-Terms auslösen würden und
  - 25 % abzüglich irgendeiner Reduktion des Prozentsatzes zwischen dem aktuellen FTSE Actuaries All Share Index und dem durchschnittlichen FTSE Actuaries All Share Index der letzten 90 Kalendertage.
- Zinsrisiko: Das Ungünstigere von einem Fall oder Anstieg der Rendite um eine Prozentpunkthöhe von 20 % aller festverzinslicher Wertpapiere.
- Immobilienrisiko: Ein Verfall aller Immobilienwerte um mindestens 10 % und höchstens 20 %.
- Kreditrisiko: Ein Anstieg des Spreads von Unternehmensanleihen.
- Durchhalterisiko: Veränderung der Ausscheidewahrscheinlichkeit um 50 %.

Nicht-Lebensversicherer verwenden ein Faktormodell bezogen auf das nächste Jahr. Bestimmte Risikoträger und Risikofaktoren werden multipliziert (vgl. [FSA P/C (2003)], S. 14):

- Kapitalanlagen:  $\text{asset-related values} * \text{relevant asset factors} (\%)$
- Technische Reserven:  $\text{insurance-related values} * \text{relevant technical provisions}$



factors (%)

- Versicherungstechnik: net written premium \* relevant premium factors (%)

Die Eigenmittelanforderungen, die sich für diese drei Risikokategorien ergeben, werden auf Unternehmensebene – ohne Berücksichtigung von Korrelationen – addiert. Neben dieser Berechnung der Eigenmittel verlangt die FSA die Durchführung von „Stress Tests“ für jede identifizierte Haupt-Risikoquelle von den Versicherern (vgl. [FSA P/C (2003)], PRU 1.2, PRU 2.4):

- Kreditrisiko:

Ein Ausfall eines Rückversicherers, indem sowohl die Wahrscheinlichkeit betrachtet wird, dass eine ausstehende Schadenzahlung nicht beglichen wird, als auch die Wahrscheinlichkeit, dass in Rückversicherung genommene Risiken nicht geltend gemacht werden können.

Ein Schuldnerausfall.

- Marktrisiko:

Ein Marktverlust der Aktien.

Veränderungen der Zinsrate inklusive der Auswirkung auf die Marktwerte der Aktien.

Ein unter Plan bleibendes Kapitalanlageergebnis.

Möglichkeit des Ausfalls einer Gegenpartei.

- Liquiditätsrisiko:

Mangelnde Kongruenz von Kapitalanlagen und Verpflichtungen.

- Operationales Risiko:

Das Eintreten eines unangemessenen oder fehl geschlagenen internen Prozesses, mitarbeiter- und systembedingte Vorfälle oder externe Vorfälle.

- Versicherungstechnisches Risiko:

Das Auftreten potentieller Katastrophenschäden einschließlich der Eintrittswahrscheinlichkeit und der Schadenhöhe sowie der Wiederauffüllungsprämien und Ausschöpfung der Rückversicherung.

Die gebildeten Reserven sind nicht ausreichend.

Die tatsächlichen Schadenquoten überschreiten die geplanten Größen.

Zur Vorbereitung auf die künftigen Regelungen zu Solvency II führten die Europäische Kommission und CEIOPS die vierte Untersuchung zu den quantitativen Auswirkungen von Solvency II (QIS 4) durch (vgl. [CEIOPS (2008)]). Zur Ermittlung der Solvenzkapitalanforderung wurde eine Standardformel getestet.<sup>11</sup> Die Kapitalerfordernisse werden in einzelnen Risikomodulen, die weiter in Teilrisikomodule zerlegt werden, für versicherungstechnisches Risiko, Marktrisiko, Ausfallrisiko und operationales Risiko berechnet (vgl. [CEIOPS (2008)], S. 112 ff.). Die Kapitalanforderungen des jeweiligen (Teil-) Risikomoduls werden unter Annahme von Abhängigkeitsstrukturen auf Unternehmensebene aggregiert (vgl. [CEIOPS (2008)], S. 124). Zur Bestimmung des Kreditrisikos und des operationalen Risikos sind in der Standardmethode Faktoransätze vorgegeben, zur Bestimmung des versicherungstechnischen Risikos vorwiegend Faktoransätze und zur Bestimmung des Marktrisikos vor allem Szenarioansätze. Szenariobasierte Ansätze sind dadurch gekennzeichnet, dass sie das infolge eines Schockereignisses benötigte Risikokapital bewerten.

Das Risikomodul für das Marktrisiko in der Lebensversicherung und Nicht-Lebensversicherung besteht aus den folgenden sechs Teilrisikomodulen (vgl. [CEIOPS (2008)], S. 134-153):

- Zinsrisiko: Zur Ermittlung der Kapitalanforderung werden die zwei Szenarien Zinsrückgang und Zinsanstieg betrachtet, die über gestresste Zinsstrukturkurven bestimmt sind. Die Kapitalanforderung ergibt sich aus dem ungünstigeren Szenario.
- Aktienrisiko: Im Standardansatz wird zwischen globalen und übrigen Aktien unterschieden. Unter „global“ werden Aktien von in EWR- und OECD-Staaten gelisteten Gesellschaften und Beteiligungen an Gesellschaften mit Sitz in EWR- und OECD-Staaten verstanden, unter „übrig“ alle restlichen Aktien von Gesellschaften bzw. Beteiligungen an Gesellschaften. Die Kapitalanforderung ergibt sich durch Auswertung eines Schockszenarios von -32 % für globale Aktien und von -45 % für übrige Aktien.
- Immobilienrisiko: Die Kapitalanforderung ergibt sich durch Auswertung eines Marktwertverlustes der Immobilien um 20 %.
- Währungsrisiko: Zur Ermittlung der Kapitalanforderung ist als erstes Szenario die Marktwertveränderung aufgrund eines Wechselkursgewinnes von 20 % aller Wäh-

---

<sup>11</sup> Daneben wurden auch Interne Modelle betrachtet (vgl. z.B. [CEIOPS (2008)], S. 8).

rungen, in die der Versicherer investiert, gegenüber dem Euro anzugeben und als zweites Szenario die Marktwertveränderung aufgrund eines Wechselkursverlustes von 20 %. Die Kapitalanforderung ergibt sich aus dem ungünstigeren Szenario.

- Spreadrisiko: Die Kapitalanforderung wird durch drei Komponenten bestimmt. Die Bewertung des Spreadrisikos von Anleihen und strukturierte Kreditprodukte erfolgt faktorbasiert. Wohingegen für das Spreadrisiko von Kreditderivaten die Erweiterung des Kreditspreads um 300 % als erstes Szenario und die Verringerung des Kreditspreads um 75 % als zweites Szenario betrachtet werden. Hier ergibt sich die Kapitalanforderung aus dem ungünstigeren Szenario.
- Konzentrationsrisiko: Die Bewertung des Konzentrationsrisikos erfolgt faktorbasiert.

Im Standardansatz für Nicht-Lebensversicherungsunternehmen wird der Kapitalbedarf für das versicherungstechnische Risiko aus den Teilrisikomodulen für das Prämien- und Reserverisiko und für das Katastrophenrisiko bestimmt (vgl. [CEIOPS (2008)], S. 194-210). Die Berechnung des Prämien- und Reserverisikos erfolgt über ein Faktormodell. Extremereignisse werden dabei nicht berücksichtigt. Sie werden separat bewertet:

- Katastrophenrisiko: Zur Ermittlung der Kapitalanforderung gibt es drei Methoden. Die erste Methode besteht aus der Verwendung des faktorbasierten Standardansatzes, für den sich die deutsche Aufsichtsbehörde entschieden hat (vgl. [CEIOPS (2008)], S. 258-263). Methode zwei beruht auf der Verwendung von regionalen Szenarien, die durch die einzelne nationale Aufsichtsbehörde vorgegeben sind. An dieser Stelle kann die dritte Methode optional Anwendung finden, welche vorsieht unternehmensindividuelle Szenarien zu nutzen.

Im Standardansatz für Lebensversicherungsunternehmen wird der Kapitalbedarf für das versicherungstechnische Risiko aus den folgenden sieben Teilrisikomodulen szenariobasiert bestimmt (vgl. [CEIOPS (2008)], S. 160-173):

- Sterberisiko: Zur Ermittlung der Kapitalanforderung wird ein permanenter Anstieg der Sterbewahrscheinlichkeit um 10 % für jedes Alter betrachtet.
- Langlebighkeitsrisiko: Die Kapitalanforderung ergibt sich durch Auswertung einer permanenten Abnahme der Sterbewahrscheinlichkeit um 25 % für jedes Alter.
- Invaliditätsrisiko: Zur Ermittlung der Kapitalanforderung wird ein Anstieg der

Invaliditätsrate um 35 % im kommenden Jahr zusammen mit einem permanenten Anstieg von 25 % in den darauf folgenden Jahren für alle Alter betrachtet.

- Stornorisiko: Die Kapitalanforderung wird durch drei Komponenten bestimmt. Das erste Szenario ist eine Reduktion der Stornowahrscheinlichkeit um 50 %. Das zweite Szenario ist ein Anstieg der Stornowahrscheinlichkeit um 50 %. Das dritte Szenario ist darüber definiert, dass 30 % der Verträge mit positiven Rückkaufwert zurückgekauft werden. Aus dem ungünstigsten Szenario ergibt sich die Kapitalanforderung.
- Kostenrisiko: Die Kapitalanforderung wird berechnet mit einem Anstieg der künftigen Kosten um 10 % im Vergleich zum Best Estimate und einem Anstieg der Inflationsrate der Kosten von 1 % pro Jahr im Vergleich zu den Erwartungen.
- Änderungsrisiko: Zur Berechnung der Kapitalanforderung wird ein Anstieg der jährlichen Rentenendwerte um 3 % angenommen.
- Katastrophenrisiko: Die Kapitalanforderung ergibt sich aus Kombination eines Anstiegs der Sterblichkeitswahrscheinlichkeit der Versicherungsnehmer um 1,5 ‰ über die nächsten Jahre (d.h. z.B. von 1,0 ‰ auf 2,5 ‰) und um einen Anstieg der Invalidisierungswahrscheinlichkeit der Versicherungsnehmer um 1,5 ‰ über die nächsten Jahre.

Die fünfte Untersuchung zu den quantitativen Auswirkungen von Solvency II (QIS 5) ist für August 2010 angesetzt. Dafür werden die technischen Daten aus QIS 4 noch einmal angepasst. Die Anpassungen bezüglich der Stressszenarien sind in den CEIOPS Consultation Papern (CP) veröffentlicht (vgl. insbesondere [CEIOPS CP 69 (2009)], [CEIOPS CP 47 (2009)], [CEIOPS CP 70 (2009)], [CEIOPS CP 48 (2009)], [CEIOPS CP 71 (2009)] und [CEIOPS CP 49 (2009)]). Z.B. wird für globale Aktien ein Schockszenario von -45 % (anstatt -32 % in QIS 4) und für übrige Aktien ein Schockszenario von -60 % (anstatt -45 % in QIS 4) verwendet (vgl. [CEIOPS CP 69 (2009)], S. 12 und S. 22).

Allen diesen Stressszenarien ist gemein: Sie erlauben dem Versicherungsunternehmen zu testen, welche strategischen Entscheidungen besonders hilfreich sind, und sie gestatten festzustellen, welche Entwicklungen gefährlich sind und welche nicht.

Die Finanzkrise hat gezeigt, dass die von der BaFin getroffene Auswahl von Stressszenarien nicht annähernd das Spektrum der Risiken abdeckt. Gründe wie die Vergleichbarkeit oder die Vereinfachung sprechen aber für solch einfache einheitliche Systeme. Zudem gibt es bislang nichts besseres. Die Bedeutung dieser vereinfachten Stressszenarien kann aber bei den verschiedenen Konstellationen in den realen Unternehmen durchaus sehr unterschiedlich sein. Während diese einfachen Szenarien für manche Konstellationen einen extremen Stressfall darstellen, können für andere Konstellationen Szenarien vorkommen, die wesentlich schwerwiegendere Folgen haben und möglicherweise sogar noch erheblich wahrscheinlicher sind. Unter diesem Aspekt ist es notwendig, unternehmensindividuelle Stressszenarien zu entwickeln, die der Aufstellung des jeweiligen Unternehmens gerecht werden, um Risiken bei Eintritt eines Stressfalles nicht signifikant zu unterschätzen. Und umgekehrt kann es sein, dass bestimmte Konstellationen im realen Unternehmen schlicht weniger anfällig sind und somit ein standardisierter Stresstest zu hohe Anforderungen stellt und damit den Wettbewerb behindert.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, zu sinnvollen Stressszenarien zu kommen (vgl. [Zwiesler (2005)], S. 126). Der einfachste Weg ist die Betrachtung und Auswertung historischer Entwicklungen. Zu beachten ist dabei, dass sich die Zukunft nicht unbedingt so verhält wie die Vergangenheit. Für diejenigen Faktoren, für die ein stochastisches Modell angenommen wird (z.B. werden Aktienkurse häufig über die geometrische Brownsche Bewegung modelliert), sind Quantile berechenbar, anhand derer Szenarien abgeleitet werden können. Eine weitere Alternative gibt es für Versicherungsunternehmen, die ein stochastisches Simulationsmodell verwenden. Bei stochastischen Simulationen können – vorausgesetzt, die einzelnen Simulationen werden abgespeichert – die schlechtesten Verläufe analysiert werden. In diesem Fall wäre es auch möglich, synthetische Verläufe mit einzubeziehen, die in der Vergangenheit noch nicht aufgetreten sind. Auf die letzte Möglichkeit wird in Abschnitt 4.4 Stress Testing eingegangen.

### 2.1.3 Rechtlicher Rahmen

Die aktuelle Finanzkrise hat gezeigt, wie notwendig es ist, dass Versicherungsunternehmen Risiken, die sie eingehen, besser verstehen, bewerten und steuern.

In den seit Beginn des Jahres einzuhaltenden Mindestanforderungen an das Risikomanagement (MaRisk VA)<sup>12</sup> ist verankert, dass im Rahmen eines angemessenen Risikomanagements ein Risikotragfähigkeitskonzept und ein Limitsystem vorhanden sein müssen (vgl. [BaFin (2009)], Abschnitt 7.3.1) und ein Risikokontrollprozess, der die Risikoidentifikation, -analyse, -bewertung, -steuerung und -überwachung umfasst, existieren muss (vgl. [BaFin (2009)], Abschnitt 7.3.2).

Mit der Einführung der europäischen Rahmenrichtlinie zur Solvabilität (Solvency II)<sup>13</sup>, die bis zum 31. Oktober 2012 in das jeweilige nationale Recht umzusetzen ist, wird das Solvabilitätssystem neu geregelt. Im Gegensatz zur derzeitigen Regelung basiert das neue Solvenzsystem auf der Grundlage der tatsächlich eingegangenen Risiken sowohl auf der Aktiv- als auch auf der Passivseite. Nach dem Vorbild des Bankenaufsichtssystems Basel II wird eine Drei-Säulen-Struktur eingeführt. In Säule 1 – Mindestkapitalanforderungen – sind die Regelungen zur Bestimmung der Risikotragfähigkeit der Versicherungsunternehmen, also die quantitativen Anforderungen, zusammengefasst. Es sollen risikobasierte Berechnungsmethoden verwendet werden. Insbesondere sehen die neuen Vorschriften vor, dass neben dem Minimum Capital Requirement (MCR) das Solvency Capital Requirement (SCR) zu berechnen ist. Dies ist durch Einsatz eines Standardmodells oder Internen Modells möglich. In Säule 2 – Aufsichtsrechtliches Überprüfungsverfahren – werden qualitative Anforderungen an das interne Risikomanagement aufgestellt. Hier sind die Modellkriterien festgehalten. Ein Zusammenhang zum realen Unternehmen muss gegeben sein. Für die Anerkennung des Internen Risikomodells ist von den Unternehmen nachzuweisen, dass es in die Risikomanagement- und damit in die Steuerungsprozesse einbezogen wird

---

<sup>12</sup> Hierbei handelt es sich um eine verbindliche Vorgabe der BaFin für die Ausgestaltung des Risikomanagements in deutschen Versicherungen (vgl. [BaFin (2009)]).

<sup>13</sup> Sie wurde am 22.4.2009 vom Europäischen Parlament verabschiedet (vgl. [Europäisches Parlament (2009)]).

(„Use Test“). In Säule 3 – Marktdisziplin – werden neue Veröffentlichungspflichten definiert. Risikomanagementprozesse, Risikomethoden, Kapitalausstattung und Szenarioanalysen sind offen zu legen.

Stresstests müssen im Kontext von MaRisk VA und von Solvency II gesehen werden. In der Erläuterung der Anforderung aus Abschnitt 7.3.2.2 Risikoanalyse und -bewertung, Absatz 3 der MaRisk VA (vgl. [BaFin (2009)]) werden Stresstests explizit erwähnt: „Die Risikoanalyse und -bewertung kann anhand qualitativer und quantitativer Methoden erfolgen, beispielsweise anhand von Befragungstechniken, Stresstests und Sensitivitätsanalysen.“

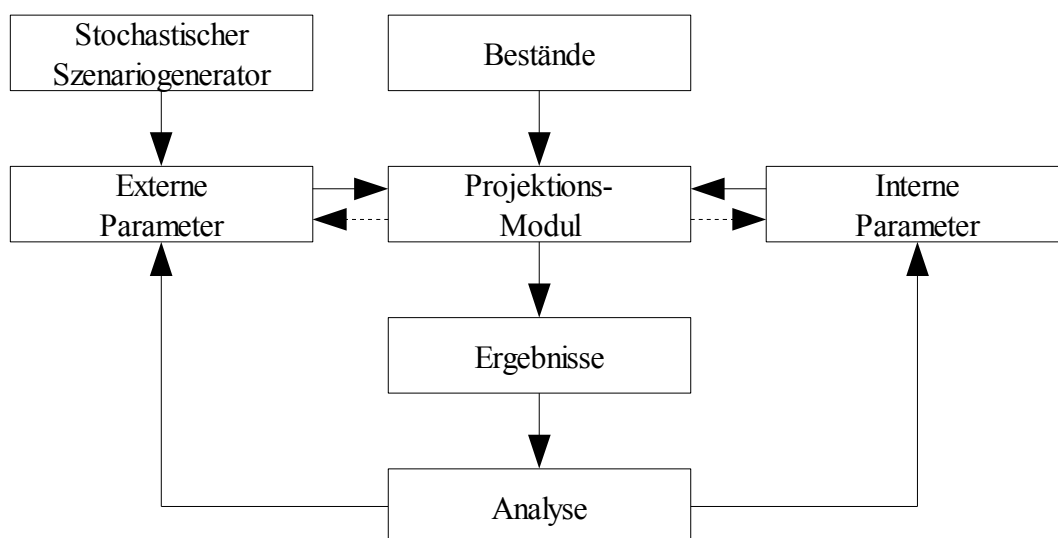
Die Aufgabe der Aufsicht besteht darin, zu überprüfen, ob die dauernde Erfüllbarkeit der Verpflichtungen aus den eingegangenen Versicherungsverträgen mit hoher Wahrscheinlichkeit gewährleistet ist. Die Versicherer werden zu diesem Zweck im Rahmen der MaRisk VA und von Solvency II aufgefordert, ihre Risiken zu benennen und zu quantifizieren, ein Risikotragfähigkeitskonzept zu erstellen und die Risikotragfähigkeit bei der strategischen Unternehmenssteuerung zu berücksichtigen. Viele Unternehmen etablieren ein eigenes Internes Modell, um die unternehmensindividuelle Risikosituation angemessen abzubilden. Diese Modelle beruhen auf einer ökonomischen Sichtweise. Bilanzielle Aspekte bleiben in diesem Ansatz unberücksichtigt und sind deshalb zum Beispiel durch Stresstests zu behandeln. Tests bringen zusätzliche Information über die Risikopositionen neben der stochastischen Simulation, die bereits implizit die Analyse einzelner Szenarien berücksichtigt. Sie ermöglichen der BaFin, sich einen Überblick über die Risikotragfähigkeit jedes einzelnen Versicherungsunternehmens und der gesamten Branche zu verschaffen.

## **2.2 Struktur eines Modells für die Dynamische Finanzanalyse**

Ganz allgemein beinhaltet die Dynamische Finanzanalyse (DFA) Verfahren zur Steuerung des Unternehmens anhand der zukünftigen Entwicklung von Assets und Liabilities. Das Basisziel der DFA liegt in der Entwicklung von Instrumenten zur Information und Entscheidungsunterstützung des Managements (vgl. [Zwiesler (2005)], S. 118 ff.). Hierzu wer-

den quantitative Auswertungen benötigt. Die DFA bedeutet eine systematische, ganzheitliche und mehrperiodige Finanzanalyse der Unternehmensergebnisse eines Schaden- und Unfallversicherers mittels stochastischer Simulationsmodelle (vgl. [Blum, Dacorogna, Embrechts, Neghaiwi, Niggli (2001)], S. 50 ff.), wobei die Gesamtheit aller Assets und Liabilities sowie deren Beziehungen untereinander berücksichtigt werden (vgl. [Kaufmann, Gadmer, Klett (2001)], S. 214 f.). DFA-Modelle sind dadurch charakterisiert, dass unter Anwendung stochastischer Simulationstechniken eine Wahrscheinlichkeitsverteilung von Größen wie zum Beispiel des versicherungstechnischen Ergebnisses simuliert werden kann.

DFA-Modelle können sehr unterschiedlich sein, sie haben im Wesentlichen aber alle eine gemeinsame Struktur (vgl. [Kaufmann, Gadmer, Klett (2001)], S. 217 und [Zwiesler (2005)], S. 123). Die grundsätzliche Struktur eines DFA-Modells ist in Abbildung 01 dargestellt. Zufällige Umweltzustände werden mittels stochastischer Simulation durch einen



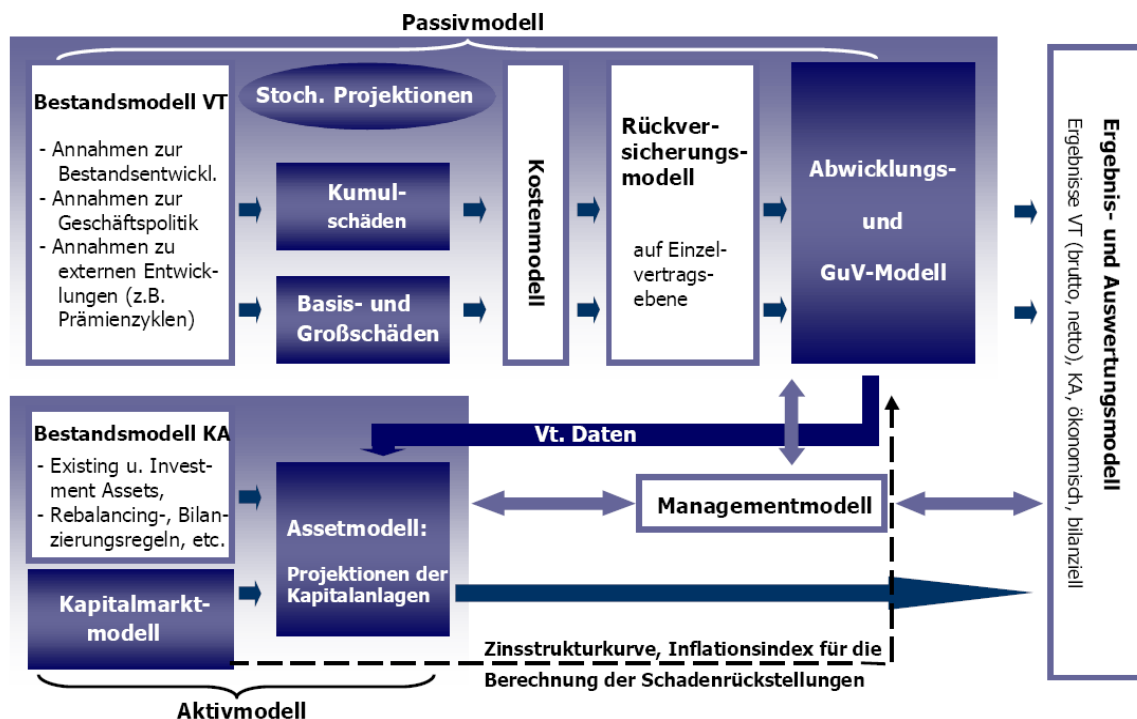
**Abbildung 01:** Grundsätzliche Struktur eines DFA-Modells (vgl. [Zwiesler (2005)], S. 123)

stochastischen Szenariogenerator modelliert. Weitere Eingabewerte sind unternehmensspezifische Bestandsdaten und Managemententscheidungen. Den Kern eines DFA-Modells stellt ein Projektions-Modul dar, das aus den Eingabewerten Ergebnisdaten der nächsten



Periode produziert. Die Ergebnisgrößen können zur Analyse verwendet werden.

Das in Abbildung 01 dargestellte DFA-Modell kann weiter in Teilmodelle untergliedert werden. Einen möglichen Modellaufbau für ein Simulationsmodell in der Schaden- und Unfallversicherung auf Grundlage der Dynamischen Finanzanalyse – wie es in Solvency II unter dem Begriff „Internes Modell“ eingesetzt werden kann – wird in Abbildung 02 gezeigt. Es wird unterschieden zwischen einem Passivmodell, das zur Fortschreibung aller Werte dient, die zur Passivseite der Bilanz gehören, und einem Aktivmodell, das zur Fortschreibung aller Werte dient, die zur Aktivseite der Bilanz gehören. Das Passiv- und das Aktivmodell setzen sich wiederum aus mehreren Teilmodellen zusammen.



**Abbildung 02:** Modellstruktur eines Internen Modells in der Schaden- und Unfallversicherung (siehe [Diers (2007)], S. 44)

Um die einzelnen Teilmodelle im Passivmodell aufbauen zu können, muss der Detaillierungsgrad festgelegt werden. Dazu sind die zu modellierenden Sparten und evtl. Kundengruppen zu bestimmen. Im Bestandsmodell (vgl. [Diers (2007)], S. 46 ff.) und Kostenmo-

dell (vgl. [Diers (2007)], S. 50 ff.) der Versicherungstechnik werden Bestandsgrößen wie Prämieinnahmen, Anzahl der Verträge, Versicherungssummen, Kosten und Bilanzdaten der vergangenen Jahre auf der Stufe der kleinsten abzubildenden Einheiten deterministisch als Erwartungswerte<sup>14</sup> vorgegeben. Die Komplexität des Passivmodells ist auf das Schadenmodell (vgl. [Diers (2007)], S. 52 ff.) zurückzuführen. Aufgrund der hohen Volatilität der Schäden sollten diese stochastisch modelliert werden. Wegen der unterschiedlichen Schadenverläufe sind Schäden in Groß-, Basis- und Kumulschäden zu unterteilen. Grundlage der Basis- und Großschadenmodellierung ist das kollektive Modell der Risikotheorie. Normalerweise können die Basisschäden aller Segmente über einen Lognormal- oder Gammaverteilungsansatz mit individuell angepassten Parametern modelliert werden. Zur Modellierung der Schadenanzahlen können zum Beispiel die Negative Binomial- oder Poisson-Verteilung herangezogen werden. Die Großschäden sollten als Einzelschäden simuliert werden. Für die Schadenhöhen und Schadenanzahlen sind individuell pro Segment bestimmte Verteilungen anzupassen.<sup>15</sup> Grundlegend anders als die Basis- und Großschäden werden die Kumulschäden modelliert. Die Modellierung erfolgt zunächst pro Ereignis, anschließend werden die Schäden auf die entsprechenden Segmente verteilt. Zu den historischen Daten, die dem Versicherungsunternehmen vorliegen, müssen externe Daten herangezogen werden, um eine ausreichende Datenbasis zur Schadenmodellierung zur Verfügung zu haben. Im Rückversicherungsmodell (vgl. [Diers (2007)], S. 121 ff.) sollten die Verträge auf Einzelvertragebene vorliegen, damit auch die Wirkungsweise jedes einzelnen Rückversicherungsvertrages auf die Daten bestimmt werden kann. Das Abwicklungsmodell (vgl. [Diers (2007)], S. 138 ff.) dient zur Modellierung des Reserverisikos. Ziel ist hier die Schätzung einer Wahrscheinlichkeitsfunktion um den Best Estimate herum. Es werden verschiedene Ansätze angewendet wie beispielsweise die analytische Formel von Mack (vgl. [Mack (2002)], S. 255) oder Bootstrapping-Verfahren (vgl. [England, Verrall (2002)], S. 443 ff.). Soll neben der ökonomischen Sicht eine Gewinn- und Verlustrechnung (GuV) im Sinne der HGB-Bilanzierung abgebildet werden, geschieht dies stochastisch im GuV-Modell (vgl. [Diers (2007)], S. 150 ff.).

14 Die adäquate Modellierung der Prämien erfolgt stochastisch unter Berücksichtigung von Prämienzyklen.

15 Als Schadenhöhenverteilungen können z.B. die Loglogistische-, Lognormal-, Burr-, Gamma- oder Pareto-Verteilung herangezogen werden. Beispiele für Schadenanzahlverteilungen sind die Negative Binomial- oder Poisson-Verteilung. Die Parameter können z.B. mit der Maximum-Likelihood-Methode angepasst werden.

Das Aktivmodell besteht aus drei Teilmodellen. Mit dem Kapitalmarktmodell (vgl. [Diers (2007)], S. 173 f.) können Kapitalmarktszenarien erzeugt werden.<sup>16</sup> Im Bestandsmodell (vgl. [Diers (2007)], S. 174) werden der Kapitalanlagebestand zu Projektionsbeginn angegeben und Regeln zum Rebalancing und zur Bilanzierung festgehalten. Fortgeschrieben wird der Kapitalanlagebestand im Assetmodell (vgl. [Diers (2007)], S. 174 f.).

Das Managementmodell (vgl. [Diers (2007)], S. 187 ff.) beschreibt, wie sich das Unternehmen in der jeweiligen Situation verhält. In stochastischen Modellen muss das durch geeignete Funktionen beschrieben werden. Das Managementmodell kommuniziert mit fast allen Teilmodellen.

Im Modell werden unter Verwendung von Simulationstechniken eine Vielzahl von zufälligen Ergebnisdaten erzeugt (vgl. [Diers (2007)], S. 190 ff.). Wesentlich ist die Bestimmung der dazugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen, sodass z.B. Erwartungswerte, Quantile und der Risikokapitalbedarf für die modellierten Segmente der Versicherungstechnik, die modellierten Asseteinheiten und das Gesamtunternehmen bestimmt werden können oder eine Risikokapitalallokation durchgeführt werden kann.

Wesentlich in solch einem Simulationsmodell ist die Integration von Abhängigkeitsstrukturen. Zwischen allen stochastischen Variablen sind zahlreiche verschiedene Abhängigen zu berücksichtigen. Auf diesen Punkt wird in Abschnitt 2.4 Copulas noch weiter eingegangen.

---

<sup>16</sup> Die Erstellung eines Kapitalmarktmodells ist sehr aufwendig. Daher wird das Kapitalmarktmodell meist eingekauft und nicht vom Versicherungsunternehmen selbst erstellt.

## 2.3 Messung von Risiko, Rendite und Performance in der Dynamischen Finanzanalyse

### 2.3.1 Renditemaße

Zur Messung der Rendite werden in dieser Arbeit zwei Renditemaße untersucht:

- Der erwartete Gewinn und
- der Return on Investment.

Ein absolutes Renditemaß ist der erwartete Gewinn pro Jahr, der sich als Differenz aus dem erwarteten Eigenkapital  $E(EC_T)$  am Ende der Periode  $T$  und dem zum Zeitpunkt 0 vorhandenen Eigenkapital  $EC_0$ , verteilt auf die Anzahl der Perioden, ergibt:

$$E(G) = \frac{E(EC_T) - EC_0}{T}. \quad (1)$$

Ein relatives Renditemaß ist der Return on Investment, der den erwarteten Gewinn  $E(G)$  in Relation zum eingesetzten Kapital  $EC_0$  stellt:

$$ROI = \left( \frac{E(EC_T)}{EC_0} \right)^{\frac{1}{T}} - 1. \quad (2)$$

### 2.3.2 Risikomaße

Neben den Renditemaßen werden fünf Risikomaße untersucht:

- Die Standardabweichung,
- die Ruinwahrscheinlichkeit,
- das Expected Policyholder Deficit,
- der Value at Risk und
- der Tail Value at Risk.

Die Standardabweichung des Gewinns pro Jahr ist ein zweiseitiges Risikomaß. Sie misst die Abweichung vom Erwartungswert in beide Richtungen:

$$\sigma(G) = \frac{\sigma(EC_T)}{T}. \quad (3)$$

Eine zweite Klasse von Risikomaßen, die das Risiko als Ausmaß der Abweichung von einer Zielgröße betrachtet, sind die sogenannten Downside-Risikomaße. Sie erfassen lediglich negative Abweichungen als Risiko. Beispiele hierfür sind die Ruinwahrscheinlichkeit und das Expected Policyholder Deficit. Die Ruinwahrscheinlichkeit ist definiert als:

$$RP = Pr(\hat{\tau} \leq T) \text{ für } \hat{\tau} = \inf \{ t > 0 | EC_t < 0, t = 1, 2, \dots, T \}, \quad (4)$$

wobei  $\hat{\tau}$  das erste Auftreten eines Ruins, d.h. ein negativer Eigenkapitalbetrag, beschreibt (vgl. [Heilmann (1988)], S. 247). Die Ruinwahrscheinlichkeit stellt jedoch keine Informationen hinsichtlich der Höhe des Verlustes im Falle einer Insolvenz oder hinsichtlich des Zeitwertes des Geldes bereit. Diese Informationen werden durch das Expected Policyholder Deficit repräsentiert:

$$EPD = \sum_{t=1}^T E(\max(-EC_t, 0) | EC_t < 0) * (1 + r_f)^{-t}, \quad (5)$$

wobei  $r_f$  für den risikolosen Zinssatz steht.

Als Risikomaße, die das Risiko als notwendiges Kapital erfassen, werden der Value at Risk und der Tail Value at Risk betrachtet. Dabei wird für die Periode  $t$  von einem Verlust  $L_t$  mit Verteilungsfunktion  $F_{L_t}$  ausgegangen. Der für die Periode  $t$  prognostizierte ökonomische Verlust wird durch die Veränderung des Eigenkapitals innerhalb dieser Periode dargestellt:

$$L_t = -(EC_t - EC_{t-1}) \text{ für } t = 1, 2, \dots, T. \quad (6)$$

Unter Vorgabe eines Signifikanzniveaus  $0 < \alpha < 1$  ist der Value at Risk definiert als das untere  $(1 - \alpha)$ -Quantil von  $F_{L_t}$  (vgl. z.B. [Albrecht (2007)], S. 114):

$$VaR_\alpha(L_t) = Q_{1-\alpha}(L_t) = \inf \{ x | F_{L_t}(x) \geq 1 - \alpha \} \quad (7)$$

und der Tail Value at Risk definiert als der erwartete Verlust der  $100 * \alpha$  % schlechtesten Fälle (vgl. z.B. [Albrecht (2007)], S. 115):

$$TVaR_\alpha(L_t) = E(L_t | L_t \geq VaR_\alpha(L_t)). \quad (8)$$

Interpretiert man den  $VaR_\alpha(L_t)$  als Höhe eines zu unterlegenden Kapitals, dann wird dieses Kapital mit einer Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  durch ein negatives Periodenergebnis aufgezehrt. Ein Nachteil des Value at Risk ist seine Eigenschaft als reine „Ein-Punkt-Betrachtung“. Er berücksichtigt nur die Verlustwahrscheinlichkeit, nicht aber die mögliche Verlusthöhe. Außerdem erfüllt der Value at Risk nicht das Axiom der Subadditivität, welches die Vorstellung formalisiert, dass das Risiko zusammengelegter Portefeuilles nicht höher sein sollte als die Summe der Einzelrisikopositionen. Da der  $TVaR_\alpha(L_t)$  dem Mittelwert der  $100 * \alpha$  %

größten Verluste entspricht, ist er immer größer oder gleich dem  $VaR_\alpha(L_t)$ . Unter Beschränkung auf stetige Zufallsgrößen ist der Tail Value at Risk ein kohärentes Risikomaß nach Artzner et al. (vgl. [Artzner, Delbaen, Eber, Heath (1999)]), insbesondere erfüllt er die Eigenschaft der Subadditivität.

Des Weiteren wird noch ein „mehnjähriges“ Risikokapital definiert (vgl. [Diers (2008)], S. 101 f.), bei dem  $T$  Anfalljahre berücksichtigt werden. Dafür ist die Zufallsvariable  $MaxLoss$ , die pro Simulation den Betrag darstellt, der über die simulierten  $T$  Jahre maximal ausgeglichen werden muss, definiert durch:

$$MaxLoss(T) = \max \{ KumLoss_t | t=1, 2, \dots, T \}, \text{ wobei} \quad (9)$$

$$KumLoss_1 = L_1 * (1+r_f)^{-1} \text{ und } KumLoss_t = KumLoss_{t-1} + L_t * (1+r_f)^{-t} \text{ für } t=2, 3, \dots, T.$$

Alle Ergebnisse werden mit dem risikolosen Zinssatz  $r_f$  auf den Zeitpunkt 0 diskontiert, um eine einheitliche Sichtweise über alle simulierten  $T$  Jahre zu erhalten. Auf  $MaxLoss$  wird das ausgewählte Risikomaß  $\rho$  (der Value at Risk bzw. der Tail Value at Risk) zur Bestimmung des Risikokapitals angewendet.

### 2.3.3 Performancemaße

Es werden drei Performancemaße betrachtet, die sich jeweils nur im Nenner unterscheiden:

- Die Sharpe Ratio basierend auf der Standardabweichung,
- die Sharpe Ratio basierend auf der Ruinwahrscheinlichkeit und
- die Sharpe Ratio basierend auf dem Expected Policyholder Deficit.

Die Sharpe Ratio basierend auf der Standardabweichung ist der Quotient aus der Risikoprämie (erwartete Überrendite über die sichere Rendite hinaus) und der Standardabweichung der Renditen (vgl. [Sharpe (1966)], S. 119 ff.):

$$SR_\sigma = \frac{E(EC_T) - EC_0 * (1+r_f)^T}{\sigma(EC_T)}. \quad (10)$$

Diese Sharpe Ratio misst also auch positive Abweichungen von den Erträgen in Relation zum Erwartungswert, was nicht der Fall ist, wenn anstelle der Standardabweichung die

Ruinwahrscheinlichkeit oder das Expected Policyholder Deficit verwendet wird:

$$SR_{RP} = \frac{E(EC_T) - EC_0 * (1 + r_f)^T}{RP}, \quad (11)$$

$$SR_{EPD} = \frac{E(EC_T) - EC_0 * (1 + r_f)^T}{EDP}. \quad (12)$$

## 2.4 Copulas

### 2.4.1 Das Copula-Konzept

Bei einem stochastischen Modell, das Risiken quantifizierbar macht, ist die Modellierung der Abhängigkeitsstruktur zwischen den einzelnen Risiken von großer Relevanz.<sup>17</sup> Es gibt mehrere Möglichkeiten, Zusammenhänge zwischen Zufallsvariablen zu beschreiben. Lineare Abhängigkeiten werden häufig durch Korrelationskoeffizienten abgebildet. In der Praxis sind Abhängigkeiten jedoch meist gering, aber in schlechten Fällen können plötzliche Abhängigkeiten auftreten. Dieser Sachverhalt kann durch Korrelation nicht abgefangen werden und stellt ein großes Problem im Risikomanagement dar. Ein wichtiges Hilfsmittel zur Modellierung nichtlinearer Abhängigkeiten sind Copulas.

Gesucht ist die gemeinsame Verteilung des Zufallsvektors  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Diese ist bestimmt durch die gemeinsame Verteilungsfunktion  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$  mit  $F_X(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$ ,  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  (13) (vgl. [Embrechts, McNeil, Straumann (2002)], S. 180).  $F$  enthält Informationen über die Randverteilungen und über die Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Zufallsvariablen.

---

<sup>17</sup> Viele Teilgebiete der Mathematik basieren auf der Unabhängigkeitsannahme. So wird beim kollektiven Modell der Risikothorie unterstellt, dass die Schadenhöhen unabhängig voneinander und unabhängig von der Schadenanzahl sind. Durch diese Annahme lässt die Gesamtschadenverteilung relativ leicht berechnen.

Die einfache Definition einer Copula ist:

**Definition 1 (Copula)** (vgl. z.B. [Embrechts, Lindskog, McNeil (2001)], S. 334).

Eine Copula ist eine mehrdimensionale Verteilungsfunktion auf  $[0,1]^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )  $C(u_1, u_2, \dots, u_n): [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ , deren Randverteilungen alle Gleichverteilungen sind (d.h.  $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$  für  $1 \leq i \leq n$ ).

Alternativ kann eine Copula auch folgendermaßen formaler definiert werden:

**Definition 2 (Copula)** (vgl. z.B. [Embrechts, McNeil, Straumann (2002)], S. 180).

Eine  $n$ -dimensionale Copula ist eine Funktion  $C: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ , welche die folgenden drei Eigenschaften erfüllt:

1.  $C(u_1, \dots, u_n)$  ist in jeder Komponente  $u_i$  für  $i = 1, \dots, n$  wachsend.
2.  $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $u_i \in [0,1]$ .
3. Für alle  $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in [0,1]^n$  mit  $a_i \leq b_i$  für  $i = 1, \dots, n$  gilt

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} C(u_{1i_1}, \dots, u_{ni_n}) \geq 0, \quad (14)$$

mit  $u_{j1} = a_j$  und  $u_{j2} = b_j$  für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

Das folgende Theorem von Sklar rechtfertigt die Rolle von Copulas als Abhängigkeitsfunktion und sichert die Existenz einer Copula zu beliebigen Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$ :

**Theorem (Sklar, 1959)** (vgl. z.B. [Nelson (1999)], Theorem 2.10.9, S. 18).

Ist  $F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$  eine  $n$ -dimensionale Verteilungsfunktion mit Randverteilungen  $F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \dots, F_{X_n}(x_n)$ , dann existiert eine Copula  $C$ , sodass

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \dots, F_{X_n}(x_n)). \quad (15)$$

Ist  $F$  stetig, so ist  $C$  eindeutig bestimmt.

Sind umgekehrt  $F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \dots, F_{X_n}(x_n)$  alles Verteilungsfunktionen und ist  $C$  eine Copula, dann ist  $C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \dots, F_{X_n}(x_n))$  eine  $n$ -dimensionale Verteilungsfunktion mit den Randverteilungen  $F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \dots, F_{X_n}(x_n)$ .

Für den Beweis siehe [Nelson (1999)], Theorem 2.10.9, S. 18.



Eine Copula verknüpft die Verteilungsfunktionen  $F_{X_1}, F_{X_2}, \dots, F_{X_n}$  der einzelnen Komponenten des Zufallsvektors  $X$  mit der gemeinsamen Verteilungsfunktion  $F_{X_1, \dots, X_n}$ . Mit einer Copula von  $X$  ist es möglich, die Randverteilungen von der Abhängigkeitsstruktur zu trennen, sodass man diese getrennt voneinander modellieren kann (vgl. z.B. [Fusai, Roncoroni (2008)], S. 232). Dies erleichtert insbesondere die Kalibrierung der Parameter.

Aus dem Theorem von Sklar erhält man mit  $u_i := F_{X_i}(x_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$  unmittelbar das folgende Korollar:

**Korollar** (vgl. z.B. [Embrechts, Lindskog, McNeil (2001)], S. 335).

Sei  $F$  eine  $n$ -dimensionale Verteilungsfunktion mit stetigen Randverteilungen  $F_{X_1}, F_{X_2}, \dots, F_{X_n}$  und Copula  $C$  (so dass (15) gilt). Dann gilt für alle  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in [0,1]^n$ :

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = F_{X_1, \dots, X_n}(F_{X_1}^{-1}(u_1), F_{X_2}^{-1}(u_2), \dots, F_{X_n}^{-1}(u_n)). \quad (16)$$

## 2.4.2 Copula-Familien

Es gibt eine Vielzahl von Copulas<sup>18</sup>, die alle verschiedene Abhängigkeitsstrukturen abbilden. Durch die Wahl der Copula wird die Abhängigkeitsstruktur eindeutig festgelegt. Jede Copula bildet eine andere Abhängigkeitsstruktur ab. Kriterien, nach denen man entscheidet, welche Copula die Realität am besten beschreibt, gibt es nicht. Daher wird in dieser Arbeit die Wirkungsweise von zwei wichtigen Familien von Copulas in einem stochastischen Modellrahmen verglichen: elliptische Copulas und Archimedische Copulas (vgl. z.B. [Embrechts, Lindskog, McNeil (2001)], S. 253 ff., [Nelson (1999)], S. 98 ff. und [Okhrin, Okhrin, Schmid (2009)], S. 2 ff.).

---

<sup>18</sup> Die Anzahl an bivariaten Copulas ist sehr groß. Im Vergleich dazu ist die Anzahl an höherdimensionalen Copulas gering. Der Sachverhalt im Versicherungswesen lässt sich nicht durch die Abbildung eines bivariaten Zusammenhangs adäquat abbilden, deshalb werden für die Untersuchung nur solche Copulas ausgewählt, die in höheren Dimensionen ( $n > 2$ ) definiert sind.

Elliptische Copulas werden unter Verwendung von (16) konstruiert, indem elliptische Verteilungen zusammengesetzt werden. Zentrale Beispiele für elliptische Copulas sind die Gauss- und die t-Copula, die in der Praxis weit verbreitet sind, da sie selbst in höheren Dimensionen leicht simuliert werden können.

Die Gauss-Copula ist definiert als

$$C_P^{Gauss}(u) = \Phi_P(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n)), \quad (17)$$

wobei  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der univariaten Standardnormalverteilung ist und  $\Phi_P$  die gemeinsame Verteilungsfunktion der multivariaten Standardnormalverteilung mit Korrelationsmatrix  $P$  bezeichnet (vgl. z.B. [Embrechts, Lindskog, McNeil (2001)], S. 256).

Die t-Copula hat die Form

$$C_{\nu, P}^t(u) = t_{\nu, P}(t_{\nu}^{-1}(u_1), t_{\nu}^{-1}(u_2), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_n)), \quad (18)$$

wobei  $t_{\nu}$  die Verteilungsfunktion der standardisierten univariaten t-Verteilung mit  $\nu$  Freiheitsgraden ist und  $t_{\nu, P}$  die gemeinsame Verteilungsfunktion der standardisierten multivariaten t-Verteilung mit Korrelationsmatrix  $P$  und  $\nu$  Freiheitsgraden bezeichnet (vgl. z.B. [Embrechts, Lindskog, McNeil (2001)], S. 257).

Das Problem bei elliptischen Copulas besteht darin, dass sie von der inversen Verteilungsfunktion abhängen, die selten in expliziter Form vorliegt, da die gemeinsame Verteilungsfunktion und die inversen Randverteilungen nur eine Integraldarstellung besitzen. Deshalb stellt die Klasse der Archimedischen Copulas eine wichtige Alternative dar. Bekannte Vertreter aus dieser Klasse sind die Gumbel-, die Survival-Gumbel-, die Clayton-, die Survival-Clayton- und die Frank-Copula<sup>19</sup>. Diese Copulas sind über ihren sogenannten Generator  $\varphi$  durch die folgende Gleichung charakterisiert (vgl. z.B. [Okhrin, Okhrin, Schmid (2009)], S. 2 f.):

$$C(u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \varphi^{-1}(u_i)\right) \text{ für } u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in [0,1]^n \text{ mit } \varphi \in \mathcal{L}, \quad (19)$$

wobei  $\mathcal{L}$  die Menge der Laplace-Transformationen beschreibt, die aus streng monoton fallenden, differenzierbaren Funktionen besteht, d.h.

$$\mathcal{L} = \{ \varphi: [0, \infty) \rightarrow [0,1] \mid \varphi(0) = 1, \varphi(\infty) = 0; (-1)^j \varphi^{(j)} \geq 0; j = 1, \dots, \infty \}.$$

Sehr einschränkend ist, dass die ganze komplexe multivariate Abhängigkeitsstruktur durch

<sup>19</sup> Die Survival-Frank-Copula wird nicht betrachtet, da die Frank-Copula symmetrisch und damit identisch zu ihrer Survival-Copula ist.

einen einzigen Copula-Parameter  $\theta$  der generierenden Funktion  $\varphi$  festgelegt ist. Außerdem impliziert die multivariate Archimedische Copula, dass die Variablen austauschbar sind, was bedeutet, dass die Verteilung von  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  die gleiche ist wie die von  $(u_{j_1}, u_{j_2}, \dots, u_{j_n})$  für alle  $j_l \neq j_k$ . Das ist nicht unbedingt eine akzeptable Annahme für praktische Anwendungen; es ist wünschenswert multivariate Copulas mit nicht-austauschbaren Variablen zu haben.

Eine Verallgemeinerung der multivariaten Archimedischen Copulas und eine wesentlich flexiblere Methode stellen die hierarchischen Archimedischen Copulas dar, Copulas mit partieller Austauschbarkeit.<sup>20</sup> Im Gegensatz zur normalen Archimedischen Copula (vgl. (19)) definiert die hierarchische Archimedische Copula die Abhängigkeitsstruktur rekursiv (vgl. [Okhrin, Okhrin, Schmid (2009)], S. 3). Sie ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} C(u) &= \varphi_{n-1} \{ \varphi_{n-1}^{-1} \circ \varphi_{n-2} (\dots [ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 \{ \varphi_1^{-1}(u_1) + \varphi_1^{-1}(u_2) \} \\ &\quad + \varphi_2^{-1}(u_3) ] + \dots + \varphi_{n-2}^{-1}(u_{n-1}) ) + \varphi_{n-1}^{-1}(u_n) \} \\ &= \varphi_{n-1} [ \varphi_{n-1}^{-1} \circ C(\{ \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2} \})(u_1, \dots, u_{n-1}) + \varphi_{n-1}^{-1}(u_n) ] \end{aligned} \quad (20)$$

für  $\varphi_{n-i}^{-1} \circ \varphi_{n-j} \in \mathcal{L}'$ ,  $i < j$ , wobei

$$\mathcal{L}' = \{ \omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \mid \omega(0) = 0, \omega(\infty) = \infty; (-1)^{j-1} \omega^{(j)} \geq 0; j = 1, \dots, \infty \},$$

und  $\circ$  die Komposition ist. Eine  $n$ -dimensionale Copula benötigt  $n-1$  Generatoren  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ . Die Generatoren  $\varphi_i$  können von einer einzigen Generator-Familie kommen und sich lediglich im Parameter unterscheiden oder sie kommen von verschiedenen Generator-Familien. Gehören die  $\varphi_i$ 's zur gleichen Familie, so gibt es Einschränkungen an die Parameter, damit die vollständige Monotonie von  $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_{i+1}$ <sup>21</sup> gegeben ist. Für die meisten Copula-Typen sollte der Parameter vom niedrigsten zum höchsten Level kleiner werden, um brauchbare Copulas zu gewährleisten.

Die Generatoren und die Parameterbedingungen der fünf betrachteten Copulas sind in Tabelle 07, S. 37 aufgelistet.

<sup>20</sup> Die multivariate Verallgemeinerung enthält (19) als Spezialfall.

<sup>21</sup> Das impliziert  $\varphi_{n-i}^{-1} \circ \varphi_{n-j} \in \mathcal{L}'$ ,  $i < j$  (vgl. [McNeil (2008)]).

### 2.4.3 Abhängigkeiten

Da eine Copula Abhängigkeitsstrukturen zwischen Zufallsvariablen beschreibt, gibt es eine Beziehung zwischen der Copula und verschiedenen Abhängigkeitsmaßen. Ein Abhängigkeitsmaß liefert einen Hinweis auf das Ausmaß der gegenseitigen Beziehung zweier Zufallsvariablen (vgl. z.B. [Fusai, Roncoroni (2008)], S. 235). Die klassischen Maße für stetige Zufallsvariablen sind Pearson's Korrelationskoeffizient, Kendall's Tau und Spearman's Rho:

**Definition (Pearson's Korrelationskoeffizient)** (vgl. z.B. [Fusai, Roncoroni (2008)], S. 236 f.).

Pearson's linearer Korrelationskoeffizient  $\rho$  zwischen zwei Zufallsvariablen  $X_1$  und  $X_2$  mit  $Var(X_1) > 0$  und  $Var(X_2) > 0$  ist definiert durch:

$$\rho(X_1, X_2) := \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1) Var(X_2)}}. \quad (21)$$

Dabei ist  $Cov(X_1, X_2) = E((X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2))$  die Kovarianz zwischen  $X_1$  und  $X_2$  und  $Var(X_i) = E((X_i - EX_i)^2)$  die Varianz von  $X_i$  für  $i = 1, 2$ .

Es gilt stets  $-1 \leq \rho(X_1, X_2) \leq 1$ , im Falle  $\rho(X_1, X_2) = 0$  heißen  $X_1$  und  $X_2$  unkorreliert.

**Definition (Spearman's Rho und Kendall's Tau)** (vgl. z.B. [Embrechts, McNeil, Straumann (2002)], S. 192).

Es seien  $X$  und  $Y$  Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen  $F_X$  und  $F_Y$  und gemeinsamer Verteilungsfunktion  $F$ . Spearman's Rho  $\varrho$  ist gegeben durch:

$$\varrho(X, Y) := \rho(F_X(x), F_Y(y)). \quad (22)$$

Es seien  $(X_1, Y_1)$  und  $(X_2, Y_2)$  zwei unabhängige bivariate Zufallsvektoren von  $F$ , dann ist Kendall's Tau  $\rho_\tau$  gegeben durch:

$$\rho_\tau(X, Y) := P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0) \quad (23)$$

Ebenso wie Copulas sind diese Maße invariant unter streng wachsenden Transformationen (vgl. z.B. [Embrechts, Lindskog, McNeil (2001)], S. 346). Bei Vorliegen perfekt positiver

<sup>22</sup> Man nennt zwei Realisierungen  $(x_i, y_i)$  und  $(x_j, y_j)$  eines stetigen Zufallsvektors  $(X, Y)$  konkordant, falls  $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$  und diskordant, falls  $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$  (vgl. z.B. [Fusai, Roncoroni (2008)], S. 234). Kendall's Tau ist offenbar die Differenz der Wahrscheinlichkeiten für Konkordanz und Diskordanz von  $(X_1, Y_1)$  und  $(X_2, Y_2)$ .

bzw. negativer Abhängigkeit sind sie gleich 1 bzw. -1. Im Gegensatz zu  $\varrho$  und  $\rho_\tau$  erfasst Pearson's Korrelationskoeffizient  $\rho$  nur die lineare Abhängigkeit und ist deshalb zur Messung nichtlinearer Abhängigkeiten ungeeignet (vgl. [Embrechts, Lindskog, McNeil (2001)], S. 340).

Bei praktischen Fragestellungen ist es insbesondere von Bedeutung, Abhängigkeiten in Randbereichen (in sogenannten Tails) der gemeinsamen Verteilung von Zufallsvariablen zu berücksichtigen. Mittels Copulas lassen sich Tail-Abhängigkeiten untersuchen. Sie messen den Abhängigkeitsgrad zwischen Zufallsvariablen, die bei extremen Beobachtungen auftreten. Formaler definiert man:

**Definition (Tail-Abhängigkeit)** (vgl. z.B. [Fusai, Roncoroni (2008)], S. 238).

Es sei  $X = (X_1, X_2)$  ein bivariater Zufallsvektor, wobei die Komponenten  $X_1$  und  $X_2$  stetige Verteilungsfunktionen  $F_{X_1}$  und  $F_{X_2}$  haben. Dann ist durch

$$\lambda_u := \lim_{u \uparrow 1} P(X_2 > F_{X_2}^{-1}(u) | X_1 > F_{X_1}^{-1}(u)) \quad \text{und} \quad (24)$$

$$\lambda_l := \lim_{u \downarrow 0} P(X_2 \leq F_{X_2}^{-1}(u) | X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(u)) \quad (25)$$

der Koeffizient oberer Tail-Abhängigkeit (coefficient of upper tail dependence) und der Koeffizient unterer Tail-Abhängigkeit (coefficient of lower tail dependence) definiert.

Wenn  $\lambda_u$  (bzw.  $\lambda_l$ ) positiv ist, dann gelten die zwei Zufallsvariablen als asymptotisch abhängig im unteren Tail (bzw. oberen Tail); wenn umgekehrt  $\lambda_u$  (bzw.  $\lambda_l$ ) verschwindet, gelten sie als asymptotisch unabhängig.

Diese Definition kann auch formuliert werden als Terme der Copula verbunden mit zwei Zufallsvariablen (vgl. z.B. [Fusai, Roncoroni (2008)], S. 238):

$$\lambda_u := \lim_{u \uparrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \quad \text{und} \quad (26)$$

$$\lambda_l := \lim_{u \downarrow 0} \frac{C(u, u)}{u}. \quad (27)$$

### 2.4.4 Eigenschaften der ausgewählten Copulas

Die Eigenschaften der sieben betrachteten Copulas sind in den Tabellen 06 und 07 zusammengefasst.

Copula	Tail-Abhängigkeit	Kendall's Tau $\rho_\tau$	Parameter	$\lambda_u$	$\lambda_l$
Gauss	none	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$	$ \rho  \leq 1$	0	0
$t_\nu$	upper und lower	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$	$ \rho  \leq 1$	$2\bar{t}_{\nu+1}(\sqrt{\nu+1} \frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}})$	$2\bar{t}_{\nu+1}(\sqrt{\nu+1} \frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}})$

**Tabelle 06:** Abhängigkeitseigenschaften für die betrachteten elliptischen Copulas (vgl. [Koziol (2006)], S. 671)

Copula	Tail-Abhängigkeit	Generator $\varphi_i(u)$	Kendall's Tau $\rho_{\tau i}$	Parameter, $(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1})'$ c.m.	$\lambda_u$	$\lambda_l$
Gumbel	upper	$\exp\{-u^{1/\theta_i}\}$	$1 - \frac{1}{\theta_i}$	$\theta_1 \leq \theta_2, \theta_i \in [1, \infty)$	$2 - 2^{\frac{1}{\theta_i}}$	0
Survival-Gumbel	lower	via Gumbel	$1 - \frac{1}{\theta_i}$	$\theta_1 \leq \theta_2, \theta_i \in [1, \infty)$	0	$2 - 2^{\frac{1}{\theta_i}}$
Clayton	lower	$(\theta_i u + 1)^{-1/\theta_i}$	$\frac{\theta_i}{\theta_i + 2}$	$\theta_1 \leq \theta_2, \theta_i \in (0, \infty)$	0	$2^{-\frac{1}{\theta_i}}$
Survival-Clayton	upper	via Clayton	$\frac{\theta_i}{\theta_i + 2}$	$\theta_1 \leq \theta_2, \theta_i \in (0, \infty)$	$2^{-\frac{1}{\theta_i}}$	0
Frank	none	$-\frac{1}{\theta_i} \ln\{e^{-u}(e^{-\theta_i} - 1) + 1\}$	$1 - 4\theta_i^{-1}(1 - \frac{1}{\theta_i} \int_0^{\theta_i} \frac{t}{\exp(t)-1} dt)$	$\theta_1 \leq \theta_2, \theta_i \in (0, \infty)$	0	0

**Tabelle 07:** Abhängigkeitseigenschaften für die betrachteten hierarchischen Archimedischen Copulas mit vollständig monotonen Generatoren und mit dazugehörigem Parameterraum (vgl. [Okhrin, Okhrin, Schmid (2009)], S. 4 und [Koziol (2006)], S. 671)

Die Copulas unterscheiden sich wesentlich in ihrer Eigenschaft, Tail-Abhängigkeiten abzubilden. Während die Gauss-Copula upper- und lower-tail-unabhängig ist, modelliert die t-Copula untere und obere Tail-Abhängigkeit in gleichen Maßen. Ein Nachteil elliptischer Copulas ist, dass sie radial-symmetrisch<sup>23</sup> sind ( $C = \hat{C}$ ) (vgl. [Nelson (1999)], S. 36 ff.). In vielen Anwendungsgebieten der Versicherungsbranche scheint es jedoch angebracht zu sein, zwischen hohen Verlusten eine stärkere Abhängigkeit zu haben als zwischen hohen Gewinnen. Diese Asymmetrie kann mit elliptischen Copulas nicht modelliert werden, hingegen mit Archimedischen Copulas. Die Frank-Copula weist zwar wie die Gauss-Copula keine Tail-Abhängigkeiten auf, jedoch können mit der Gumbel-, der Clayton- und der jeweiligen Survival-Copula nur untere bzw. obere Tail-Abhängigkeiten modelliert werden.

---

23 Ist  $X$  eine Zufallsvariable und  $a$  eine reelle Zahl, dann sagt man, dass  $X$  symmetrisch ist über  $a$ , wenn die Verteilungsfunktionen der Zufallsvariablen  $X-a$  und  $a-X$  die gleichen sind. Das ist der Fall, wenn  $P(X - a \leq x) = P(a - X \leq x)$  für alle  $x$  in  $\mathbb{R}$  gilt. Für eine stetige Zufallsvariable  $X$  mit Verteilungsfunktion  $F$  (und Survival-Funktion  $\bar{F} = 1 - F$ ) ist das äquivalent zu  $F(a + x) = \bar{F}(a - x)$  (wenn  $F$  unstetig ist, gilt die Gleichheit nur in den stetigen Punkten von  $F$ ).

Im bivariaten Fall definiert man nun Folgendes:

**Definition (Radiale Symmetrie).**

Seien  $X, Y$  Zufallsvariablen und  $(a, b)$  ein Punkt in  $\mathbb{R}^2$ .  $(X, Y)$  sind radial-symmetrisch über  $(a, b)$ , wenn die gemeinsame Verteilungsfunktion von  $X - a$  und  $Y - b$  die gleiche ist wie die gemeinsame Verteilungsfunktion  $a - X$  und  $b - Y$ .

Für stetige Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  kann man die Bedingung für radiale Symmetrie in Termen der gemeinsamen Verteilungsfunktion und Survival-Funktion von  $X$  und  $Y$  ausdrücken:

**Theorem.**

Seien  $X, Y$  stetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion  $H$  und Randverteilungen  $F$  bzw.  $G$  und sei  $(a, b)$  ein Punkt in  $\mathbb{R}^2$ . Dann ist  $(X, Y)$  radial-symmetrisch über  $(a, b)$ , genau dann, wenn  $H(a + x, b + y) = \bar{H}(a - x, b - y)$  für alle  $(x, y)$  in  $\mathbb{R}^2$  gilt.

Die Bezeichnung „radial“ hat seine Ursache darin, dass die Punkte  $(a + x, b + y)$  und  $(a - x, b - y)$  ausgehend von  $(a, b)$  auf dem Strahl in gegenüberliegender Richtung liegen.

**Theorem.**

Seien  $X, Y$  stetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion  $H$  und Randverteilungen  $F$  bzw.  $G$  und Copula  $C$ . Weiter seien  $X$  und  $Y$  symmetrisch über  $a$  bzw.  $b$ . Dann ist  $(X, Y)$  radial-symmetrisch über  $(a, b)$ , d.h. es gilt  $H(a + x, b + y) = \bar{H}(a - x, b - y)$  für alle  $(x, y)$  in  $\mathbb{R}^2$ , genau dann, wenn  $C = \hat{C}$ , d.h., genau dann, wenn  $C$  die Funktionalgleichung  $C(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)$  für alle  $(u, v)$  erfüllt.

Im Falle von Verteilungen mit elliptischen Copulas gibt es eine Beziehung zwischen Kendall's Tau  $\rho_\tau$  und Pearson's linearem Korrelationskoeffizienten  $\rho_{ij}$  zwischen zwei Zufallsvariablen  $X_i$  und  $X_j$ :

$$\rho_\tau(X_i, X_j) = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_{ij}. \quad (28)$$

Bei hierarchischen Archimedischen Copulas besteht eine Relation zwischen Kendall's Tau  $\rho_\tau$  und dem Copula-Parameter  $\theta$  (siehe Tabelle 07, Spalte 4). Diese funktionalen Zusammenhänge sind für Anwendungen besonders hilfreich.



## 3 Simulationsmodell

### 3.1 Modellrahmen

Die Modellbasis für diese Simulationsstudie bildet ein DFA-Modell eines Schaden- und Unfallversicherers, das auf die Veröffentlichung von [Eling, Toplek (2009)] zurückgeht. Im Mittelpunkt soll die allgemeine Methode stehen, daher wurden einige vereinfachende Annahmen getroffen. Der Ansatz kann grundsätzlich in mehreren Punkten erweitert werden.

Das Eigenkapital zum Ende der Periode  $t$  wird mit  $EC_t$  bezeichnet. Die Prämieinnahmen  $P_{t-1}$  in Periode  $t$ , die annahmegemäß zum Periodenanfang anfallen, werden als ein bestimmter Anteil am gesamten Volumen des Versicherungsmarktes berechnet. Das Marktvolumen  $MV$  wächst jährlich um  $i$  %.<sup>24</sup> Das Verhältnis zwischen dem Marktvolumen und den Prämieinnahmen wird im Modell durch drei Faktoren beschrieben. Mit einer Consumer-Response-Funktion  $cr_{t-1}$ , die den Zusammenhang zwischen den gezeichneten Prämien und dem Sicherheitsniveau<sup>25</sup> des Unternehmens abbildet (vgl. [Wakker, Thaler, Tversky (1997)]), einem Underwriting Cycle<sup>26</sup>  $\Pi_{t-1}$  und einem Marktanteil  $\beta_{t-1}$  des Versicherungsunternehmens in Periode  $t$ , berechnet sich die Prämie wie folgt:

$$P_{t-1} = cr_{t-1}^{EC_{t-1}} * \Pi_{t-1} * \beta_{t-1} * MV * (1+i)^{t-1}. \quad (29)$$

Im Schadenmodell wird zwischen Nicht-Katastrophenschäden und Katastrophenschäden<sup>27</sup> unterschieden, die annahmegemäß jeweils zum Periodenende anfallen.<sup>28</sup> Für die Nicht-

---

24 Dadurch soll ein durchschnittliches Marktwachstum abgebildet bzw. eine Inflation ausgeglichen werden (vgl. [Eling, Toplek (2009)], S. 654).

25 Das Sicherheitsniveau des Unternehmens wird durch das Minimum Capital Requirement (MCR) bestimmt, das auf den in Deutschland gültigen Solvency-I-Regeln basiert.

26 Der Underwriting Cycle wird als Autoregressiver Prozess 2. Ordnung implementiert, vgl. Abschnitt 4.3 Underwriting Cycle in Modellen der Dynamischen Finanzanalyse.

27 Aufgrund des unterschiedlichen Schadenverlaufs wird in der Praxis meist zwischen Kumul-, Groß- und Basisschäden unterschieden (vgl. [Diers (2007)], S. 77).

28 Aus Vereinfachungsgründen bei der Modellierung der Passivseite wird im Modell keine Schwankungsrückstellung berücksichtigt und die Schadenrückstellung wird zum jeweiligen Periodenende vollständig aufgelöst.

Katastrophenschäden  $C_{ncat,t}$  wird der Lognormalverteilungsansatz gewählt. Die Modellierung der Gesamtschadenhöhe pro Periode erfolgt durch Annahme einer erwarteten Schadenquote und ihrer Standardabweichung. Die Katastrophenschäden  $C_{cat,t}$  werden durch die Paretoverteilung modelliert. Unabhängig vom Prämienvolumen werden ein fester Erwartungswert und ein fester Streuungsparameter für die Modellierung der Gesamtschadenhöhe angenommen.<sup>29</sup> Die Gesamtschadenlast  $C_t$  zum Ende der Periode  $t$  setzt sich aus den Nicht-Katastrophenschäden und den Katastrophenschäden zum Zeitpunkt  $t$  zusammen ( $C_t = C_{ncat,t} + C_{cat,t}$ ).

Im verwendeten Modell werden zum einen Abschlusskosten, die annahmegemäß jeweils am Anfang der Periode  $t$  anfallen, und zum anderen Schadenregulierungskosten, die annahmegemäß jeweils am Ende der Periode  $t$  anfallen, berücksichtigt. Die Abschlusskosten hängen nicht nur linear vom gezeichneten Marktvolumen ab (modelliert durch den Parameter  $\gamma$ ), sondern auch quadratisch von der Veränderung des gezeichneten Marktvolumens (modelliert durch den Parameter  $\eta$ ), z.B. wegen überproportional steigender Werbungskosten:

$$Ex_{t-1}^P = \gamma * \beta_{t-1} * MV * (1+i)^{t-1} + \eta * ((\beta_{t-1} - \beta_{t-2}) * MV * (1+i)^{t-1})^2. \quad (30)$$

Die Schadenregulierungskosten lassen sich aus einem Anteil  $\delta$  der Schäden ermitteln:

$$Ex_t^C = \delta * C_t. \quad (31)$$

Auf der Kapitalanlage-seite werden verschiedene Anlageklassen<sup>30</sup> abhängig vom eingegangenen Risiko (hoch/ niedrig)<sup>31</sup> unterschieden. Kapitalanlagen mit hohem Risiko werden im Folgenden als riskante Kapitalanlagen bezeichnet, Kapitalanlagen mit niedrigem Risiko als risikoarme Kapitalanlagen. Der Parameter  $\alpha_{t-1}$  gibt den Anteil an riskanten Kapitalanlagen in Periode  $t$  an.

Zur Berechnung der stetigen Zinsen auf die Kapitalanlagen wird die Normalverteilung angenommen. Mit der Rendite  $r_{1t}$  der riskanten Kapitalanlagen und der Rendite  $r_{2t}$  der risikoarmen Kapitalanlagen ergibt sich die Portfoliorendite durch Gewichtung dieser Anlageren-

29 Diese Verteilungstypen haben sich in der Praxis als sehr geeignet herausgestellt. Hier wurde auf die Erhebung von Schadendaten verzichtet.

30 Anderwärts sind andere Einteilungen auch gebräuchlich, z.B. Equities, Fixed, Real Estate.

31 Kapitalanlagen mit hohem Risiko sind z.B. Aktien, Kapitalanlagen mit niedrigem Risiko sind z.B. Anleihen.

den mit  $\alpha_{t-1}$  und  $(1 - \alpha_{t-1})$ :

$$r_{pt} = \alpha_{t-1} * r_{1t} + (1 - \alpha_{t-1}) * r_{2t}. \quad (32)$$

Die Kapitalanlagebestände werden im Modell nicht fortgeschrieben. Sie lassen sich aus dem Anteil  $\alpha_{t-1}$  bzw.  $(1 - \alpha_{t-1})$  der zur Anlage verfügbar stehenden Mitteln berechnen.

Im Risikomodell werden fünf Managementstrategien abgebildet:

- Die Null-Strategie,
- die Solvency-Strategie,
- die Limited-Liability-Strategie,
- die Wachstumsstrategie und
- die Rückversicherungsstrategie.

Die Null-Strategie bedeutet, dass sich die Modellparameter ohne Einfluss von Managementregeln so verändern, wie in den übrigen Teilmodellen beschrieben.

Die Solvency-Strategie ist eine strategische Maßnahme zur Risikosenkung. Pro Periode ( $t = 1, \dots, T-1$ ) wird der Anteil an riskanten Kapitalanlagen  $\alpha_{t-1}$  um 0,05 gesenkt und der Anteil am Marktvolumen  $\beta_{t-1}$  um 0,02 gesenkt, und zwar immer dann, wenn das Eigenkapital unter einen kritischen Wert sinkt, der durch das Minimum Capital Requirement (MCR) zuzüglich eines Sicherheitszuschlags von 50 % definiert ist.

Bei der Limited-Liability-Strategie wird der Anteil an riskanten Kapitalanlagen  $\alpha_{t-1}$  um 0,05 und der Anteil am Marktvolumen  $\beta_{t-1}$  um 0,02 erhöht, sobald das Eigenkapital den kritischen Wert unterschreitet.

Die Wachstumsstrategie kombiniert die Solvency-Strategie mit einem Wachstum im Zeichnungsgeschäft. Fällt das Eigenkapital unter das Mindestkapital für die Geschäftstätigkeit inklusive eines Sicherheitszuschlags von 50 %, finden die Maßnahmen aus der Solvency-Strategie Anwendung. Steigt das Eigenkapital über den Trigger an, so wächst der Anteil am Marktvolumen  $\beta_{t-1}$  um 0,02.

Eine weitere risikopolitische Maßnahme ist die Rückversicherungsstrategie. Das Versicherungsunternehmen schließt einen Stop-Loss-Vertrag auf den Gesamtschaden einer Periode ab. Das Unternehmen zahlt am Beginn einer jeden Periode die Rückversicherungsprämie in Höhe von 2 Millionen €. Übersteigt der Gesamtschaden des Versicherers die vereinbarte Priorität von 200 Millionen €, so übernimmt der Rückversicherer den übersteigenden Teil

bis zu einer vereinbarten Höchstgrenze von 240 Millionen €.

Als Ergebnisgröße wird das versicherungstechnische Ergebnis am Ende der Periode  $t$  betrachtet, das den Verlauf eines Schadenjahres exakt beurteilt. Es setzt sich zusammen aus den Prämien abzüglich der Schäden und Kosten:

$$U_t = P_{t-1} - C_t - Ex_{t-1}^P - Ex_t^C. \quad (33)$$

Das Kapitalanlageergebnis am Ende der Periode  $t$  lässt sich durch Multiplikation der Portfoliorendite mit den freien Mitteln berechnen:

$$I_t = r_{pt} * (EC_{t-1} + P_{t-1} - Ex_{t-1}^P). \quad (34)$$

Mit einem Steuersatz  $tr$  auf positive Gewinne ergibt sich der Gewinn des Versicherungsunternehmens aus dem versicherungstechnischen Ergebnis und dem Kapitalanlageergebnis:

$$E_t = I_t + U_t - \max(tr * (I_t + U_t), 0). \quad (35)$$

Die Entwicklung des Eigenkapitals zum Ende der Periode  $t$  wird wie folgt beschrieben:

$$EC_t = EC_{t-1} + E_t. \quad (36)$$

Es setzt sich aus dem Eigenkapital zum Ende der Periode  $t-1$  und dem Gewinn in der Periode  $t$  zusammen.

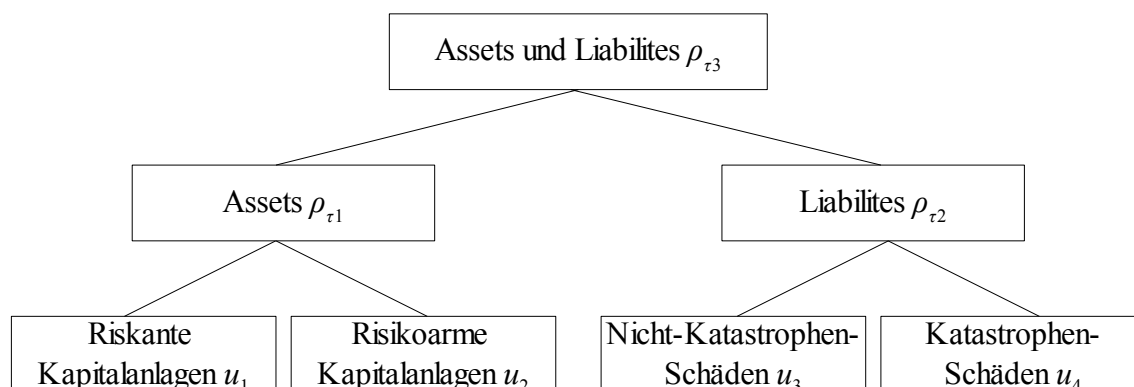
Zur Analyse der Finanz- und Risikosituation werden die in Abschnitt 2.3 definierten Rendite-, Risiko- und Performancemaße berechnet.

### 3.2 Mathematische Modellierung und Implementierung nichtlinearer Abhängigkeiten

Das in Kapitel 3.1 beschriebene Modell bildet zwei Assetklassen und zwei Arten von Liabilities ab. In diesem Abschnitt geht es nun um die Modellierung der Abhängigkeiten zwischen diesen Risikokategorien, die durch Erzeugung von korrelierten Zufallszahlen in die Dynamische Finanzanalyse integriert werden können.

Die Messung der Abhängigkeiten erfolgt über den Rangkorrelationskoeffizienten Kendall's Tau (vgl. (23)), der im Gegensatz zum häufig verwendeten linearen Korrelationskoeffizienten auch nichtlineare Abhängigkeiten messen kann.

Konkret sollen drei Abhängigkeiten auf zwei Stufen im Modell abgebildet werden (siehe Abbildung 03). Die Kapitalanlagerenditen  $r_{1t}$  und  $r_{2t}$  sind über den Parameter  $\rho_{\tau_1}$  miteinander korreliert. Die Nicht-Katastrophenschäden  $C_{ncat,t}$  sind mit den Katastrophenschäden  $C_{cat,t}$  über den Parameter  $\rho_{\tau_2}$  miteinander verbunden und die Assets und Liabilities über den Parameter  $\rho_{\tau_3}$ .



**Abbildung 03:** Abhängigkeitsstruktur im DFA-Modell (vgl. [Eling, Toplek (2009)], S. 660)

Die Korrelationen werden mithilfe verschiedener Copula-Typen (Gauss-, t-, Gumbel-, Survival-Gumbel-, Clayton-, Survival-Clayton- und Frank-Copula) modelliert, um die unterschiedlichen Wirkungsweisen der einzelnen Typen zur Analyse von Stressszenarien zu nutzen.

Zur Parametrisierung der Gauss-Copula (vgl. (17))

$$C_P^{Gauss}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \Phi_P(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \Phi^{-1}(u_3), \Phi^{-1}(u_4)) \quad (37)$$

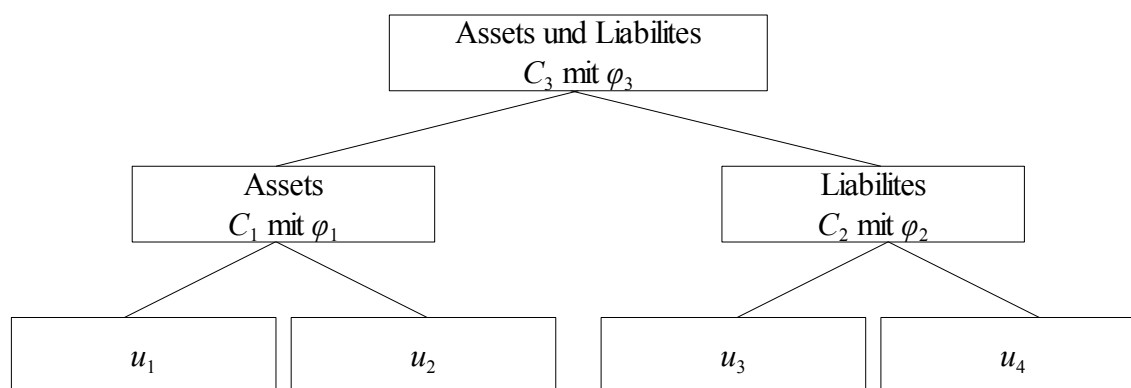
und der t-Copula (vgl. (18))

$$C_{v,P}^t(u_1, u_2, u_3, u_4) = t_{v,P}(t_v^{-1}(u_1), t_v^{-1}(u_2), t_v^{-1}(u_3), t_v^{-1}(u_4)) \quad (38)$$

wird die Beziehung (28) zwischen den Elementen der Korrelationsmatrix  $P$  der Gauss- bzw. t-Copula und dem Rangkorrelationsmaß Kendall's Tau  $\rho_{\tau_i}$  genutzt. Für die t-Copula werden 5 Freiheitsgrade gewählt.

Zur Kalibrierung der Archimedischen Copulas wird der funktionale Zusammenhang (vgl. Tabelle 07, Spalte 4) zwischen dem Copula-Parameter  $\theta_i$  und Kendall's Rangkorrelation  $\rho_{\tau_i}$  verwendet. Die drei Archimedischen Copulas und ihre Survival-Copulas werden als hierarchische Archimedische Copulas implementiert. Die kleinste Dimension, in der die in (20) definierte hierarchische Archimedische Copula existiert, ist  $d = 4$ . Die Copula ist  $C(u_1, u_2, u_3, u_4) = \varphi_3(\varphi_3^{-1} \circ \varphi_1(\varphi_1^{-1}(u_1) + \varphi_1^{-1}(u_2)) + \varphi_3^{-1} \circ \varphi_2(\varphi_2^{-1}(u_3) + \varphi_2^{-1}(u_4)))$  (39) mit drei Generatoren  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  und  $\varphi_3$ . Der Zufallsvektor  $(U_1, U_2, U_3, U_4)$  mit Verteilungsfunktion (39) ist nur partiell austauschbar. Die Zufallsvariablen  $U_1$  und  $U_2$  sind austauschbar, genauso  $U_3$  und  $U_4$ , die verbleibenden Paare aber nicht.

Auf der ersten Stufe wird die Abhängigkeit zwischen den ersten beiden Variablen (den letzten beiden Variablen) durch eine Copula mit Generator  $\varphi_1$  ( $\varphi_2$ ) modelliert, d.h.  $C_1(u_1, u_2) = \varphi_1(\varphi_1^{-1}(u_1) + \varphi_1^{-1}(u_2))$  ( $C_2(u_3, u_4) = \varphi_2(\varphi_2^{-1}(u_3) + \varphi_2^{-1}(u_4))$ ). Auf der zweiten Stufe wird eine weitere Copula mit einem dritten Generator  $\varphi_3$  benutzt, um die beiden Copulas der ersten Stufe miteinander zu verbinden (siehe Abbildung 04).



**Abbildung 04:** Abhängigkeitsstruktur der vier-dimensionalen hierarchischen Archimedischen Copula im DFA-Modell (vgl. [Eling, Toplek (2009)], S. 660)

Die  $\varphi_i$ 's werden alle aus der gleichen Generator-Familie gewählt, um die echten Effekte der unterschiedlichen Tail-Abhängigkeits-Typen zu erhalten.

Um Zufallszahlen aus den Archimedischen Copulas zu erzeugen, wird die inverse Transformationsmethode auf die bedingten Verteilungen unter Verwendung numerischer Verfahren zur Lösung von Nullstellenproblemen nach dem in [Embrechts, Lindskog, McNeil (2001)], S. 364 beschriebenen Algorithmus angewendet. Die negative Abhängigkeit zwischen den Assets und den Liabilities wird umgesetzt, indem für die Liabilities die mit den Archimedischen Copulas erzeugten gleichverteilten Zufallszahlen auf die Survival-Funktionen der Randverteilungen angewandt werden. Zum Generieren der Survival-Gumbel- und Survival-Clayton-Copula werden die Zufallszahlen der Gumbel- und Clayton-Copula mit  $1-u$  transformiert.

### 3.3 Parameterwahl

Die Modellparameter sind analog zu [Eling, Toplek (2009)] gewählt, die Überprüfung der Vorgabe ist nicht Gegenstand der Arbeit.

Es wird ein Zeithorizont von  $T = 5$  Perioden (eine Periode entspricht einem Jahr) betrachtet.<sup>32</sup> In der Arbeit von [Eling, Toplek (2009)] wurde das Modell auf Robustheit bei Variation des Horizonts untersucht. Es zeigte sich (vgl. [Eling, Toplek (2009)], S. 670), dass alle wesentlichen Relationen zwischen den verschiedenen Abhängigkeitsstrukturen unverändert bleiben.

Das anfängliche Eigenkapital  $EC_0$  beträgt 75 Millionen €. Das Marktvolumen gezeichneter Versicherungsrisiken  $MV$  wird zunächst auf 1.000 Millionen € gesetzt und wächst dann pro Periode um  $i = 3$  %. Bei einem anfänglichen Wert des Consumer-Response-Faktors  $cr_0$  von 1<sup>33</sup>, einem Underwriting Cycle<sup>34</sup>  $\Pi_0$  von 1 und einem Marktanteil  $\beta_0$  von 20 %, ergeben

---

32 Bei der Dynamischen Finanzanalyse geht es um eine mehrjährige Finanzanalyse. Bei den Berechnungen im Rahmen von Solvency II steht die einjährige Betrachtungsweise im Vordergrund.

33 Der Consumer-Response-Faktor  $cr$  ist 1 (0,95), wenn das 1,5-fache des Eigenkapitals am Ende der letzten Periode oberhalb (unterhalb) des Sicherheitsniveaus des Unternehmens ist. Zur Berechnung des Sicherheitsniveaus siehe unten.

34 Für die Parametrisierung des Autoregressiven Prozesses zur Modellierung des Underwriting Cycles

sich nach (29) Prämieinnahmen  $P_0$  zu Beginn der ersten Periode in Höhe von 200 Millionen €.

Die Nicht-Katastrophenschäden  $C_{ncat,t}$  werden über den Lognormalverteilungsansatz mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$  modelliert. Die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  werden folgendermaßen aus dem Erwartungswert<sup>35</sup>  $E(C_{ncat,t}) = 0,85 * \beta_{t-1} * MV$  und der Standardabweichung<sup>36</sup>  $\sqrt{Var(C_{ncat,t})} = 0,085 * \beta_{t-1} * MV$  errechnet (vgl. [Mack (2002)], S. 54):

$$\sigma = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{Var(C_{ncat,t})}{E(C_{ncat,t})^2}\right)} \quad (40)$$

und

$$\mu = \ln(E(C_{ncat,t})) - 0,5 * \sigma^2. \quad (41)$$

In der ersten Periode liegt der erwartete Schaden  $E(C_{ncat,0})$  bei 170 Millionen € und die Standardabweichung  $\sqrt{Var(C_{ncat,0})}$  beträgt 17 Millionen €.

Für die Schadenhöhe der Katastrophenschäden  $C_{cat,t}$  wird der Paretoverteilungsansatz mit Erwartungswert  $E(C_{cat,t}) = 0,5$  Millionen € und Streuungsparameter<sup>37</sup>  $D(C_{cat,t}) = 4,5$  gewählt.

Die Kosten (vgl. (30), (31)) sind gegeben durch:

$$Ex_{t-1}^P = 0,05 * \beta_{t-1} * MV * (1+i)^{t-1} + 0,001 * ((\beta_{t-1} - \beta_{t-2}) * MV * (1+i)^{t-1})^2$$

und

$$Ex_t^C = 0,05 * C_t.$$

Der Anteil an riskanten Kapitalanlagen  $\alpha_0$  beträgt in der ersten Periode 40 %. Der risikolose Zinssatz  $r_f$  liegt über den gesamten Betrachtungshorizont konstant bei 3 %. Der stetige Zins hat einen Erwartungswert von 5 % für riskante Anlagen bzw. 10 % für risikoarme Anlagen und eine Standardabweichung von 5 % bzw. 20 %. Daraus ergibt sich unter Normalverteilungsannahme der diskrete Zinssatz  $r_{2t} = \exp(N(0,05; (0,05)^2)) - 1$  bzw.  $r_{1t} = \exp(N(0,10; (0,20)^2)) - 1$ .

---

wurden die Ergebnisse von [Cummins, Outreville (1987)] für den deutschen Gesamtmarkt herangezogen (vgl. 4.3 Underwriting Cycle in Modellen der Dynamischen Finanzanalyse). Diese führen zu einer Zykluslänge von 7,76 Jahren.

35 Es wird eine erwartete Schadenquote von 85 % angenommen.

36 Es wird eine Standardabweichung von 0,085 für die erwartete Schadenquote angenommen.

37 Für den Streuungsparameter gilt der Zusammenhang:  $Var(C_{cat,t}) = (E(C_{cat,t}))^2 * (D(C_{cat,t}) / (D(C_{cat,t}) - 2))$ .



Das Sicherheitsniveau des Unternehmens wird durch das Minimum Capital Requirement (MCR) bestimmt. Der Berechnung des MCR liegen die in Deutschland gültigen Solvency-I-Regeln zugrunde. Das Solvenzkapital eines Schaden- und Unfallversicherers berechnet sich aus dem Maximum von 18 % der Beiträge auf die ersten 50 Millionen €, 16 % auf alle weiteren und 26 % des Schadenaufwands auf die ersten 35 Millionen €, 23 % auf alle weiteren. Nach diesen Regeln ergibt sich zu Beginn des Beobachtungszeitraums ein MCR in Höhe von 40,27 Millionen €. <sup>38</sup> Mit einem Eigenkapital  $EC_o = 75$  Millionen € werden die Solvency-I-Vorschriften eingehalten und es ergibt sich ein Eigenkapital-zu-Prämien-Verhältnis von 37,5 %.

Der Steuersatz  $tr$  beträgt 25 %.

Kendall's Tau zwischen den verschiedenen Assets ist genauso wie zwischen den verschiedenen Liabilities mit 0,2 leicht positiv. Assets und Liabilities sind leicht negativ korreliert, hier ist Kendall's Tau -0,1. Mit dieser Wahl der Kendall's Rangkorrelationen sind die Parameterbedingungen aus Tabelle 07 erfüllt, sodass die Generatoren  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  und  $\varphi_3$  vollständig monoton sind und die zwei in das Modell eingehenden Kompositionsfunktionen  $\varphi_3^{-1} \circ \varphi_1$  und  $\varphi_3^{-1} \circ \varphi_2$  Elemente aus  $\mathcal{L}'$  sind.

---

<sup>38</sup> D.h. das Maximum von 18 % \* 50 Millionen € + 16 % \* 150 Millionen und  
26 % \* 35 Millionen € + 23 % \* 135,5 Millionen €.

## 4 Ergebnisse

### 4.1 Originäres Simulationsergebnis

Die Ergebnisse für die acht implementierten Abhängigkeitsstrukturen und der jeweiligen Managementstrategie, die auf Basis von 500.000 Simulationen und einer Iteration berechnet wurden, sind in den Tabellen 08 bis 12 zusammengefasst. Der Analyse liegt eine Monte-Carlo-Simulation zugrunde.

Zunächst wird Tabelle 08 betrachtet, in der die Ergebnisse für das Unternehmen mit der Null-Strategie (Strategie, bei der keine Managementregeln eingesetzt werden) dargestellt sind. Im Falle der Unabhängigkeit zwischen verschiedenen Assets, zwischen verschiede-

Abhängigkeits- struktur	Unkorreliert	Gauss	t	Gumbel	Survival Gumbel	Clayton	Survival Clayton	Frank
Tail-Abhängigkeit	none	none	upper, lower	upper	lower	lower	upper	none
Null								
E(G)	28,56	28,04	27,98	28,09	27,80	27,70	28,16	28,08
ROI	23,76%	23,47%	23,43%	23,49%	23,33%	23,27%	23,54%	23,49%
$\sigma(G)$	15,44	17,91	17,89	19,38	19,78	20,67	19,03	17,63
RP	0,35%	1,16%	1,40%	0,89%	1,90%	1,91%	0,81%	0,93%
EPD	0,04	0,15	0,21	0,93	1,40	1,95	0,83	0,13
Var <sub>0,005</sub> (MaxLoss)	230,54	293,39	326,89	270,99	361,69	354,67	258,42	269,39
TVaR <sub>0,005</sub> (MaxLoss)	278,59	349,17	404,34	488,88	669,65	768,01	457,74	321,43
SR <sub><math>\sigma</math></sub>	1,69	1,43	1,43	1,33	1,28	1,22	1,35	1,46
SR <sub>RP</sub>	36,94	11,04	9,16	14,41	6,68	6,61	15,99	13,75
SR <sub>EPD</sub>	3,18	0,83	0,61	0,14	0,09	0,06	0,15	1,01

E(G): erwarteter Gewinn pro Jahr in Mio. €, ROI: Return on Investment,  $\sigma(G)$ : Standardabweichung des Gewinns pro Jahr in Mio. €, RP: Ruinwahrscheinlichkeit, EPD: Expected Policyholder Deficit in Mio. €, Var<sub>0,005</sub>(MaxLoss): 5-jähriges Risikokapital in Mio. € - berechnet mit dem Risikomaß Value at Risk zum Perzentil 99,5 %, TVaR<sub>0,005</sub>(MaxLoss): 5-jähriges Risikokapital in Mio. € - berechnet mit dem Risikomaß Tail Value at Risk zum Perzentil 99,5 %, SR <sub>$\sigma$</sub> : Sharpe Ratio basierend auf der Standardabweichung, SR<sub>RP</sub>: Sharpe Ratio basierend auf der Ruinwahrscheinlichkeit, SR<sub>EPD</sub>: Sharpe Ratio basierend auf dem Expected Policyholder Deficit

**Tabelle 08:** Ergebnisse bei der Simulation für die Null-Strategie

nen Liabilities sowie zwischen Assets und Liabilities (Unkorreliertheit) resultiert ein erwarteter Gewinn von 28,56 Millionen € pro Jahr, ein Return on Investment von 23,76 % und eine Standardabweichung von 15,44 Millionen € pro Jahr. Für die Ruinwahrscheinlichkeit eines einjährigen Betrachtungshorizonts stellt der Wert 0,5 % ein kritisches Level dar, denn dies ist die Anforderung, die im Rahmen von Solvency II vorgesehen ist. Die

Ruinwahrscheinlichkeit des 5-jährigen Betrachtungshorizonts beträgt 0,35 % und liegt folglich trotz größeren Horizonts unter der regulatorischen Anforderung, die in der Europäischen Union vorgesehen ist.

Der Vergleich der unterschiedlichen Abhängigkeitsstrukturen zeigt relativ geringe Auswirkungen auf den erwarteten Gewinn.  $E(G)$  reduziert sich je nach Copula-Typ um 1,39 % bis 3,02 %, so z.B. mit der Frank-Copula (d.h. nur die lineare Abhängigkeit wird berücksichtigt) um 1,68 % von 28,56 Millionen € auf 28,08 Millionen € pro Jahr. Ähnliches gilt für den Return on Investment. Die Korrelationsannahmen haben jedoch starken Einfluss auf die betrachteten Risikomaße. Die Standardabweichung steigt je nach Copula-Typ um 14,15 % (von 15,44 Millionen € auf 17,63 Millionen € pro Jahr wie mit der Frank-Copula) bis 33,86 % (von 15,44 Millionen € auf 20,67 Millionen € pro Jahr wie mit der Clayton-Copula) an. Noch stärkere Veränderungen gibt es bei den Downside-Risikomaßen Ruinwahrscheinlichkeit und Expected Policyholder Deficit. Mit der Gauss-Copula erhöht sich die  $RP$  von 0,35 % auf 1,16 % (+228,06 %) und das  $EPD$  sogar von 0,04 Millionen € auf 0,15 Millionen € pro Jahr (+273,72 %). Somit ist die Performance niedriger als im unkorrelierten Fall:  $SR_\sigma$  fällt um 15,48 %,  $SR_{RP}$  um 70,12 % und  $SR_{EPD}$  um 73,77 %. Zieht man die anderen Copulas mit in die Betrachtung ein, so ist festzustellen, dass die extremen Effekte an die Art der nichtlinearen Abhängigkeit gebunden sind. Die Ruinwahrscheinlichkeiten mit den Copulas mit oberer Tail-Abhängigkeit (Gumbel, Survival-Clayton) sind niedriger als die Ruinwahrscheinlichkeiten mit den Copulas ohne Tail-Abhängigkeit (Gauss, Frank), die wiederum niedriger sind als die Ruinwahrscheinlichkeiten mit den Copulas mit unterer Tail-Abhängigkeit (t, Survival-Gumbel, Clayton). Des Weiteren fällt auf, dass in diesem Beispiel mit allen Copulas Ruinwahrscheinlichkeiten auftreten, die deutlich über 0,5 % liegen. Das Expected Policyholder Deficit ist mit den nicht-symmetrischen Copulas höher als mit den symmetrischen Gauss-, t- und Frank-Copulas, weil nicht-symmetrische Copulas mehr extreme Werte in den Tailbereichen generieren als symmetrische Copulas. Das  $EPD$  zeigt sowohl die untere Tail-Abhängigkeit als auch die Asymmetrie der Copulas an.

Tabelle 09 stellt die Simulationsergebnisse für die Solvency-Strategie dar. Vergleicht man diese Ergebnisse mit denen aus Tabelle 08, ist zu sehen, dass das Downside-Risiko unter der Solvency-Strategie sinkt, obwohl der erwartete Gewinn und der Return on Investment

Abhängigkeits- struktur	Unkorreliert	Gauss	t	Gumbel	Survival Gumbel	Clayton	Survival Clayton	Frank
Tail-Abhängigkeit	none	none	upper, lower	upper	lower	lower	upper	none
Solvency								
E(G)	27,91	27,33	27,28	27,38	27,11	26,99	27,46	27,36
ROI	23,40%	23,06%	23,03%	23,09%	22,93%	22,86%	23,14%	23,08%
$\sigma(G)$	15,44	17,90	17,85	19,36	19,83	20,73	19,07	17,61
RP	0,21%	0,79%	1,06%	0,58%	1,51%	1,49%	0,51%	0,60%
EPD	0,02	0,08	0,13	0,87	1,31	1,86	0,79	0,07
VaR <sub>0,005</sub> (MaxLoss)	220,81	280,31	311,61	258,60	344,32	338,20	246,71	256,93
TVaR <sub>0,005</sub> (MaxLoss)	267,24	334,21	386,02	474,81	650,87	750,16	446,26	307,68
SR <sub><math>\sigma</math></sub>	1,65	1,39	1,39	1,29	1,25	1,19	1,32	1,42
SR <sub>RP</sub>	60,48	15,80	11,78	21,49	8,21	8,23	24,66	20,78
SR <sub>EPD</sub>	6,89	1,54	0,95	0,14	0,09	0,07	0,16	1,87

E(G): erwarteter Gewinn pro Jahr in Mio. €, ROI: Return on Investment,  $\sigma(G)$ : Standardabweichung des Gewinns pro Jahr in Mio. €, RP: Ruinwahrscheinlichkeit, EPD: Expected Policyholder Deficit in Mio. €, VaR<sub>0,005</sub>(MaxLoss): 5-jähriges Risikokapital in Mio. € - berechnet mit dem Risikomaß Value at Risk zum Perzentil 99,5 %, TVaR<sub>0,005</sub>(MaxLoss): 5-jähriges Risikokapital in Mio. € - berechnet mit dem Risikomaß Tail Value at Risk zum Perzentil 99,5 %, SR <sub>$\sigma$</sub> : Sharpe Ratio basierend auf der Standardabweichung, SR<sub>RP</sub>: Sharpe Ratio basierend auf der Ruinwahrscheinlichkeit, SR<sub>EPD</sub>: Sharpe Ratio basierend auf dem Expected Policyholder Deficit

**Tabelle 09:** Ergebnisse bei der Simulation für die Solvency-Strategie

nahezu unverändert bleiben. Allerdings reduziert sich das Risiko deutlich weniger, sobald nichtlineare Abhängigkeit angenommen wird. Die Solvency-Strategie ist also im Falle der Berücksichtigung nichtlinearer Abhängigkeiten nicht effektiv, um Downside-Risiken zu senken.

Ein anderes Bild ergibt sich für die Limited-Liability-Strategie, siehe Tabelle 10, S. 52. Diese Strategie führt zu höheren erwarteten Gewinnen begleitet von höheren Risiken. Wieder ist das Gewinnniveau unabhängig von der Implementierung der nichtlinearen Abhängigkeit, hier gibt es durchgängig einen Zuwachs von rund 1,50 % im Vergleich zur Null-Strategie. Hingehen spielt die Limited-Liability-Strategie für die Downside-Risikomaße eine große Rolle. Für alle Abhängigkeitsstrukturen steigt das Risiko stark an (RP und EPD im Durchschnitt um rund 40 %), insbesondere bei denen ohne Beachtung der nichtlinearen Abhängigkeit. Deshalb sind die Performance-Zahlen  $SR_{RP}$  und  $SR_{EPD}$  für die Limited-Liability-Strategie niedriger als für die Null-Strategie.

Abhängigkeits- struktur	Unkorreliert	Gauss	t	Gumbel	Survival Gumbel	Clayton	Survival Clayton	Frank
Tail-Abhängigkeit	none	none	upper, lower	upper	lower	lower	upper	none
Limited-Liability								
E(G)	28,89	28,48	28,38	28,50	28,21	28,13	28,57	28,51
ROI	23,95%	23,72%	23,67%	23,73%	23,57%	23,52%	23,77%	23,74%
$\sigma(G)$	15,47	17,99	17,96	19,39	19,85	20,75	19,11	17,71
RP	0,55%	1,58%	1,77%	1,28%	2,33%	2,37%	1,18%	1,33%
EPD	0,08	0,26	0,32	1,01	1,53	2,10	0,92	0,22
VaR <sub>0,005</sub> (MaxLoss)	238,33	303,70	339,07	281,01	374,79	367,83	267,67	279,35
TVaR <sub>0,005</sub> (MaxLoss)	288,65	362,98	421,11	500,39	687,08	786,48	470,77	334,83
SR <sub><math>\sigma</math></sub>	1,71	1,45	1,45	1,35	1,30	1,24	1,37	1,47
SR <sub>RP</sub>	24,03	8,27	7,35	10,22	5,53	5,43	11,13	9,79
SR <sub>EPD</sub>	1,59	0,49	0,40	0,13	0,08	0,06	0,14	0,58

E(G): erwarteter Gewinn pro Jahr in Mio. €, ROI: Return on Investment,  $\sigma(G)$ : Standardabweichung des Gewinns pro Jahr in Mio. €, RP: Ruinwahrscheinlichkeit, EPD: Expected Policyholder Deficit in Mio. €, VaR<sub>0,005</sub>(MaxLoss): 5-jähriges Risikokapital in Mio. € - berechnet mit dem Risikomaß Value at Risk zum Perzentil 99,5 %, TVaR<sub>0,005</sub>(MaxLoss): 5-jähriges Risikokapital in Mio. € - berechnet mit dem Risikomaß Tail Value at Risk zum Perzentil 99,5 %, SR <sub>$\sigma$</sub> : Sharpe Ratio basierend auf der Standardabweichung, SR<sub>RP</sub>: Sharpe Ratio basierend auf der Ruinwahrscheinlichkeit, SR<sub>EPD</sub>: Sharpe Ratio basierend auf dem Expected Policyholder Deficit

**Tabelle 10:** Ergebnisse bei der Simulation für die Limited-Liability-Strategie

In Tabelle 11 sind die Ergebnisse für die Wachstumsstrategie zu sehen. Im Gegensatz zu den anderen Strategien führt die Wachstumsstrategie zu einer höheren Rendite. Sowohl der

Abhängigkeits- struktur	Unkorreliert	Gauss	t	Gumbel	Survival Gumbel	Clayton	Survival Clayton	Frank
Tail-Abhängigkeit	none	none	upper, lower	upper	lower	lower	upper	none
Wachstum								
E(G)	33,63	32,80	32,78	32,88	32,58	32,43	32,97	32,83
ROI	26,52%	26,08%	26,08%	26,13%	25,97%	25,89%	26,18%	26,10%
$\sigma(G)$	19,42	22,31	22,24	23,47	24,00	24,78	23,22	21,96
RP	0,21%	0,81%	1,12%	0,59%	1,61%	1,56%	0,52%	0,60%
EPD	0,02	0,08	0,14	0,88	1,33	1,88	0,80	0,07
VaR <sub>0,005</sub> (MaxLoss)	260,41	326,09	358,69	302,03	393,28	388,00	288,47	300,74
TVaR <sub>0,005</sub> (MaxLoss)	313,87	388,08	442,32	525,60	709,81	809,30	496,85	358,60
SR <sub><math>\sigma</math></sub>	1,61	1,36	1,37	1,30	1,26	1,21	1,32	1,39
SR <sub>RP</sub>	73,48	18,73	13,63	25,70	9,40	9,65	29,61	25,54
SR <sub>EPD</sub>	8,19	1,79	1,06	0,17	0,11	0,08	0,19	2,20

E(G): erwarteter Gewinn pro Jahr in Mio. €, ROI: Return on Investment,  $\sigma(G)$ : Standardabweichung des Gewinns pro Jahr in Mio. €, RP: Ruinwahrscheinlichkeit, EPD: Expected Policyholder Deficit in Mio. €, VaR<sub>0,005</sub>(MaxLoss): 5-jähriges Risikokapital in Mio. € - berechnet mit dem Risikomaß Value at Risk zum Perzentil 99,5 %, TVaR<sub>0,005</sub>(MaxLoss): 5-jähriges Risikokapital in Mio. € - berechnet mit dem Risikomaß Tail Value at Risk zum Perzentil 99,5 %, SR <sub>$\sigma$</sub> : Sharpe Ratio basierend auf der Standardabweichung, SR<sub>RP</sub>: Sharpe Ratio basierend auf der Ruinwahrscheinlichkeit, SR<sub>EPD</sub>: Sharpe Ratio basierend auf dem Expected Policyholder Deficit

**Tabelle 11:** Ergebnisse bei der Simulation für die Wachstumsstrategie

erwartete Gewinn als auch der Return on Investment steigen bei Wachstum sichtbar an. Das Risiko wird von der Einbeziehung nichtlinearer Abhängigkeit beeinflusst. Beim Vergleich mit der Null-Strategie, siehe Tabelle 08, ist eine deutliche Veränderung aller Risiko-

maße festzustellen. Die Standardabweichung steigt stark an, die Ruinwahrscheinlichkeit und das Expected Policyholder Deficit fallen stark ab. Die Veränderung ist bei den Copulas mit unterer Tail-Abhängigkeit erheblich geringer.

Die Ergebnisse für die Rückversicherungsstrategie werden in Tabelle 12 dargestellt. Im Vergleich mit der Null-Strategie ist der Gewinnzuwachs gering, für die Downside-Risiko- maße gibt es große Unterschiede. Die gesamten Risiken sinken stark. Trotzdem wird nicht

Abhängigkeits- struktur	Unkorreliert	Gauss	t	Gumbel	Survival Gumbel	Clayton	Survival Clayton	Frank
Tail-Abhängigkeit	none	none	upper, lower	upper	lower	lower	upper	none
Rückversicherung								
E(G)	28,65	28,24	28,18	28,25	28,04	27,95	28,31	28,25
ROI	23,81%	23,59%	23,55%	23,59%	23,47%	23,42%	23,62%	23,59%
$\sigma(G)$	14,70	16,95	16,91	18,56	18,75	19,73	18,30	16,73
RP	0,15%	0,62%	0,70%	0,46%	1,01%	1,04%	0,43%	0,50%
EPD	0,01	0,06	0,08	0,85	1,19	1,77	0,77	0,05
VaR <sub>0,005</sub> (MaxLoss)	190,84	240,17	256,19	222,99	280,46	280,85	213,52	222,00
TVaR <sub>0,005</sub> (MaxLoss)	227,80	281,33	307,99	427,05	556,08	670,18	402,93	261,35
SR <sub><math>\sigma</math></sub>	1,79	1,53	1,53	1,39	1,37	1,30	1,42	1,55
SR <sub>RP</sub>	87,40	20,94	18,30	27,83	12,68	12,31	30,35	25,78
SR <sub>EPD</sub>	10,60	2,15	1,71	0,15	0,11	0,07	0,17	2,59

E(G): erwarteter Gewinn pro Jahr in Mio. €, ROI: Return on Investment,  $\sigma(G)$ : Standardabweichung des Gewinns pro Jahr in Mio. €, RP: Ruinwahrscheinlichkeit, EPD: Expected Policyholder Deficit in Mio. €, VaR<sub>0,005</sub>(MaxLoss): 5-jähriges Risikokapital in Mio. € - berechnet mit dem Risikomaß Value at Risk zum Perzentil 99,5 %, TVaR<sub>0,005</sub>(MaxLoss): 5-jähriges Risikokapital in Mio. € - berechnet mit dem Risikomaß Tail Value at Risk zum Perzentil 99,5 %, SR <sub>$\sigma$</sub> : Sharpe Ratio basierend auf der Standardabweichung, SR<sub>RP</sub>: Sharpe Ratio basierend auf der Ruinwahrscheinlichkeit, SR<sub>EPD</sub>: Sharpe Ratio basierend auf dem Expected Policyholder Deficit

**Tabelle 12:** Ergebnisse bei der Simulation für die Rückversicherungsstrategie

mit allen Abhängigkeitsstrukturen eine Ruinwahrscheinlichkeit unter 0,5 % erreicht. Aufgrund der nicht ganz günstigen Ausgangssituation hat das Versicherungsunternehmen im Falle der nicht-symmetrischen Survival-Gumbel- und Clayton-Copula mit unterer Tail-Abhängigkeit immer noch eine relativ hohe Ruinwahrscheinlichkeit von über 1 %. Die Reduktion des Expected Policyholder Deficits ist bei den hierarchischen Archimedischen Copulas (abgesehen von der Frank-Copula) verhältnismäßig gering. Dennoch scheint die Rückversicherung – zumindest aus der Sicht des Eigenkapitalgebers – eine effiziente Methode zur Risikobegrenzung auch bei nichtlinearer Abhängigkeit zu sein.

## 4.2 Schätzrisiko in Modellen der Dynamischen Finanzanalyse

Im Mittelpunkt dieses Abschnittes steht die Analyse und Quantifizierung des Schätzrisikos. Die Idee des Schätzrisikos besteht darin, zu untersuchen, wie robust ein Modell der Dynamischen Finanzanalyse ist, wenn eine bestimmte Anzahl von Simulationen (beispielsweise 10.000 oder 100.000) zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Ergebnisdaten durchgeführt wird. Der Fokus liegt darauf, zu analysieren, ob zwischen den einzelnen Risikomaßen Unterschiede bestehen. Insbesondere im Hinblick auf die Risikomessung unter Solvency II ist das ein wichtiges Ergebnis.<sup>39</sup>

In der Literatur werden einige Fehlerquellen diskutiert, die bei der Erstellung eines Internen Risikomodells entstehen (vgl. z.B. [Cairns (2000)] und [Diers PS (2007)]). Durch die Übertragung von Erfahrungen früherer Jahre für die Vorhersage zukünftiger Ergebnisse zur Quantifizierung von Unternehmensrisiken treten zum Beispiel ein Modell-, ein Prognose- und ein Änderungsrisiko auf (vgl. z.B. [Diers (2008)], S. 96). Diese Risiken sind z.B. im Rahmen der MaRisk geeignet zu erfassen (vgl. [BaFin (2009)], Abschnitt 5 und 7.3.2.2). Beim Modellrisiko handelt es sich um mögliche Fehler bei der Modellierung des Untersuchungsgegenstandes, als Folge der Auswahl der angewendeten Verfahren (vgl. z.B. [Diers PS (2007)], S. 2). Modellierungsfehler sind solche, die durch falsche Auswahl von Verteilungsfunktionen und (Rechen-)Modulen entstehen, sodass der reale Verlauf nicht optimal angenähert wird. Beispiele dafür sind eine falsche Verteilung der Aktienrendite mit der Folge einer falschen Abbildung des Wiederanlageprozesses oder ungeeignete Copulas mit dann falscher Abbildung der Abhängigkeitsstruktur. Das Modellrisiko stellt sozusagen die erste Unsicherheitsquelle bei der Umsetzung eines Risikomanagementsystems dar. Das Prognoserisiko besteht aus einem Prozess- und einem Parameterrisiko (vgl. z.B. [Diers PS (2007)], S. 2). Das Prozessrisiko beschreibt „die Unsicherheit, die durch den eigentlichen Zufallsprozess, den das Modell beschreibt, entsteht“ (siehe [Diers PS (2007)], S. 2). Es ist unvermeidlich, dass die modellierten Aktienrenditen oder Schäden zufälligerweise mehr oder weniger stark von ihrem Erwartungswert abweichen. Das Parameterrisiko resul-

---

<sup>39</sup> Zu diesem Zweck wird in diesem Abschnitt zusätzlich zum 5-jährigen Risikokapital, berechnet mit dem Risikomaß (Tail) Value at Risk, auch das 1-jährige Risikokapital, berechnet mit dem Risikomaß (Tail) Value at Risk, betrachtet.

tiert aus der Unsicherheit der Modellparameter. Aus einem begrenzten Datensatz können eben keine exakten Parameter geschätzt werden und es stellt sich – wenn überhaupt – erst im Nachhinein heraus, was besser gewesen wäre.

Das Änderungsrisiko kommt dadurch zu Stande, dass sich die Rechnungsgrundlagen im Zeitablauf ändern können. Das ist ganz allgemein anerkannt für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Schäden. Denn all die messbaren Ereignisse wie die Schadenhäufigkeit und -höhe bei Unfällen aller Art, die Schadenhäufigkeit und Stärke von Naturkatastrophen usw. hängen wiederum von einer unüberschaubaren Menge anderer Faktoren ab, seien sie willkürlich wie zum Beispiel ein grundsätzliches Gerichtsurteil und die Wirtschaftsentwicklung oder gänzlich unsteuerbar wie die Aktivität der Sonnenflecken.

Noch nicht in der Literatur abgehandelt ist das Schätzrisiko. Beim Schätzrisiko geht es ebenfalls wie beim Modell-, beim Prognose- und beim Änderungsrisiko um eine Modellunsicherheit. Die Entstehung dieser speziellen Unsicherheit wird im Folgenden kurz erläutert:

Neben deterministischen Modellannahmen gibt es etliche stochastische Modellannahmen, welche zufällige Ereignisse beschreiben. Diese Annahmen werden mit Hilfe eines stochastischen Szenariogenerators erzeugt. An dieser Stelle fließen pro Durchlauf des Modells, also pro Simulation, un-/korrelierte Zufallszahlen ein, um eine konkrete Realisierung der Zufallsvariablen zu generieren. Stochastische Prognosen werden vor allem bezüglich der Kapitalmarktentwicklung und der Simulation der Schäden benötigt. Im Projektions-Modul werden die Modellannahmen mit den Bestandsdaten zusammengeführt, sodass die Unternehmensdaten schließlich fortgeschrieben und Ergebnisdaten erzeugt werden können. Dieser Vorgang wird beispielsweise 10.000 Mal wiederholt. Aus den Realisierungen der Ergebnisse werden Verteilungsfunktionen bestimmt, anhand derer zum Beispiel Rendite-, Risiko- und Performancemaße berechnet werden können, die zur Analyse weiterverwendet werden. Bei einer hohen Anzahl von Simulationen und einem konsistenten Modell sind die ermittelten Kennzahlen relativ stabil, aber selten ganz stabil. Andere Zufallszahlen – die im Simulationsmodell einen anderen Anfangswert (seed) bedeuten – liefern in der Regel andere Werte. Die damit zum Ausdruck kommende Unsicherheit wird in dieser Arbeit als Schätzrisiko bezeichnet.

Ähnlich wie beim Modell-, Prognose- und Änderungsrisiko trägt die Prognose zukünftiger



Daten (speziell der Korrelationen) auf Basis aktueller Beobachtungen zur Entstehung des Schätzrisikos bei. Darüber hinaus spielt der Zufallsprozess bei der Erzeugung der auf dem Intervall  $[0,1]$  gleichverteilten Zufallszahlen eine bedeutende Rolle. Davon abhängig ist die konkrete Ausprägung der Realisierung der Zufallsvariable.

Für die Analyse und Quantifizierung des Schätzrisikos wird das Simulationsmodell nicht nur mit einer vorgegeben Anzahl von Simulationen, sondern auch mit einer vorgegeben Anzahl von Iterationen durchlaufen. Pro Iteration werden über die Simulationen wie bisher (siehe 2.3) die Kenngrößen ermittelt. Zudem wird eine Statistik über die Iterationen aufgestellt. Für die unterschiedlichen Risikomaße werden der Erwartungswert, die Standardabweichung und der Variationskoeffizient<sup>40</sup> berechnet. Der Variationskoeffizient soll ein Indikator für das Schätzrisiko der verschiedenen Maße sein. Mit ihm kann eine Aussage über die Stabilität des Modells getroffen werden.

Bezüglich der Umsetzung dieses Ansatzes muss ein Kompromiss zwischen der Genauigkeit (Anzahl der Simulationen und Anzahl der Iterationen) und der dafür benötigten Zeit gefunden werden. Hier wurden 10.000 Simulationen<sup>41</sup> und 10.000 Iterationen verwendet (ausgehend von der Null-Strategie). Pro Iteration müssen neu, unabhängig von der vorherigen Iteration generierte Zufallszahlen in das Modell einfließen. Die hierarchischen Archimedischen Copulas sind im Modell so implementiert, dass – im Gegensatz zum unkorrelierten Fall, zur Gauss- und t-Copula – lediglich eine Permutation<sup>42</sup> der bereits erzeugten

---

40 Der Variationskoeffizient berechnet sich als Quotient aus der Standardabweichung und dem Erwartungswert.

41 Für den Erhalt eines stabilen Simulationsergebnisses reichen 10.000 Simulationen nicht aus. Daher wurden für die restlichen Analysen in dieser Arbeit 500.000 Simulationen betrachtet. In der Praxis sind die Modelle aber so komplex, dass nicht einfach so mal 500.000 Simulationen durchgeführt werden können. Daher ist es schon relevant, das Schätzrisiko bei einer recht niedrigen Anzahl von Simulationen zu untersuchen.

42 Bei den hierarchischen Archimedischen Copulas wird bei einer neuen Iteration aus dem im Vorfeld erzeugten Zufallszahlenset eine Stichprobe ohne Zurücklegen gezogen. Es fließen also immer die gleichen Zufallszahlen lediglich in einer anderen Reihenfolge ein. Die Permutation führt dazu, dass pro Periode innerhalb einer Iteration immer die gleichen Ergebnisse entstehen, nur halt in einer anderen Reihenfolge (die jeweilige Simulationsnummer ist eine andere). So ist z.B. der *VaR* und der *TVaR* nach der ersten Periode stets der gleiche. Erst nach der zweiten Periode gibt es Abweichungen zwischen den verschiedenen

korrelierten Zufallszahlen stattfindet.<sup>43</sup> Eine Analyse mit unterschiedlichen Zufallszahlen scheitert am Berechnungsaufwand.<sup>44</sup> Aus diesem Grund wurden die hierarchischen Archimedischen Copulas bei der folgenden Analyse außen vor gelassen.

Bei Betrachtung der in Tabelle 13 dargestellten Ergebnisse für die Erwartungswerte der

Abhängigkeitsstruktur	Unkorreliert	Gauss	t
Tail-Abhängigkeit	none	none	upper, lower
Null			
$\sigma(G)$	15,46	17,89	17,95
RP	0,36%	1,15%	1,42%
EPD	0,04	0,15	0,21
$VaR_{0,005}(\text{MaxLoss})$	230,48	292,05	325,60
$TVaR_{0,005}(\text{MaxLoss})$	278,40	347,44	402,51
$VaR_{0,005}(L_1)$	42,78	54,19	60,79
$VaR_{0,005}(L_2)$	46,64	59,10	66,07
$VaR_{0,005}(L_3)$	50,61	64,01	71,26
$VaR_{0,005}(L_4)$	54,44	68,93	76,65
$VaR_{0,005}(L_5)$	58,31	74,09	82,29
$TVaR_{0,005}(L_1)$	51,90	64,63	75,40
$TVaR_{0,005}(L_2)$	56,40	70,29	81,70
$TVaR_{0,005}(L_3)$	61,08	76,09	88,03
$TVaR_{0,005}(L_4)$	65,61	81,93	94,66
$TVaR_{0,005}(L_5)$	70,30	88,12	101,59

$\sigma(G)$ : Standardabweichung des Gewinns pro Jahr in Mio. €, RP: Ruinwahrscheinlichkeit, EPD: Expected Policyholder Deficit in Mio. €,  $VaR_{0,005}(\text{MaxLoss})$ : 5-jähriges Risikokapital in Mio. € - berechnet mit dem Risikomaß Value at Risk zum Perzentil 99,5 %,  $TVaR_{0,005}(\text{MaxLoss})$ : 5-jähriges Risikokapital in Mio. € - berechnet mit dem Risikomaß Tail Value at Risk zum Perzentil 99,5 %,  $VaR_{0,005}(L_t)$ : Value at Risk der Periode t in Mio. € zum Perzentil 99,5 %,  $TVaR_{0,005}(L_t)$ : Tail Value at Risk der Periode t in Mio. € zum Perzentil 99,5 %

**Tabelle 13:** Erwartungswert der Risikomaße für die Null-Strategie bei 10.000

#### Iterationen und 10.000 Simulationen

Iterationen aufgrund der unterschiedlichen Kombinationen der Simulationsnummern. Im Gegensatz dazu werden bei den restlichen Abhängigkeitsstrukturen (Annahme der Unkorreliertheit, Gauss- und t-Copula) für jede Iteration ganz neue Zufallszahlen erzeugt.

43 Zusätzlich werden mit der Gumbel- und der Clayton-Copula (und ihrer Survival-Copulas) ein paar „unendlich große“ Naturkatastrophenschäden modelliert. Diese Extremfälle würden den Variationskoeffizienten bei Betrachtung von nur 10.000 Simulationen maßgeblich beeinflussen.

44 Alternativ zum implementierten Algorithmus für die Erzeugung der korrelierten Zufallszahlen ([Embrechts, Lindskog, McNeil (2001)], S. 364) wurden Algorithmen betrachtet, die in [Hofert (2008)], S. 5163-5174, [McNeil (2008)], S. 567-581 und [Ridout (2009)], S. 439-450 behandelt wurden. Diese Algorithmen enthalten sehr viele for-Schleifen und führen dadurch bei Implementierung in R zu keiner großen Zeitersparnis.

Risikomaße über die Iterationen ist festzustellen, dass die Werte größenordnungsmäßig denen aus Tabelle 08 (nur 1 Iteration und 500.000 Simulationen) entsprechen.

In Tabelle 14 sind die Standardabweichungen der Risikomaße über die Iterationen zu sehen. Es gibt große Unterschiede zwischen den verschiedenen Risikomaßen. Aber auch zwischen den verschiedenen Korrelationsannahmen unterscheiden sich die Standardabweichungen.

Abhängigkeitsstruktur	Unkorreliert	Gauss	t
Tail-Abhängigkeit	none	none	upper, lower
Null			
$\sigma(G)$	0,11984	0,13757	0,14208
RP	0,00060	0,00107	0,00119
EPD	0,00933	0,01924	0,02437
$VaR_{0,005}(\text{MaxLoss})$	3,29071	3,75564	4,97080
$TVaR_{0,005}(\text{MaxLoss})$	4,11544	4,78520	6,72782
$VaR_{0,005}(L_1)$	1,38214	1,57848	2,12352
$VaR_{0,005}(L_2)$	1,48507	1,70842	2,29030
$VaR_{0,005}(L_3)$	1,58968	1,83160	2,40714
$VaR_{0,005}(L_4)$	1,71129	1,99935	2,63092
$VaR_{0,005}(L_5)$	1,82179	2,15009	2,85028
$TVaR_{0,005}(L_1)$	1,73637	1,99909	2,85197
$TVaR_{0,005}(L_2)$	1,86992	2,17246	3,09502
$TVaR_{0,005}(L_3)$	2,00069	2,31906	3,26109
$TVaR_{0,005}(L_4)$	2,16790	2,51660	3,52659
$TVaR_{0,005}(L_5)$	2,31441	2,75197	3,87819

$\sigma(G)$ : Standardabweichung des Gewinns pro Jahr in Mio. €, RP: Ruinwahrscheinlichkeit, EPD: Expected Policyholder Deficit in Mio. €,  $VaR_{0,005}(\text{MaxLoss})$ : 5-jähriges Risikokapital in Mio. € - berechnet mit dem Risikomaß Value at Risk zum Perzentil 99,5 %,  $TVaR_{0,005}(\text{MaxLoss})$ : 5-jähriges Risikokapital in Mio. € - berechnet mit dem Risikomaß Tail Value at Risk zum Perzentil 99,5 %,  $VaR_{0,005}(L_t)$ : Value at Risk der Periode t in Mio. € zum Perzentil 99,5 %,  $TVaR_{0,005}(L_t)$ : Tail Value at Risk der Periode t in Mio. € zum Perzentil 99,5 %

**Tabelle 14:** Standardabweichung der Risikomaße für die Null-Strategie bei 10.000 Iterationen und 10.000 Simulationen

In Tabelle 15 ist der Variationskoeffizient der Risikomaße über die Iterationen angeben. Durch diese relative Standardabweichung kann besser beurteilt werden, ob die Standardabweichung einzelner Maße groß oder klein ist.

Abhängigkeitsstruktur	Unkorreliert	Gauss	t
Tail-Abhängigkeit	none	none	upper, lower
Null			
$\sigma(G)$	0,00775	0,00769	0,00792
RP	0,16657	0,09306	0,08335
EPD	0,22548	0,12629	0,11481
$VaR_{0,005}(\text{MaxLoss})$	0,01428	0,01286	0,01527
$TVaR_{0,005}(\text{MaxLoss})$	0,01478	0,01377	0,01671
$VaR_{0,005}(L_1)$	0,03231	0,02913	0,03493
$VaR_{0,005}(L_2)$	0,03184	0,02891	0,03467
$VaR_{0,005}(L_3)$	0,03141	0,02861	0,03378
$VaR_{0,005}(L_4)$	0,03143	0,02901	0,03432
$VaR_{0,005}(L_5)$	0,03125	0,02902	0,03464
$TVaR_{0,005}(L_1)$	0,03345	0,03093	0,03783
$TVaR_{0,005}(L_2)$	0,03315	0,03091	0,03788
$TVaR_{0,005}(L_3)$	0,03275	0,03048	0,03705
$TVaR_{0,005}(L_4)$	0,03304	0,03072	0,03726
$TVaR_{0,005}(L_5)$	0,03292	0,03123	0,03817

$\sigma(G)$ : Standardabweichung des Gewinns pro Jahr in Mio. €, RP: Ruinwahrscheinlichkeit, EPD: Expected Policyholder Deficit in Mio. €,  $VaR_{0,005}(\text{MaxLoss})$ : 5-jähriges Risikokapital in Mio. € - berechnet mit dem Risikomaß Value at Risk zum Perzentil 99,5 %,  $TVaR_{0,005}(\text{MaxLoss})$ : 5-jähriges Risikokapital in Mio. € - berechnet mit dem Risikomaß Tail Value at Risk zum Perzentil 99,5 %,  $VaR_{0,005}(L_t)$ : Value at Risk der Periode t in Mio. € zum Perzentil 99,5 %,  $TVaR_{0,005}(L_t)$ : Tail Value at Risk der Periode t in Mio. € zum Perzentil 99,5 %

**Tabelle 15:** Variationskoeffizient der Risikomaße für die Null-Strategie bei 10.000 Iterationen und 10.000 Simulationen

Bei Annahme der Unkorreliertheit resultiert ein Variationskoeffizient von 0,008 beim betrachteten zweiseitigen Risikomaß, der Standardabweichung des Gewinnes pro Jahr. Deutlich höher fällt er beim Downside-Risikomaß Ruinwahrscheinlichkeit aus, wo er bei 0,17 liegt. Der Vergleich mit anderen Downside-Risikomaßen zeigt relativ große Auswirkungen auf den Variationskoeffizienten. Beim Expected Policyholder Deficit steigt er um 35 % (von 0,17 auf 0,23). Deutlich unterhalb dieser Werte liegt der Variationskoeffizient beim einjährigen Value at Risk (0,032 im Durchschnitt). Mit 0,033 ist er beim einjährigen Tail Value at Risk etwas höher als beim Value at Risk. Dieses Verhältnis spiegelt sich auch beim 5-jährigen Value at Risk (0,014) und Tail Value at Risk (0,015) wieder. Mit der Gauss-

Copula ergeben sich zwischen den verschiedenen Risikomaßen ähnliche, aber nicht ganz so stark ausgeprägte Unterschiede wie im Falle der Unabhängigkeit. Beim Vergleich des jeweiligen Risikomaßes dieser beiden Korrelationsannahmen ist festzustellen, dass das Schätzrisiko mit der Gauss-Copula sehr viel geringer ist als im Falle der Unabhängigkeit. Der Variationskoeffizient sinkt bei der Standardabweichung des Gewinnes um -1 %, bei der Ruinwahrscheinlichkeit und beim Expected Policyholder Deficit um -44 %, beim (mehrjährigen) Value at Risk im Schnitt um -9 % (um -10 %) und beim (mehrjährigen) Tail Value at Risk im Schnitt um -7 % (um -7 %). Mit der t-Copula variiert der Variationskoeffizient ebenfalls stark zwischen den einzelnen Risikomaßen, die Ausprägungen sind allerdings noch etwas schwächer als mit der Gauss-Copula. Im Vergleich zum Fall der Unabhängigkeit sinkt die Schätzgenauigkeit bei einigen Maßen, bei anderen steigt sie jedoch. Der Variationskoeffizient fällt bei der Ruinwahrscheinlichkeit und beim Expected Policyholder Deficit um knapp 50 %. Hingegen steigt er bei der Standardabweichung des Gewinnes um 2 %, beim (mehrjährigen) Value at Risk im Schnitt um 9 % (um 7 %) und beim (mehrjährigen) Tail Value at Risk im Schnitt um 14 % (um 13 %).

### **4.3 Underwriting Cycle in Modellen der Dynamischen Finanzanalyse**

Unter dem Begriff Underwriting Cycle (Versicherungszyklus) versteht man zyklische Schwankungen von Versicherungspreisen und versicherungstechnischen Ergebnissen. Diese mehr oder weniger aperiodischen Zyklen über mehrere Jahre sind ein wesentliches Charakteristikum der Schaden- und Unfallversicherung. Abhängig vom jeweiligen Land, vom Markt oder der Versicherungssparte können sie sich erheblich unterscheiden. In der Literatur wurden Versicherungszyklen bereits für viele internationale Märkte und für zahlreiche Versicherungszweige berechnet. Die aus den durchschnittlichen Schadenquoten abgeschätzten Periodenlängen schwanken je nach betrachtetem Zeitfenster und Versicherungszweig zwischen etwa fünf und zehn Jahren, wobei in den letzten Jahren ein leichter Anstieg zu beobachten ist (vgl. z.B. [Cummins, Outreville (1987)], S. 256 f. und [Lamm-Tennant, Weiss (1997)], S. 429). Die Ergebnisse fließen beispielsweise in Modelle der Dy-

namischen Finanzanalyse ein. Hier werden Teil-Modelle eingebunden, die Prämienzyklen behandeln (siehe z.B. [Kaufmann, Gadmer, Klett (2001)] und [Eling, Toplek (2009)]).

Auch in der vorliegenden Arbeit wird berücksichtigt, dass sich die erzielten Prämien-niveaus abhängig von der vorherrschenden Marktphase unterscheiden. Der Underwriting Cycle ist im zugrunde liegenden Simulationsmodell nach dem in [Venezian (1985)] und [Cummins, Outreville (1987)] beschriebenen Modell zur Prämienfestsetzung als stationärer Autoregressiver Prozess 2. Ordnung implementiert (vgl. [Eling, Toplek (2009)]). Das Prämien-niveau  $\Pi_t$  im Jahr  $t$  ergibt sich aus den Prämien-niveaus im Jahr  $t-1$  und  $t-2$  und einem Zufallsfehlerterm  $\varepsilon_t$ :

$$\Pi_t = a_0 + a_1 \Pi_{t-1} + a_2 \Pi_{t-2} + \varepsilon_t. \quad (42)$$

Die Parameter für die Berechnung der Zykluslänge können aus der Gleichung (42) mit den üblichen Methoden der Regressionsanalyse ermittelt werden. Die Periodenlänge berechnet sich als:

$$Period(P) = 2\pi / \cos^{-1}(a_1/2\sqrt{-a_2}). \quad (43)$$

Ein Zyklus liegt vor, wenn  $a_1 > 0$ ,  $a_2 < 0$  und  $a_1^2 + 4a_2 < 0$  gilt. Der Zyklus hat im Zeit-ablauf entweder eine Tendenz abzuklingen (falls  $\sqrt{-a_2} < 1$ ) oder explosiv zu sein (falls  $\sqrt{-a_2} > 1$ ). Treten zufällige Schocks auf, ergibt sich über eine längere Zeit ein abge-schwächter Zyklus.

Für die Parametrisierung des Prozesses wurden die Ergebnisse von [Cummins, Outreville (1987)], S. 256 herangezogen. Die Kalibrierung der Parameter  $a_0$ ,  $a_1$  und  $a_2$  für die Zeit-schritte 0, 1 und 2 erfolgt auf Basis von Daten zu Gewinnquoten über den deutschen Ge-samtmarkt (siehe Tabelle 16). Der Fehlerterm folgt einem White-Noise-Prozess.

	$a_0$	$a_1$	$a_2$	Zykluslänge
Deutschland	1,191	0,879	-0,406	7,76
Schweden	1,103	0,714	-0,434	6,29
Schweiz	1,826	0,355	-0,210	5,36
USA	1,379	0,904	-0,767	6,11

**Tabelle 16:** Regression der versicherungstechnischen Gewinnquoten über alle Versicherungszweige (vgl. [Cummins, Outreville (1987)], S. 256)

Um festzustellen, ob der Underwriting Cycle einen wesentlichen oder unwesentlichen Einfluss auf den Gewinn und das Risiko des Versicherers hat, werden verschiedene Varianten im Simulationsmodell implementiert:

Im ersten Schritt wird der Underwriting Cycle ausgeschaltet, d.h. das Modell läuft ohne Implementierung durch.

Im zweiten Schritt wird der Underwriting Cycle mit der oben beschriebenen Implementierung als Autoregressiver Prozess 2. Ordnung eingeschaltet und unterschiedlich kalibriert (vgl. Tabelle 16).

Im Allgemeinen wird das zyklische Muster der Prämienlevels im Zeitablauf zwar anhand eines Autoregressiven Prozesses modelliert, möglich ist jedoch auch, dass der Underwriting Cycle einem Markov-Prozess folgt (siehe z.B. [D'Arcy, Gorvett, Hettinger, Walling (1998)], [Kaufmann, Gadmer, Klett (2001)] und [Eling, Parnitzke, Schmeiser (2008)]). Dieser Ansatz wird für den dritten Schritt implementiert. Dafür werden sogenannte Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}(t)$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  erklärt, welche die Wahrscheinlichkeiten des Underwriting Cycles beschreiben, von einer Periode auf die nächste vom Zustand  $i$  in einen anderen Zustand  $j$  überzugehen. Sie werden in einer Transpositionsmatrix zusammengefasst:

$$T = (p_{ij}(t)) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots & p_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind unabhängig von der Periode  $t$ , es gilt also  $p_{ij} = p_{ij}(t)$  für alle  $t$ , sodass es sich um eine homogene Markov-Kette handelt. Demzufolge hängen die Prämieinnahmen vom Underwriting-Cycle-Faktor  $IT^i$  für  $n$  Zustände ab.

In das Simulationsmodell gehen drei Zustände ein. Zustand 1 beschreibt eine sehr gesunde Marktphase, die hohe Prämieinnahmen mit sich bringt ( $IT^1 = 1,05$ ). Für Zustand 2 wird ein mittleres Prämienlevel gesetzt ( $IT^2 = 1$ ). Zustand 3 ist eine flauere Marktphase, verbunden mit einem niedrigen Prämienlevel ( $IT^3 = 0,95$ ).

Die Transpositionsmatrix wird wie folgt gewählt:

$$T = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Die Simulationsergebnisse für die unterschiedlichen Modellierungen werden exemplarisch im Falle der Unkorreliertheit und der Null-Strategie in Tabelle 17 dargestellt. Für die anderen Abhängigkeitsstrukturen bzw. Managementstrategien ergeben sich vergleichbare Ergebnisse. Vergleicht man die Ergebnisse aus Tabelle 17 miteinander, so ist zu erkennen,

Implementierung Underwriting Cycle	nicht implementiert	Poisson- Prozess	AR2-Prozess (Deutschland)	AR2-Prozess (Schweden)	AR2-Prozess (Schweiz)	AR2-Prozess (USA)
E(G)	28,46	28,70	28,56	28,51	28,48	28,51
ROI	23,71%	23,84%	23,76%	23,74%	23,72%	23,73%
$\sigma(G)$	14,75	15,11	15,44	15,65	15,22	15,53
RP	0,27%	0,32%	0,35%	0,41%	0,34%	0,39%
EPD	0,03	0,04	0,04	0,05	0,04	0,04
VaR <sub>0,005</sub> (MaxLoss)	225,91	230,37	230,54	233,43	229,66	232,30
TVaR <sub>0,005</sub> (MaxLoss)	273,59	278,99	278,59	281,54	277,62	280,43
SR <sub><math>\sigma</math></sub>	1,77	1,74	1,69	1,67	1,71	1,68
SR <sub>RP</sub>	47,85	40,78	36,94	32,02	38,88	33,76
SR <sub>EPD</sub>	4,40	3,56	3,18	2,80	3,41	2,94

E(G): erwarteter Gewinn pro Jahr in Mio. €, ROI: Return on Investment,  $\sigma(G)$ : Standardabweichung des Gewinns pro Jahr in Mio. €, RP: Ruinwahrscheinlichkeit, EPD: Expected Policyholder Deficit in Mio. €, VaR<sub>0,005</sub>(MaxLoss): 5-jähriges Risikokapital in Mio. € - berechnet mit dem Risikomaß Value at Risk zum Perzentil 99,5 %, TVaR<sub>0,005</sub>(MaxLoss): 5-jähriges Risikokapital in Mio. € - berechnet mit dem Risikomaß Tail Value at Risk zum Perzentil 99,5 %, SR <sub>$\sigma$</sub> : Sharpe Ratio basierend auf der Standardabweichung, SR<sub>RP</sub>: Sharpe Ratio basierend auf der Ruinwahrscheinlichkeit, SR<sub>EPD</sub>: Sharpe Ratio basierend auf dem Expected Policyholder Deficit

**Tabelle 17:** Simulationsergebnisse für die Null-Strategie bei unterschiedlicher Modellierung des Underwriting Cycles im Falle der Unkorreliertheit

dass die Modellierungsvarianten keinen wesentlichen Einfluss auf den Gewinn haben. Der Vergleich der verschiedenen Modellierungen zeigt jedoch Auswirkungen auf das Risiko. Bei eingeschaltetem Underwriting Cycle nimmt das Risiko etwas zu (vgl. Spalte „nicht implementiert“ mit der Spalte „Poisson-Prozess“ bzw. „AR2-Prozess (Deutschland)“ in Tabelle 17).<sup>45</sup> Deutliche Unterschiede kann es durch verschiedene Kalibrierungen der Parameter des Autoregressiven Prozesses geben. Die Kalibrierung auf Basis von Daten über den schwedischen oder US-amerikanischen Markt führt zu deutlich höheren Werten bei

<sup>45</sup> Demzufolge nimmt die Performance ab.



den Risikomaßen als die Kalibrierung auf Basis von Daten über den deutschen oder schweizerischen Markt.

Um eine Aussage zum Zusammenhang zwischen der Kalibrierung des Autoregressiven Prozesses und dem Risiko machen zu können, müsste man an dieser Stelle fortfahren und die Parameter systematisch variieren.

## **4.4 Stress Testing**

### **4.4.1 Integration von Stress Testing in der Dynamischen Finanzanalyse**

Die Casualty Actuarial Society<sup>46</sup> definiert die Dynamische Finanzanalyse wie folgt (siehe [CAS (1999)], Chapter 6 – Variables and Considerations, S. 2 f.):

„Dynamic Financial Analysis (DFA) is the process by which an actuary analyzes the financial condition of an insurance enterprise. Financial condition refers to the ability of the company's capital and surplus to adequately support the company's future operations through an unknown future environment.

...

The process of DFA involves testing a number of adverse and favorable scenarios regarding an insurance company's operations. DFA assesses the reaction of the company's surplus to the various selected scenarios.“

Das DFA-Modell wird erstellt und ausgebaut, um die Entwicklung der Finanz- und Risikolage eines Versicherungsunternehmens unter einer Vielzahl möglicher Szenarien zu simulieren. Diese Simulationsergebnisse zeigen, wie sich Veränderungen interner und externer Rahmenbedingungen auf die Finanzergebnisse des Unternehmens auswirken können (vgl. [CAS (1999)], Chapter 1 – Overview of DFA, S. 1). Die Stärke des DFA-Modells liegt gerade darin, dass bei seiner Ausführung implizit die Analyse einzelner adverser

---

46 Die Casualty Actuarial Society (CAS) ist ein Verein der Aktuarer in den USA. Die Mitglieder der CAS sind hauptsächlich in der Schaden- und Unfallversicherung tätig. Das Pendant für Aktuarer, die in der Renten-, Lebens- und Krankenversicherung arbeiten, ist die Society of Actuaries (SOA).

Szenarien erfolgt ebenso wie die Analyse einzelner günstiger Szenarien. Das ist dann die natürliche Brücke zum Stress Testing, weil hier die Sachverhalte einbezogen werden, die bei anderen Modellen, die nur den „normalen“ Geschäftsverlauf abbilden, unter den Tisch fallen.

Der Begriff „Szenario“ wird sprachlich nicht sauber definiert verwandt. Genau genommen müsste man auch sprachlich unterscheiden zwischen einem Szenario als Voraussetzung für eine Simulation und einem Szenario als Ergebnis einer Simulation. Wie zum Beispiel in Abbildung 01 dargestellt gibt es eine Rückkopplung derart, dass die Ergebnisgrößen in unmittelbarer Beziehung zu den Eingangsgrößen gesetzt werden. Der Sprachgebrauch dieses noch sehr jungen Sachgebietes ist unternehmensspezifisch entstanden. Damit ist die folgende Definition, die für den Gebrauch üblich und ausreichend erscheint, erklärbar.

Die Casualty Actuarial Society unterscheidet zwischen zwei sich gegenseitig ausschließenden Definitionen von Szenarien für ein stochastisches Modell (vgl. [CAS (1999)], Chapter 2 – Scenarios, S. 2):

- Dem Parameter-Szenario und
- dem Durchlauf-Szenario.

Das Parameter-Szenario beschreibt die Verteilungen, die im Modell benutzt werden. So wird in dem in Kapitel 3 beschriebenen Modell zum Beispiel eine Paretoverteilung mit Erwartungswert von 0,5 Millionen € und einem Streuungsparameter von 4,5 für die Modellierung der Katastrophenschäden angenommen.

Hingegen ist das Durchlauf-Szenario ein einzelner Lauf eines parametrisierten Modells. Wird das parametrisierte Modell zum Beispiel 500.000 Mal durchlaufen, d.h. es werden zur Analyse 500.000 Simulationen betrachtet, so kann jeder der 500.000 Läufe als ein Szenario betrachtet werden.

#### 4.4.2 Implementierung des Stress Testing im Modell der Dynamischen Finanzanalyse

In diesem Abschnitt geht es um die Bestimmung und Auswertung der für das Unternehmen nachteiligen Szenarien aus dem DFA-Modell mit unterschiedlicher Implementierung der Abhängigkeitsstruktur. Daraus werden im nächsten Schritt Stressszenarien abgeleitet.

Grundlage bilden die Simulationsergebnisse aus Abschnitt 4.1 mit der Null-Strategie.<sup>47</sup> Unter einem Szenario wird ein Durchlauf-Szenario gemäß der Definition aus 4.4.1 verstanden. Aus den 500.000 Szenarien werden die  $x$  % extremsten Szenarien untersucht, d.h. diejenigen, welche die extremsten Finanzergebnisse im Untersuchungszeitraum aufweisen. Damit sind Anforderungen an den Input und an den Modellrahmen gestellt. Insbesondere müssen Parameter, die zu schlechten Ergebnissen führen, zugelassen sein. Zum Beispiel kann über die gewählte Höhe der Volatilität der Kapitalanlagerenditen das Unternehmensergebnis maßgeblich gesteuert werden. Im Modellrahmen müssen die Algorithmen einerseits unmögliche Ergebnisse ausschließen, andererseits dürfen sie die Bandbreite nicht unnötig einschränken.<sup>48</sup> Genau genommen steht und fällt die Qualität des DFA-Modells damit, wie es in den Randbereichen funktioniert. Bei den extremen Ergebnissen sind nun weniger die interessant, bei denen das Unternehmen einen exorbitanten Gewinn erzielt. Interessanter sind die Ergebnisse, die dazu führen, dass das Unternehmen vom Markt verschwindet. Das sind schlechte Ergebnisse.

---

47 Häufig funktionieren typische Managementregeln in extremen Szenarien nicht, da sie auf „normale“ Entwicklungen des Versicherungsunternehmens abgestellt sind (vgl. [Horn, Zwiesler (2008)], S. 105 ff.). In Kapitel 4.1 wurde für das hier verwendete DFA-Modell gezeigt, dass lediglich die Rückversicherungsstrategie zu einer deutlichen Risikosenkung führt. Daher scheint es für die Analyse der Stressszenarien ausreichend zu sein, die Null-Strategie zu verwenden und somit die Modellparameter unbeeinflusst durch Managementregeln zu lassen.

48 Für die Analyse werden nur die schlechtesten Szenarien berücksichtigt, die aus heutiger Sicht zwar sehr unwahrscheinlich, aber nicht ausgeschlossen sind. Szenarien mit der Clayton- und der Survival-Clayton-Copula, die eine Rendite von -100 % für risikoarme Kapitalanlagen aufweisen, werden nicht in die Analyse einbezogen. Ebenso unberücksichtigt bleiben Szenarien mit der Gumbel-, der Survival-Gumbel-, der Clayton- und der Survival-Clayton-Copula, sofern sie unendlich große Naturkatastrophenschäden beinhalten, um die Vergleichbarkeit zwischen den verschiedenen Abhängigkeitsstrukturen zu bewahren.

Als „schlecht“ werden all die Szenarien gewertet, die innerhalb des gewählten Zeithorizonts von 5 Jahren zum Ruin des Unternehmens führen (d.h.  $EC_t < 0$  für ein  $t$ ,  $t = 1, \dots, 5$ , vgl. S. 28). Die schlechten Szenarien werden nach zwei Kriterien geordnet. Je früher der Ruin eintritt, desto schlechter wird das Ergebnis der Simulation angesehen. Deswegen ist das erste Kriterium der Zeitpunkt des Ruins. Das nächste Sortierkriterium ist dann die Höhe des Verlustes. Je negativer das Eigenkapital ist, desto schlechter wird das Ergebnis der Simulation gewertet. Alle Ergebnisse werden zum Vergleich normiert.<sup>49</sup> Die Normierung erfolgt durch Diskontierung mit dem risikolosen Zinssatz  $r_f$  auf den Zeitpunkt 0, um eine einheitliche Sichtweise über alle simulierten Jahre  $T$  zu erhalten.

Abhängig von der gewählten Abhängigkeitsstruktur erfüllen unterschiedlich viele Szenarien die Definition eines „schlechten“ Szenarios (siehe Tabelle 18). Die Verhältnisse der Ruinwahrscheinlichkeiten zwischen den verschiedenen Abhängigkeitsstrukturen (siehe Tabelle 08) werden hier widergespiegelt. So führen z.B. bei Annahme der Unkorreliertheit 1.771 Szenarien (0,35 % aller Läufe) und bei der Clayton-Copula 9.371 Szenarien (1,87 % aller Läufe) über den betrachteten Zeithorizont von 5 Jahren zum Ruin des Unternehmens. Die Verteilung der Szenarien auf die einzelnen Perioden ist über die verschiedenen Abhängigkeitsstrukturen recht ähnlich. In der ersten Periode sind es weniger Szenarien als in den folgenden.

Abhängigkeitsstruktur	Unkorreliert	Gauss	t	Gumbel	Survival Gumbel	Clayton	Survival Clayton	Frank
Tail-Abhängigkeit	none	none	upper, lower	upper	lower	lower	upper	none
Null								
Periode 1	63	333	978	178	1.555	1.352	106	144
Periode 2	343	1.288	1.571	874	2.245	2.295	709	912
Periode 3	470	1.893	1.704	1.144	2.225	2.271	1.050	1.241
Periode 4	484	1.131	1.535	1.155	1.860	1.871	1.054	1.253
Periode 5	411	1.165	1.192	1.024	1.519	1.582	958	1.062
Gesamt	1.771	5.810	6.980	4.375	9.404	9.371	3.877	4.612

**Tabelle 18:** Anzahl der Szenarien für die Null-Strategie mit  $EC < 0$

<sup>49</sup> Es sind verschiedene Normen denkbar. Zum Beispiel könnte man mit der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung vom jährlichen Mittelwert aller Ergebnisse der gesamten Simulation normieren. Die Probe hat ergeben, dass die Arbeitszeit an anderer Stelle besser eingesetzt ist.

In Tabelle 19 sind für den Fall der Unkorreliertheit beispielhaft die 30 schlechtesten Szenarien<sup>50</sup> mit dazugehörigen Risikoquellen und Finanzergebnissen zu sehen. Diese Szenarien

	$EC_0$	$EC_1$	$r_{11}$	$r_{21}$	$r_{p1}$	$C_{ncat,1}$	$C_{cat,1}$	$LR_1$	$ER_1$	$U_1$	$I_1$	$E_1$
1	75	-31,75	-26,93%	-6,78%	-14,84%	245,14	0,03	122,58%	11,13%	-65,46	-38,18	-103,64
2	75	-21,98	-39,81%	4,26%	-13,36%	239,14	0,45	119,79%	10,99%	-59,77	-34,38	-94,16
3	75	-16,84	-43,55%	3,40%	-15,38%	229,52	0,10	114,81%	10,74%	-49,61	-39,56	-89,17
4	75	-16,62	-19,74%	-5,01%	-10,90%	239,72	0,96	120,34%	11,02%	-60,89	-28,05	-88,95
5	75	-15,38	-22,56%	0,57%	-8,69%	245,09	0,02	122,55%	11,13%	-65,40	-22,35	-87,75
6	75	-15,35	-15,53%	8,80%	-0,93%	264,25	0,40	132,32%	11,62%	-85,32	-2,40	-87,72
7	75	-13,86	-34,86%	-1,66%	-14,94%	227,68	0,21	113,94%	10,70%	-47,85	-38,43	-86,27
8	75	-12,99	-23,38%	-1,98%	-10,54%	237,67	0,47	119,07%	10,95%	-58,30	-27,13	-85,43
9	75	-12,03	-17,60%	-2,83%	-8,74%	240,30	1,49	120,89%	11,04%	-62,02	-22,48	-84,49
10	75	-11,33	-29,89%	-2,19%	-13,27%	228,86	0,82	114,84%	10,74%	-49,68	-34,13	-83,81
11	75	-11,01	-39,02%	-1,76%	-16,66%	220,36	0,45	110,40%	10,52%	-40,63	-42,87	-83,50
12	75	-10,81	-3,01%	5,99%	2,39%	268,67	0,03	134,35%	11,72%	-89,45	6,15	-83,31
13	75	-10,00	-50,09%	-3,46%	-22,11%	204,40	1,71	103,06%	10,15%	-25,65	-56,88	-82,53
14	75	-9,86	-22,84%	4,35%	-6,53%	244,29	1,00	122,65%	11,13%	-65,59	-16,80	-82,38
15	75	-9,17	-25,18%	-6,79%	-14,15%	225,36	0,05	112,71%	10,64%	-45,32	-36,40	-81,72
16	75	-8,02	-10,61%	-5,53%	-7,56%	238,78	2,16	120,47%	11,02%	-61,14	-19,46	-80,61
17	75	-7,85	-21,02%	0,83%	-7,91%	239,50	0,39	119,95%	11,00%	-60,09	-20,35	-80,44
18	75	-7,46	-12,01%	6,85%	-0,70%	257,73	0,00	128,87%	11,44%	-78,27	-1,79	-80,06
19	75	-7,12	-22,72%	-3,21%	-11,02%	231,34	0,02	115,68%	10,78%	-51,39	-28,34	-79,73
20	75	-6,99	-28,05%	-3,36%	-13,24%	224,55	1,08	112,81%	10,64%	-45,54	-34,06	-79,60
21	75	-6,79	-38,36%	9,14%	-9,86%	232,01	1,95	116,98%	10,85%	-54,04	-25,37	-79,41
22	75	-6,51	-42,89%	7,12%	-12,89%	225,05	1,01	113,03%	10,65%	-45,98	-33,15	-79,13
23	75	-6,50	-17,86%	-6,18%	-10,85%	230,78	0,42	115,60%	10,78%	-51,22	-27,91	-79,12
24	75	-5,85	-10,67%	-3,68%	-6,48%	241,50	0,10	120,80%	11,04%	-61,82	-16,67	-78,49
25	75	-5,43	-26,62%	3,76%	-8,39%	236,29	0,08	118,19%	10,91%	-56,50	-21,59	-78,09
26	75	-5,34	-31,57%	-3,75%	-14,88%	219,79	0,12	109,96%	10,50%	-39,71	-38,28	-78,00
27	75	-5,28	-30,81%	1,47%	-11,44%	228,47	0,06	114,26%	10,71%	-48,50	-29,44	-77,94
28	75	-5,05	-41,99%	4,12%	-14,32%	220,05	0,99	110,52%	10,53%	-40,87	-36,85	-77,72
29	75	-4,83	-25,56%	-0,26%	-10,38%	230,53	0,25	115,39%	10,77%	-50,79	-26,71	-77,50
30	75	-4,81	-14,56%	-1,29%	-6,60%	239,64	0,67	120,15%	11,01%	-60,50	-16,98	-77,49

$EC_0$ : Eigenkapital am Ende der Periode 0 in Mio. €,  $EC_1$ : Eigenkapital am Ende der Periode 1 in Mio. €,  $r_{11}$ : Rendite der riskanten Kapitalanlagen in Periode 1,  $r_{21}$ : Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen in Periode 1,  $r_{p1}$ : Portfoliorendite in Periode 1,  $C_{ncat,1}$ : Nicht-Katastrophenschäden in Mio. € in Periode 1,  $C_{cat,1}$ : Katastrophenschäden in Mio. € in Periode 1,  $LR_1$ : Schadenquote in Periode 1,  $ER_1$ : Kostenquote in Periode 1,  $U_1$ : Versicherungstechnisches Ergebnis in Mio. € in Periode 1,  $I_1$ : Kapitalanlageergebnis in Mio. € in Periode 1,  $E_1$ : Gewinn in Mio. € in Periode 1

**Tabelle 19:** Schlechteste 30 Szenarien bei Annahme der Unkorreliertheit

führen bereits in der ersten Periode zum Ruin des Unternehmens ( $EC_1 < 0$ ). Die Rendite der riskanten Kapitalanlagen liegt im Durchschnitt unter -25 %, die Spannweite liegt zwischen -3 % und -50 %. Die Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen ist aufgrund der geringeren Volatilität bei weitem nicht so ungünstig wie die der riskanten Kapitalanlagen. Im

<sup>50</sup> Zur Identifikation der schlechten Szenarien unter allen 500.000 Szenarien wurde zunächst die oben eingeführte Definition eines „schlechten“ Szenarios verwendet und anschließend wurden diese schlechten Szenarien nach den oben beschriebenen zwei Kriterien sortiert:  $EC_1$  ist  $< 0$  und aufsteigend sortiert für alle 30 schlechtesten Szenarien.

Durchschnitt liegt sie bei 0 %. Es gibt Szenarien, bei denen die Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen in der Nähe des Erwartungswertes von 5 % liegt, genauso wie Szenarien, bei denen die Rendite bis zu knapp -7 % beträgt. Die Schadenquote ist bei allen 30 schlechtesten Szenarien sehr hoch. In der Regel liegt sie deutlich über 100 % (der Erwartungswert liegt bei 85,25 %). Aber auch hier gibt es zwischen den einzelnen Szenarien große Unterschiede. Die Schadenquote schwankt um bis zu 30 %. Hervorgerufen wird die hohe Schadenquote durch hohe Schadenleistungen bei den Nicht-Katastrophenschäden. Die Kostenquote beträgt rund 11 %. Schwankungen kommen aufgrund der prozentual von den Schäden abhängigen Schadenregulierungskosten zustande, d.h. eine hohe Schadenquote führt zu einer relativ hohen Kostenquote. Die große Bandbreite bei der Ausprägung der einzelnen Risikofaktoren bewirkt, dass gleich hohe Verluste unterschiedliche Ursachen haben können. Beispielsweise kann der Verlust durch ein gleichermaßen negatives versicherungstechnisches Ergebnis und Kapitalanlageergebnis hervorgerufen werden (siehe z.B. das elft-schlechteste Szenario), durch einen sehr hohen versicherungstechnischen Verlust (siehe z.B. das zwölft-schlechteste Szenario) oder durch ein sehr negatives Kapitalanlageergebnis (siehe z.B. das dreizehnt-schlechteste Szenario).

Verantwortlich für das Eintreten eines Ruins des Unternehmens sind bei allen – nicht nur bei den 30 schlechtesten im Falle der Unkorreliertheit – schlechten Szenarien, durchgängig über alle Abhängigkeitsstrukturen, sehr ungünstige Entwicklungen am Kapitalmarkt und/oder bei den Schäden. Ohne Ausnahmen liegt die Schadenquote deutlich oberhalb des Durchschnittswertes der gesamten Simulation. Anders ist es bei den Kapitalanlagerenditen: Hier wird die gesamte Bandbreite von guten über normalen bis hin zu schlechten Entwicklungen abgedeckt.

Die schlechtesten Szenarien haben unterschiedliche Merkmalsausprägungen der Risikofaktoren. Dieser Sachverhalt spricht gegen eine Mittelwertbetrachtung, denn hierbei würden zu viele Informationen verloren gehen. Mehr Informationen blieben bei der Betrachtung von Quantilen erhalten. Allerdings ist es auch dadurch nicht möglich, die Relationen zwischen verschiedenen Risikofaktoren zu bekommen.

Bei Daten mit verschiedenen Ausprägungen bietet sich eine Klassenbildung an, um diese durch die dann erhaltene Strukturierung analysieren zu können. Dazu können Verfahren der Clusteranalyse verwendet werden. Das Clustering ist ein Prozess, der Daten aufgrund ihrer Ähnlichkeit in Cluster zusammenfasst. Objekte innerhalb eines Clusters haben eine starke Ähnlichkeit bezüglich ihrer Daten untereinander, unterscheiden sich aber wesentlich von Objekten anderer Cluster (vgl. z.B. [Han, Kamber (2006)], S. 383).

Es gibt eine Reihe von Techniken zur Konstruktion der Cluster. Im Folgenden wird jeweils eine Vorgehensweise zu Partitionierungsmethoden (vgl. z.B. [Han, Kamber (2006)], S. 401 ff. und [Witten, Frank (2005)], S. 137 f.), zu modellbasierten Methoden (vgl. z.B. [Han, Kamber (2006)], S. 429 ff. und [Witten, Frank (2005)], S. 265 f.) und zu hierarchischen Methoden (vgl. z.B. [Han, Kamber (2006)], S. 408 ff.) beschrieben.

Bei der Partitionierungsmethode wird eine Menge von Objekten in eine vorher festgelegte Anzahl von Cluster zerlegt. Dabei sind die einzelnen Cluster so gewählt, dass die enthaltenen Objekte ein bestimmtes Kriterium, das Partitionierungskriterium, erfüllen. Ein weit verbreiteter und häufig verwendeter iterativer Algorithmus ist der sogenannte  $k$ -means-Algorithmus. Bei ihm wird als Partitionierungskriterium das Square-Error-Kriterium benutzt. Es wird beschrieben durch:

$$E = \sum_{i=1}^k \sum_{p \in C_i} |p - m_i|^2, \quad (45)$$

mit  $E$  = Summe des quadratischen Fehlers aller Objekte der Datenmenge,  $k$  = Anzahl der Cluster,  $p$  = Punkt, der ein gegebenes Objekt repräsentiert,  $C_i$  =  $i$ -ter Cluster,  $m_i$  = Mittelpunkt des Clusters  $C_i$ . Die Vorgehensweise lautet wie folgt:

- Schritt 1: Anzahl  $k$  der Cluster festlegen.
- Schritt 2: Zufällige Auswahl von  $k$  Objekten aus der Datenmenge von insgesamt  $n$  Objekten, die dann für den Mittelpunkt  $m_i$  jeweils eines Clusters stehen.
- Schritt 3: Zuordnung der verbleibenden  $n-k$  Objekte zu demjenigen Cluster, zu dem der Abstand zwischen Objekt  $p$  und dem Mittelpunkt  $m_i$  am kleinsten ist.
- Schritt 4: Berechnung des neuen Mittelpunktes  $m_i$  des Clusters  $C_i$ .
- Schritt 5:  $k = 0$  setzen. Weiter mit Schritt 3, solange bis (45) konvergiert.

Die Cluster werden also so modelliert, dass die Summe der quadratischen Fehler aus (45) minimal ist.

Modellbasierte Verfahren konstruieren Cluster in Daten durch Anpassung eines parametrischen Modells an jeden Cluster. Unter Annahme einer bestimmten Verteilung und einer bestimmten Anzahl von Cluster wird die Zugehörigkeit zu einem Cluster mittels einer Wahrscheinlichkeit bestimmt. Weit verbreitet ist die Anpassung von Normalverteilungen, d.h. jeder Cluster wird durch eine multivariate Normalverteilung dargestellt. Zu den Algorithmen zur Bestimmung der Schätzer für die Verteilungsparameter zählt der Expectation-Maximization-Algorithmus (EM-Algorithmus), eine Erweiterung des  $k$ -means-Algorithmus. Der Algorithmus besteht aus den folgenden Schritten:

- Schritt 1: Zufällige Auswahl von  $k$  Objekten aus der Datenmenge, die dann für den Mittelpunkt jeweils eines Clusters stehen, sowie Schätzung der zu den parametrischen Modellen gehörenden Parametern.
- Schritt 2: Iterative Weiterentwicklung der Parameter.

a) Expectation: Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

$$P(x_i \in C_k) = p(C_k | x_i) = \frac{p(C_k) p(x_i | C_k)}{p(x_i)}, \quad (46)$$

mit der jedes Objekt  $x_i$  nach einer beliebigen Wahrscheinlichkeitsverteilung  $p(x_i | C_k)$  zu jedem der Cluster  $C_k$  gehört.

b) Maximization: Erneute Bestimmung der Parameter, die die Cluster bestimmen (z.B. die Mittelpunkte), anhand der ermittelten Zuordnungswahrscheinlichkeiten von oben.

Bei hierarchischen Methoden durchlaufen die Objekte eine Art Baumstruktur, wobei die Knoten durch verschiedene Cluster repräsentiert werden. Es gibt zwei Arten von hierarchischem Clustering:

- Das agglomerative hierarchische Clustering (AHC) und
- das divisive hierarchische Clustering (DHC).

Sie unterscheiden sich in der Art der Herangehensweise. Beim AHC wird zunächst jedes Objekt einem eigenen Cluster zugeordnet. Anschließend werden diese einzelnen Cluster Schritt für Schritt zusammengefasst solange, bis sich entweder alle Objekte in einem Cluster befinden oder bis vordefinierte Abbruchkriterien erfüllt sind. Das DHC operiert genau in der entgegengesetzten Richtung. Beginnend mit einem einzigen Cluster, dem alle Objekte zugeordnet wurden, wird dieses so lange in immer kleinere Cluster unterteilt, bis entweder jedes Objekt in einem eigenen Cluster ist oder eben wieder vordefinierte



Abbruchkriterien erfüllt sind. Das meist verbreitete Kriterium, um Cluster zusammenzufassen oder zu unterteilen, ist der Abstand von zwei Objekten unterschiedlicher Cluster. Dabei kann aus vier Maßen ausgewählt werden:

- Dem minimalen Abstand:  $d_{min}(C_i, C_j) = \min_{p \in C_i, p' \in C_j} |p - p'|$ , (47)

- dem maximalen Abstand:  $d_{max}(C_i, C_j) = \max_{p \in C_i, p' \in C_j} |p - p'|$ , (48)

- dem mittleren Abstand:  $d_{mean}(C_i, C_j) = |m_i - m_j|$  und (49)

- dem durchschnittlichen Abstand:  $d_{avg}(C_i, C_j) = \frac{1}{n_i n_j} \sum_{p \in C_i} \sum_{p' \in C_j} |p - p'|$ , (50)

wobei  $p$  und  $p'$  Objekte jeweiliger Cluster darstellen,  $|p - p'|$  den Abstand der Objekte beschreibt,  $m_i$  bzw.  $m_j$  dem Mittelpunkt des Clusters  $C_i$  bzw.  $C_j$  entspricht und  $n_i$  bzw.  $n_j$  für die Anzahl der Objekte in  $C_i$  bzw.  $C_j$  steht.

Die Clusteranalyse ist insofern ein langwieriger Prozess, als dass erst einmal ein den Anforderungen entsprechendes Verfahren ausgewählt und implementiert werden muss. Durch Augenschein kommt man schnell zu der in Tabelle 20 dargelegten Aufteilung der schlechten Szenarien. Die zu einem Ruin des Unternehmens führenden Szenarien können sechs Fallgruppen zugeordnet werden.

Fall	1	2	3	4	5	6
$r_1$	extrem verlustreich	extrem verlustreich	verlustreich, nicht dominierend	positiv	positiv	verlustreich
$r_2$	extrem verlustreich	positiv, fast wie erwartet	normal bis verlustreich, nicht dominierend	extrem verlustreich	positiv, fast wie erwartet	verlustreich
LR	erhöht	erhöht	extrem	erhöht	hoch	erhöht

$r_1$ : Rendite der riskanten Kapitalanlagen,  $r_2$ : Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen, LR: Schadenquote

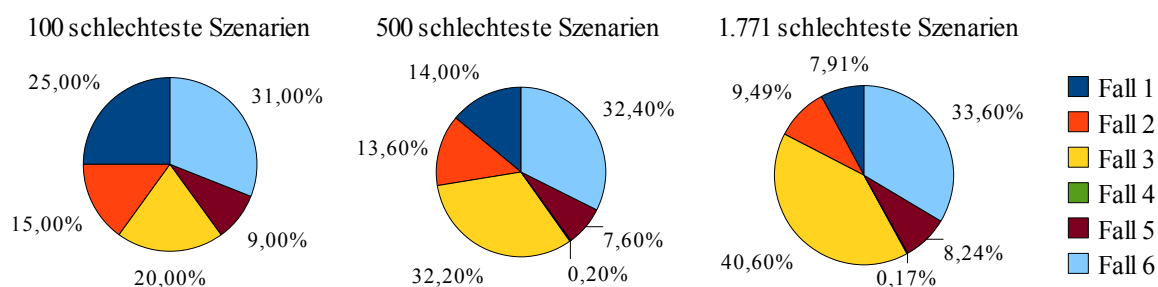
**Tabelle 20:** Fallgruppen innerhalb der schlechtesten Szenarien

Fall 1 enthält Szenarien, die durch sehr schlechte Kapitalmarktentwicklungen – sowohl der riskanten als auch risikoarmen Kapitalanlagen – gekennzeichnet sind, womit eine schlechte Schadenquote nicht ausgeglichen werden kann. Fall 2 unterscheidet sich von Fall 1, kaum bei der Schadenquote, aber bei der Zusammensetzung des Kapitalanlageergebnisses. Die

riskanten Kapitalanlagen bringen ein so schlechtes Ergebnis, dass selbst ein erträgliches Ergebnis der risikoarmen Kapitalanlagen am schlechten Gesamtergebnis nichts ändert. Fall 3 zielt nicht auf diejenigen Szenarien mit ungünstigen Kapitalmarktentwicklungen ab, sondern auf diejenigen, bei denen eine extrem hohe Schadenquote ausschlaggebend für den Ruin ist. In Fall 4 werden Szenarien mit einer sehr ungünstigen Rendite auf risikoarme Kapitalanlagen neben einer günstigen Rendite auf riskante Kapitalanlagen zusammengefasst. Fall 5 stellt eine Abschwächung von Fall 2 bezüglich der Rendite auf riskante Kapitalanlagen dar. Diese Abschwächung ist jedoch verknüpft mit einer etwas höheren Schadenquote und einer etwas niedrigeren Rendite auf risikoarme Kapitalanlagen als die in Fall 2. In Fall 6 werden die restlichen schlechten Szenarien eingruppiert. Diese sind durch recht ungünstige Entwicklungen gleichermaßen in allen Komponenten gekennzeichnet. Hier ist zwar nichts extrem, aber eben alles schlecht.

Die Einteilung der schlechtesten Szenarien wurde so gewählt, dass die Risikofaktoren und Finanzergebnisse der einzelnen Szenarien innerhalb einer Fallgruppe vergleichbar sind. Zweck ist es, die Vielzahl von Einzelfällen je Fallgruppe auf einen Fall mit einem Mittelwert der Einzelfälle zu reduzieren.<sup>51</sup> Dadurch können diese sechs (Durchschnitts-) Fälle untersucht werden. Das sind also definitionsgemäß die Stressszenarien.

In Abbildung 05 ist die Aufteilung der schlechtesten Szenarien in die oben beschriebenen sechs Fallgruppen bei Annahme der Unkorreliertheit zu sehen. Zieht man in die Betrachtung nur die 100 schlechtesten Szenarien ein, kommt Fall 4, der durch eine sehr negative



**Abbildung 05:** Anteile der Fallgruppen bei Annahme der Unkorreliertheit

<sup>51</sup> Zusätzlich zum Mittelwert könnten zur Analyse Quantile betrachtet werden. Die Abweichungen zwischen den Merkmalsausprägungen innerhalb einer Fallgruppe sind gering, sodass darauf verzichtet werden kann.

Rendite bei den risikoarmen Kapitalanlagen charakterisiert ist, nicht vor. Zwischen den restlichen fünf Fallgruppen ist die Verteilung ziemlich ausgewogen. Bei Zunahme der einbezogenen Szenarien – hier erfolgt eine Betrachtung der 500 und 1.771 schlechtesten Szenarien – verändern sich die Verhältnisse. Fall 4 ist nun gering vertreten (bei den 500 schlechtesten Szenarien mit 0,20 % und bei den 1.771 schlechtesten Szenarien mit 0,17 %). Am stärksten ins Gewicht fällt die Zunahme der Szenarien aus Fall 3, bei dem eine sehr hohe Schadenquote zum Ruin des Unternehmens führt. Begleitet wird dies mit einer deutlichen Abnahme der Szenarien aus Fall 1, bei dem die Kapitalanlagerenditen sehr stark negativ sind.

Im Vergleich der Diagramme ist ein Trend festzustellen: Bei der größeren Datenbasis dominiert die hohe Schadenquote (bei 1.771 Szenarien kommt Fall 3 mit 40,60 % vor). Wenn die Basis reduziert wird, gewinnen die schlechten Ergebnisse bei allen Kapitalanlageformen an Gewicht (bei 100 Szenarien kommt Fall 1 mit 25,00 % vor).

Tabelle 21 zeigt die zu den einzelnen Fallgruppen gehörenden Risikofaktoren und Finanzgrößen. Sie wurden als Mittelwerte aus den zur jeweiligen Fallgruppe gehörenden Szenarien der insgesamt 100 betrachteten schlechtesten Szenarien gebildet.

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien	25	15	20	0	9	31
U	-46,33	-49,97	-65,38		-59,89	-50,24
I	-35,98	-27,62	6,02		-15,43	-21,85
E	-82,30	-77,58	-59,36		-75,31	-72,09
LR	112,55%	114,28%	121,89%		118,79%	114,57%
ER	10,67%	10,76%	11,27%		10,99%	10,85%
$r_1$	-28,98%	-36,86%	-0,74%		-21,13%	-20,81%
$r_2$	-3,91%	6,74%	5,34%		3,80%	-0,91%
$r_p$	-13,93%	-10,70%	2,91%		-6,18%	-8,87%

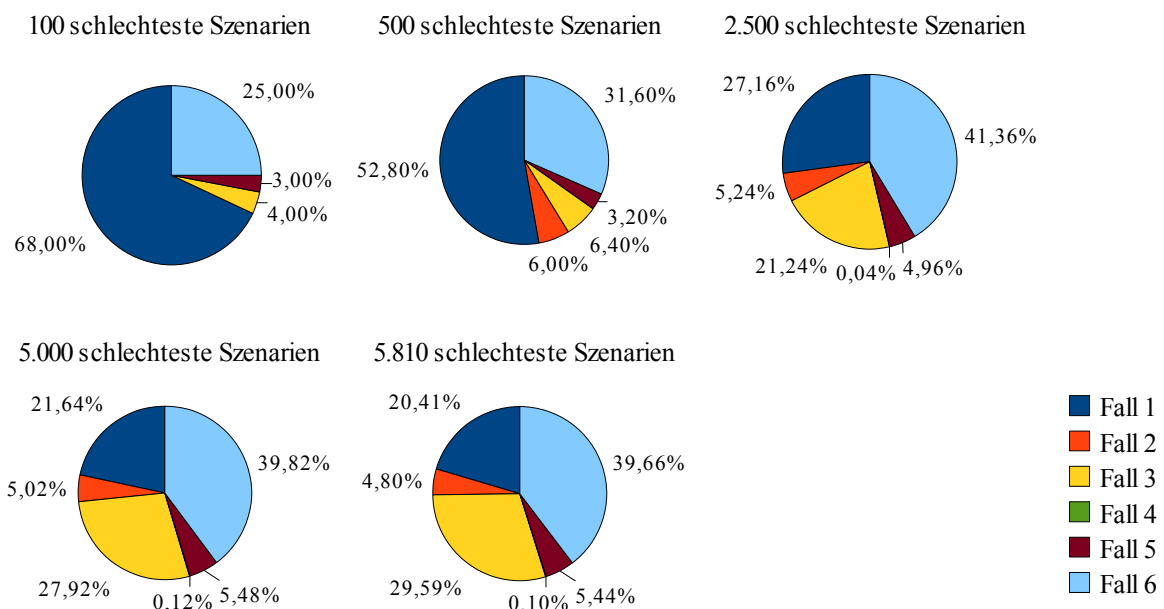
Anz.: Anzahl, U: Versicherungstechnisches Ergebnis in Mio. €, I: Kapitalanlageergebnis in Mio. €, E: Gewinn in Mio. €, LR: Schadenquote, ER: Kostenquote,  $r_1$ : Rendite der riskanten Kapitalanlagen,  $r_2$ : Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen,  $r_p$ : Portfoliorendite

**Tabelle 21:** Stressszenarien bei Betrachtung der 100 schlechtesten Szenarien mit Annahme der Unkorreliertheit

Fall 1 weist sehr schlechte Kapitalanlagerenditen auf, wobei die Rendite der riskanten Kapitalanlagen mit -28,98 % aufgrund der hohen Volatilität deutlich negativer ist als die Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen mit -3,91 %. Die sich daraus ergebende Portfoliorendite von -13,93 % führt zu einem sehr schlechten Kapitalanlageergebnis. Trotz der sehr

schlechten Renditen macht das negative Kapitalanlageergebnis nur 44 % des Unternehmensverlustes in Höhe von 82,30 Millionen € aus. Die restlichen 56 % stammen aus dem negativen versicherungstechnischen Ergebnis, welches aufgrund einer hohen Schadenquote von 112,55 % entsteht. Fall 2 ist durch eine Rendite von -36,86 % der riskanten Kapitalanlagen, eine Rendite von +6,74 % der risikoarmen Kapitalanlagen und einer Schadenquote von 114,28 % gekennzeichnet. Eine noch negativere Rendite der riskanten Kapitalanlagen als in Fall 1 geht folglich mit einer um knapp 2 %-Punkte über dem Erwartungswert liegenden Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen und einer um 2 %-Punkte höheren Schadenquote als in Fall 1 einher. So setzt sich der Verlust in Höhe von 77,58 Millionen € zu 36 % aus dem Kapitalanlageergebnis und zu 64 % aus dem versicherungstechnischen Ergebnis zusammen. Fall 3 ist durch eine sehr hohe Schadenquote von 121,89 % gekennzeichnet, woraus ein sehr hoher versicherungstechnischer Verlust resultiert. Bei einer unter dem Erwartungswert (7 %) liegenden, aber deutlich positiven Portfoliorendite von +2,91 % ist der Unternehmensverlust in Höhe von 59,36 Millionen € um 10 bis 20 Millionen € niedriger als in den anderen Fallgruppen. Fall 5 ist eine abgeschwächte Form von Fall 2 bezüglich der negativen Rendite der riskanten Kapitalanlagen, sie liegt bei -21,13 %. Ein mit Fall 2 vergleichbar hoher Verlust wird mit einer um 3 %-Punkte niedrigeren Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen (3,80 %) und um 4,5 %-Punkte höheren Schadenquote (118,79 %) erzielt. Fall 6 kann als Abschwächung von Fall 1 bezüglich der Kapitalanlage Renditen angesehen werden. Die Renditen sind mit -20,81 % für riskante Kapitalanlagen und -0,91 % für risikoarme Kapitalanlagen zwar immer noch sehr ungünstig, aber bei weitem nicht mehr so extrem. Trotz einer etwas höheren Schadenquote von 114,57 % fällt der Verlust dadurch um etwa 10 Millionen € niedriger aus als in Fall 1.

Die Anteile der Fallgruppen, die sich mit der Gauss-Copula ergeben, wenn man die schlechtesten Szenarien nach dem oben beschriebenen Schema aufteilt, sind in Abbildung 06 dargestellt. Betrachtet man die 100 schlechtesten Szenarien, fallen 68,00 % der Szenarien in Fall 1 und 25 % in Fall 6. Die übrigen Fallgruppen kommen kaum (vgl. Fall 3 und Fall 5) bzw. gar nicht (vgl. Fall 2 und Fall 4) vor. Abhängig von der Anzahl der betrachteten Szenarien ändern sich auch hier die Verhältnisse. Je mehr Szenarien in die Betrachtung einbezogen werden, desto mehr gleichen sich die Relationen denen bei Annahme der Unkorreliertheit an.



**Abbildung 06:** Anteile der Fallgruppen mit der Gauss-Copula

Die im Vergleich zu den Szenarien im unkorrelierten Fall andere Häufigkeit des Auftretens der einzelnen Fallgruppen kommt dadurch zustande, dass mit der Gauss-Copula lineare Abhängigkeiten berücksichtigt werden. Schlechte Ausprägungen in allen Risikofaktoren fallen dadurch etwas häufiger zusammen (vgl. die Wahl des Kendall's Tau in Kapitel 3.3). Genauso wie im unkorrelierten Fall dominiert mit der Gauss-Copula die hohe Schadenquote bei einer größeren Datenbasis und die extrem negativen Kapitalanlagerenditen gewinnen bei Reduktion der Datenbasis deutlich an Gewicht.

In Tabelle 22 sind die zu den einzelnen Fallgruppen gehörenden Risikofaktoren und Finanzgrößen dargestellt. Fall 1 ist charakterisiert durch eine sehr schlechte Rendite der riskanten Kapitalanlagen mit -34,44 % und eine ebenfalls sehr schlechte, jedoch weniger extreme Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen mit -5,92 %. Aus der dadurch entstehen-

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien	68	0	4	0	3	25
U	-48,40		-87,80		-74,08	-60,22
I	-45,92		-2,65		-17,14	-31,99
E	-94,32		-90,45		-91,23	-92,21
LR	113,52%		132,29%		125,75%	119,15%
ER	10,68%		11,61%		11,29%	10,96%
$r_1$	-34,44%		-0,20%		-21,84%	-29,28%
$r_2$	-5,92%		-1,53%		3,78%	-0,60%
$r_p$	-17,33%		-1,00%		-6,47%	-12,07%

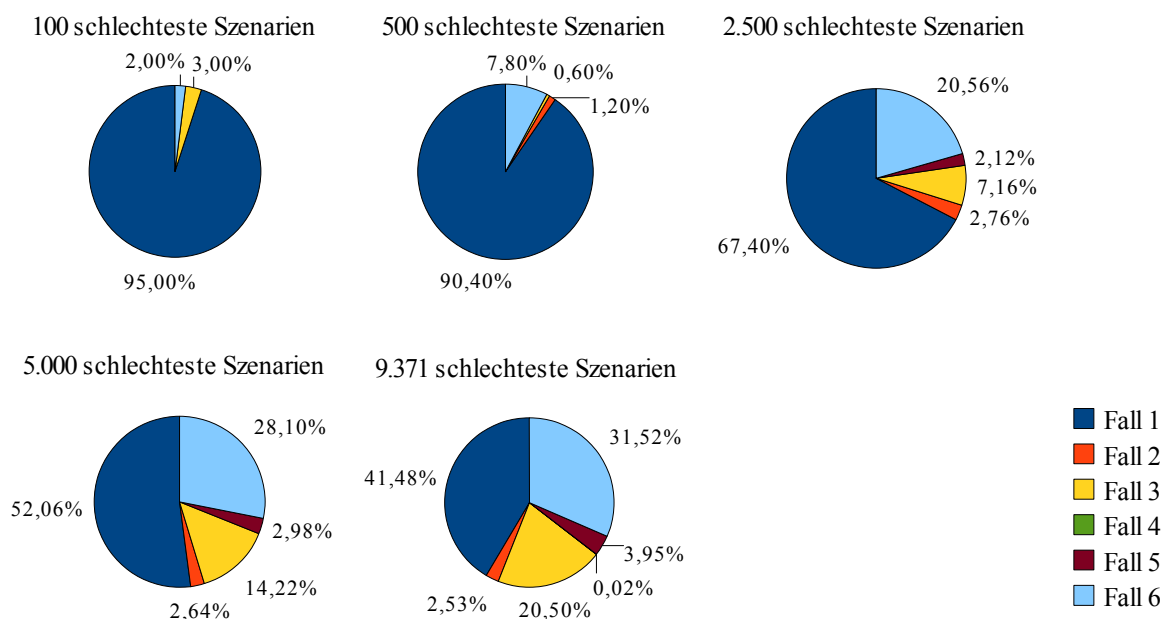
Anz.: Anzahl, U: Versicherungstechnisches Ergebnis in Mio. €, I: Kapitalanlageergebnis in Mio. €, E: Gewinn in Mio. €, LR: Schadenquote, ER: Kostenquote,  $r_1$ : Rendite der riskanten Kapitalanlagen,  $r_2$ : Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen,  $r_p$ : Portfoliorendite

**Tabelle 22:** Stressszenarien bei Betrachtung der 100 schlechtesten Szenarien mit der Gauss-Copula

den Portfoliorendite von -17,33 % resultiert ein hoher Kapitalanlageverlust, der zu knapp 50 % des Unternehmensverlustes beiträgt. Die andere Hälfte ergibt sich durch einen versicherungstechnischen Verlust, der durch eine Schadenquote von 113,52 % zustande kommt. Der Verlust in Fall 3 entsteht maßgeblich durch eine sehr hohe Schadenquote von 132,29 %. Die leicht negativen Kapitalanlagerenditen (-0,20 % bzw. -1,53 %) führen zwar zu einem Kapitalanlageverlust, dieser macht aber nur 3 % des Unternehmensverlustes aus. In Fall 5 sind sowohl die Schadenquote (125,75 %) als auch die Rendite der riskanten Kapitalanlagen (-21,84 %) ziemlich schlecht, die Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen (3,78 %) liegt hingegen nur 1 %-Punkt unterhalb des Erwartungswertes. Fall 6 lässt sich mit einer Rendite der riskanten Kapitalanlagen von -29,28 %, einer Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen von -0,60 % und einer Schadenquote von 119,15 % zwischen die Fälle 1 und 3 einordnen.

Die Fallgruppen mit der Gauss-Copula (siehe Tabelle 22) unterscheiden sich von denen mit Annahme der Unkorreliertheit (siehe Tabelle 21) auf den ersten Blick erkennbar dadurch, dass Fall 2 nicht mehr vertreten ist und die Risikofaktoren durchwegs etwas gesteigert sind, also insgesamt etwas schlechtere Finanzergebnisse zustande kommen. Dafür gibt es eine Erklärung. Die (zufälligen) Risikofaktoren mit der Gauss-Copula hängen linear zusammen. Die zwei Assetklassen und die zwei Arten von Liabilities sind leicht positiv korreliert, die Assets und die Liabilities sind leicht negativ korreliert. Damit verstärken sich negative Einflüsse (wie übrige Einflüsse auch). Folglich werden die Risikofaktoren eines jeden Szenarios durch Berücksichtigung linearer Abhängigkeiten zwischen den vier Risikokategorien anders zusammengestellt. Das führt insbesondere dazu, dass bei Betrachtung der 100 schlechtesten Szenarien der Fall 2 mit der Gauss-Copula nicht mehr vorkommt. Szenarien, die eine stark negative Rendite der riskanten Kapitalanlagen aufweisen, weisen durch Korrelation tendenziell auch eine negative Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen auf. Demzufolge werden sie dem Fall 1 zugeordnet und nicht dem Fall 2 wie bei Annahme der Unkorreliertheit. Szenarien, die ohne Berücksichtigung von linearen Abhängigkeiten zum Fall 2 gehört hätten, sind mit einer höheren Schadenquote und negativeren Rendite der riskanten Kapitalanlage verbunden als die Szenarien aus Fall 1 (siehe Tabelle 21). Mit der Gauss-Copula führen diese Szenarien (nun zu Fall 1 gehörend) durch Mittelwertbildung zu extremeren Ausprägungen der Renditen und der Schadenquote in Fall 1.

Abbildung 07 zeigt, mit welcher Wahrscheinlichkeit die sechs Fallgruppen mit der Clayton-Copula vorkommen. Die allerschlechtesten Szenarien werden fast ausschließlich Fall 1 zugeordnet (bei den 100 schlechtesten Szenarien 95,00 %, bei den 500 schlechtesten Szenarien 90,40 %). Szenarien, welche den übrigen Fallgruppen zuzuordnen sind, treten bei zunehmender Anzahl an betrachteten schlechten Szenarien häufiger auf. Das geht damit einher, dass der Anteil des Falles 1 allmählich abnimmt, trotzdem aber dominant bleibt.



**Abbildung 07:** Anteile der Fallgruppen mit der Clayton-Copula

Der Unterschied bei der Aufteilung der Fallgruppen bei Annahme der Unkorreliertheit und mit der Clayton-Copula ist deutlich größer als bei Annahme der Unkorreliertheit und mit der Gauss-Copula. Die Tendenz, die mit der Gauss-Copula bereits erkennbar war, ist mit der lower-tail-abhängigen Clayton-Copula noch viel stärker ausgeprägt.



Tabelle 23 zeigt die zu den einzelnen Fällen gehörenden Risikofaktoren und Finanzgrößen. Fall 1 weist neben sehr schlechten Kapitalanlagerenditen, die Rendite der riskanten Kapitalanlagen liegt bei -38,78 % und die Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen bei -8,75 %, auch eine hohe Schadenquote von 122,62 % auf. Fall 3 ist durch eine sehr hohe Schadenquote von 196,14 % gekennzeichnet. Die Portfoliorendite in Höhe von 1,53 % liegt zwar deutlich unter ihrem Erwartungswert, dennoch im positiven Bereich. Fall 6 kann als Abschwächung von Fall 1 bezüglich der Kapitalanlagerenditen angesehen werden. Die Rendite der riskanten Kapitalanlagen ist zwar mit -38,89 % um 0,11 %-Punkte schlechter als im Fall 1, es fließen aber auch nur 2 Szenarien zur Ermittlung dieser Rendite ein, womit das mit dem Zufall begründet werden kann. Die Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen liegt hingegen bei 1,26 %. Die Schadenquote beträgt 126,25 %.

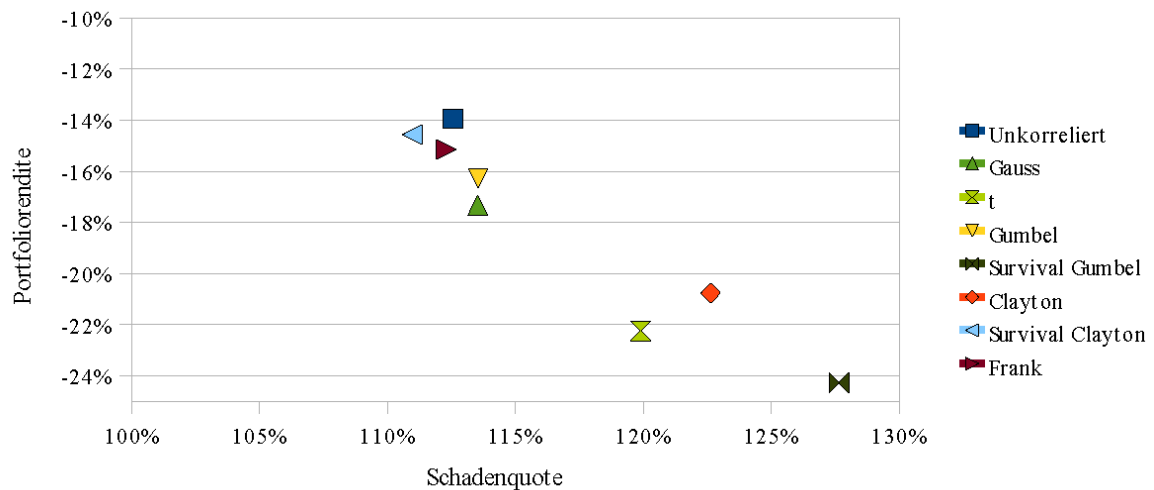
Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien	95	0	3	0	0	2
U	-67,50		-221,90			-75,13
I	-55,02		4,06			-39,22
E	-122,52		-217,84			-114,35
LR	122,62%		196,14%			126,25%
ER	11,13%		14,81%			11,31%
$r_1$	-38,78%		-0,13%			-38,89%
$r_2$	-8,75%		2,64%			1,26%
$r_p$	-20,76%		1,53%			-14,80%

Anz.: Anzahl, U: Versicherungstechnisches Ergebnis in Mio. €, I: Kapitalanlageergebnis in Mio. €, E: Gewinn in Mio. €, LR: Schadenquote, ER: Kostenquote,  $r_1$ : Rendite der riskanten Kapitalanlagen,  $r_2$ : Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen,  $r_p$ : Portfoliorendite

**Tabelle 23:** Stressszenarien bei Betrachtung der 100 schlechtesten Szenarien mit der Clayton-Copula

Der noch größere Unterschied zum unkorrelierten Fall im Vergleich mit der Gauss-Copula ergibt sich mit der Clayton-Copula dadurch, dass neben linearen Abhängigkeiten nicht-lineare Abhängigkeiten im unteren Randbereich modelliert werden. Ist ein Risikofaktor extrem schlecht, so sind es die anderen auch. Folglich tritt unter den 100 schlechtesten Szenarien fast nur Fall 1 auf. Dieser weist neben sehr schlechten Kapitalanlagerenditen zugleich eine um 10 %-Punkte höhere Schadenquote als bei Annahme der Unkorreliertheit bzw. mit der Gauss-Copula auf.

Eine Gesamtübersicht der zu Fall 1 gehörenden Risikofaktoren (Portfoliorendite, Schadenquote) für alle implementierten Abhängigkeitsstrukturen ist in Abbildung 08 zu sehen. Die Faktoren sind Mittelwerte der zu Fall 1 gehörenden Szenarien aus einer Grundgesamtheit von den 100 schlechtesten Szenarien.<sup>52</sup> Auf der x-Achse ist die Schadenquote abgetragen,



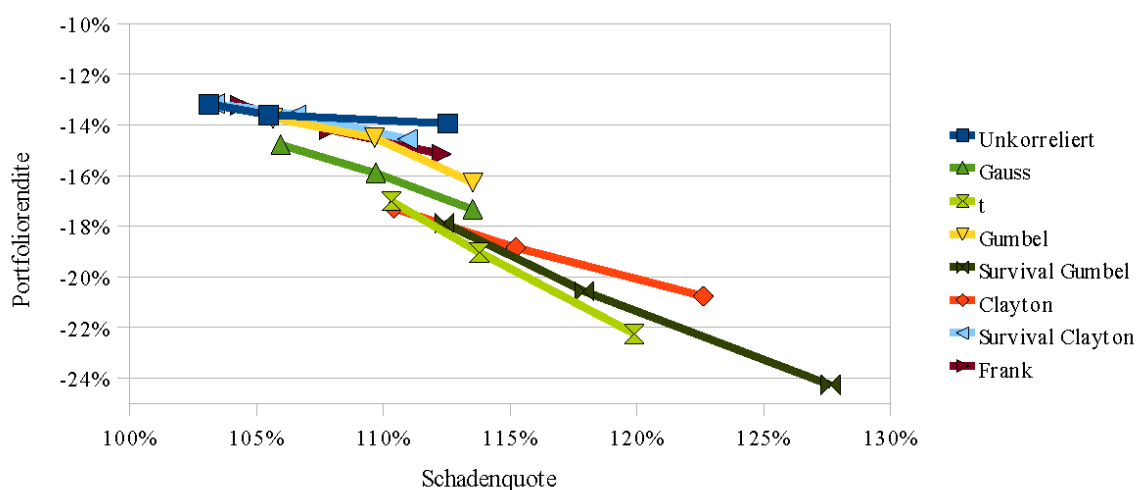
**Abbildung 08:** Gesamtübersicht der Stressszenarien von Fall 1  
(Grundgesamtheit: 100 schlechteste Szenarien)

auf der y-Achse die Portfoliorendite, die sich aus Gewichtung der Anlagerenditen ergibt (vgl. (32)). Für alle Abhängigkeitsstrukturen ist die Schadenquote über 110 % und die Portfoliorendite liegt aufgrund stark negativer Renditen der riskanten und risikoarmen Kapitalanlagen unter -13 %. Bei Annahme der Unkorreliertheit resultiert eine Schadenquote von 112,55 % und eine Portfoliorendite von -13,93 %. Ähnlich wie bei den Risikomaßen (vgl. Tabelle 08) wird die Stärke des Stresses der einzelnen Bilanzpositionen durch die verschiedenen Korrelationsannahmen stark beeinflusst. Die Schadenquote verändert sich je nach Copula-Typ um -1,41 % (von 112,55 % auf 110,96 % mit der Survival-Clayton-Copula) bis zu +13,41 % (von 112,55 % auf 127,64 % mit der Survival-Gumbel-Copula) und die Portfoliorendite sinkt je nach Copula-Typ um 4,45 % (von -13,93 % auf -14,55 % mit der Survival-Clayton-Copula) bis zu 74,23 % (von -13,93 % auf -24,27 % mit der

<sup>52</sup> D.h., dass im ersten Schritt wieder die 100 schlechtesten Szenarien pro Abhängigkeitsstruktur ausgewählt werden. Davon werden im zweiten Schritt diejenigen Szenarien betrachtet, die dem Fall 1 entsprechen, aus denen dann im dritten Schritt die Faktoren als Mittelwerte ermittelt werden.

Survival-Gumbel-Copula). Es ist festzustellen, dass die extremen Veränderungen an die Art der nichtlinearen Abhängigkeit gebunden sind. Im Stressfall ist die Indikation mit den Copulas mit unterer Tail-Abhängigkeit (t-, Clayton- und Survival-Gumbel-Copula)<sup>53</sup> deutlich stärker als die Indikation mit den Copulas ohne Tail-Abhängigkeit (Gauss- und Frank-Copula) bzw. mit oberer Tail-Abhängigkeit (Gumbel- und Survival-Clayton-Copula).

In Abbildung 09 ist die Gesamtübersicht der zu Fall 1 gehörenden Risikofaktoren jeweils für eine Grundgesamtheit der 100, der 500 bzw. der 2.500 schlechtesten Szenarien (Punkte von rechts nach links in Abbildung 09) zu sehen.<sup>54</sup> Zieht man in die Betrachtung zusätzlich zu den 100 schlechtesten Szenarien (pro Abhängigkeitsstruktur jeweils der dritte Punkt von



Erläuterung: In dieser Abbildung ist die Gesamtübersicht der zu Fall 1 gehörenden Risikofaktoren jeweils für eine Grundgesamtheit der 100 (pro Abhängigkeitsstruktur jeweils der dritte Punkt von links), der 500 (pro Abhängigkeitsstruktur jeweils der zweite Punkt von links) bzw. der 2.500 (pro Abhängigkeitsstruktur jeweils der erste Punkt von links) schlechtesten Szenarien zu sehen.

#### Abbildung 09: Gesamtübersicht der Stressszenarien von Fall 1

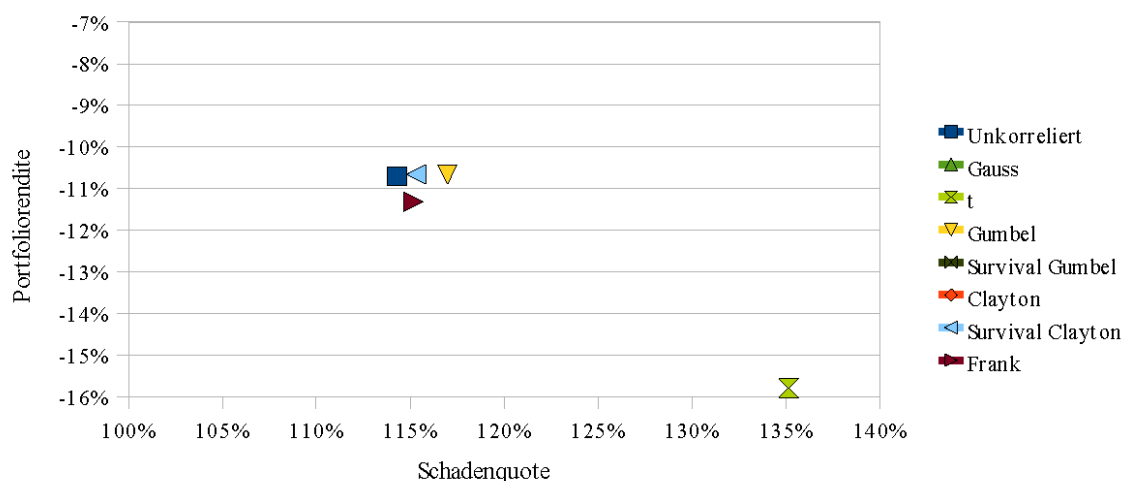
(Grundgesamtheit: 100, 500, 2.500 schlechteste Szenarien)

53 Die andere Reihenfolge bei der Stärke der Ausprägungen einzelner Risikofaktoren innerhalb der implementierten Copulas mit unterer Tail-Abhängigkeit als bei den zu den Risikomaßen gehörenden Werten (vgl. Tabelle 08) ist auf den in Fußnote 48 beschriebenen Sachverhalt zurückzuführen.

54 Zur Berechnung der Risikofaktoren für eine Grundgesamtheit der 100 schlechtesten Szenarien siehe Fußnote 52. Bei einer Grundgesamtheit der 500 bzw. der 2.500 schlechtesten Szenarien erfolgt die Berechnung auf gleiche Art und Weise, nur dass in die Betrachtung die 500 bzw. 2.500 schlechtesten Szenarien (statt der 100 schlechtesten Szenarien) einbezogen werden.

links in Abbildung 09) auch die 500 (pro Abhängigkeitsstruktur jeweils zweite Punkt von links in Abbildung 09) und 2.500 (pro Abhängigkeitsstruktur jeweils der erste Punkt von links in Abbildung 09) schlechtesten Szenarien ein, sind zwei Effekte zu erkennen: Zum einen schwächt sich die Ausprägung der Stressszenarien bei zunehmender Anzahl der betrachteten Szenarien ab. Zum anderen gleichen sich die Ausprägungen der Stressszenarien unterschiedlicher Abhängigkeitsstrukturen bei zunehmender Anzahl der betrachteten Szenarien einander an.

Abbildung 10 enthält die Gesamtübersicht der zu den verschiedenen Korrelationsannahmen gehörenden Risikofaktoren, ausgehend von einer Grundgesamtheit der 100 schlechtesten Szenarien, für den Fall 2. Mit der Gauss-, der Survival-Gumbel- und der Clayton-Copula ist Fall 2 in der Grundgesamtheit von 100 nicht vertreten. Die t-Copula ist folglich

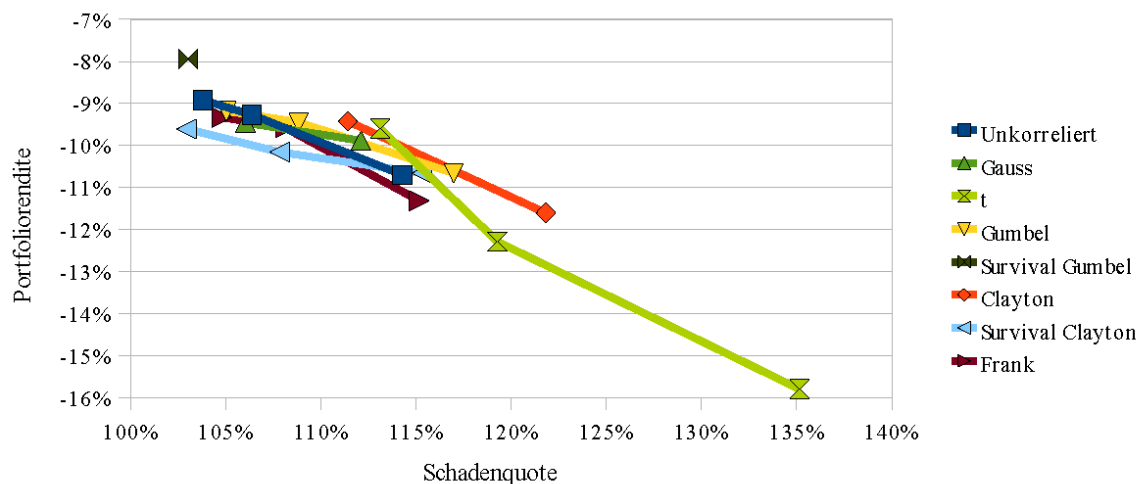


**Abbildung 10:** Gesamtübersicht der Stressszenarien von Fall 2  
(Grundgesamtheit: 100 schlechteste Szenarien)

der einzige Vertreter der Copulas mit einer unteren Tail-Abhängigkeit, bei der dieser Fall vorkommt – jedoch auch nur ein einziges Mal. Diese Erscheinung ist darauf zurückzuführen, dass bei Vorliegen einer unteren Tail-Abhängigkeit die Szenarien durch gleichzeitiges Auftreten extrem ungünstiger Ausprägungen der Risikofaktoren vorwiegend Fall 1 zugeordnet werden (vgl. Erläuterung zu den Tabellen 22 und 23). Die mit der t-Copula verbun-

denen Faktoren heben sich stark vom Gesamtbild ab. Der Vergleich der übrigen Abhängigkeitsstrukturen zeigt relativ geringe Auswirkungen auf die Schadenquote und die Portfoliorendite. Mit Annahme der Unkorreliertheit liegt die Schadenquote bei 114,28 % zusammen mit einer Portfoliorendite von -10,70 %. Die Schadenquote steigt je Copula-Typ (ausgenommen der t-Copula) um 0,78 % bis 2,36 %, die Portfoliorendite verändert sich um -0,37 % bis +5,7 %.

Werden neben den 100 schlechtesten Szenarien auch die 500 und die 2.500 schlechtesten Szenarien berücksichtigt<sup>55</sup> (vgl. Abbildung 11), ist zu sehen, dass sich die Ausprägung der



Erläuterung: In dieser Abbildung ist die Gesamtübersicht der zu Fall 2 gehörenden Risikofaktoren jeweils für eine Grundgesamtheit der 100 (pro Abhängigkeitsstruktur jeweils der dritte Punkt von links), der 500 (pro Abhängigkeitsstruktur jeweils der zweite Punkt von links) bzw. der 2.500 (pro Abhängigkeitsstruktur jeweils der erste Punkt von links) schlechtesten Szenarien zu sehen. Sind für eine Abhängigkeitsstruktur in der Abbildung nur zwei Punkte abgetragen (vgl. Gauss- und Gumbel-Copula), ist Fall 2 in der Grundgesamtheit von 100 nicht vertreten. Die Punkte sind dann der Grundgesamtheit von 500 bzw. 2.500 zuzuordnen. Entsprechend gilt für eine Abhängigkeitsstruktur mit nur einem Punkt (vgl. Survival-Gumbel-Copula), dass Fall 2 lediglich in der Grundgesamtheit von 2.500 enthalten ist.

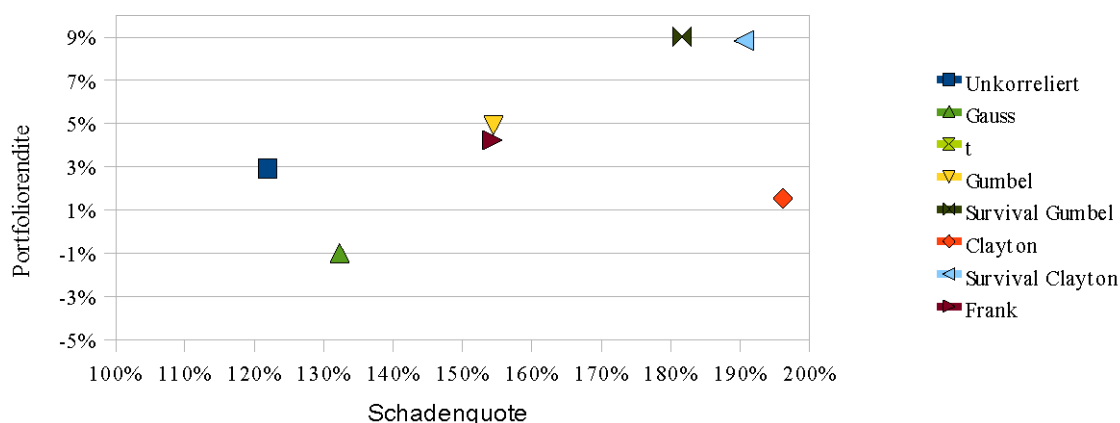
### Abbildung 11: Gesamtübersicht der Stressszenarien von Fall 2

(Grundgesamtheit: 100, 500, 2.500 schlechteste Szenarien)

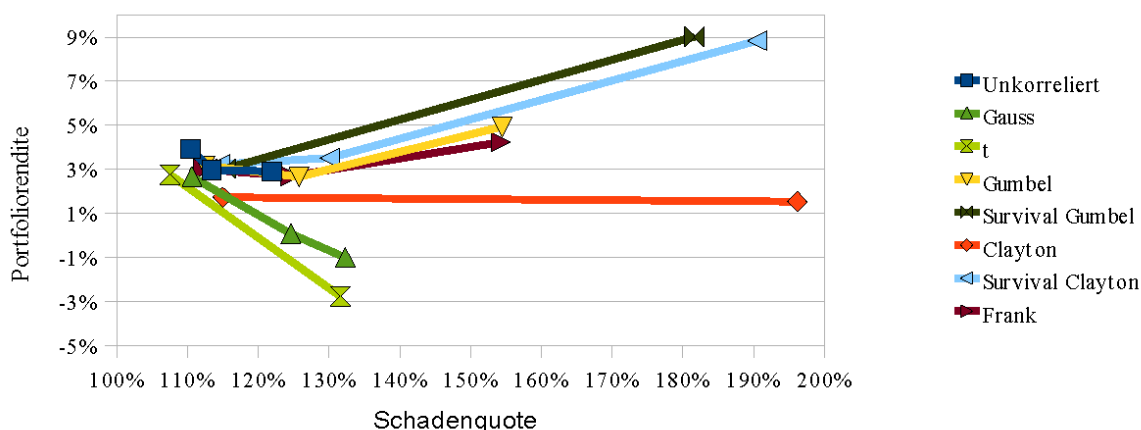
<sup>55</sup> Wie schon in Fußnote 54 für den Fall 1 erläutert, wird hier zur Ermittlung der Risikofaktoren für Fall 2 auch eine Grundgesamtheit von 100, 500 bzw. 2.500 Szenarien (Punkte von rechts nach links in Abbildung 11) ausgewählt. Sind für eine Abhängigkeitsstruktur in Abbildung 11 nur zwei Punkte abgetragen (vgl. Gauss- und Gumbel-Copula), ist Fall 2 in der Grundgesamtheit von 100 nicht vertreten. Die Punkte sind dann der Grundgesamtheit von 500 bzw. 2.500 (von rechts nach links) zuzuordnen. Entsprechend gilt für eine Abhängigkeitsstruktur mit nur einem Punkt (vgl. Survival-Gumbel-Copula), dass Fall 2 lediglich in der Grundgesamtheit von 2.500 enthalten ist.

Stressszenarien innerhalb einer Abhängigkeitsstruktur und die Unterschiede der Ausprägungen der Stressszenarien zwischen verschiedenen Abhängigkeitsstrukturen abschwächen.

Die zu den verschiedenen Korrelationsannahmen gehörenden Risikofaktoren des Falles 3 sind in den Abbildungen 12 und 13 dargestellt.



**Abbildung 12:** Gesamtübersicht der Stressszenarien von Fall 3  
(Grundgesamtheit: 100 schlechteste Szenarien)



Erläuterung: In dieser Abbildung ist die Gesamtübersicht der zu Fall 3 gehörenden Risikofaktoren jeweils für eine Grundgesamtheit der 100 (pro Abhängigkeitsstruktur jeweils der dritte Punkt von links), der 500 (pro Abhängigkeitsstruktur jeweils der zweite Punkt von links) bzw. der 2.500 (pro Abhängigkeitsstruktur jeweils der erste Punkt von links) schlechtesten Szenarien zu sehen. Sind für eine Abhängigkeitsstruktur in der Abbildung nur zwei Punkte abgetragen (vgl. t-Copula), ist Fall 3 in der Grundgesamtheit von 100 nicht vertreten. Die Punkte sind dann der Grundgesamtheit von 500 bzw. 2.500 zuzuordnen.

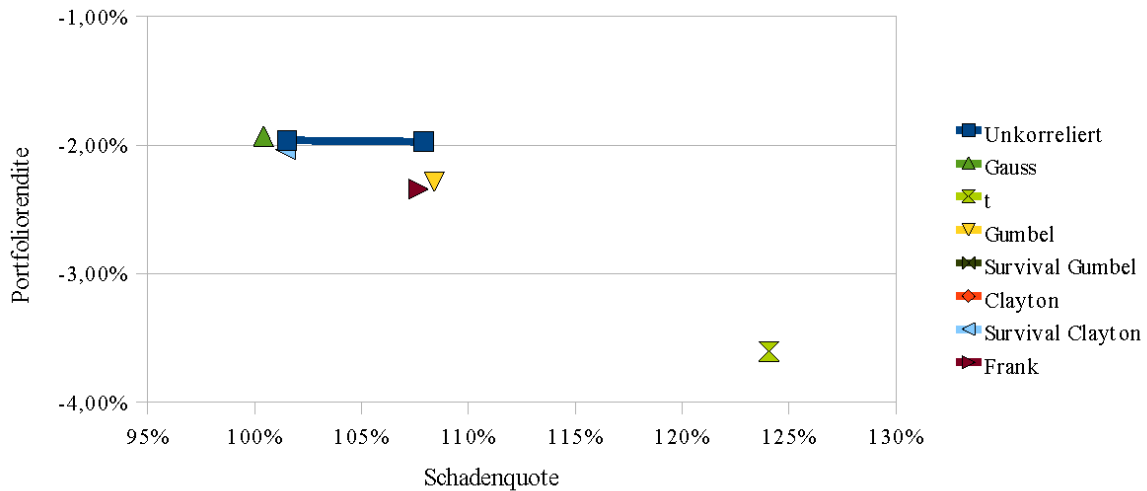
**Abbildung 13:** Gesamtübersicht der Stressszenarien von Fall 3  
(Grundgesamtheit: 100, 500, 2.500 schlechteste Szenarien)

Die Portfoliorendite liegt überwiegend im positiven Bereich, jedoch überwiegend unterhalb des Erwartungswertes von 7 %. Bei der Schadenquote beträgt die Bandbreite fast 100 %. Insbesondere ist bei einer Grundgesamtheit der 100 schlechtesten Szenarien (vgl. Abbildung 12) die Schadenquote sowohl bei zwei Copulas mit unterer Tail-Abhängigkeit (Clayton-Copula: 196,14 %, Survival-Gumbel-Copula: 181,61 %) als auch bei einer Copula mit oberer Tail-Abhängigkeit (Survival-Clayton-Copula: 190,52 %) extrem hoch. Vergrößert man die Grundgesamtheit (vgl. Abbildung 13) gleichen sich die Schadenquoten unterschiedlicher Abhängigkeitsstrukturen relativ schnell und stark an. Die extremen Ausschläge verschwinden. Die bei Betrachtung einer kleinen Grundgesamtheit auftretenden hohen Schadenquoten bei den hierarchischen Archimedischen Copulas sind auf eine uneinheitliche Vorgehensweise bei der Modellierung der korrelierten Zufallszahlen zurückzuführen.<sup>56</sup>

Der Vollständigkeit halber sind in den Abbildungen 14, 15 und 16 die Gesamtübersichten für Fall 4, 5 und 6 dargestellt. Wie zu sehen ist, ergeben sich keine neuen Erkenntnisse.

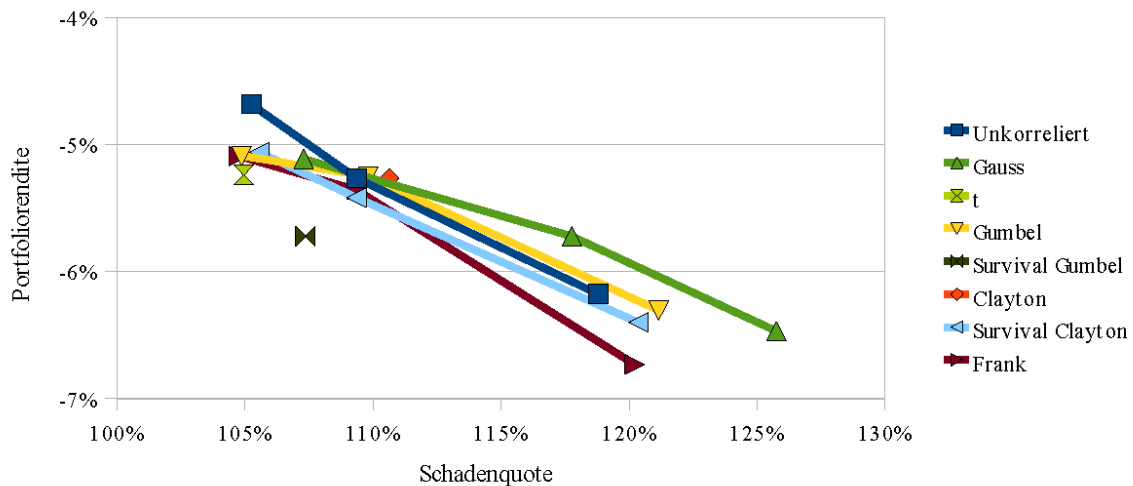
---

<sup>56</sup> Die Zufallszahlen, über die Korrelationsannahmen in das Modell integriert werden, sind Zahlen aus dem Intervall  $[0,1]$ . Zufallszahlen, die die Randwerte 0 und 1 annehmen, werden aus der Betrachtung eliminiert (durch sie wären die Szenarien in Fußnote 48 zu erklären). In die Analyse der schlechtesten Szenarien fließen somit nur noch Zufallszahlen aus dem offenen Intervall  $(0,1)$  ein, welches aber je nach Abhängigkeitsstruktur unterschiedlich weit geöffnet ist.



Erläuterung: In dieser Abbildung ist die Gesamtübersicht der zu Fall 4 gehörenden Risikofaktoren jeweils für eine Grundgesamtheit der 500 (pro Abhängigkeitsstruktur jeweils der zweite Punkt von links) bzw. der 2.500 (pro Abhängigkeitsstruktur jeweils der erste Punkt von links) schlechtesten Szenarien zu sehen. Ist für eine Abhängigkeitsstruktur in der Abbildung nur ein Punkt abgetragen (vgl. Gauss-, t-, Gumbel-, Survival-Clayton- und Frank-Copula), ist Fall 4 in der Grundgesamtheit von 500 nicht vertreten. Die Punkte sind dann der Grundgesamtheit von 2.500 zuzuordnen. Entsprechend gilt für eine Abhängigkeitsstruktur mit keinem Punkt (vgl. Survival-Gumbel- und Clayton-Copula), dass Fall 4 selbst in der Grundgesamtheit von 2.500 noch nicht enthalten ist.

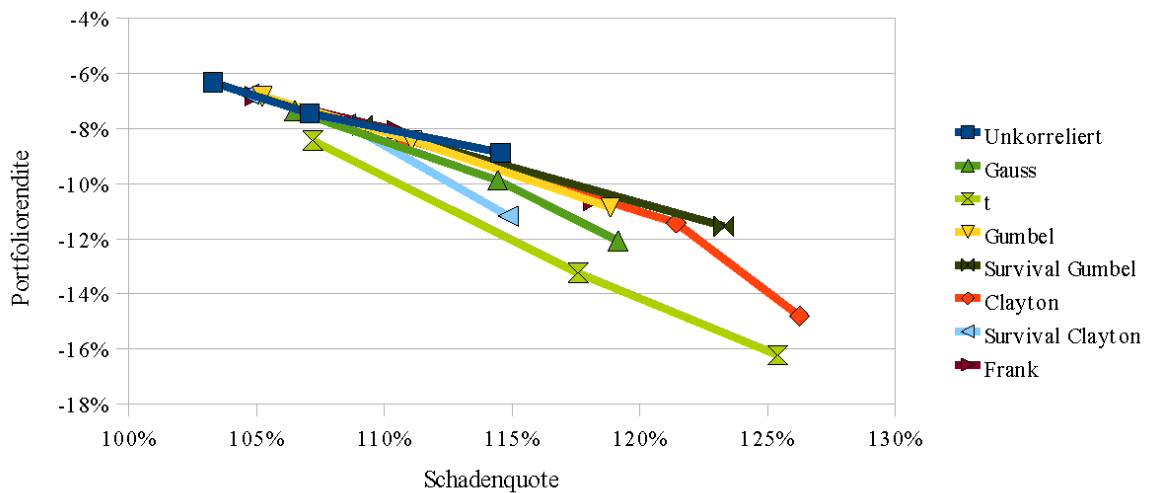
**Abbildung 14:** Gesamtübersicht der Stressszenarien von Fall 4  
(Grundgesamtheit: 100, 500, 2.500 schlechteste Szenarien)



Erläuterung: In dieser Abbildung ist die Gesamtübersicht der zu Fall 5 gehörenden Risikofaktoren jeweils für eine Grundgesamtheit der 100 (pro Abhängigkeitsstruktur jeweils der dritte Punkt von links), der 500 (pro Abhängigkeitsstruktur jeweils der zweite Punkt von links) bzw. der 2.500 (pro Abhängigkeitsstruktur jeweils der erste Punkt von links) schlechtesten Szenarien zu sehen. Ist für eine Abhängigkeitsstruktur in der Abbildung nur ein Punkt abgetragen (vgl. t-, Survival-Gumbel- und Clayton-Copula), ist Fall 5 in der Grundgesamtheit von 100 und 500 nicht vertreten. Die Punkte sind dann der Grundgesamtheit von 2.500 zuzuordnen.

**Abbildung 15:** Gesamtübersicht der Stressszenarien von Fall 5  
(Grundgesamtheit: 100, 500, 2.500 schlechteste Szenarien)





Erläuterung: In dieser Abbildung ist die Gesamtübersicht der zu Fall 6 gehörenden Risikofaktoren jeweils für eine Grundgesamtheit der 100 (pro Abhängigkeitsstruktur jeweils der dritte Punkt von links), der 500 (pro Abhängigkeitsstruktur jeweils der zweite Punkt von links) bzw. der 2.500 (pro Abhängigkeitsstruktur jeweils der erste Punkt von links) schlechtesten Szenarien zu sehen. Sind für eine Abhängigkeitsstruktur in der Abbildung nur zwei Punkte abgetragen (vgl. Survival-Gumbel-Copula), ist Fall 6 in der Grundgesamtheit von 100 nicht vertreten. Die Punkte sind dann der Grundgesamtheit von 500 bzw. 2.500 zuzuordnen.

**Abbildung 16:** Gesamtübersicht der Stressszenarien von Fall 6

(Grundgesamtheit: 100, 500, 2.500 schlechteste Szenarien)

#### 4.4.3 Vergleich mit dem BaFin-Stresstest

Wie unter 2.1 vorgestellt gibt es bereits Stresstests, hier speziell den BaFin-Stresstest. Dieser Test ist relativ einfach aufgebaut, einfach durchzuführen und einfach auszuwerten. Eigentlich wäre es sehr wünschenswert, wenn für die tägliche Praxis der einfache Test auch genüge und diesbezüglich die Komplexität der Dynamischen Finanzanalyse der Wissenschaft vorbehalten bleiben könnte. Im Folgenden werden Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen den Stressszenarien aus dem BaFin-Stresstest und aus dem DFA-Modell untersucht. Dazu werden in 4.4.2 identifizierte Stressszenarien zum Beispiel in das Modell der BaFin eingebracht. Damit wird geprüft, ob die hier identifizierten ruinösen Szenarien den BaFin-Stresstest bestehen oder nicht.

Der Reiz des Vergleichs besteht darin, dass die Herangehensweise an die Stressszenarien kaum unterschiedlicher sein könnte. Zur Einbettung der Dynamischen Finanzanalyse wird auf 4.4.1 verwiesen. Der BaFin-Stresstest ist jüngst aus einer Diskussion zwischen dem damaligen Bundesaufsichtsamt für das Versicherungswesen (BAV) und dem Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft (GDV) hervorgegangen. Die Kapitalmarktrenditen waren gefallen, ihre Volatilität hatte gleichzeitig zugenommen und der Versicherungsmarkt wurde dereguliert. Das jetzige Verfahren ist ein Kompromiss: Der BaFin-Stresstest legt historische Daten für die Volatilität zugrunde in einem einfach auszufüllenden Formular und Kriterien, die in gewissem Umfang auf die Marktteilnehmer, insbesondere die kleineren, Rücksicht nimmt. Weniger gefragt waren aktuarielle Ausführungen.

Tabelle 24 liefert einen Überblick über die Szenarien, die im Folgenden betrachtet werden.

Szenario	Marktwert Aktien	Marktwert Renten	Schadenquote
BaFin-Stresstest 2009			
R 10		-10 %	
Isoliertes Aktienszenario	bis -45 %		
Renten- und Aktienszenario	bis -25 %	-5 %	
Eigene Worst-Case-Szenarien (Clayton-Copula)			
Szenario 1	-39 %	-9 %	123 %
Szenario 2	-35 %		121 %
Szenario 3			196 %
Szenario 4		-9 %	107 %

**Tabelle 24:** Übersicht der Stressszenarien für die Durchführung des BaFin-Stresstests

Für die Analyse sind die drei in Kapitel 2.1.2 vorgestellten Stressszenarien des Stresstests der BaFin, die zu einem Marktwertverlust der Aktien und/oder Rentenpapiere führen, interessant.<sup>57</sup> Aus denen im vorhergehenden Kapitel bestimmten Stressszenarien werden die Stressszenarien von Fall 1 bis 4 (hier benannt als Szenario 1 bis 4) der Clayton-Copula

<sup>57</sup> Das vierte Szenario des BaFin-Stresstests, das Aktien- und Immobilienszenario, wird für die Analyse nicht weiter berücksichtigt, da im hier angewendeten vereinfachten DFA-Modell kein Immobilienbestand vorhanden ist.

ausgewählt.<sup>58</sup>

Die aus dem DFA-Modell mit der Clayton-Copula bestimmten Szenarien unterscheiden sich durch die zusätzliche Betrachtung einer hohen Schadenquote grundlegend von den Szenarien des Stresstests der BaFin. Sieht man von diesem Stressfaktor ab, können zwischen den Szenarien Ähnlichkeiten erkannt werden. Das Rentenszenario „R 10“ der BaFin führt zu einem etwa gleich hohen Marktwertrückgang der Renten wie das „Szenario 4“ aus dem DFA-Modell. An dieser Stelle sei daran erinnert, dass „Szenario 4“ im DFA-Modell aber nur sehr selten eintritt. Ähnlichkeiten in der Struktur zum „Isolierten Aktienszenario“ des BaFin-Stresstests weist „Szenario 2“ auf. Im Zusammenhang mit dem „Renten- und Aktienszenario“ der BaFin kann „Szenario 1“ betrachtet werden.

Als nächstes wird der Stresstest der BaFin zum 31.12.2009 durchgeführt, um zu sehen, welche Auswirkungen die verschiedenen Stressszenarien auf die Bilanz des Beispielunternehmens haben.<sup>59</sup> Zur Durchführung wird das Stresstestmodell der BaFin für die Schaden- und Unfallversicherung (vgl. [BaFin (2002/2008)]) verwendet:

- Schritt 0: Ausgangsbilanz (inklusive Solva-Anforderung).
- Schritt 1: a) Fortschreibung der Aktiva.  
b) Fortschreibung der Passiva.  
c) Fortschreibung der Solva-Anforderung.  
(Vor Auswirkungen des Stressszenarios.)
- Schritt 2: a) Berechnung des Marktänderungsrisikos.  
b) Berechnung des Bonitätsrisikos.
- Schritt 3: Ergebnis des Stresstests.

---

58 In Kapitel 4.4.2 hat sich gezeigt, dass Copulas mit einer unteren Tail-Abhängigkeit die stärkste Indikation im Stressfall liefern. Deshalb werden beispielhaft die Szenarien der Clayton-Copula gewählt. Die Stressszenarien von Fall 5 und Fall 6 werden nicht weiter betrachtet, da sie nur eine Abschwächung der Stressszenarien von Fall 2 bzw. Fall 1 sind.

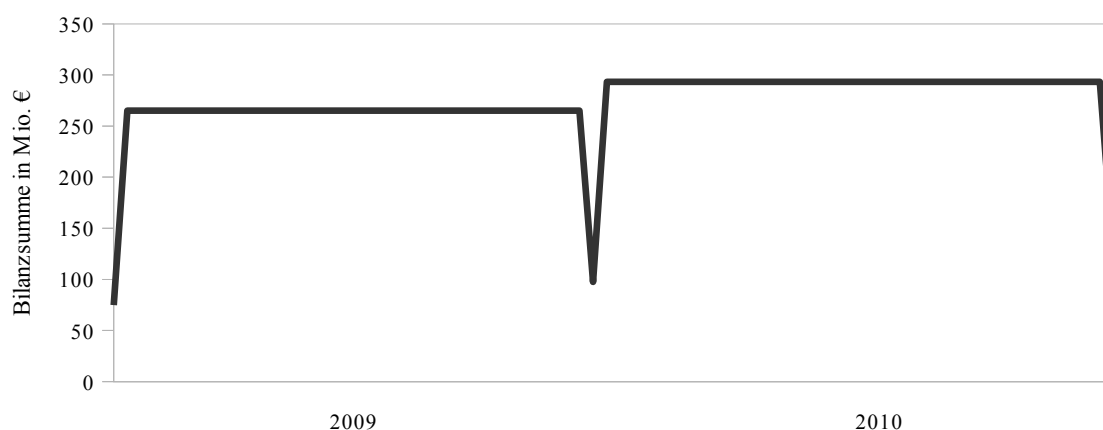
59 Es wird angenommen, dass die erste Periode, die im DFA-Modell betrachtet wird, am 01.01.2009 beginnt. D.h. die Simulation der Entwicklung der Finanz- und Risikolage der ersten Periode, entspricht der Entwicklung im Jahr 2009.

Als Ausgangsbilanz wird die Eröffnungsbilanz zum 01.01.2009 nach dem Grundmuster aus Abbildung 17 benötigt. Im vereinfachten DFA-Modell wird die Schadenrückstellung

Aktiva	Passiva
Riskante Kapitalanlagen	EC
Risikoarme Kapitalanlagen	Schadenrückstellung
Bilanzsumme	Bilanzsumme

Anforderung Solva  
(berechnet nach KapAusstV)

**Abbildung 17:** Schlussbilanz am 31.12.2008 = Eröffnungsbilanz am 01.01.2009



**Abbildung 18:** Bilanzsumme im Simulationsmodell im Jahresverlauf

am Ende einer jeden Periode vollständig aufgelöst (vgl. Kapitel 3.1). Diese vereinfachte Modellierung des Versicherungsgeschäftes auf der Passivseite führt zu hohen Schwankungen in der Bilanzsumme zum Periodenwechsel (vgl. Abbildung 18). Um den Stresstest durchführen zu können, werden die Einbrüche in der Bilanzsumme beseitigt.<sup>60</sup>

<sup>60</sup> Um den Stresstest der BaFin durchführen zu können, muss in der Bilanz der Posten Rückstellung ungleich 0 sein. Im Modell wird die Modellierung der Passivseite durch zwei Aspekte vereinfacht. Zum einen wird keine Schwankungsrückstellung berücksichtigt. Zum anderen wird die Schadenrückstellung am Anfang einer Periode (nach Eingang der Prämien und nach Zahlung der Abschlusskosten) gestellt und am Ende einer Periode (nach Zahlung der Schadenleistungen und Schadenregulierungskosten) vollständig

Abbildung 19 zeigt die für den Stresstest aufgestellte Bilanz des Beispielunternehmens. Auf der Passivseite steht das zu Beginn des Betrachtungshorizonts zur Verfügung stehende Eigenkapital in Höhe von 75 Millionen € und eine Schadenrückstellung in Höhe von

Aktiva	in Tsd. €	Passiva	in Tsd. €
Riskante Kapitalanlagen	106.000	EC	75.000
Risikoarme Kapitalanlagen	159.000	Schadenrückstellung	190.000
Bilanzsumme	265.000	Bilanzsumme	265.000
Anforderung Solva (in Tsd. €)	40.309		

**Abbildung 19:** Bilanz des Beispielunternehmens am 01.01.2009 im Tagesverlauf

190 Millionen €. Die Bilanzsumme beträgt 265 Millionen €. Auf der Aktivseite wird die Bilanzsumme anteilig dem riskanten ( $40\% \cdot 265 \text{ Millionen €} = 106 \text{ Millionen €}$ ) und dem risikoarmen ( $60\% \cdot 265 \text{ Millionen €} = 159 \text{ Millionen €}$ ) Kapitalanlagebestand zugeordnet. Die Berechnung der Solvabilitätserfordernis erfolgt gemäß der Verordnung über die Kapitalausstattung von Versicherungsunternehmen (KapAusstV) (vgl. [Bundesministerium der Justiz (1983)], S. 1451). Sie ergibt sich als Maximum aus Beitrags- und Schadenindex sowie Nebenrechnungsergebnis.

---

aufgelöst. Deshalb wird, um die Durchführung des Stresstests zu ermöglichen, folgende Eselsbrücke verwendet: Die Bilanzsumme der Eröffnungsbilanz am 01.01.2009 ist gleich dem erwarteten Maximum der laufenden Periode. Der Differenzbetrag zwischen der Bilanzsumme und dem Eigenkapital wird in die Rückstellung gebucht. Damit ist die Gewinn- und Verlustrechnung (GuV) dieser Bilanz (abgesehen vom Datum der Buchungssätze) identisch mit der GuV des Modells.

Die Stresstest-Ergebnisse für das Beispielunternehmen mit den Stressszenarien aus dem BaFin-Stresstest zu einem Indexstand der Aktien (Euro-Stoxx 50) am 31.12.2008 zwischen 3.916 und 4.105 Punkten<sup>61</sup> (vgl. Tabelle 03 und Tabelle 24) sind in Tabelle 25 dargestellt. Alle betrachteten Szenarien führen zu einem positiven Saldo. Der Stresstest wäre bestanden.

	<b>isoliertes Renten- szenario: Renten -10%</b>	<b>isoliertes Aktien- szenario: Aktien -35%</b>	<b>kombiniertes Renten- / Aktien- szenario: Renten -5% Aktien -20%</b>
Wert der Kapitalanlagen <u>vor</u> Stresstest	272.950	272.950	272.950
- Marktwertrückgang Aktien		-37.100	-21.200
- Marktwertrückgang Renten	-15.900		-7.950
- Marktwertrückgang Immobilien			
- Bonitätsabschlag	-4.778	-4.778	-4.778
<b>= Wert der Kapitalanlagen nach Stresstest</b>	<b>252.272</b>	<b>231.072</b>	<b>239.022</b>
Sonstige Aktiva	0	0	0
<b>= Wert der Aktiva nach Stresstest</b> (1)	<b>252.272</b>	<b>231.072</b>	<b>239.022</b>
Summe der mindestens zu bedeckenden Verpflichtungen des VU (alle Rückstellungen bis auf die freie RfB und SÜA-Fonds)	190.000	190.000	190.000
+ Sonstige Passiva	0	0	0
<b>= Summe Passiva Ver<sub>z</sub></b> (ohne Eigenmittel und passivseitige Puffer) (2)	<b>190.000</b>	<b>190.000</b>	<b>190.000</b>
<b>Solvabilitätsanforderung</b> (3)	<b>40.309</b>	<b>40.309</b>	<b>40.309</b>
<b>Abgeschlossene Absicherungsmaßnahmen (vor dem 31.12.)</b> (4)	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>Saldo (1)-(2)-(3)+(4)</b>	<b>21.963</b>	<b>763</b>	<b>8.713</b>
in % von (2) + (3) als aufsichtsrechtliche Mindestanforderung	9,5%	0,3%	3,8%

**Tabelle 25:** Stresstest für die Schaden- und Unfallversicherung zum 31.12.2009 nach dem Stresstestmodell der BaFin (vgl. [BaFin (2002/2008)]) mit den Szenarien aus dem BaFin-Stresstest (vgl. Tabelle 24)

<sup>61</sup> Begründung für den Ansatz: Die Kapitalanlagen werden so etwa gleich stark gestresst wie bei den Szenarien mit der Clayton-Copula (vgl. Tabelle 24). Am 31.12.2008 lag der Euro-Stoxx 50 bei 2.451,48 Punkten, der Höchstkurs 2008 war 4.411,59 Punkte und der Höchstkurs 2009 war 3.001,56 Punkte. Ein angesetzter Kurs von rund 4.000 Punkten scheint zumindest kein zu geringes Stress zu sein.

Anders sehen die Ergebnisse mit den aus dem DFA-Modell ermittelten Stressszenarien (vgl. Tabelle 24) aus, die in Tabelle 26 zu sehen sind. Alle Szenarien führen zu einem deutlich negativen Saldo. Die höhere Schadenquote im Stressfall fließt in den Test so ein, dass die Rückstellung um die Differenz der Schadenzahlungen (Schadenzahlung im Stressfall - erwartete Schadenzahlung) erhöht wird.

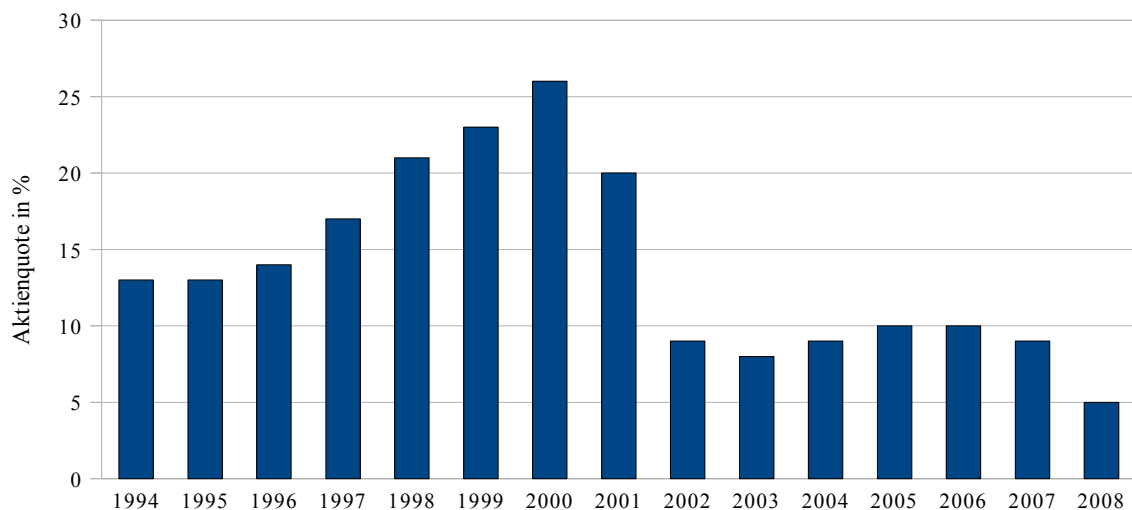
	<b>Szenario 1: Renten -9% Aktien -39% Schaden- quote 123%</b>	<b>Szenario 2: Aktien -35% Schaden- quote 121%</b>	<b>Szenario 3: Schaden- quote 196%</b>	<b>Szenario 4: Renten -9% Schaden- quote 107%</b>
Wert der Kapitalanlagen <u>vor</u> Stresstest	272.950	272.950	272.950	272.950
- Marktwertrückgang Aktien	-41.340	-37.100		
- Marktwertrückgang Renten	-14.310			-14.310
- Marktwertrückgang Immobilien				
- Bonitätsabschlag	-4.778	-4.778	-4.778	-4.778
<b>= Wert der Kapitalanlagen nach Stresstest</b>	212.522	231.072	268.172	253.862
Sonstige Aktiva	0	0	0	0
<b>= Wert der Aktiva nach Stresstest</b> (1)	212.522	231.072	268.172	253.862
Summe der mindestens zu bedeckenden Verpflichtungen des VU (alle Rückstellungen bis auf die freie RfB und SÜA-Fonds)	265.500	261.500	411.500	233.500
+ Sonstige Passiva	0	0	0	0
<b>= Summe Passiva Ver<sub>R<sub>0,j</sub></sub></b> (ohne Eigenmittel und passivseitige Puffer) (2)	265.500	261.500	411.500	233.500
<b>Solvabilitätsanforderung</b> (3)	40.309	40.309	40.309	40.309
<b>Abgeschlossene Absicherungsmaßnahmen (vor dem 31.12.)</b> (4)	0	0	0	0
<b>Saldo (1)-(2)-(3)+(4)</b>	<b>-93.287</b>	<b>-70.737</b>	<b>-183.637</b>	<b>-19.947</b>
in % von (2) + (3) als aufsichtsrechtliche Mindestanforderung	<b>-30,5%</b>	<b>-23,4%</b>	<b>-40,6%</b>	<b>-7,3%</b>

**Tabelle 26:** Stresstest für die Schaden- und Unfallversicherung zum 31.12.2009 nach dem „modifizierten“ Stresstestmodell der BaFin (vgl. [BaFin (2002/2008)]) mit den Szenarien aus dem DFA-Modell (vgl. Tabelle 24)

Ein Nichtbestehen des BaFin-Stresstests heißt nicht, dass konkret die Ansprüche der Versicherungsnehmer gefährdet sind. Es ist zunächst einmal nur ein Signal für die verminderte Risikotragfähigkeit des Versicherungsunternehmens. Bei dem Stresstest handelt es sich demzufolge lediglich um ein Frühwarnsystem, welches das Versicherungsunternehmen veranlassen soll, frühzeitig Maßnahmen zur Steigerung der Risikotragfähigkeit zu ergreifen. Theoretisch kommen bei Nichtbestehen zum Beispiel folgende Gegenmaßnahmen infrage:

- Aktivseite:
  - Umschichtung von Kapitalanlagen und
  - Absicherung gegen Kursschwankungen.
- Passivseite:
  - Höhere Rückdeckung und
  - Zuführung zum Eigenkapital.

Festzustellen ist, dass der Anteil, den deutsche Versicherer in Aktien anlegen, sinkt (siehe Abbildung 20).



Die Aktienquote beschreibt das Verhältnis zwischen Aktien und dem gebundenen Vermögen, welches als Summe aus Sicherheitsvermögen (§ 66 VAG) und sonstigem gebundenem Vermögen (§ 54 (5) VAG) definiert ist.

**Abbildung 20:** Aktienquote der deutschen Versicherungsunternehmen

(vgl. [BaFin (1994-2008)] und Geschäftsberichte der Versicherungsunternehmen)



## 5 Schlussfolgerung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit bestand darin, Ergebnisse der Dynamischen Finanzanalyse im Rahmen des Stress Testing zu untersuchen, um daraus einen Stresstest zu entwickeln. Zu diesem Zweck wurden ausgewählte schlechte Szenarien betrachtet, die sich im Zusammenhang mit der Modellierung der Abhängigkeitsstruktur anhand verschiedener Copulas ergeben. Berücksichtigt wird dadurch, dass es Korrelationen innerhalb der Assets, innerhalb der Liabilities sowie zwischen Assets und Liabilities im Stressfall gibt. Das Simulationsbeispiel beschränkt sich auf acht unterschiedliche Implementierungen der Abhängigkeitsbeziehungen.

Die Berücksichtigung von Abhängigkeiten im Modell der Dynamischen Finanzanalyse führt zu geringen Veränderungen des erwarteten Gewinnes, jedoch zu deutlichen Veränderungen bei den Downside-Risikomaßen Ruinwahrscheinlichkeit, Expected Policyholder Deficit, Value at Risk und Tail Value at Risk. Die höchsten Risiken entstehen mit Copulas mit unterer Tail-Abhängigkeit wie z.B. der Clayton- oder der t-Copula. Einfache Risikoreduktionsstrategien zeigen nur geringe Auswirkungen auf das Risiko bei Betrachtung nicht-linearer Abhängigkeiten. Die Ruinwahrscheinlichkeit und der Value at Risk können durch eine Rückversicherungsstrategie begrenzt werden, aber nicht das Expected Policyholder Deficit und der Tail Value at Risk. Demzufolge ist insbesondere unter Gesichtspunkten des Risikomanagements die Modellierung von Abhängigkeitsbeziehungen sehr relevant.

Zudem kann das Risiko durch die Art der Abbildung von Prämienzyklen beeinflusst werden.

An dieser Stelle, besonders im Hinblick auf die Risikomessung unter Solvency II, kann das Schätzrisiko auch von großer Bedeutung sein. Sowohl zwischen den einzelnen Risikomaßen als auch zwischen den verschiedenen Copula-Modellen unterscheidet sich der Variationskoeffizient deutlich. Der (Tail) Value at Risk ist wesentlich robuster als die Ruinwahrscheinlichkeit, die wiederum wesentlich robuster als das Expected Policyholder Deficit ist.

Darüber hinaus zeigt die Analyse der kritischen Szenarien, dass nichtlineare Abhängigkeiten und die Größe der betrachteten Grundgesamtheit einen starken Einfluss auf die Ausprägung und die Zusammensetzung der Risikoquellen haben. Während Copulas mit unterer Tail-Abhängigkeit wie z.B. die Clayton- oder die t-Copula deutlich stärkere Indikationen im Stressfall liefern, ergibt sich pro Fallgruppe eine deutliche Abschwächung der Stressszenarien innerhalb einer Abhängigkeitsstruktur sowie eine deutliche Angleichung der Stressszenarien unterschiedlicher Abhängigkeitsstrukturen bei zunehmender Anzahl der betrachteten Szenarien.

Die Schlussfolgerungen aus den Ergebnissen sind vielschichtig:

Ganz direkt ist die Arbeit der Stabsabteilung betroffen. Dafür wird hier ein wirkungsvoller Ansatz zur systematischen Entwicklung und Analyse von Stressszenarien vorgestellt, die dann für Risikoanalysen verwendet werden können. Die vorliegende Arbeit zeigt, wie unternehmensindividuelle Stressszenarien, angepasst an das aktuelle wirtschaftliche Umfeld, bestimmt werden können und wie diese extrem kritischen Szenarien aussehen können. Z.B. kann es gleichzeitig eine sehr ungünstige Entwicklung der Schäden und eine sehr ungünstige Kapitalmarktentwicklung geben. Diese Szenarien werden bislang nicht ausreichend berücksichtigt. Selbst einfache, weniger aufwändig umzusetzende Ansätze wie der Stresstest der BaFin werden häufig nur wenig beachtet und angewendet. Dabei zeigt die aktuelle Finanzkrise, dass die Analyse von Extremereignissen, die Auswirkungen auf beide Bilanzseiten haben können, im Kontext des Asset Liability Managements unentbehrlich ist.

Aber auch indirekt und auf einer ganz anderen Ebene kann man Grundsätze für unternehmerisches Verhalten ableiten. Das erschöpft sich keineswegs in der Erkenntnis über das erforderliche Eigenkapital zum Betrieb eines risikobehafteten Unternehmens oder die ganz einfache Meidstrategie, die Aktienquote zu senken, damit formal alles in Ordnung ist. Man könnte daraus z.B. auch Kriterien zur Strategie des Managements und der Belohnung herausarbeiten.

---

Wenn man beispielsweise ein Management im Falle der Realisierung guter Szenarien hoch belohnen will, muss man mögliche negative Folgen bedenken: Ein spieltheoretisch vorgehendes Management wird seine Arbeit so ausrichten, dass der erwartete Gewinn, also das Produkt aus Gewinn und dessen Wahrscheinlichkeit, möglichst hoch wird. Eine solche Strategie erhöht die Varianz der Geschäftsergebnisse und damit auch die Wahrscheinlichkeit hoher Verluste. Man muss für die Belohnung des Managements diesen Effekt wieder herausrechnen. Dieses Herausrechnen setzt voraus, in einem Modell nachzuweisen, dass der erhöhte Gewinn nicht mit vermehrten Stressszenarien verbunden war.

## Anhang: Stressszenarien bei Betrachtung unterschiedlicher Grundgesamtheit

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 100)	25	15	20	0	9	31
U	-46,33	-49,97	-65,38		-59,89	-50,24
I	-35,98	-27,62	6,02		-15,43	-21,85
E	-82,30	-77,58	-59,36		-75,31	-72,09
LR	112,55%	114,28%	121,89%		118,79%	114,57%
ER	10,67%	10,76%	11,27%		10,99%	10,85%
r <sub>1</sub>	-28,98%	-36,86%	-0,74%		-21,13%	-20,81%
r <sub>2</sub>	-3,91%	6,74%	5,34%		3,80%	-0,91%
r <sub>p</sub>	-13,93%	-10,70%	2,91%		-6,18%	-8,87%

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 500)	70	68	161	1	38	162
U	-30,24	-31,65	-44,71	-34,55	-37,32	-32,86
I	-31,39	-20,29	5,71	-4,21	-11,06	-16,13
E	-61,63	-51,93	-38,99	-38,76	-48,38	-49,00
LR	105,47%	106,38%	113,42%	107,91%	109,37%	107,08%
ER	10,43%	10,54%	10,98%	10,60%	10,73%	10,59%
r <sub>1</sub>	-27,70%	-33,06%	0,78%	15,87%	-21,10%	-18,36%
r <sub>2</sub>	-4,19%	6,60%	4,43%	-13,87%	5,30%	-0,16%
r <sub>p</sub>	-13,59%	-9,27%	2,97%	-1,97%	-5,26%	-7,44%

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 1.771)	140	168	719	3	146	595
U	-25,33	-26,35	-38,38	-21,90	-28,94	-25,15
I	-29,14	-18,69	7,24	-3,78	-9,27	-12,97
E	-54,46	-45,04	-31,13	-25,68	-38,21	-38,12
LR	103,14%	103,81%	110,43%	101,51%	105,25%	103,29%
ER	10,37%	10,48%	10,93%	10,50%	10,61%	10,51%
r <sub>1</sub>	-26,89%	-32,03%	3,20%	10,18%	-20,73%	-16,03%
r <sub>2</sub>	-4,03%	6,48%	4,43%	-10,06%	6,02%	0,15%
r <sub>p</sub>	-13,17%	-8,92%	3,94%	-1,96%	-4,68%	-6,32%

Anz.: Anzahl, U: Versicherungstechnisches Ergebnis in Mio. €, I: Kapitalanlageergebnis in Mio. €, E: Gewinn in Mio. €, LR: Schadenquote, ER: Kostenquote, r<sub>1</sub>: Rendite der riskanten Kapitalanlagen, r<sub>2</sub>: Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen, r<sub>p</sub>: Portfoliorendite

**Tabelle 27:** Stressszenarien mit Annahme der Unkorreliertheit

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 100)	68	0	4	0	3	25
U	-46,99		-85,25		-71,93	-58,47
I	-44,58		-2,57		-16,64	-31,06
E	-91,57		-87,82		-88,57	-89,52
LR	113,52%		132,29%		125,75%	119,15%
ER	10,68%		11,61%		11,29%	10,96%
r <sub>1</sub>	-34,44%		-0,20%		-21,84%	-29,28%
r <sub>2</sub>	-5,92%		-1,53%		3,78%	-0,60%
r <sub>p</sub>	-17,33%		-1,00%		-6,47%	-12,07%

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 500)	264	30	32	0	16	158
U	-38,95	-43,27	-67,06		-54,53	-48,20
I	-39,31	-22,28	-0,05		-12,92	-23,45
E	-78,26	-65,56	-67,11		-67,45	-71,66
LR	109,70%	112,11%	124,60%		117,77%	114,44%
ER	10,54%	10,76%	11,46%		11,04%	10,83%
r <sub>1</sub>	-31,79%	-32,68%	-2,97%		-21,71%	-22,54%
r <sub>2</sub>	-5,30%	5,31%	2,10%		4,94%	-1,43%
r <sub>p</sub>	-15,90%	-9,88%	0,07%		-5,72%	-9,88%

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 2.500)	679	131	531	1	124	1.034
U	-31,15	-30,90	-39,12	-19,86	-33,27	-31,75
I	-34,40	-20,03	4,94	-3,86	-10,57	-15,69
E	-65,55	-50,93	-34,18	-23,71	-43,84	-47,44
LR	105,95%	106,04%	110,61%	100,41%	107,30%	106,49%
ER	10,44%	10,54%	10,86%	10,22%	10,63%	10,57%
r <sub>1</sub>	-29,41%	-31,47%	2,12%	6,72%	-20,79%	-16,94%
r <sub>2</sub>	-5,02%	5,22%	3,03%	-7,71%	5,34%	-0,95%
r <sub>p</sub>	-14,77%	-9,46%	2,66%	-1,93%	-5,11%	-7,35%

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 5.810)	1.186	279	1.719	6	316	2.304
U	-27,42	-25,69	-35,67	-17,27	-27,21	-27,19
I	-32,04	-19,03	6,05	-3,96	-10,30	-13,93
E	-59,46	-44,72	-29,62	-21,24	-37,51	-41,12
LR	104,17%	103,44%	108,97%	99,42%	104,29%	104,27%
ER	10,40%	10,44%	10,84%	10,46%	10,52%	10,51%
r <sub>1</sub>	-28,26%	-31,35%	2,88%	7,30%	-20,76%	-15,88%
r <sub>2</sub>	-4,89%	5,63%	3,59%	-8,54%	5,25%	-0,66%
r <sub>p</sub>	-14,24%	-9,16%	3,30%	-2,21%	-5,16%	-6,75%

Anz.: Anzahl, U: Versicherungstechnisches Ergebnis in Mio. €, I: Kapitalanlageergebnis in Mio. €, E: Gewinn in Mio. €, LR: Schadenquote, ER: Kostenquote, r<sub>1</sub>: Rendite der riskanten Kapitalanlagen, r<sub>2</sub>: Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen, r<sub>p</sub>: Portfoliorendite

**Tabelle 28:** Stressszenarien mit der Gauss-Copula

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 100)	95	1	0	0	0	4
U	-59,99	-91,06				-71,22
I	-57,22	-40,61				-41,73
E	-117,21	-131,67				-112,95
LR	119,90%	135,14%				125,41%
ER	11,00%	11,76%				11,27%
r <sub>1</sub>	-41,19%	-46,87%				-39,31%
r <sub>2</sub>	-9,60%	4,94%				-0,83%
r <sub>p</sub>	-22,24%	-15,79%				-16,22%

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 500)	425	20	2	0	0	53
U	-47,54	-58,72	-83,82			-55,29
I	-48,96	-31,60	-7,12			-34,05
E	-96,50	-90,32	-90,94			-89,34
LR	113,80%	119,28%	131,59%			117,59%
ER	10,69%	10,96%	11,58%			10,88%
r <sub>1</sub>	-35,86%	-39,63%	-31,34%			-30,16%
r <sub>2</sub>	-7,81%	5,95%	16,28%			-1,95%
r <sub>p</sub>	-19,03%	-12,28%	-2,77%			-13,24%

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 2.500)	1.334	148	261	1	78	678
U	-40,27	-45,64	-33,29	-68,45	-28,64	-33,42
I	-42,80	-23,16	5,06	-9,29	-10,71	-19,20
E	-83,08	-68,81	-28,23	-77,74	-39,35	-52,62
LR	110,32%	113,12%	107,51%	124,05%	104,96%	107,20%
ER	10,56%	10,77%	10,69%	11,20%	10,50%	10,55%
r <sub>1</sub>	-32,51%	-35,27%	1,25%	6,59%	-20,70%	-19,28%
r <sub>2</sub>	-6,67%	7,51%	3,76%	-10,41%	5,07%	-1,21%
r <sub>p</sub>	-17,01%	-9,60%	2,76%	-3,61%	-5,24%	-8,44%

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 6.980)	2.495	380	645	17	294	3.149
U	-38,19	-38,95	-27,74	-46,51	-28,04	-29,40
I	-39,92	-19,95	-2,28	5,14	-9,70	-7,80
E	-78,11	-58,90	-30,02	-41,37	-37,74	-37,20
LR	109,46%	110,02%	104,77%	114,11%	104,82%	105,51%
ER	10,58%	10,69%	10,59%	10,98%	10,57%	10,61%
r <sub>1</sub>	-31,34%	-33,12%	-6,69%	20,36%	-20,94%	-9,77%
r <sub>2</sub>	-6,33%	7,34%	2,49%	-8,99%	5,79%	0,73%
r <sub>p</sub>	-16,33%	-8,85%	-1,18%	2,75%	-4,90%	-3,47%

Anz.: Anzahl, U: Versicherungstechnisches Ergebnis in Mio. €, I: Kapitalanlageergebnis in Mio. €, E: Gewinn in Mio. €, LR: Schadenquote, ER: Kostenquote, r<sub>1</sub>: Rendite der riskanten Kapitalanlagen, r<sub>2</sub>: Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen, r<sub>p</sub>: Portfoliorendite

**Tabelle 29:** Stressszenarien mit der t-Copula

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 100)	40	6	14	0	3	37
U	-47,01	-54,04	-130,43		-62,56	-57,86
I	-41,84	-27,41	12,70		-16,22	-27,92
E	-88,85	-81,45	-117,73		-78,77	-85,78
LR	113,54%	116,98%	154,45%		121,16%	118,86%
ER	10,68%	10,85%	12,72%		11,06%	10,94%
r <sub>1</sub>	-32,50%	-34,83%	9,30%		-20,51%	-26,69%
r <sub>2</sub>	-5,44%	5,46%	2,03%		3,17%	-0,29%
r <sub>p</sub>	-16,26%	-10,66%	4,94%		-6,30%	-10,85%

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 500)	135	39	87	0	34	205
U	-38,72	-36,79	-70,50		-38,31	-41,14
I	-35,06	-20,72	5,86		-11,03	-19,03
E	-73,78	-57,52	-64,64		-49,34	-60,16
LR	109,66%	108,84%	125,76%		109,81%	111,07%
ER	10,58%	10,62%	11,48%		10,73%	10,73%
r <sub>1</sub>	-28,58%	-32,38%	0,97%		-21,16%	-20,33%
r <sub>2</sub>	-5,10%	5,84%	3,77%		5,36%	-0,47%
r <sub>p</sub>	-14,49%	-9,45%	2,65%		-5,25%	-8,41%

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 2.500)	402	185	728	2	166	1.017
U	-30,30	-28,82	-42,89	-34,36	-28,29	-29,14
I	-30,88	-19,24	6,04	-4,13	-10,24	-14,24
E	-61,18	-48,06	-36,85	-38,48	-38,53	-43,37
LR	105,65%	105,04%	112,47%	108,40%	104,87%	105,22%
ER	10,47%	10,52%	10,96%	10,86%	10,55%	10,54%
r <sub>1</sub>	-27,25%	-31,50%	2,10%	9,63%	-20,76%	-16,22%
r <sub>2</sub>	-4,71%	5,70%	3,87%	-10,23%	5,36%	-0,53%
r <sub>p</sub>	-13,72%	-9,18%	3,17%	-2,28%	-5,09%	-6,81%

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 4.375)	604	310	1.124	7	304	2.026
U	-28,94	-25,52	-40,11	-9,38	-23,79	-19,48
I	-32,30	-22,12	6,26	-14,05	-14,30	-18,28
E	-55,10	-43,51	-33,84	-35,30	-36,42	-38,58
LR	103,98%	103,70%	111,13%	102,33%	103,94%	104,48%
ER	10,42%	10,48%	10,93%	10,58%	10,54%	10,55%
r <sub>1</sub>	-26,91%	-31,31%	2,49%	11,38%	-20,73%	-12,12%
r <sub>2</sub>	-4,60%	5,62%	3,92%	-8,81%	5,56%	0,20%
r <sub>p</sub>	-13,53%	-9,16%	3,35%	-0,74%	-4,96%	-4,73%

Anz.: Anzahl, U: Versicherungstechnisches Ergebnis in Mio. €, I: Kapitalanlageergebnis in Mio. €, E: Gewinn in Mio. €, LR: Schadenquote, ER: Kostenquote, r<sub>1</sub>: Rendite der riskanten Kapitalanlagen, r<sub>2</sub>: Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen, r<sub>p</sub>: Portfoliorendite

**Tabelle 30:** Stressszenarien mit der Gumbel-Copula

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 100)	96	0	4	0	0	0
U	-75,76		-185,81			
I	-62,44		23,21			
E	-138,21		-162,60			
LR	127,64%		181,61%			
ER	11,38%		14,08%			
r <sub>1</sub>	-42,74%		12,56%			
r <sub>2</sub>	-11,96%		6,66%			
r <sub>p</sub>	-24,27%		9,02%			

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 500)	493	0	4	0	0	3
U	-55,96		-185,81			-66,89
I	-52,91		23,21			-29,69
E	-108,86		-162,60			-96,58
LR	117,92%		181,61%			123,29%
ER	10,90%		14,08%			11,16%
r <sub>1</sub>	-37,71%		12,56%			-27,37%
r <sub>2</sub>	-9,13%		6,66%			-0,98%
r <sub>p</sub>	-20,56%		9,02%			-11,54%

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 2.500)	2.068	19	97	0	27	289
U	-44,51	-24,96	-48,86		-33,29	-37,02
I	-45,16	-15,74	5,86		-11,34	-16,97
E	-89,66	-40,70	-43,00		-44,63	-53,98
LR	112,40%	103,03%	115,39%		107,37%	109,13%
ER	10,65%	10,40%	11,06%		10,66%	10,68%
r <sub>1</sub>	-33,56%	-29,09%	2,02%		-20,89%	-17,90%
r <sub>2</sub>	-7,41%	6,16%	3,71%		4,39%	-1,21%
r <sub>p</sub>	-17,87%	-7,94%	3,03%		-5,72%	-7,88%

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 9.404)	4.763	146	1.741	1	230	2.523
U	-40,64	-20,78	-33,65	-22,02	-23,43	-26,31
I	-41,47	-17,22	6,56	-7,56	-9,85	-13,05
E	-82,11	-38,00	-27,09	-29,58	-33,28	-39,37
LR	110,67%	101,01%	107,90%	101,91%	102,44%	103,86%
ER	10,63%	10,38%	10,79%	10,62%	10,45%	10,50%
r <sub>1</sub>	-31,85%	-30,57%	2,93%	7,02%	-20,37%	-14,98%
r <sub>2</sub>	-6,80%	5,88%	4,04%	-11,69%	5,09%	-0,69%
r <sub>p</sub>	-16,82%	-8,70%	3,60%	-4,21%	-5,09%	-6,40%

Anz.: Anzahl, U: Versicherungstechnisches Ergebnis in Mio. €, I: Kapitalanlageergebnis in Mio. €, E: Gewinn in Mio. €, LR: Schadenquote, ER: Kostenquote, r<sub>1</sub>: Rendite der riskanten Kapitalanlagen, r<sub>2</sub>: Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen, r<sub>p</sub>: Portfoliorendite

**Tabelle 31:** Stressszenarien mit der Survival-Gumbel-Copula



Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 100)	95	0	3	0	0	2
U	-65,54		-215,44			-72,94
I	-53,42		3,95			-38,08
E	-118,95		-211,49			-111,02
LR	122,62%		196,14%			126,25%
ER	11,13%		14,81%			11,31%
r <sub>1</sub>	-38,78%		-0,13%			-38,89%
r <sub>2</sub>	-8,75%		2,64%			1,26%
r <sub>p</sub>	-20,76%		1,53%			-14,80%

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 500)	452	6	3	0	0	39
U	-50,46	-63,90	-215,44			-63,09
I	-48,47	-29,85	3,95			-29,36
E	-98,93	-93,75	-211,49			-92,45
LR	115,23%	121,82%	196,14%			121,42%
ER	10,76%	11,09%	14,81%			11,07%
r <sub>1</sub>	-35,41%	-34,86%	-0,13%			-26,74%
r <sub>2</sub>	-7,79%	3,91%	2,64%			-1,20%
r <sub>p</sub>	-18,84%	-11,60%	1,53%			-11,41%

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 2.500)	1.685	69	179	0	53	514
U	-40,47	-42,08	-48,23		-39,79	-40,65
I	-43,15	-21,84	3,19		-10,79	-19,08
E	-83,62	-63,92	-45,04		-50,59	-59,73
LR	110,42%	111,41%	115,01%		110,64%	110,78%
ER	10,57%	10,70%	11,05%		10,77%	10,70%
r <sub>1</sub>	-32,99%	-31,48%	-0,66%		-20,88%	-19,09%
r <sub>2</sub>	-6,82%	5,29%	3,32%		5,14%	-1,20%
r <sub>p</sub>	-17,29%	-9,42%	1,73%		-5,27%	-8,36%

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 9.371)	3.887	237	1.921	2	370	2.954
U	-36,20	-32,25	-34,45	-35,17	-28,27	-29,13
I	-39,29	-18,78	5,64	-6,31	-10,21	-14,26
E	-75,49	-51,03	-28,81	-41,47	-38,48	-43,39
LR	108,48%	106,73%	108,28%	107,96%	104,89%	105,23%
ER	10,55%	10,58%	10,80%	10,57%	10,56%	10,54%
r <sub>1</sub>	-31,33%	-30,52%	2,09%	6,45%	-20,66%	-15,90%
r <sub>2</sub>	-6,33%	5,73%	3,78%	-9,14%	5,24%	-0,75%
r <sub>p</sub>	-16,33%	-8,77%	3,11%	-2,90%	-5,12%	-6,81%

Anz.: Anzahl, U: Versicherungstechnisches Ergebnis in Mio. €, I: Kapitalanlageergebnis in Mio. €, E: Gewinn in Mio. €, LR: Schadenquote, ER: Kostenquote, r<sub>1</sub>: Rendite der riskanten Kapitalanlagen, r<sub>2</sub>: Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen, r<sub>p</sub>: Portfoliorendite

**Tabelle 32:** Stressszenarien mit der Clayton-Copula

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 100)	37	14	12	0	4	33
U	-41,75	-50,65	-203,96		-60,94	-49,71
I	-37,44	-27,41	22,74		-16,46	-28,75
E	-79,19	-78,06	-181,22		-77,40	-78,46
LR	110,96%	115,32%	190,52%		120,37%	114,86%
ER	10,55%	10,77%	14,53%		11,02%	10,74%
r <sub>1</sub>	-29,36%	-33,74%	13,78%		-22,51%	-27,16%
r <sub>2</sub>	-4,68%	4,73%	5,54%		4,34%	-0,52%
r <sub>p</sub>	-14,55%	-10,65%	8,84%		-6,40%	-11,17%

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 500)	103	50	123	0	32	192
U	-32,47	-34,92	-79,12		-37,59	-35,82
I	-31,23	-22,71	7,91		-11,47	-17,32
E	-63,70	-57,63	-71,21		-49,06	-53,14
LR	106,58%	107,84%	130,10%		109,37%	108,51%
ER	10,45%	10,56%	11,74%		10,69%	10,64%
r <sub>1</sub>	-27,44%	-32,57%	4,90%		-21,58%	-19,10%
r <sub>2</sub>	-4,34%	4,79%	2,59%		5,36%	-0,29%
r <sub>p</sub>	-13,58%	-10,15%	3,51%		-5,42%	-7,82%

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 2.500)	315	202	835	5	177	966
U	-25,69	-24,77	-47,20	-21,27	-29,62	-27,92
I	-28,66	-19,93	6,34	-3,88	-10,23	-13,91
E	-54,35	-44,69	-40,85	-25,15	-39,85	-41,82
LR	103,36%	102,95%	114,59%	101,45%	105,57%	104,69%
ER	10,38%	10,41%	11,08%	10,51%	10,59%	10,55%
r <sub>1</sub>	-26,51%	-32,33%	2,96%	7,82%	-20,87%	-16,54%
r <sub>2</sub>	-4,26%	5,54%	3,41%	-8,61%	5,48%	-0,22%
r <sub>p</sub>	-13,16%	-9,61%	3,23%	-2,04%	-5,06%	-6,75%

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 3.877)	390	292	1.426	7	287	1.475
U	-24,42	-23,01	-43,80	-24,24	-26,73	-25,97
I	-27,85	-19,33	6,70	-4,23	-10,18	-13,15
E	-52,27	-42,34	-37,10	-28,48	-36,91	-39,12
LR	102,75%	102,09%	113,00%	103,00%	104,11%	103,71%
ER	10,38%	10,41%	11,03%	10,59%	10,54%	10,52%
r <sub>1</sub>	-26,05%	-32,12%	3,45%	8,38%	-20,89%	-15,91%
r <sub>2</sub>	-4,21%	5,62%	3,55%	-9,18%	5,43%	-0,17%
r <sub>p</sub>	-12,95%	-9,47%	3,51%	-2,16%	-5,10%	-6,47%

Anz.: Anzahl, U: Versicherungstechnisches Ergebnis in Mio. €, I: Kapitalanlageergebnis in Mio. €, E: Gewinn in Mio. €, LR: Schadenquote, ER: Kostenquote, r<sub>1</sub>: Rendite der riskanten Kapitalanlagen, r<sub>2</sub>: Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen, r<sub>p</sub>: Portfoliorendite

**Tabelle 33:** Stressszenarien mit der Survival-Clayton-Copula

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 100)	28	7	15	0	4	46
U	-44,48	-50,35	-129,99		-60,65	-56,47
I	-38,95	-29,10	10,90		-17,32	-27,29
E	-83,43	-79,46	-119,09		-77,97	-83,76
LR	112,29%	115,17%	154,23%		120,22%	118,17%
ER	10,61%	10,76%	12,71%		11,01%	10,91%
r <sub>1</sub>	-29,73%	-35,90%	5,95%		-21,45%	-26,04%
r <sub>2</sub>	-5,41%	5,08%	3,09%		3,08%	-0,32%
r <sub>p</sub>	-15,14%	-11,31%	4,24%		-6,73%	-10,61%

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 500)	107	40	95	0	35	223
U	-34,98	-35,39	-67,82		-37,37	-39,94
I	-33,58	-21,00	5,84		-11,15	-18,01
E	-68,57	-56,38	-61,99		-48,51	-57,95
LR	107,86%	108,14%	124,49%		109,38%	110,50%
ER	10,51%	10,58%	11,43%		10,72%	10,72%
r <sub>1</sub>	-28,42%	-32,29%	0,66%		-20,93%	-19,38%
r <sub>2</sub>	-4,68%	5,57%	4,03%		5,02%	-0,53%
r <sub>p</sub>	-14,18%	-9,58%	2,69%		-5,36%	-8,07%

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 2.500)	348	179	716	2	166	1.089
U	-27,64	-28,32	-42,49	-32,95	-28,06	-28,52
I	-29,07	-19,56	5,77	-4,24	-10,19	-14,17
E	-56,71	-47,88	-36,72	-37,19	-38,25	-42,69
LR	104,36%	104,79%	112,26%	107,65%	104,77%	104,91%
ER	10,43%	10,51%	10,94%	10,82%	10,54%	10,52%
r <sub>1</sub>	-26,39%	-31,66%	1,59%	9,63%	-20,49%	-16,08%
r <sub>2</sub>	-4,42%	5,56%	3,96%	-10,33%	5,17%	-0,63%
r <sub>p</sub>	-13,21%	-9,33%	3,01%	-2,34%	-5,09%	-6,81%

Fall	1	2	3	4	5	6
Anz. Szenarien (gesamt: 4.612)	552	313	1.498	4	301	1.944
U	-24,24	-25,83	-37,94	-19,74	-26,56	-25,87
I	-28,16	-18,90	6,03	-3,60	-9,98	-12,95
E	-52,40	-44,73	-31,91	-23,34	-36,54	-38,82
LR	102,67%	103,56%	110,04%	100,62%	104,05%	103,63%
ER	10,38%	10,47%	10,88%	10,42%	10,54%	10,50%
r <sub>1</sub>	-26,14%	-31,40%	2,44%	9,01%	-20,61%	-15,21%
r <sub>2</sub>	-4,32%	5,62%	3,77%	-9,36%	5,36%	-0,48%
r <sub>p</sub>	-13,05%	-9,19%	3,24%	-2,02%	-5,03%	-6,37%

Anz.: Anzahl, U: Versicherungstechnisches Ergebnis in Mio. €, I: Kapitalanlageergebnis in Mio. €, E: Gewinn in Mio. €, LR: Schadenquote, ER: Kostenquote, r<sub>1</sub>: Rendite der riskanten Kapitalanlagen, r<sub>2</sub>: Rendite der risikoarmen Kapitalanlagen, r<sub>p</sub>: Portfoliorendite

**Tabelle 34:** Stressszenarien mit der Frank-Copula

## Literaturverzeichnis

- Achleitner, P. M., Biebel, J., Wichels, D., Does WTC Matter for the Investment Policy of P/C Insurance Companies?, *The Geneva Papers on Risk & Insurance*, 27 (2), S. 275-282, 2002
- Albrecht, P., *Grundprinzipien der Finanz- und Versicherungsmathematik*, 2007, Schäffer-Poeschel Verlag Stuttgart
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D., Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance*, Vol. 9, No. 3, S. 203-228, 1999
- Ausschuss HUK der Deutschen Aktuarvereinigung (DAV), Hinweis "Prüfung der Anlagerisiken und der Rechnungsgrundlage Zins durch den HUK-Aktuar", 2005, [www.aktuar.de](http://www.aktuar.de)
- Ausschuss Lebensversicherung der Deutschen Aktuarvereinigung (DAV), Richtlinie "Überprüfung der Finanzlage durch den Verantwortlichen Aktuar", 2006, [www.aktuar.de](http://www.aktuar.de)
- Ausschuss Lebensversicherung und Ausschuss Altersversorgung der Deutschen Aktuarvereinigung (DAV), Hinweis "Einschätzung der Anlagerisiken im Erläuterungsbericht des Verantwortlichen Aktuars", 2004, [www.aktuar.de](http://www.aktuar.de)
- Blum, P., Dacorogna, M., Embrechts, P., Neghaiwi, T., Niggli, H., Using DFA for Modelling the Impact of Foreign Exchange Risks on Reinsurance Decisions, *Casualty Actuarial Society Forum*, Summer, S. 49-93, 2001
- Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht, Rundschreiben 30/2002 (VA), 2002, [www.bafin.de](http://www.bafin.de)
- Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht, Stresstestmodell für die Schaden- und Unfallversicherung, Nw 687, Version 5, Typ 3, 2002/2008, [www.bafin.de](http://www.bafin.de)
- Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht, Rundschreiben 1/2004 (VA) über die Durchführung von Stresstests, 2004, [www.bafin.de](http://www.bafin.de)
- Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht, Ergänzung der Parameter für das Jahr 2009 zur Durchführung des BaFin-Stresstests (Rundschreiben 1/2004), Verlautbarung zum Rundschreiben 1/2004 (VA) Teil A, 2008, [www.bafin.de](http://www.bafin.de)
- Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht, Bekanntmachungen: Ergänzung der Parameter zur Durchführung des BaFin-Stresstests, Verlautbarung zum Rundschreiben 1/2004 (VA) Teil A, *BaFinJournal*, Januar, S. 19, 2008
- Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht, Rundschreiben 3/2009, Aufsichtsrechtliche Mindestanforderungen an das Risikomanagement (MaRisk VA), 2009, [www.bafin.de](http://www.bafin.de)
- Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (Bundesaufsichtsamt für das Kreditwesen / Bundesaufsichtsamt für den Wertpapierhandel / Bundesaufsichtsamt für das

- Versicherungswesen), Jahresbericht der BaFin (BAKred / BAWe / BAV), 1994-2008, [www.bafin.de](http://www.bafin.de)
- Bundesministerium der Justiz, Verordnung über die Kapitalausstattung von Versicherungsunternehmen (KapAusstV), Bundesgesetzblatt I, Fassung der Bekanntmachung vom 13.12.1983, S. 1451, 1983
- Cairns, A. J., A discussion of parameter and model uncertainty in insurance, *Insurance: Mathematics and Economics*, 27, S. 313-330, 2000
- Casualty Actuarial Society, DFA Handbook, 1999, [www.casact.org](http://www.casact.org)
- Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors, QIS4 Technical Specifications (MARKT/2505/08), 2008, [www.ceiops.eu](http://www.ceiops.eu)
- Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors, Consultation Paper No. 49 - Draft CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: Standard formula SCR, Article 109 c, Life underwriting risk, 2009, [www.ceiops.eu](http://www.ceiops.eu)
- Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors, Consultation Paper No. 71 - Draft CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: SCR Standard Formula, Calibration of non-life underwriting risk, 2009, [www.ceiops.eu](http://www.ceiops.eu)
- Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors, CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: SCR standard formula, Article 111, Non-Life Underwriting Risk (former Consultation Paper 48), 2009, [www.ceiops.eu](http://www.ceiops.eu)
- Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors, Consultation Paper No. 70 - Draft CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: SCR Standard Formula, Article 109 b, Calibration of Market Risk Module, 2009, [www.ceiops.eu](http://www.ceiops.eu)
- Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors, CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: SCR Standard Formula, Article 109, Structure and Design of Market Risk Module (former Consultation Paper 47), 2009, [www.ceiops.eu](http://www.ceiops.eu)
- Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors, Consultation Paper No. 69 - Draft CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: Article 109 b, Equity risk sub-module, 2009, [www.ceiops.eu](http://www.ceiops.eu)
- Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors, CEIOPS Members will run EU-wide stress test in the insurance sector in December 2009, Press Release, 30.10.2009, S. 1-2, 2009
- Cummins, J. D., Outreville, J. F., An international analysis of underwriting cycles in property-liability insurance, *Journal of Risk and Insurance*, 54 (2), S. 246-62, 1987
- D'Arcy, S. P., Gorvett, R. W., Hettinger, T. E., Walling, R. J., Using the Public Access DFA

- Model: A Case Study, Casualty Actuarial Society Forum, Dynamic Financial Analysis, S. 55-118, 1998
- Deutsches Rechnungslegungs Standards Committee, Bekanntmachung des Deutschen Rechnungslegungsstandards Nr. 5-20 (DRS 5-20) – Risikoberichterstattung von Versicherungsunternehmen, Bundesanzeiger, Nr. 98b, 29. Mai 2001, 2001
- Diers, D., Das Parameterrisiko - Ein häufig vernachlässigtes Risiko in Internen Modellen von Schaden- und Unfallversicherern, Preprint Series: 2007-19, Arbeitspapier, S. 1-12, 2007
- Diers, D., Interne Unternehmensmodelle in der Schaden- und Unfallversicherung - Entwicklung eines stochastischen internen Modells für die wert- und risikoorientierte Unternehmenssteuerung und für die Anwendung im Rahmen von Solvency II, 2007, ifa-Verlag
- Diers, D., Der Einsatz mehrjähriger interner Modelle zur Unterstützung von Managemententscheidungen, Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, Volume 97, Supplement 1 / Dezember 2008, S. 91-112, 2008
- Eling, M., Parnitzke, T., Schmeiser, H., Management Strategies and Dynamic Financial Analysis, Variance, 2 (1), S. 52-70, 2008
- Eling, M., Toplek, D., Modeling and Management of Nonlinear Dependencies - Copulas in Dynamic Financial Analysis, Journal of Risk and Insurance, 76 (3), S. 651-681, 2009
- Embrechts, P., Lindskog, F., McNeil, A., Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management, In: Rachev, S. T. (ed.): Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance, Elsevier, Amsterdam, S. 329-384, 2001
- Embrechts, P., McNeil, A., Straumann, D., Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls, In: Dempster, M. A. H. (ed.): Risk Management: Value at Risk and Beyond, Cambridge University Press, Cambridge, S. 176-223, 2002
- England, P., Verrall, R., Stochastic Claims Reserving in General Insurance, British Actuarial Journal, 8 (III), S. 443-544, 2002
- Europäisches Parlament, Richtlinie des Europäischen Parlaments und des Rates betreffend die Aufnahme und Ausübung der Versicherungs- und der Rückversicherungstätigkeit (Solvabilität II), 2009, [www.europarl.europa.eu](http://www.europarl.europa.eu)
- Financial Services Authority, Press Release, September 11th 2001, FSA/PN/114/200111/09/2001, "Resilience Test for Life Insurance Companies", 2001, [www.fsa.gov.uk](http://www.fsa.gov.uk)
- Financial Services Authority, Press Release, June 28th 2002, FSA/PN/071/2002, "FSA introduces new element to life insurers resilience tests", 2002, [www.fsa.gov.uk](http://www.fsa.gov.uk)
- Financial Services Authority, Guidance Note 4, "Resilience test for insurers", 2002, [www.fsa.gov.uk](http://www.fsa.gov.uk)
- Financial Services Authority, Consultation Paper (CP) 190 "Enhanced Capital

- Requirements and individual capital assessments for non-life insurers", 2003, [www.fsa.gov.uk](http://www.fsa.gov.uk)
- Financial Services Authority, Consultation Paper (CP) 195 "Enhanced Capital Requirements and individual capital assessments for life insurers", 2003, [www.fsa.gov.uk](http://www.fsa.gov.uk)
- Financial Services Authority, Consultation Paper (CP) 08/24 "Stress and scenario testing", 2008, [www.fsa.gov.uk](http://www.fsa.gov.uk)
- Fusai, G., Roncoroni, A., *Implementing Models in Quantitative Finance: Methods and Cases*, 2008, Springer
- Government Actuary's Department, "Dear Appointed Actuary" Letters, DAA1 - Resilience test, 1985, [www.fsa.gov.uk](http://www.fsa.gov.uk)
- Han, J., Kamber, M., *Data Mining: Concepts and Techniques*, 2006, Morgan Kaufmann
- Heilmann, W.-R., *Fundamentals of Risk Theory*, 1988, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe
- Hofert, M., Sampling Archimedean copulas, *Computational Statistics and Data Analysis*, 52 (12), S. 5163-5174, 2008
- Horn, O., Zwiesler, H.-J., Beiträge zu aktuellen Themen des Versicherungsmarktes, Die Problematik der Anwendung von Managementregeln im Risikomanagement, Band 7, S. 79-125, 2008, Schriftenreihe der SCOR Deutschland
- Kaufmann, R., Gadmer, A., Klett, R., Introduction to Dynamic Financial Analysis, *ASTIN Bulletin*, 31(1), S. 213-249, 2001
- Koziol, P., Auswahl von Copulas zur Bewertung von Basketkreditderivaten, *BLÄTTER, Deutsche Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik e.V. (DGVMF)*, Band XXVII, Heft 4, S. 665-680, 2006
- KPMG, European Commission: Study into the methodologies to assess the overall financial position of an insurance undertaking from the perspective of prudential supervision, 2002, [www.ec.europa.eu](http://www.ec.europa.eu)
- Lamm-Tennant, J., Weiss, M. A., International insurance cycles: Rational expectations/institutional intervention, *Journal of Risk and Insurance*, 64 (3), S. 415-439, 1977
- Mack, T., *Schadenversicherungsmathematik*, 2002, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, VVW Karlsruhe, 2. Auflage
- McNeil, A., Sampling nested Archimedean copulas, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 78 (6), S. 567-581, 2008
- Nelson, R. B., *An Introduction to Copulas*, 1999, Springer
- Okhrin, O., Okhrin, Y., Schmid, W., Properties of Hierarchical Archimedean Copulas, 2009, <http://sfb649.wiwi.hu-berlin.de/papers/pdf/SFB649DP2009-014.pdf>

- Ridout, M. S., Generating random numbers from a distribution specified by its Laplace transform, *Statistics and Computing*, 19 (4), S. 439-450, 2009
- Sharpe, W. F., Mutual Fund Performance, *Journal of Business*, 39 (1), S. 119-138, 1966
- Swiss Federal Office of Private Insurance, Schweizer Solvenztest, White Paper of the Swiss Solvency Test, November 2004, S. 1-43, 2004
- Venezian, E. C., Ratemaking methods and profit cycles in property and liability insurance, *Journal of Risk and Insurance*, 52 (3), S. 477-500, 1985
- Wakker, P. P., Thaler, R. H., Tversky, A., Probabilistic Insurance, *Journal of Risk and Uncertainty*, 15 (1), S. 7-28, 1997
- Witten, I. H., Frank, E., *Data Mining: Practical Machine Learning Tools and Techniques*, 2005, Morgan Kaufmann
- Zwiesler, H.-J., Versicherungen im Umbruch - Werte schaffen, Risiken managen, Kunden gewinnen, *Asset-Liability-Management – die Versicherung auf dem Weg von der Planungsrechnung zum Risikomanagement*, Part 4, S. 117-131, 2005, Springer Berlin Heidelberg



### Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre hiermit ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ich bin mir bewusst, dass eine unwahre Erklärung rechtliche Folgen haben wird.

Ulm, den 09.02.2010

---

(Unterschrift)