



UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
INSTITUT DES SCIENCES ACTUARIELLES

FAIR VALUE ET RISQUE DE DÉFAUT EN ASSURANCE VIE

Mémoire présenté en vue de l'obtention du
Diplôme d'Etudes Spécialisées en Sciences Actuarielles par
Corinne Stoffel

Directeur : Professeur Pierre Devolder

Année académique 2005-2006

Avant de commencer, je voudrais remercier toutes les personnes sans lesquelles la rédaction de ce mémoire n'aurait pas été possible.

Tout d'abord, je tiens à remercier de tout coeur mon directeur de mémoire, le professeur Pierre Devolder, pour sa disponibilité et pour le temps qu'il a consacré à ce travail.

Un grand merci également à Carole Bernard, de l'ISFA, pour un échange de mails aussi constructif que sympathique.

Merci aussi à ma famille, mes amis et mes collègues pour leur soutien.

Un merci particulier finalement à Patrick pour sa patience.

Résumé

Dans un cadre de taux d'intérêt stochastiques, ce travail développe un modèle de valorisation de marché des engagements d'une compagnie d'assurance vie à l'égard de ses assurés. Le contrat proposé par la compagnie est un contrat d'assurance de capitalisation à prime unique. La police contient une garantie de taux et une clause de participation aux bénéfices.

Le modèle tient également compte du risque de défaut. Il suppose la présence d'une autorité de contrôle chargée de la surveillance des compagnies d'assurance vie qui a le droit de déclarer une compagnie d'assurance en faillite si une certaine exigence de solvabilité n'est pas rencontrée. En cas de défaut, les actifs récupérés sont distribués aux *stakeholders*.

Sur base de simulations, nous étudions l'impact de plusieurs variables sur la probabilité de défaut de l'assureur et la valeur du contrat. Nous analysons également le taux de participation aux bénéfices caractérisant des contrats initialement justes.

Dans une seconde étape, nous introduisons une composante de mortalité dans le modèle pour étudier une assurance de capital différé sans remboursement. Cette deuxième partie est consacrée à l'étude de l'effet de la mortalité. Nous remarquons que la valeur des contrats d'assurance vie diminue considérablement en fonction de cet élément de mortalité.

Introduction

Les compagnies d'assurance-vie offrent une multitude de contrats contenant des clauses plus ou moins complexes. La garantie d'un taux de rendement minimum, la possibilité d'un remboursement anticipé et les clauses de participation aux bénéfices sont des exemples de telles clauses apparaissant dans des polices standards.

Ces clauses sont souvent appelées options cachées ; en effet, elles se décrivent à l'aide de la théorie des options, mais pendant longtemps elles ont été négligées. Ces éléments d'option, implicites dans de nombreux contrats, sont des engagements des assureurs envers les assurés apparaissant au passif. Chaque convention particulière a donc une valeur et doit être valorisée. Pendant longtemps, ces options ont été négligées ; ceci a participé aux difficultés rencontrées par de nombreuses compagnies dans les années 1990¹.

Au sujet de la garantie de taux d'intérêt, il faut savoir que la plupart des polices contiennent une garantie explicite que le compte du preneur d'assurance sera crédité sur base annuelle avec un taux de rendement qui est au moins égal à un taux garanti fixe, appelé taux technique. A l'émission des contrats, le taux technique était typiquement plus faible que les taux d'intérêt en vigueur sur les marchés financiers, un fait qui a conduit les compagnies à ignorer leur valeur de même que leur risque.

Le résultat d'une période dans laquelle les taux de marché n'ont pas cessé de décroître et dans laquelle les taux techniques sont restés au même niveau a été une réduction de la rentabilité des compagnies d'assurance. Les autorités de contrôle ont répondu à cette menace de solvabilité due aux garanties de rendement en diminuant les taux d'intérêt maximums qui peuvent légalement être garanti aux assurés².

¹Pour une présentation et une discussion détaillée des problèmes rencontrés par le secteur d'assurance vie pendant la période allant de la fin des années 1980 jusqu'aux années 1990 et des causes de ces événements, le lecteur peut se référer par exemple à BRIYS & DE VARENNE (1994, 1997a) ou GROSEN & JØRGENSEN (2000, 2002).

²En particulier, l'article 18 de la troisième directive de l'Union Européenne au sujet de l'assurance vie, qui était effective le 10 novembre 1992, demande que les garanties de taux

Les compagnies ont ainsi été forcées de diminuer le taux technique sur les nouveaux contrats. En conséquence, les portefeuilles des compagnies d'assurance vie contiennent plusieurs générations de polices avec différents taux garantis. Ceci soulève la question d'éviter un traitement inéquitable entre les différentes classes d'assurés surtout en matière d'attribution de la participation aux bénéfices.

L'approche habituelle pour attribuer les participations aux bénéfices consiste à créditer tous les contrats avec un taux identique, supérieur ou égal au taux technique le plus élevé. Cette manière de faire augmente le risque de défaut d'un business qui est déjà dans de mauvais draps. Clairement, le chemin correct vers une attribution juste des surplus parmi des classes de polices inégales passe par une valorisation de marché des différentes clauses - un point essentiel de ce travail.

Ceci explique les raisons pour lesquelles le sujet de la valorisation juste des passifs d'assurance a attiré beaucoup d'attention dans la littérature au cours des dernières années. La valorisation de marché, appelée *fair value* dans la littérature anglophone, est comprise au sens d'une tarification en l'absence d'opportunités d'arbitrage. Les contrats d'assurance vie sont considérés comme des produits financiers vendus et achetés sur un marché financier liquide parmi des investisseurs parfaitement informés. Ce fait est pris comme une hypothèse fondamentale dans ces études, et c'est l'hypothèse de base que nous faisons dans ce travail. Notez que l'idée de *fair pricing* tend à s'installer avec les normes comptables IAS.

Les premiers articles ont été publiés par BRENNAN & SCHWARTZ (1976, 1979) et par BOYLE & SCHWARTZ (1977). Ces auteurs ont décrit quelques-uns des éléments d'options des produits d'assurance vie et ont démontré comment la théorie de tarification de BLACK & SCHOLES (1973), assez récente à l'époque, peut être appliquée pour valoriser ces contrats. Les contrats considérés dans ces articles sont des contrats en unités de compte sans risque de crédit et avec des éléments d'options de type européen.

BACINELLO & ORTU (1993), GROSEN & JØRGENSEN (1997) et NIELSEN & SANDMANN (1995) représentent d'autres papiers plus récents qui analysent différentes formes de contrats en unités de compte.

La concentration des articles analysant des polices en unités de compte est en contraste sévère avec la signification économique de ces produits dans d'intérêt ne dépassent pas 60 % du taux de rendement des dettes gouvernementales (de maturité non spécifiée) (Voyez à ce sujet GROSEN & JØRGENSEN (2000)).

le marché des assurances sur la vie, dans lequel les polices avec participation bénéficiaire sont de loin les plus importantes.

Les polices avec participation offrent à côté d'un taux de rendement garanti la possibilité de participer dans les rendements supérieurs de la compagnie et d'obtenir un supplément au paiement garanti. Le problème de décrire et d'analyser le mécanisme de distribution des participations aux bénéficiaires est assez complexe, voyez à ce sujet GROSEN & JØRGENSEN (2000), ce qui explique sans doute pourquoi un nombre aussi petit d'articles ont traité de cette question.

Toutefois, l'intérêt s'est accru pour dévoiler la structure de ces mécanismes et pour analyser les polices avec participation, comme le documentent MILTERSEN & PERSSON (2003), BRIYS & DE VARENNE (1994, 1997a), GROSEN & JØRGENSEN (2000) et JENSEN, JØRGENSEN & GROSEN (2001). En particulier, le modèle de BRIYS & DE VARENNE (1994, 1997a) contient un mécanisme de participation et se distingue en tenant compte explicitement du risque de crédit de l'émetteur dans la valorisation des droits des assurés.

Les études les plus récentes s'appuient le plus souvent sur les travaux de BRIYS & DE VARENNE (1994, 1997a, 1997b). Elles visent à évaluer les éléments du passif en valeur de marché et à fixer les paramètres des contrats d'assurance vie afin qu'ils soient équitables entre l'assureur et l'assuré, l'équité étant entendue comme absence d'opportunité d'arbitrage.

BRIYS & DE VARENNE (1994, 1997a) construisent un modèle simplifié ne tenant pas compte des aspects de la mortalité. Le principe sous-jacent à leur modèle est l'approche de tarification des options de MERTON (1974, 1977, 1978, 1989).

Ces auteurs valorisent les actifs et les passifs d'une compagnie d'assurance vie qui ne vendrait qu'un seul type de contrat. Leur modèle a été l'un des premiers à tenir compte du risque de défaut de l'assureur ; de plus, la simplicité du mécanisme de distribution des participations bénéficiaires permet de dériver des formules exactes dans quelques cas particuliers. Même s'ils travaillent en temps continu, leur modèle est essentiellement à période unique puisque le défaut est uniquement détecté à l'échéance des contrats. Leur cadre de travail donne des formules fermées qui permettent de fixer les différents paramètres d'un contrat équitable.

MILTERSEN & PERSSON (2003) proposent une extension multipériodique fournissant des formules exactes. BACINELLO (2001) suggère quant à elle que la compagnie ait divers portefeuilles de référence plus ou moins risqués afin de fournir plusieurs combinaisons possibles (de taux technique, de niveau

de participation et de volatilité) à l'assuré. Pour évaluer les contrats, elle se place dans le cadre de Black et Scholes sous l'hypothèse d'indépendance entre le risque de mortalité et le risque financier.

TANSKANEN & LUKKARINEN (2003) considèrent des contrats d'assurance vie avec une forme de participation aux bénéfices assez générale fonction des valeurs du contrat et du portefeuille de référence à différentes dates. Ils incorporent les clauses suivantes dans leur contrat : un taux d'intérêt minimum garanti chaque année, le droit de changer le portefeuille de référence ainsi que la possibilité de résiliation à la fin de chaque année - donnant au contrat un caractère bermudien. Ils supposent un taux d'intérêt constant et une volatilité constante.

Comme indiqué ci-dessus, une faiblesse signifiante du modèle de BRIYS & DE VARENNE (1994, 1997a) est le fait qu'il détecte la faillite seulement à maturité. Un élément dynamique d'insolvabilité est ainsi perdu. GROSEN & JØRGENSEN (2002) corrigent cette faiblesse en réintroduisant l'élément dynamique au modèle en imposant une restriction réglementaire qui suppose une surveillance continue de la solvabilité de la compagnie et une règle de fermeture basée sur les engagements nominaux impliqués par la garantie de taux d'intérêt.

JØRGENSEN (2001) et GROSEN & JØRGENSEN (2002) montrent qu'un contrat d'assurance vie garantissant un taux de rendement minimum peut se décomposer en quatre termes : la garantie finale (assimilable à un zéro-coupon sans risque), l'option européenne correspondant à la participation aux bénéfices lors de bonnes années, une option de vente traduisant le risque de défaut et enfin un terme représentant le dédommagement versé aux assurés en cas de faillite prématurée de la compagnie.

Le coût de cet ajout de réalisme dans le modèle est une complexité accrue des options impliquées. Plus précisément, les droits des stakeholders vont changer d'options *plain vanilla* vers des types d'options plus exotiques ayant des caractéristiques similaires aux options barrières *knock-out*. GROSEN & JØRGENSEN (2002) montrent qu'il est possible de dériver des formules exactes sous certaines conditions.

BERNARD, LE COURTOIS & QUITTART-PINON (2005) finalement ont proposé une méthode alternative aux arbres, approches numériques et simulations de Monte Carlo. Leur méthode de valorisation repose sur l'article de COLLIN-DUFRESNE & GOLDSTEIN (2001) qui étend l'algorithme de FORTET (1943) employé par LONGSTAFF & SCHWARTZ (1995) pour approcher la densité du temps de premier passage d'un processus lognormal par une valeur donnée.

Ce travail est consacré à la valorisation de contrats d'assurance vie dans le cadre de taux d'intérêt stochastiques et en tenant compte du risque de défaut de la compagnie. Le modèle est une extension des travaux de BRIYS & DE VARENNE (1997a) et de GROSEN & JØRGENSEN (2002).

Le modèle présenté modélise le bilan d'une compagnie d'assurance-vie qui ne vend qu'un seul type de police d'assurance. Les assurés paient une prime unique en échange d'un contrat caractérisé par un rendement minimum garanti et par la possibilité d'une participation aux bénéfices. Par contre, le modèle ne tient pas compte de la possibilité de rachat.

Toutefois, la compagnie d'assurance peut faire défaut ce qui transforme le droit obligataire des assurés en obligation risquée. Les compagnies d'assurance sont soumises à un suivi strict de leur solvabilité et le modèle introduit une barrière de défaut exponentielle. La présence de cette barrière introduit alors des caractéristiques de barrière *knock-out* dans l'option de participation bénéficiaire des assurés puisque la participation sera conditionnelle à l'absence d'insolvabilité avant l'échéance des contrats.

Comme résultat, deux données clé caractérisent de telles polices - le taux d'intérêt garanti et le niveau de participation. Notre modèle nous permet de déterminer le taux d'intérêt juste ou le niveau de participation juste que les assurés devraient demander pour les compenser totalement contre les risques auxquels ils font face.

Les bases techniques dont se servent les assureurs pour déterminer les primes des contrats d'assurance vie sont au nombre de trois : le taux d'intérêt technique, une loi de survenance des décès décrite par une table de mortalité et finalement les divers chargements qui viennent grever la prime.

Les chargements ont pour but de couvrir les frais de la compagnie d'assurances ; elle a des frais liés à la gestion d'un contrat d'assurance et s'il y a une intervention d'un intermédiaire, elle doit lui payer des commissions. Dans le cadre de cette étude-ci, nous ignorons les frais et nous travaillons en prime pure.

La table de mortalité permet d'évaluer le coût moyen des contrats souscrits par une compagnie d'assurance. Dans un premier temps, nous ignorons la mortalité. Le cadre de travail correspond alors à celui de BRIYS & DE VARENNE (1997a) et de GROSEN & JØRGENSEN (2002). La mortalité sera introduite à partir du chapitre 5.

Les résultats de ce travail appellent au moins à deux applications impor-

tantes. D'abord, les formules de valorisation peuvent être utilisées dans le processus de création de contrats qui sont initialement justes (dans le sens où la valorisation du modèle du contrat correspond à la prime initiale).

Deuxièmement, les résultats peuvent être appliqués afin de déterminer la *fair value* des engagements d'assurance après leur conception dans tout état possible de l'économie. Ceci est en ligne avec le développement actuel dans le domaine de la compatibilité sociétaire dans lequel les recommandations vers une comptabilité de marché et de *fair value* deviennent de plus en plus fortes (voyez à ce sujet la discussion dans JØRGENSEN (2004)).

Ce travail est structuré de la manière suivante :

Le premier chapitre introduit un modèle général pour le contrat d'assurance tout en ignorant la mortalité. Le contrat comporte un taux garanti de même qu'une clause de participations aux bénéfices. Nous introduisons la probabilité de défaut de la compagnie à travers d'une barrière déclenchante sur la valeur des actifs.

Le chapitre 2 fixe ensuite les hypothèses liées aux marchés financiers, comme les processus suivis par le taux d'intérêt sans risque, le prix des zéros-coupons et les actifs de la compagnie.

Au chapitre 3, nous développons les formules de valorisation du contrat, avant de présenter au chapitre 4 quelques résultats numériques. Nous déterminons la valeur des contrats d'assurance et le niveau équitable de participation aux bénéfices. Nous analysons leur sensibilité à différents paramètres.

A partir du chapitre 5, nous introduisons la mortalité. Ce chapitre rappelle quelques notions de mortalité et présente les deux tables de mortalité dont nous nous servons au chapitre 6 pour étudier l'impact de l'introduction de la mortalité. Nous adaptons le modèle introduit au premier chapitre afin d'évaluer une assurance de capital différée sans remboursement.

Table des matières

Résumé	i
Introduction	ii
1 Le contrat d'assurance de base	1
1.1 Les acteurs du marché d'assurance	1
1.2 Les garanties du contrat d'assurance	3
1.2.1 Taux technique	3
1.2.2 Clause de participation aux bénéfices	4
1.3 Paiement à maturité	6
1.4 Défaut précoce de la compagnie	8
1.5 Le droit des assurés	11
1.6 Le droit des actionnaires	12
2 Dynamiques des marchés financiers	14
2.1 Hypothèses de base	14
2.2 Modélisation du taux sans risque	15
2.3 Modélisation du prix des zéro-coupons	15
2.4 Modélisation du cours des actifs	16
2.5 Le monde forward-neutre	17
2.5.1 Modélisation du taux d'intérêt sans risque	17
2.5.2 Modélisation du prix des zéros-coupons	18
2.5.3 Modélisation du cours des actifs	18
3 Valorisation de l'engagement envers les assurés	20
3.1 Valeur du contrat sous la mesure risque-neutre	20
3.2 Valeur du contrat sous la mesure forward-neutre	22
3.3 Contrats équitables	23
3.4 Méthode d'évaluation	25
3.4.1 Méthode de Monte-Carlo	25
3.4.2 Formules fermées	27

4	Etude numérique	28
4.1	Données	28
4.1.1	Contrats équitables	29
4.1.2	Paramètres et valeur du contrat	31
4.2	Sensibilité au taux technique	32
4.2.1	Probabilité de défaut	32
4.2.2	Participation bénéficiaire juste	33
4.2.3	Conclusion	34
4.3	Sensibilité à la volatilité	35
4.3.1	Probabilité de défaut	35
4.3.2	Evaluation du contrat d'assurance	36
4.3.3	Participation bénéficiaire juste	38
4.3.4	Conclusion	40
4.4	Sensibilité au paramètre λ	40
4.4.1	Probabilité de défaut	41
4.4.2	Evaluation du contrat d'assurance	42
4.4.3	Participation bénéficiaire juste	44
4.4.4	Conclusion	46
4.5	Sensibilité au paramètre α	46
4.5.1	Probabilité de défaut	46
4.5.2	Evaluation du contrat d'assurance	48
4.5.3	Participation bénéficiaire juste	50
4.5.4	Conclusion	51
4.6	Sensibilité à la durée du contrat d'assurance	51
4.6.1	Probabilité de défaut	51
4.6.2	Evaluation du contrat d'assurance	53
4.6.3	Participation bénéficiaire juste	54
4.6.4	Conclusion	55
4.7	Conclusion	56
5	Notions de mortalité	58
5.1	Fonctions biométriques	58
5.2	Tables de mortalité	61
5.2.1	Table statique	62
5.2.2	Table prospective	63
5.2.3	Notations	64
5.2.4	Participation de mortalité	65
5.2.5	Comparaison entre les deux tables	65
6	Capital différé sans remboursement	67
6.1	Assurance de CDSR	67
6.1.1	Evaluation actuarielle classique	68
6.1.2	Valeur de marché	69
6.1.3	Valorisation	70

6.1.4	Contrats équitables	71
6.2	Résultats numériques	71
6.2.1	Données	71
6.2.2	Evaluation du CDSR	72
6.2.3	Participation bénéficiaire juste	74
6.3	Conclusion	75
7	Conclusions	76
A	Cas particuliers	80
A.1	Valorisation des engagements de la compagnie sans défaut pré- coce	80
A.2	Taux sans risque constant	83
B	Méthode d'évaluation de Fortet	87
B.1	Principe de l'approximation de <i>Fortet étendue</i>	87
B.2	Formules quasi-fermées	91
B.3	Moments des processus	93
C	Algorithme de simulation en Fortran	95
C.1	Fonctions auxiliaires	95
C.2	Algorithme de simulation	96
D	Tables de mortalité	104
D.1	Table statique FR 92	104
D.2	Table prospective TPRV 93	105
	Bibliographie	109

Chapitre 1

Le contrat d'assurance de base

Dans ce chapitre, nous introduisons le modèle de base qui sera utilisé pour analyser les différents aspects des produits d'assurance vie. Ce modèle s'inspire de celui introduit par BRIYS & DE VARENNE (1997a).

Le contrat d'assurance présenté dans ce chapitre est un contrat-épargne purement financier. L'acquisition d'une telle police garantit au souscripteur le paiement d'un capital rémunéré à un rendement minimum et lui procure également une clause de participation aux bénéfices.

Ces contrats sont proposés par des compagnies sujettes au risque de défaut. Une autorité de contrôle des compagnies d'assurance est présente sur le marché pour vérifier la solvabilité de celles-ci.

Dans un premier temps, nous ignorons la mortalité, qui sera introduite à partir du chapitre 5. Cette manière de procéder comporte l'avantage de présenter un modèle général qui sera adapté dans la suite à la combinaison d'assurance vie étudiée.

Nous commençons par décrire les caractéristiques du contrat d'assurance avant de déterminer ce qui se passera dans le cas d'une faillite.

1.1 Les acteurs du marché d'assurance

L'arrangement financier que nous allons analyser est initialisé à l'instant $t = 0$. Nous considérons une compagnie d'assurance vie dont l'horizon de prévision s'étend sur un intervalle de temps fini $[0, T]$. L'instant T peut être considéré comme le temps jusqu'à maturité d'une cohorte de polices d'assurance vie émises en $t = 0$. Nous supposons en outre que la compagnie ne vend qu'un seul type de police d'assurance vie.

Nous nous intéressons à une compagnie d'assurance vie dont la structure de passif fait intervenir deux types d'intervenants : les assurés et les actionnaires. Le premier type d'agents, les assurés, achète une police homogène à la compagnie d'assurance vie. Les assurés sont tous engagés dans le même type de contrat venant à maturité à l'instant T . Les actionnaires, le deuxième type, sont des requérants résiduels fournissant les fonds propres. Par ailleurs, nous supposons que la compagnie d'assurance vie ne se finance pas à l'aide de dettes.

Sur le marché d'assurance, une autorité de contrôle est présente pour vérifier la solvabilité des compagnies d'assurance. En Belgique par exemple, il existe la **Commission bancaire, financière et des assurances** (CBFA). Dans le secteur des assurances, la CBFA est responsable entre autre de l'octroi de l'agrément (qui est attribué ou non par Arrêté Royal après analyse par la CBFA). Elle fait le suivi du respect des conditions d'exercice qui inclut un contrôle sur la marge de solvabilité des compagnies d'assurance. Le site internet de la CBFA reprend l'ensemble des textes légaux s'appliquant aux assurances sur la vie.

A l'instant $t = 0$, les deux (types d') agents investissent une somme d'argent dans la compagnie. L'investissement initial apporté par les assurés est noté L_0 , et équivaut au paiement des primes d'assurance, et celui des actionnaires E_0 . Ces investissements servent à former la base initiale des actifs de la société, A_0 , comme illustré par le bilan de la figure 1.1. Le paramètre α ($\alpha < 1$) représente la quote-part initiale de participation des primes dans les actifs de la compagnie. Le portefeuille des actifs est supposé être totalement investi dans des actifs risqués (actions, obligations risquées, biens immobiliers).

FIG. 1.1 – Bilan en $t = 0$

Actifs	Passifs
A_0	$L_0 = \alpha A_0$ $E_0 = (1 - \alpha) A_0$
A_0	A_0

Par leur investissement initial, les agents acquièrent un droit sur le paiement d'un capital avant ou à la date de maturité T . La suite va montrer que ces droits sont similaires à des dérivés financiers ayant comme sous-jacents

les actifs de la compagnie d'assurance. Ainsi, pour une description précise des caractéristiques des différentes clauses, nous pouvons valoriser les éléments du bilan sous l'hypothèse d'absence d'arbitrage.

Les sections suivantes décrivent en détail les droits des deux parties sur les actifs de la compagnie. Nous commençons par spécifier les caractéristiques du contrat d'assurance, celles-ci permettront alors de définir le flux des assurés à maturité sous l'hypothèse que la compagnie n'a pas été mise en faillite avant T . Ensuite, nous définissons ce qui va se passer en cas de défaut.

Nous adoptons pour la suite les notations suivantes : l'indice L se rapporte aux assurés (*Liabilityholders* en anglais) et l'indice E aux actionnaires (*Equityholders*).

1.2 Les garanties du contrat d'assurance

Avant d'explorer en détail les droits acquis par les différentes parties, nous présentons les clauses du contrat d'assurance étudié. Celui-ci contient, en plus d'un taux de rendement garanti, une clause de participation aux bénéfices.

Sous l'hypothèse que la compagnie n'ait pas été mise en faillite avant la maturité des contrats d'assurance, nous pouvons alors décrire le paiement auquel les assurés ont droit à maturité. Ensuite, nous allons fixer ce qui se passera dans le cas d'une faillite.

1.2.1 Taux technique

La compagnie d'assurance vie propose des contrats d'épargne contenant une garantie explicite de taux de rendement minimum, c'est-à-dire une garantie que les fonds investis vont accumuler au moins un taux fixé à l'avance. Ce taux de rendement garanti est appelé taux technique.

Autrement dit, la compagnie promet aux assurés un rendement continu accumulé sur la valeur de marché initiale des engagements d'au moins r^* pendant la vie du contrat. Ainsi en T , date d'échéance commune des contrats, elle garantit aux assurés une somme finale qui est a priori de

$$L_T^* = L_0 e^{r^*T}.$$

Le taux technique est garanti pour toute la durée de vie des contrats d'assurance. Il convient alors de ne pas oublier que la promesse d'un taux technique est un engagement de la part de l'assureur et a donc une valeur. Au cours des dernières années, où les taux des marchés financiers n'ont cessé de

diminuer, de nombreuses compagnies ont rencontré des problèmes à cause des anciens contrats contenant des taux techniques très élevés et souvent beaucoup plus élevés que les taux actuellement en vigueur sur les marchés financiers. Le taux technique doit donc être fixé avec prudence.

Souvent, le taux technique ne peut dépasser un seuil légal limite. En Belgique, ce seuil est fixé à 3.75% par l'Arrêté Royal du 14 novembre 2003. Sur le marché belge, nous remarquons actuellement que les assureurs proposent souvent des taux plus bas, de l'ordre de 2.25%. Ceci est dû au fait que les taux de rendement des OLO ont fortement diminué au cours des dernières années et qu'à présent, le taux de 3.75% dépasse largement les taux OLO.

Les compagnies d'assurance se sont toutefois concertées pour proposer toutes le même taux technique, un taux technique plus élevé représentant un avantage commercial. A cause de la pression due à la concurrence entre compagnies d'assurances, nous pouvons supposer pour la suite du travail qu'elles proposent toutes un taux technique identique.

Une observation s'impose cependant ici. La promesse de la compagnie ne peut être honorée que si les actifs ont généré assez de valeur, c'est-à-dire si $A_T > L_T^*$ à maturité. Dans le cas contraire, $A_T \leq L_T^*$, et dans la situation où la compagnie n'a pas été mise en faillite prématurément par l'autorité de contrôle, les assurés reçoivent A_T et les actionnaires ne touchent rien.

1.2.2 Clause de participation aux bénéfices

En plus du paiement garanti à maturité impliqué par le taux technique, le contrat d'assurance comprend une clause de participation aux bénéfices : les assurés ont droit à un rendement supplémentaire si la valeur de marché des actifs a évolué de manière suffisamment favorable.

Nous considérons ici une participation aux bénéfices finale, appelée *Terminal Bonus* dans la littérature anglaise, par opposition à une participation bénéficiaire annuelle ou *Reversionary Bonus*. La distinction se fait en fonction de l'instant d'attribution de la participation, la première n'étant donnée qu'au terme du contrat tandis que la deuxième est distribuée chaque année.

Pour le *Terminal Bonus*, le complément des prestations attribué au terme du contrat est déterminé en fonction du surplus final entre l'actif et le passif. Pour le *Reversionary Bonus*, la dotation de participation est effectuée chaque année en fonction de la marge d'intérêt.

Les assurés reçoivent ainsi une fraction δ des revenus financiers nets - si positifs - de la compagnie d'assurance vie lorsque la situation financière

de la compagnie est assez favorable, soit quand $A_T > \frac{L_T^*}{\alpha}$ avec $\alpha < 1$. Ces revenus nets incluent dividendes, gains de capitaux nets, coupons et loyers. δ représente la partie contractuelle du surplus et est appelé taux de participation aux bénéfices.

Ainsi, sans défaut préalable, le capital garanti de L_T^* sera minoré en cas de mauvais résultats alors qu'il sera majoré en cas de résultats exceptionnels de la compagnie. Le taux de participation bénéficiaire a parfois une limite inférieure due à la réglementation. En France, par exemple, il ne peut être inférieur à 85%.

Dans la littérature récente, il y a eu un débat intense sur la manière dont on peut modéliser de manière réaliste cet élément de participation aux bénéfices dans des contrats d'assurance vie. Ici, nous adoptons l'approche de BRIYS & DE VARENNE (1994, 1997a) qui, sous l'hypothèse que les actifs sont affectés dès le départ à une classe de contrats, spécifient le *payoff* de l'option bonus comme étant :

$$\begin{aligned}\beta_T &= \max \left[0, \delta \left[\frac{L_0}{A_0} (A_T - A_0) - (L_T^* - L_0) \right] \right] \\ &= \delta \max \left[0, \alpha A_T - L_T^* \right]. \\ &= \delta \left[\alpha A_T - L_T^* \right]^+ .\end{aligned}\tag{1.1}$$

Le montant positif β_T représente le revenu financier des assurés après le paiement du capital garanti.

En effet, les revenus financiers totaux ($A_T - A_0$) de la compagnie entre les instants 0 et T sont supposés être attribués aux différents contrats de manière à ce que seulement une fraction $\alpha = \frac{L_0}{A_0}$ est considérée pour la participation bénéficiaire des assurés. Après que les promesses garanties ($L_T^* - L_0$) ont été tenues et déduites des bénéfices financiers, les assurés reçoivent une fraction δ de ces revenus financiers nets.

La compagnie commence à distribuer des bénéfices dès que β_T est positif, c'est-à-dire dès que $A_T \geq \frac{L_T^*}{\alpha}$. En d'autres termes, puisque $\frac{L_T^*}{\alpha} = A_0 e^{r^*T}$, la compagnie commence à servir un supplément dès que le taux de rendement des actifs dépasse le taux garanti r^* .

De l'équation (1.1), il est clair que les assurés reçoivent une fraction δ du surplus dans les états finaux tels que la "part" des assurés dans la valeur totale excède le paiement promis de L_T^* . Le paramètre δ modélise l'amplitude dans laquelle les assurés participent dans des *payoffs* supérieurs.

1.3 Paiement à maturité

La modélisation des clauses du contrat d'assurance de la section précédente permet de décrire le *payoff* contractuel $\Theta_L(T)$ des assurés à maturité en distinguant trois états du monde.

Dans le premier scénario (le plus mauvais), la compagnie d'assurances est totalement insolvable : la valeur des actifs en T est inférieure au paiement garanti aux assurés, L_T^* . La compagnie est déclarée en faillite et les actifs sont distribués aux assurés :

$$\Theta_L(T) = A_T \quad \text{si } A_T < L_T^*. \quad (1.2)$$

Dans le deuxième scénario, la compagnie est capable de respecter ses engagements garantis mais elle est incapable de servir une participation bénéficiaire, ce qui est équivalent à $\beta_T = 0$:

$$\Theta_L(T) = L_T^* \quad \text{si } L_T^* \leq A_T < \frac{L_T^*}{\alpha}. \quad (1.3)$$

Dans le troisième scénario, la participation aux bénéfices β_T est positive. Les actifs génèrent assez de valeur pour faire face au paiement garanti et à la participation bénéficiaire. Dans un tel cas, l'engagement en T est égal à

$$\begin{aligned} \Theta_L(T) &= L_T^* + \beta_T \quad \text{si } A_T \geq \frac{L_T^*}{\alpha} \\ &= L_T^* + \delta(\alpha A_T - L_T^*) \quad \text{si } A_T \geq \frac{L_T^*}{\alpha} \\ &= \delta \alpha A_T + (1 - \delta)L_T^* \quad \text{si } A_T \geq \frac{L_T^*}{\alpha}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Si nous reprenons le vocabulaire utilisé par BRIYS & DE VARENNE (1994), le premier cas correspond à un cas d'insolvabilité totale ; le deuxième cas est une insolvabilité partielle dans le sens où uniquement les engagements garantis sont remplis ; le troisième cas est le meilleur scénario et correspond à un scénario de solvabilité totale.

Pour résumer, le paiement accordé aux assurés à l'échéance du contrat, $\Theta_L(T)$, se décrit de la manière suivante en fonction de l'évolution des actifs de l'entreprise :

$$\Theta_L(T) = \begin{cases} A_T & \text{si } A_T < L_T^* \\ L_T^* & \text{si } L_T^* \leq A_T \leq \frac{L_T^*}{\alpha} \\ L_T^* + \delta(\alpha A_T - L_T^*) & \text{si } \frac{L_T^*}{\alpha} < A_T \end{cases} \quad (1.5)$$

ou de manière plus compacte :

$$\begin{aligned} \Theta_L(T) &= \min [A_T, L_T^*] + \beta_T \\ &= \delta [\alpha A_T - L_T^*]^+ + L_T^* - [L_T^* - A_T]^+. \end{aligned} \quad (1.6)$$

La figure 1.2 est une illustration graphique de l'équation (1.6).

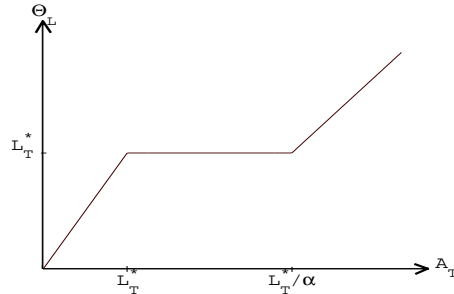


FIG. 1.2 – Pay-off final des assurés

Les engagements d'assurance (1.6) sont constitués de trois composantes comme le montre la figure 1.3.

Le premier terme de l'équation (1.6) est lié à la participation bénéficiaire que la compagnie peut payer si les affaires vont bien. Les assurés détiennent une position longue sur l'option bonus.

FIG. 1.3 – Paiement à maturité des assurés

zéro-coupon sans risque	option de défaut	option bonus
position longue	position courte	position longue
zéro-coupon risqué		

Le deuxième terme correspond à une position longue sur un paiement fixe à maturité, égal au capital garanti. Il peut être assimilé au *payoff* d'un zéro-coupon sans risque (de défaut). Le terme restant est une position courte sur une option de vente, reflétant le risque de défaut. En particulier, ces deux termes sont collectivement équivalents au *payoff* d'une obligation risquée.

La relation (1.6) définit le *payoff* à maturité relatif au contrat des assurés. Si l'échéance du contrat est le seul instant de flux possible, les techniques standards pour les produits dérivés de type européen peuvent être appliquées pour la valorisation. En effet, ces *payoffs* partagent les mêmes caractéristiques que les options européennes usuelles.

1.4 Défaut précoce de la compagnie

Jusqu'ici, nous avons supposé que la compagnie d'assurance n'a pas été mise en faillite avant l'instant T . Pour ajouter du réalisme au modèle, nous introduisons à présent une restriction réglementaire de solvabilité. Celle-ci est fixée de manière exogène et imposée par l'autorité de contrôle. Une telle limite a été proposée la première fois par GROSEN & JØRGENSEN (2002). Nous suivons ici leur approche.

Comme annoncé ci-dessus, nous supposons qu'une autorité de contrôle est présente sur le marché de l'assurance. Celle-ci suit, entre autres, la marge de solvabilité requise par les compagnies pour qu'elles puissent proposer des contrats d'assurance sur la vie. Nous supposons qu'une compagnie d'assurance est solvable aussi longtemps que la valeur des actifs est supérieure à une certaine limite imposée par l'autorité de contrôle. Cette limite est fonction des garanties de capital.

Techniquement, supposons que dans le cadre ci-dessus, la compagnie peut uniquement continuer son activité jusqu'à échéance des contrats sous la condition :

$$A_t > \lambda L_0 e^{r^*t} \equiv B_t, \quad \forall t \in [0, T[, \quad (1.7)$$

où la courbe $\{B_t\}_{0 \leq t < T}$ représente la barrière réglementaire imposée par l'autorité de contrôle.

L'interprétation et la motivation de cette restriction sont directes :

$$L_0 e^{r^*t} \equiv L_t^*$$

est le dépôt initial des assurés rémunéré au taux garanti jusqu'à l'instant t . Voilà pourquoi c'est uniquement dans le cas où les actifs totaux ont à chaque instant été suffisants pour couvrir cet engagement nominal multiplié par une constante prédéfinie, λ , que les options des assurés vont vivre jusqu'à maturité. λ donne le niveau de la limite réglementaire.

Dans le cas contraire, les actifs ont à un instant du temps, τ , eu une valeur de marché telle que $A_\tau = B_\tau$. Dans cette situation, la valeur de marché des actifs se trouve à un niveau critique et nous supposons que les autorités de contrôle vont fermer immédiatement la compagnie et distribuer les richesses récupérées aux *stakeholders*.

Notons τ l'instant de défaut de la compagnie d'assurance vie ; c'est le premier instant où A_t franchit la barrière B_t , ce qui s'écrit :

$$\tau = \inf \left\{ t \in [0, T] \mid A_t < B_t \right\} . \quad (1.8)$$

A ce point, il est intéressant de distinguer deux cas. En effet, en fonction de la valeur de λ , les cas de figure qui peuvent se présenter sont différents.

Réglementation stricte : $\lambda \geq 1$

Pour $\lambda \geq 1$ et dans le cas d'une atteinte de la barrière, les curateurs sont capables de rembourser aux assurés leur investissement initial augmenté des intérêts au taux promis r^* jusqu'à la date de liquidation.

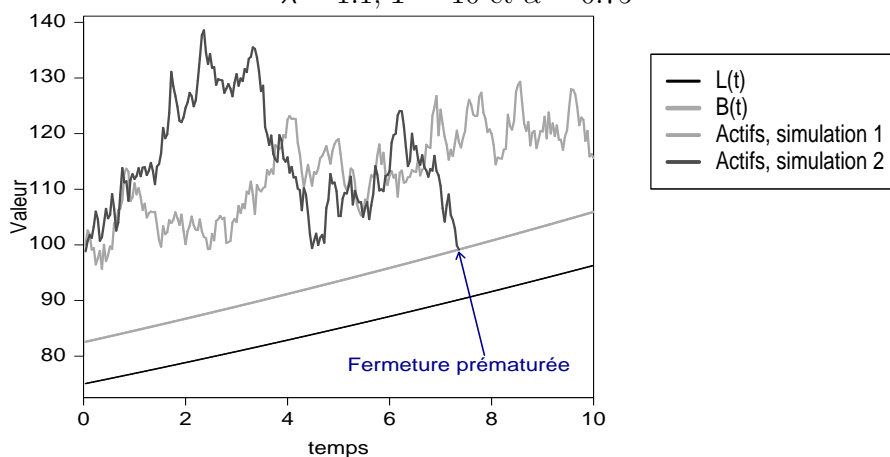
En même temps, il y aura un surplus de

$$(\lambda - 1) L_0 e^{r^* \tau}$$

qu'il faudra redistribuer aux actionnaires. Une alternative et une hypothèse très raisonnable serait que le surplus servira à payer les frais de faillite et irait dans ce cas à des parties tierces comme l'autorité de contrôle et/ou les avocats. Même si intéressante, cette possibilité n'est pas approfondie dans le cadre de cette étude.

Ainsi, $\lambda \geq 1$ correspond à une situation dans laquelle l'autorité de contrôle prévient le défaut en permettant les affaires uniquement pour des compagnies qui ont une marge d'une certaine amplitude entre la valeur marché de leurs actifs et les obligations nominales envers les assurés. La situation $\lambda \geq 1$ est donc très confortable pour les assurés et les autorités. Théoriquement elle correspond à une absence de prise de risques.

FIG. 1.4 – Illustration de la barrière réglementaire pour $\lambda \geq 1$
 $\lambda = 1.1$, $T = 10$ et $\alpha = 0.75$



La figure 1.4 montre un exemple d'une telle situation : la première simulation des actifs ne donne pas lieu à des problèmes de solvabilité et à maturité

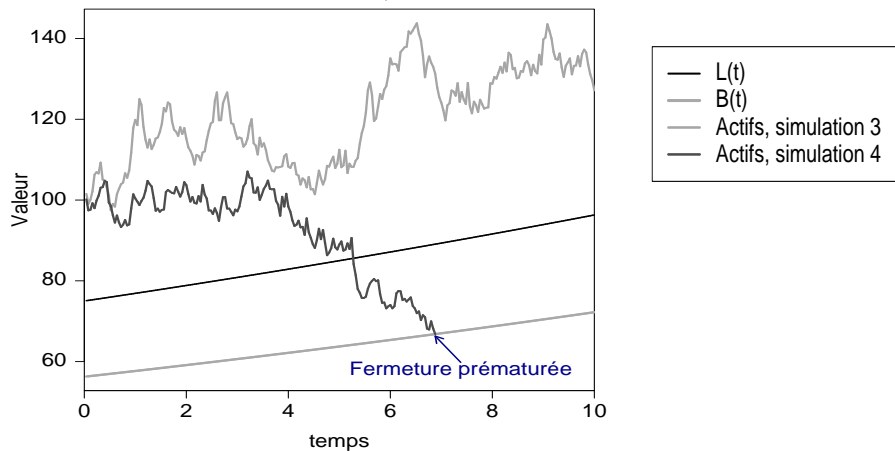
la compagnie peut remplir ses engagements sans problème quelconque. La deuxième simulation par contre donne lieu à une fermeture forcée après environs sept ans et demi.

Réglementation moins stricte : $\lambda < 1$

$\lambda < 1$ correspond par contre à une situation dans laquelle l'autorité de contrôle admet des déficits temporaires et limités. Si un défaut intervient dans cette situation, les actifs récupérés ne vont pas suffire pour couvrir la prime initiale des assurés rémunérée au taux garanti jusqu'à l'instant τ . En cas de défaut, la compagnie ne sera donc pas en mesure de respecter intégralement ses engagements vis-à-vis des assurés.

Cette situation peut être vue comme correspondant à un certain laxisme de la part de la réglementation. Nous supposons que les assurés vont alors recevoir la valeur marché récupérée en entier et que les actionnaires ne touchent rien.

FIG. 1.5 – Illustration de la limite pour $\lambda < 1$
 $\lambda = 0.75$, $T = 10$ et $\alpha = 0.75$



Ce cas de figure est illustré par la figure 1.5 : la première évolution des actifs permet à la compagnie de remplir ses engagements garantis, tandis que le deuxième cas entraîne la mise en faillite par l'autorité de contrôle.

Paiement en cas de défaut avant la maturité des contrats

Comme décrit auparavant, il y aura un dédommagement aux assurés, défini par (1.8), dans le cas d'une fermeture prématurée à l'instant τ . Formellement pour $\tau < T$, et en accordance avec la discussion ci-dessus, ce flux, $\Theta_L(\tau)$, est donné par :

$$\Theta_L(\tau) = \begin{cases} L_0 e^{r^*\tau} & \text{si } \lambda \geq 1 \\ \lambda L_0 e^{r^*\tau} & \text{si } \lambda < 1 \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \Theta_L(\tau) &= \min[\lambda, 1] L_0 e^{r^*\tau} \\ &= \min[\lambda, 1] L_\tau^*. \end{aligned} \quad (1.9)$$

A présent, nous disposons de tous les éléments nécessaires pour décrire l'engagement de la compagnie envers les assurés.

1.5 Le droit des assurés

Pour rappel, le paiement accordé aux assurés à l'échéance du contrat, $\Theta_L(T)$, se décrit de la manière suivante en fonction de l'évolution des actifs de l'entreprise :

$$\Theta_L(T) = \delta [\alpha A_T - L_T^*]^+ + L_T^* - [L_T^* - A_T]^+. \quad (1.10)$$

En plus, dans le cas d'une faillite de la compagnie d'assurances, les assurés ont droit au remboursement suivant :

$$\Theta_L(\tau) = \min[\lambda, 1] L_\tau^*. \quad (1.11)$$

En imposant la restriction réglementaire de solvabilité, le modèle devient considérablement plus compliqué. En particulier, les droits des assurés ont changé d'options *plain vanilla* en des options de type plus exotique avec des caractéristiques communes avec les options barrières *knock-out*. Dans le cadre proposé, la barrière *knock-out* est exponentielle et définie par la courbe $\{B_t\}_{0 \leq t < T}$ introduite ci-dessus.

Ainsi, les assurés bénéficient d'un taux d'intérêt garanti et d'une quote-part de la performance du portefeuille d'actifs de la compagnie. Au total, deux données clé caractérisent de telles polices : le taux d'intérêt garanti et le niveau de participation.

Avant de considérer la valorisation de $\Theta_L(t)$, nous décrivons les détails concernant le droit des actionnaires.

1.6 Le droit des actionnaires

Le paiement aux actionnaires est implicite dans les discussions des sections précédentes. D'ailleurs, nous donnons ces formules uniquement à titre d'information, puisque notre but est de valoriser l'engagement de l'assureur envers les assurés.

En tant que possesseurs d'un droit résiduel et sous réserve que la compagnie n'ait pas cessé son activité prématurément, les actionnaires vont recevoir un paiement à maturité donné par :

$$\begin{aligned} \Theta_E(T) &= \begin{cases} 0 & \text{si } A_T < L_T^* \\ A_T - L_T^* & \text{si } L_T^* \leq A_T \leq \frac{L_T^*}{\alpha} \\ A_T - L_T^* - \delta(\alpha A_T - L_T^*) & \text{si } \frac{L_T^*}{\alpha} < A_T \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } A_T < L_T^* \\ A_T - L_T^* & \text{si } L_T^* \leq A_T \leq \frac{L_T^*}{\alpha} \\ (1 - \delta)(\alpha A_T - L_T^*) + (1 - \alpha)A_T & \text{si } \frac{L_T^*}{\alpha} < A_T \end{cases} \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \Theta_E(T) &= [A_T - L_T^*]^+ - \delta [\alpha A_T - L_T^*]^+ \\ &= [A_T - L_T^*]^+ - \delta \alpha \left[A_T - \frac{L_T^*}{\alpha} \right]^+. \end{aligned} \quad (1.12)$$

La figure 1.6 illustre la position des flux des actionnaires à l'instant T .

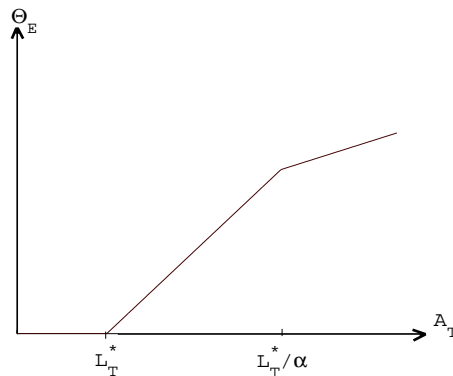


FIG. 1.6 – Pay-off final des actionnaires

Le paiement à maturité des actionnaires est la différence entre deux options d'achat européennes. L'option longue est un call sur les actifs totaux avec un prix d'exercice égal au paiement à maturité promis aux assurés. Si $\delta = 0$, ce terme est l'option call d'engagement limité (voir BLACK &

SCHOLES (1973) et MERTON (1973)). Les actionnaires ont l'option de s'en aller si les affaires ne vont pas bien.

Le second call est en position courte. Il a un poids donné par le taux de participation aux bénéfices δ et correspond à l'option bonus émise à l'égard des assurés. En effet, les actionnaires ont écrit une option d'achat aux assurés en introduisant une clause contractuelle de participation aux bénéfices basée sur la valeur des actifs.

En ce qui concerne une indemnisation possible dans le cas d'une fermeture forcée avant T , la section 1.4 a établi qu'il ne pourrait y avoir un tel paiement dans un régime où $\lambda < 1$. Toutefois, dans le cas où $\lambda \geq 1$, il y a une marge de surplus en cas de défaut et ceci ouvre la possibilité d'un remboursement prématuré aux actionnaires.

Dans cette étude, nous ne considérons pas l'alternative selon laquelle le surplus serait distribué à des parties tierces, nous supposons au contraire qu'il est payé intégralement aux actionnaires. Dans le cas d'une fermeture prématurée, les actionnaires ont droit au remboursement suivant :

$$\begin{aligned} \Theta_E(\tau) &= \begin{cases} (\lambda - 1) L_0 e^{r^* \tau} & \text{si } \lambda \geq 1 \\ 0 & \text{si } \lambda < 1 \end{cases} \\ &= \max[\lambda - 1, 0] L_0 e^{r^* \tau} \\ &= \max[\lambda - 1, 0] L_\tau^* \end{aligned} \tag{1.13}$$

La valorisation de l'engagement envers les assurés est essentielle. Une analyse plus profonde de cette question demande des hypothèses supplémentaires et en particulier un modèle dynamique des marchés financiers. Nous abordons cette problématique dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Dynamiques des marchés financiers

Afin de valoriser l'engagement de la compagnie d'assurance envers les assurés, nous avons besoin d'hypothèses supplémentaires, notamment en ce qui concerne les marchés financiers. L'objet de ce chapitre est l'introduction d'un modèle dynamique de marché financier.

Pour notre étude, nous avons besoin de connaître les dynamiques du processus des actifs de la compagnie d'assurance vie, A_t , de même que les dynamiques d'un zéro-coupon sans risque expirant à l'instant T . Dans les sections suivantes, nous allons préciser ces processus.

2.1 Hypothèses de base

Dans ce chapitre, nous allons spécifier un modèle dynamique pour l'évolution des actifs et des taux d'intérêt dans le temps. Toute l'activité a lieu sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), \mathbb{P})$ supportant un mouvement brownien sur l'intervalle de temps fini $[0, T]$.

Nous supposons que les agents opèrent dans une économie en temps continu et sans frictions avec un marché financier parfait, de manière à ce que l'on puisse ignorer les effets des taxes, les coûts de transaction ainsi que les contraintes de divisibilité, de liquidité et de vente à découvert.

Les marchés financiers sont supposés complets et sans frictions et les affaires ont lieu en temps continu. Sous cette hypothèse, HARRISON & KREPS (1979) ont montré qu'il existe une unique mesure de probabilité \mathcal{Q} , la probabilité risque-neutre, sous laquelle le prix escompté en continu de tout titre est une \mathcal{Q} -martingale.

2.2 Modélisation du taux sans risque

Pour modéliser l'incertitude dans la structure à terme des taux d'intérêt, les taux courts sans risque sont supposés distribués normalement. Ils suivent un processus de retour à la moyenne d'Ornstein-Uhlenbeck¹, proposé à l'origine comme fondement d'un modèle de structure à terme par VASICEK (1977).

Sous la probabilité risque-neutre \mathcal{Q} , la dynamique du taux d'intérêt sans risque à l'instant t , r_t , est donnée par l'équation différentielle stochastique

$$dr_t = a(\theta - r_t) dt + \eta dZ_1^{\mathcal{Q}}(t), \quad (2.1)$$

où a et θ sont des paramètres positifs et constants, le premier représentant la force de rappel du processus, le deuxième le taux d'équilibre ; η représente la volatilité de r_t et $Z_1^{\mathcal{Q}}$ est un mouvement brownien standard sous \mathcal{Q} .

Si r_0 désigne le taux d'intérêt sans risque initial, la solution de l'équation (2.1) s'écrit :

$$r_t = r_0 e^{-at} + \theta(1 - e^{-at}) + \eta e^{-at} \int_0^t e^{-as} dZ_1^{\mathcal{Q}}(s).$$

2.3 Modélisation du prix des zéro-coupons

Le prix des zéro-coupon est également donné par le modèle de VASICEK (1977). Notons $P(t, T)$ le prix à l'instant t d'un zéro-coupon expirant en T . Il est fonction du taux sans risque précisé dans la section précédente.

Sous la probabilité \mathcal{Q} , le zéro-coupon venant à expiration à la date T , $P(t, T)$, suit l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r_t dt - \sigma_P(t, T) dZ_1^{\mathcal{Q}}(t).$$

Dans le modèle de VASICEK (1977), la volatilité du zéro-coupon, σ_P , est une fonction déterministe qui s'écrit :

$$\sigma_P(t, T) = \frac{\eta}{a} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right). \quad (2.2)$$

¹Le seul défaut de ce modèle est le fait que des taux négatifs ne sont pas interdits dans un environnement gaussien. On peut toutefois noter que pour des valeurs raisonnables des paramètres, cet événement a une faible probabilité d'occurrence.

Le prix d'un zéro-coupon en t de maturité T est ainsi donné par :

$$P(t, T) = \exp \left(\frac{1}{a} \left(1 - e^{-a(T-t)} \right) \left(\theta - \frac{\eta^2}{a^2} - r_t \right) + (T-t) \left(\frac{\eta^2}{2a^2} - \theta \right) + \frac{\eta^2}{4a^3} \left(1 - e^{-2a(T-t)} \right) \right). \quad (2.3)$$

2.4 Modélisation du cours des actifs

Le cours des actifs est supposé suivre un mouvement brownien géométrique sous la probabilité risque-neutre. Le processus de la valeur des actifs est décrit par l'équation différentielle stochastique :

$$\frac{dA_t}{A_t} = r_t dt + \sigma dZ^{\mathcal{Q}}(t) \quad (2.4)$$

où $Z^{\mathcal{Q}}$ est un mouvement brownien standard corrélé au mouvement brownien $Z_1^{\mathcal{Q}}$ (lié au processus du taux d'intérêt). Leur coefficient de corrélation est donné par ρ :

$$dZ^{\mathcal{Q}} dZ_1^{\mathcal{Q}} = \rho dt.$$

La valeur du portefeuille des investissements de la compagnie est modélisée par (2.4) comme étant soumise à un risque de marché spécifique ainsi qu'au risque de taux d'intérêt à travers la corrélation entre les deux processus de Wiener gouvernant ce système.

Construisons à présent un mouvement brownien $Z_2^{\mathcal{Q}}$ indépendant de $Z_1^{\mathcal{Q}}$, c'est-à-dire tel que $dZ_1^{\mathcal{Q}} dZ_2^{\mathcal{Q}} = 0$. Nous pouvons décomposer le mouvement brownien $Z^{\mathcal{Q}}$ selon ces deux composantes

$$dZ^{\mathcal{Q}}(t) = \rho dZ_1^{\mathcal{Q}}(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_2^{\mathcal{Q}}(t).$$

De cette manière, nous avons décorrélé le risque lié au taux d'intérêt des autres aléas. La dynamique des actifs (2.4) s'écrit alors :

$$\frac{dA_t}{A_t} = r_t dt + \sigma \rho dZ_1^{\mathcal{Q}}(t) + \sigma \sqrt{1 - \rho^2} dZ_2^{\mathcal{Q}}(t). \quad (2.5)$$

2.5 Le monde forward-neutre

Quand nous nous intéresserons dans la suite à la valorisation des engagements de la compagnie envers les assurés, nous aurons également besoin de connaître les dynamiques ci-dessus sous la mesure forward-neutre.

En effet, la manière la plus efficace de tarifer des options dans un environnement de taux d'intérêt stochastiques est d'utiliser le changement de numéraire technique et de choisir un zéro-coupon ad hoc comme nouveau numéraire.

Désignons par \mathcal{Q}_T la mesure forward-neutre. Elle est définie de manière habituelle par la dérivée de Radon-Nikodym :

$$\frac{d\mathcal{Q}_T}{d\mathcal{Q}} = \exp \left(- \int_0^T \sigma_P(s, T) dZ_1^{\mathcal{Q}}(s) - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_P^2(s, T) ds \right).$$

A partir du théorème de Girsanov, le processus $Z_1^{\mathcal{Q}_T}$ défini par

$$dZ_1^{\mathcal{Q}_T} = dZ_1^{\mathcal{Q}} + \sigma_P(t, T) dt$$

est un mouvement brownien sous \mathcal{Q}_T .

2.5.1 Modélisation du taux d'intérêt sans risque

La dynamique du taux d'intérêt instantané sous la probabilité \mathcal{Q}_T peut s'exprimer par :

$$dr_t = a(\theta_t - r_t) dt + \eta dZ_1^{\mathcal{Q}_T}(t) \quad (2.6)$$

avec

$$\theta_t = \theta - \frac{\eta^2}{a^2} (1 - e^{-a(T-t)}).$$

Sous la nouvelle mesure, le taux sans risque suit toujours un processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

La solution de cette équation différentielle stochastique est donnée par le processus

$$\begin{aligned} r_t = & r_0 e^{-at} + \left(\theta - \frac{\eta^2}{a^2} \right) (1 - e^{-at}) + \frac{\eta^2}{2a^2} e^{-a(T-t)} (1 - e^{-2at}) \\ & + \eta e^{-at} \int_0^t e^{as} dZ_1^{\mathcal{Q}_T}(s). \end{aligned}$$

Il est donc possible de déterminer ses deux moments conditionnels par rapport à la tribu \mathfrak{F} engendrée par r . Désignons par $\mathbb{E}_u^{\mathcal{Q}_T}$ l'espérance et par

$\text{Var}_u^{\mathcal{Q}_T}$ la variance sous la mesure risque-neutre \mathcal{Q}_T conditionnellement à l'information disponible à l'instant u . Dans la suite, nous omettons l'indice u si celui-ci vaut 0.

Il vient ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_u^{\mathcal{Q}_T}(r_t) &= \mathbb{E}^{\mathcal{Q}_T}(r_t | \mathfrak{S}_u) \\ &= r_u e^{-a(t-u)} + \left(\theta - \frac{\eta^2}{a^2}\right) \left(1 - e^{-a(t-u)}\right) \\ &\quad + \frac{\eta^2}{2a^2} e^{-a(T-t)} \left(1 - e^{-2a(t-u)}\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\text{Var}_u^{\mathcal{Q}_T}(r_t) &= \text{Var}^{\mathcal{Q}_T}(r_t | \mathfrak{S}_u) \\ &= \eta^2 e^{-2at} \int_0^t e^{2as} ds \\ &= \frac{\eta^2}{2a} \left(1 - e^{-2a(t-u)}\right).\end{aligned}$$

2.5.2 Modélisation du prix des zéros-coupons

La dynamique sous \mathcal{Q}_T de $P(t, T)$ est donnée par :

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = \left(r_t + \sigma_P^2(t, T)\right) dt - \sigma_P(t, T) dZ_1^{\mathcal{Q}_T}(t).$$

2.5.3 Modélisation du cours des actifs

Comme précédemment, nous construisons un processus $Z_2^{\mathcal{Q}_T}$ de telle manière que $Z_1^{\mathcal{Q}_T}$ et $Z_2^{\mathcal{Q}_T}$ soient des mouvements browniens standard non corrélés sous la mesure \mathcal{Q}_T .

La dynamique sous \mathcal{Q}_T de A_t s'écrit alors :

$$\frac{dA_t}{A_t} = \left(r_t - \sigma\rho\sigma_P(t, T)\right) dt + \sigma \left(\rho dZ_1^{\mathcal{Q}_T}(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_2^{\mathcal{Q}_T}(t)\right). \quad (2.7)$$

Après intégration, il vient

$$\begin{aligned}A_t &= \frac{A_0}{P(0, t)} \exp \left[\int_0^t \left(\sigma_P(u, t) + \sigma\rho\right) dZ_1^{\mathcal{Q}_T}(u) + \int_0^t \sigma\sqrt{1 - \rho^2} dZ_2^{\mathcal{Q}_T}(u) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \left(-\sigma_P(u, T) \left[\sigma_P(u, t) + \sigma\rho\right] + \frac{\sigma_P^2(u, t) - \sigma^2}{2}\right) du \right].\end{aligned}$$

Introduction d'un processus dérivé de A_t

Dans la suite, nous n'allons pas considérer le processus des actifs mais plutôt le processus lognormal χ_t défini par :

$$\chi_t = A_t e^{r^* t}.$$

Nous aurons besoin de connaître les moments de χ_t . Pour les déterminer, nous introduisons le processus

$$l_t = \ln(\chi_t) = \ln(A_t) - r^* t.$$

En appliquant le lemme d'Itô à l'équation (2.7), nous pouvons montrer que le processus l_t suit sous Q_T l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dl_t = \left(r_t - r^* - \frac{\sigma^2}{2} - \sigma\rho\sigma_P(t, T) \right) dt + \sigma\rho dZ_1^{Q_T} + \sigma\sqrt{1-\rho^2} dZ_2^{Q_T}. \quad (2.8)$$

Pour t fixé, l_t est une variable normale décrite par ses deux premiers moments $M_t = \mathbb{E}^{Q_T}(l_t)$ et $V_t = \mathbb{V}\text{ar}^{Q_T}(l_t)$ qui s'obtiennent à partir de l'équation (2.8) :

$$M_t = \ln\left(\frac{A_0}{P(0, t)}\right) + \int_0^t \left(-\sigma_P(u, T) [\sigma_P(u, t) + \sigma\rho] + \frac{\sigma_P^2(u, t) - \sigma^2}{2} - r^* \right) du$$

et

$$V_t = \int_0^t \left(\sigma^2 + \sigma_P^2(u, t) + 2\sigma\rho\sigma_P(u, t) \right) du.$$

Précisons les expressions des moments de l_t pour une structure de volatilité exponentielle :

$$\begin{aligned} M_t &= \ln\left(\frac{A_0}{P(0, t)}\right) - t \left(\frac{\eta^2}{2a^2} + \frac{\sigma\rho\eta}{a} + \frac{\sigma^2}{2} + r^* \right) + \frac{\eta^2}{4a^3} (1 - e^{-2at}) \\ &\quad + \left(\frac{\eta^2}{a^3} + \frac{\sigma\rho\eta}{a^2} \right) e^{-aT} (e^{at} - 1) + \frac{\eta^2}{2a^3} e^{-a(T+t)} (1 - e^{2at}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

et

$$V_t = t \left(\frac{\eta^2}{a^2} + \sigma^2 + \frac{2\sigma\rho\eta}{a} \right) - 2(1 - e^{-at}) \left(\frac{\eta^2}{a^3} + \frac{\sigma\rho\eta}{a} \right) + \frac{\eta^2}{2a^3} (1 - e^{-2at}).$$

(2.10)

Chapitre 3

Valorisation de l'engagement envers les assurés

Les caractéristiques du contrat d'assurances présentées au chapitre 1 et les processus introduits au chapitre précédent sont tous les éléments nécessaires pour envisager la valorisation du contrat d'assurance.

Le but de ce chapitre est la valorisation de l'engagement de la compagnie d'assurance à l'égard des assurés donné par les formules (1.10) et (1.11). La valorisation des droits des actionnaires donnés par les équations (1.12) et (1.13) peut se faire de manière similaire. Cependant, comme annoncé ci-dessus, nous nous intéressons à la tarification de l'engagement de l'assureur envers les assurés.

Nous commençons par donner les formules générales pour valoriser le contrat des assurés. Pour ceci, nous suivons les approches de GROSEN & JØRGENSEN (2002) et de BERNARD, LE COURTOIS & QUITTART-PINON (2005). Ensuite, nous précisons la méthode de valorisation.

3.1 Valeur du contrat sous la mesure risque-neutre

Nous nous plaçons dans l'univers risque-neutre pour prendre avantage de la tarification martingale. Dans cette théorie, l'absence d'arbitrage implique que sous la mesure de probabilité \mathcal{Q} , tous les processus de valeur escomptés sont des martingales.

En conséquence, si nous désignons par $V_L(t)$ la valeur en t ($t < \tau$) des flux des assurés, nous pouvons écrire :

$$V_L(t) = \mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \Theta_L(T) \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}} + e^{-\int_t^\tau r_s ds} \Theta_L(\tau) \mathbf{1}_{\{\tau < T\}} \right] \quad (3.1)$$

où $\mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}}$ désigne l'espérance sous la mesure risque-neutre \mathcal{Q} conditionnellement à l'information disponible en t et $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ la fonction indicatrice de l'ensemble \mathcal{A} .

Remarquez que le premier terme du côté droit de l'équation (3.1) représente la valeur en t du paiement éventuel à maturité et l'espérance est conditionnelle au fait qu'il n'y a pas eu de fermeture forcée précédemment via la fonction indicatrice. Le second terme représente la valeur en t du remboursement éventuel en cas de faillite avant l'instant T .

En fonction des paiements définis en (1.10) et (1.11), cette formule devient :

$$V_L(t) = \mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \left(L_T^* + \delta [\alpha A_T - L_T^*]^+ - [L_T^* - A_T]^+ \right) \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}} + e^{-\int_t^{\tau} r_s ds} \min[\lambda, 1] L_{\tau}^* \mathbf{1}_{\{\tau < T\}} \right]. \quad (3.2)$$

Le contrat peut être décomposé en quatre sous-contracts plus simples :

$$V_L(t) = \widehat{TG}_t + \widehat{BO}_t - \widehat{PO}_t + \widehat{LR}_t \quad (3.3)$$

où les notations ci-dessus s'inspirent de celles utilisées par GROSEN & JØRGENSEN (2002) et liées aux termes anglais suivants :

\widehat{TG}_t correspond à la garantie finale : *Terminal Guarantee*,

\widehat{BO}_t désigne l'option de participation aux bénéfices : *Bonus Option*,

\widehat{PO}_t désigne l'option de défaut sur laquelle les assurés possèdent une position courte : *Put Option*, et enfin

\widehat{LR}_t représente le dédommagement versé aux assurés en cas de faillite prématurée de la compagnie : *Liabilityholders' Rebate*.

Ces quatre sous-contracts possèdent individuellement les expressions :

$$\begin{aligned} \widehat{TG}_t &= \mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} L_T^* \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}} \right] \\ \widehat{BO}_t &= \mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \delta [\alpha A_T - L_T^*]^+ \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}} \right] \\ \widehat{PO}_t &= \mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} [L_T^* - A_T]^+ \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}} \right] \\ \widehat{LR}_t &= \mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}} \left[e^{-\int_t^{\tau} r_s ds} \min[\lambda, 1] L_{\tau}^* \mathbf{1}_{\{\tau < T\}} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Remarquez que GROSEN & JØRGENSEN (2002) ont obtenu des formules fermées dans le cas où le taux d'intérêt sans risque est constant. Ce cas est présenté dans la section A.2. Le but de ce travail est de valoriser des contrats d'assurance dans un cadre de taux stochastiques. Cette approche est plus compliquée et demande l'introduction de la mesure forward-neutre.

3.2 Valeur du contrat sous la mesure forward-neutre

Nous souhaitons évaluer le contrat d'assurance vie décrit ci-dessus. Pour cela, il faut déterminer la valeur des quatre sous-contracts donnés par les équations en (3.4). Pour simplifier les notations, nous nous concentrons dès à présent sur le cas $t = 0$.

Nous changeons d'univers de probabilité et passons dans le monde forward-neutre. Le fait que les prix relatifs sont des martingales sous la mesure martingale équivalente forward-neutre permet de réécrire la formule (3.2) comme suit :

$$V_L(0) = P(0, T) \mathbb{E}^{\mathcal{Q}_T} \left[\left(L_T^* + \delta [\alpha A_T - L_T^*]^+ - [L_T^* - A_T]^+ \right) \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}} \right. \\ \left. + e^{\int_{\tau}^T r_s ds} \min[\lambda, 1] L_{\tau}^* \mathbf{1}_{\{\tau < T\}} \right].$$

Les formules des sous-contracts données en (3.4) peuvent également être simplifiées par passage à l'univers forward-neutre. En utilisant le fait que $\mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}} = 1 - \mathbf{1}_{\{\tau < T\}}$, nous pouvons écrire :

$$V_L(0) = P(0, T) (TG + BO - PO + LR) \quad (3.5)$$

avec

$$\begin{aligned} TG &= L_T^* (1 - E_1) \\ BO &= \alpha \delta (E_7 - E_2) - \delta L_T^* (E_8 - E_3) \\ PO &= L_T^* (E_9 - E_4) - E_{10} + E_5 \\ LR &= \min[\lambda, 1] L_0 E_6 \end{aligned} \quad (3.6)$$

et où nous introduisons les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} E_1 &= \mathcal{Q}_T [\tau < T] & E_6 &= \mathbb{E}^{\mathcal{Q}_T} \left[e^{\int_{\tau}^T r_s ds} e^{r^* \tau} \mathbf{1}_{\{\tau < T\}} \right] \\ E_2 &= \mathbb{E}^{\mathcal{Q}_T} \left[A_T \mathbf{1}_{\{\tau < T\}} \mathbf{1}_{\{A_T > \frac{L_T^*}{\alpha}\}} \right] & E_7 &= \mathbb{E}^{\mathcal{Q}_T} \left[A_T \mathbf{1}_{\{A_T > \frac{L_T^*}{\alpha}\}} \right] \\ E_3 &= \mathcal{Q}_T \left[A_T > \frac{L_T^*}{\alpha}; \tau < T \right] & E_8 &= \mathcal{Q}_T \left[A_T > \frac{L_T^*}{\alpha} \right] \\ E_4 &= \mathcal{Q}_T \left[A_T < L_T^*; \tau < T \right] & E_9 &= \mathcal{Q}_T \left[A_T < L_T^* \right] \\ E_5 &= \mathbb{E}^{\mathcal{Q}_T} \left[A_T \mathbf{1}_{\{A_T < L_T^*\}} \mathbf{1}_{\{\tau < T\}} \right] & E_{10} &= \mathbb{E}^{\mathcal{Q}_T} \left[A_T \mathbf{1}_{\{A_T < L_T^*\}} \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Décrivons encore deux cas particuliers présentés dans l'annexe A. Le premier cas particulier reprend l'approche de BRIYS & DE VARENNE (1994, 1997a). Ces auteurs ne tiennent pas compte d'une faillite éventuelle qui aurait lieu avant la maturité des contrats. Le contrat est alors égal à une combinaison d'options européennes classiques ; il est donc possible de travailler à l'aide de formules fermées.

La section A.2 rappelle ensuite les résultats de GROSEN & JØRGENSEN (2002). Ces auteurs tiennent compte d'une faillite probable avant l'instant T et obtiennent des formules fermées dans le cadre d'un taux d'intérêt sans risque constant.

Avant d'aborder le calcul de chacune de ces formules, voyons la manière de déterminer des contrats équitables. Un contrat sera dit équitable s'il a été initié avec un partage juste de valeur entre assurés et actionnaires : un contrat est équitable si l'investissement initial est égal à la valeur initiale du contrat souscrit.

3.3 Contrats équitables

Les assurés bénéficient d'un taux d'intérêt garanti et d'une quote-part de la performance du portefeuille d'actifs de la compagnie. Au total, deux données clé caractérisent la police d'assurance : le taux d'intérêt garanti et le niveau de participation.

Le modèle permet de déterminer le taux d'intérêt garanti équitable ou le niveau de participation équitable que les assurés devraient demander pour les compenser entièrement des risques auxquels ils font face. En d'autres termes, le modèle cherche à déterminer le prix juste des passifs d'assurance étant donné la structure actuelle du bilan de la compagnie.

Le taux garanti r^* est en général inférieur au taux marché d'un actif sans risque de même maturité que la police. Comme l'expliquent BRIYS & DE VARENNE (1997a), le coefficient de participation δ peut être vu comme compensation pour la différence entre ces deux taux et comme incorporant la prime de risque requise par les assurés détenant des polices d'assurance vie risquées.

Les assurés doivent faire face au risque que les actifs ne performent pas comme prévu initialement. Les actionnaires peuvent s'en aller si les affaires ne vont pas bien. Les assurés touchent alors la part des actifs qui reste. En conséquence, les assurés demandent une prime de risque pour les compenser du risque qu'ils supportent.

Les assurés disposent de deux manières de compensation. La première possibilité est que, pour un niveau de participation δ donné, ils demandent un taux garanti r^* de manière à obtenir un taux de rendement équitable sur leur épargne. La seconde manière est que, pour un taux r^* donné, ils peuvent s'assurer que le niveau de participation δ est tel que la police d'assurance offre un taux de rendement équitable ex ante.

Nous cherchons ainsi à déterminer la participation aux bénéfices et le taux garanti permettant de rendre le contrat d'assurance vie équitable entre les *stakeholders*. Un contrat est dit équitable, ou juste, s'il a été initié avec un partage de valeur juste entre assurés et actionnaires.

Autrement dit, un contrat est équitable si l'investissement initial des assurés $L_0 = \alpha A_0$ est égal à la valeur totale des contrats souscrits. La condition d'équilibre sur r^* et δ est donc donnée par :

$$L_0 = V_L(0). \quad (3.8)$$

Il existe une infinité de couples (r^*, δ) permettant d'obtenir un contrat juste entre les deux parties. Ces paramètres dépendent de la politique d'investissement de la compagnie, c'est-à-dire de la volatilité σ de ses actifs et de la barrière de surveillance imposée par l'autorité de contrôle.

Cependant, tous les contrats ne sont pas acceptables. Les valeurs équitables de δ doivent obligatoirement être comprises entre 0 et 1. De plus, le taux technique et la participation bénéficiaire sont souvent soumis à des contraintes légales.

L'équation (3.8) donne soit le taux garanti r^* , soit le niveau de participation δ comme variable d'équilibre. Si δ est donné, le taux garanti doit être déterminé pour satisfaire la relation (3.8). Si r^* est donné, l'équation (3.8) donne la valeur d'équilibre du niveau de participation. Remarquez que si r^* ne peut être déterminé de manière explicite, il est possible de dériver une expression analytique pour le taux de participation δ .

Si nous souhaitons calculer la participation aux bénéfices rendant le contrat équitable (pour un taux technique donné), nous pouvons nous ramener au calcul de

$$\delta = \frac{\frac{L_0}{P(0,T)} - TG + PO - LR}{\alpha(E_7 - E_2) - L_T^*(E_8 - E_3)}. \quad (3.9)$$

Le cas du calcul du taux garanti rendant le contrat équitable (à participation aux bénéfices donnée) est plus délicat. Il faut avoir recours à un

algorithme de recherche de racine sur la condition que la valeur initiale du contrat est bien égale à L_0 .

3.4 Méthode d'évaluation

Pour valoriser le contrat d'assurance, nous avons besoin de déterminer chacune des probabilités et des espérances dans (3.6). Nous avons donc besoin de connaître la loi de l'instant de défaut τ - le premier temps de passage du processus lognormal des actifs A_t par la barrière exponentielle donnée en (1.8). Pour ceci, nous procédons par simulation.

Nous terminons ce chapitre en donnant les formules fermées permettant l'évaluation des espérances de (3.7) qui ne font pas intervenir l'instant de défaut τ .

3.4.1 Méthode de Monte-Carlo

Pour simuler le processus des actifs, nous utilisons une méthode classique, décrite dans JÄCKEL 2002. Elle consiste à simuler le processus en utilisant la décomposition de Cholesky de la matrice de covariance de celui-ci.

Notons V une trajectoire vectorialisée de taille n , chaque composante suit une loi normale. Désignons encore par C la matrice de covariance de V . Pour simuler V , il suffit alors de simuler un vecteur \tilde{V} de n lois normales indépendantes, puis de déterminer une matrice A telle que $AA^T = C$. Le vecteur $A\tilde{V}$ convient alors pour simuler V .

Nous souhaitons simuler le processus $\chi_t = e^{-r^*t} A_t$ qui est décrit à l'aide de l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \chi_t = \frac{A_0}{P(0,t)} \exp & \left[\int_0^t (\sigma_P(u,t) + \sigma\rho) dZ_1^{\mathcal{Q}^T}(u) + \int_0^t \sigma\sqrt{1-\rho^2} dZ_2^{\mathcal{Q}^T}(u) \right. \\ & \left. + \int_0^t \left(-\sigma_P(u,T) [\sigma_P(u,t) + \sigma\rho] + \frac{\sigma_P^2(u,t) - \sigma^2}{2} - r^* \right) du \right]. \end{aligned}$$

Nous pouvons réécrire cette expression en décomposant le processus à l'intérieur de l'exponentielle en un terme déterministe et en un terme aléatoire. Si nous désignons par U_t le terme déterministe et par V_t le terme aléatoire, nous avons :

$$\chi_t = \frac{A_0}{P(0,t)} \exp(U_t + V_t)$$

avec

$$U_t = \int_0^t \left(-\sigma_P(u, T) \left[\sigma_P(u, t) + \sigma\rho \right] + \frac{\sigma_P^2(u, t) - \sigma^2}{2} - r^* \right) du \Bigg],$$

$$V_t = \int_0^t \left(\sigma_P(u, t) + \sigma\rho \right) dZ_1^{\mathcal{Q}_T}(u) + \int_0^t \sigma \sqrt{1 - \rho^2} dZ_2^{\mathcal{Q}_T}(u).$$

Pour appliquer la méthode décrite ci-dessus, nous discrétisons l'intervalle $[0, T]$ en n sous-intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ pour $i = 0, \dots, n-1$. Nous souhaitons alors simuler $(\chi_{t_i})_{0 \leq i \leq n}$. La seule difficulté consiste à simuler V_{t_i} , variables gaussiennes non indépendantes. La matrice de covariance est donnée par :

$$\begin{aligned} C_{i,j} &= \text{Cov}(V_{t_i}, V_{t_j}) \\ &= \int_0^{\min(t_i, t_j)} (\sigma_P(u, t_i) + \sigma\rho)(\sigma_P(u, t_j) + \sigma\rho) du \\ &\quad + \int_0^{\min(t_i, t_j)} \sigma^2 (1 - \rho^2) du \end{aligned}$$

En appliquant la méthode décrite ci-dessus, nous obtenons une simulation de la trajectoire du processus χ_t .

Lors de l'évaluation du contrat, nous sommes confrontés au franchissement d'une barrière par un processus discrétisé. Ce problème est rencontré classiquement lors de l'évaluation par Monte-Carlo d'options à barrières. La probabilité que le processus touche la barrière entre deux instants successifs n'est pas négligeable et introduit un biais de discrétisation. Il faut ainsi discrétiser assez finement pour obtenir un résultat numérique précis.

Dans le cadre de ce travail, nous travaillons avec cinq millions de simulations en discrétisant le temps en semaines, ce biais de discrétisation est alors négligeable. L'algorithme de simulation a été écrit en langage Fortran et est donné dans l'annexe C.

Les auteurs BERNARD (2005) et BERNARD, LE COURTOIS & QUITTART-PINON (2005) présentent une alternative aux simulations de Monte-Carlo. Leur méthode se base sur l'approximation de FORTET (1943). Elle consiste à approximer la loi du temps de premier passage τ . L'annexe B reprend une description de cette méthodologie.

3.4.2 Formules fermées

Il est possible d'évaluer les espérances de 3.7 qui ne font pas intervenir l'instant τ à l'aide de formules fermées. Nous reprenons ici les notations de BERNARD, LE COURTOIS & QUITTART-PINON (2005).

Le processus χ_T suit une loi lognormale de moments M_T et V_T (donnés par les formules (2.9) et (2.10)). Notons \mathcal{N} la fonction de répartition de la loi normale réduite.

Nous introduisons les deux fonctions suivantes pour une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$:

$$\begin{aligned}\Phi_1(m; \sigma; a) &= \mathbb{E}\left(e^X \mathbf{1}_{\{e^X > a\}}\right) = \exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right) \mathcal{N}\left(\frac{m + \sigma^2 - \ln(a)}{\sigma}\right), \\ \Phi_2(m; \sigma; a) &= \mathbb{E}\left(e^X \mathbf{1}_{\{e^X < a\}}\right) = \exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right) \mathcal{N}\left(\frac{\ln(a) - m - \sigma^2}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

En appliquant les propriétés associées aux fonctions Φ_1 et Φ_2 , nous obtenons les formules suivantes pour les espérances E_7 , E_8 , E_9 et E_{10} :

$$\begin{aligned}E_7 &= e^{r^*T} \Phi_1\left(M_T; \sqrt{V_T}; \frac{L_0}{\alpha}\right) \\ E_8 &= \mathcal{N}\left(\frac{M_T - \ln\left(\frac{L_0}{\alpha}\right)}{\sqrt{V_T}}\right) \\ E_9 &= \mathcal{N}\left(\frac{\ln(L_0) - M_T}{\sqrt{V_T}}\right) \\ E_{10} &= e^{r^*T} \Phi_2\left(M_T; \sqrt{V_T}; L_0\right)\end{aligned}\tag{3.10}$$

Chapitre 4

Etude numérique

L'enjeu de ce chapitre est l'évaluation numérique du contrat d'assurance vie présenté ci-avant. Comme nous l'avons remarqué précédemment, deux paramètres-clés sont en jeu : le taux technique r^* et le coefficient de participation δ .

Avant de présenter les résultats numériques proprement dits, nous fixons les paramètres qui interviennent dans l'étude, tant au niveau des marchés financiers qu'au niveau de la compagnie et du contrat d'assurances.

Ensuite, nous passons à l'évaluation du contrat d'assurance. Nous analysons l'influence de différents paramètres sur la probabilité de défaut, sur la valeur du contrat ainsi que le taux de participations requis pour donner lieu à des contrats équitables.

4.1 Données

Fixons d'abord l'environnement économique de notre étude. Pour le processus du taux d'intérêt sans risque, quatre paramètres doivent être fixés, à savoir la force de rappel, le taux d'équilibre à long terme, la volatilité et sa valeur initiale. Pour les trois premiers paramètres, nous prenons les valeurs obtenues par CHARLIER & KLEYNEN (2003) sur base des marchés français et allemands, à savoir

$$a = 0.463, \theta = 0.0562 \text{ et } \eta = 0.0067.$$

Nous supposons que le taux sans risque est de 2.91% à l'instant $t = 0$.

En ce qui concerne le volet de l'assurance proprement dit, nous admettons que la part initiale des primes dans les actifs de la compagnie, α , est de 80%. La valeur initiale des actifs est de 100 et leur volatilité σ de 10.25%. Nous

FIG. 4.1 – Données relatives aux marchés financiers

a	θ	η	r_0
0.463	0.0562	0.0067	2.91%

supposons en outre que les contrats sont souscrits pour une durée de dix ans.

Le niveau de la barrière réglementaire λ , imposé par l'autorité de contrôle, est fixé à 75%. Nous supposons par ailleurs que le taux technique maximum autorisé par la législation, r_{\max}^* , est de 2.5%.

FIG. 4.2 – Données relatives au marché de l'assurance

α	A_0	σ	T	λ	r_{\max}^*
80%	100	10.25%	10	0.75	2.5%

Il reste à déterminer le taux technique et le taux de participation aux bénéfices. Nous voulons les fixer de manière à rendre les contrats équitables. Ceci est l'objet du point suivant.

4.1.1 Contrats équitables

Les paramètres r^* et δ ne peuvent pas être fixés de manière indépendante. Le taux technique ne doit être ni trop haut (risque de faillite trop important en cas de baisse des taux), ni trop bas (contrat en défaveur de l'assuré). Par ailleurs, il ne peut dépasser un seuil légal limite.

Quant à la participation aux bénéfices, elle est calculée de manière à garantir l'équité des contrats vendus aux assurés. Ainsi, δ est d'autant plus grand que le taux garanti est faible.

Niveau du taux de la participation bénéficiaire

Le seuil légal maximum, r_{\max}^* , est bien adapté dans le sens où il n'est pas trop élevé par rapport aux taux d'intérêt en vigueur sur les marchés financiers. Nous supposons donc que la compagnie propose un taux technique égal à r_{\max}^* .

La figure 4.3 représente la valeur du contrat d'assurance en fonction du taux de participation aux bénéfices δ . Elle est réalisée avec un taux technique

de 2.5%.

Pour un taux technique donné, la valeur du contrat est d'autant plus grande que le taux de participation aux bénéfices est important. En effet, un taux de participation aux bénéfices plus élevé est à l'avantage des assurés, le contrat a donc une valeur plus importante.

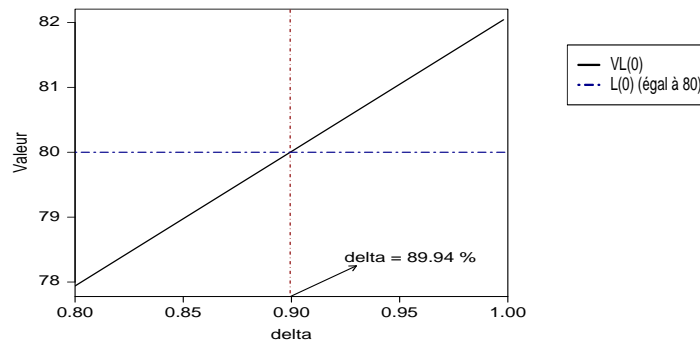


FIG. 4.3 – Valeur du contrat en fonction du taux de participation $\alpha = 80\%$, $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $T = 10$, $\lambda = 0.75$, $r^* = 2.5\%$

Nous recherchons le taux de participation bénéficiaire qui rend le contrat équitable. L'investissement initial des assurés est donné par $L_0 = \alpha A_0$, dans notre exemple L_0 vaut 80. Il faut ainsi trouver la valeur de δ qui donne lieu à un contrat de valeur 80. Notons qu'une seule valeur de δ correspond à un contrat équitable, ie. donnant lieu à une valeur initiale égale à $L_0 = 80$.

Pour un taux technique r^* de 2.5%, le taux de participation aux bénéfices requis est ainsi de 89.94%. Rappelons qu'il peut être déterminé à partir de la formule (3.9). Nous voyons également que $V_L(0)$ est une fonction linéaire en δ comme l'indique la relation (3.9).

Niveau du taux technique

La figure 4.4 représente la valeur du contrat en fonction du taux garanti. Elle est réalisée avec un taux de participation aux bénéfices égal à 89.94%.

Pour δ donné, la valeur du contrat est d'autant plus grande que le taux technique est plus élevé. De la même manière que pour le taux de participation aux bénéfices, un taux technique plus élevé représente un avantage pour les assurés et par conséquent le contrat gagne en valeur.

La figure 4.4 montre qu'une seule valeur de r^* permet d'obtenir un contrat équitable. Rappelons qu'il n'est pas possible de trouver une formule directe

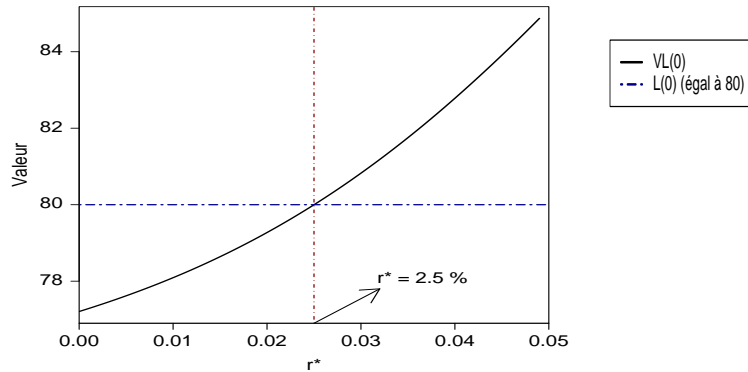


FIG. 4.4 – Valeur du contrat en fonction du taux technique $\alpha = 80\%$, $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $T = 10$, $\lambda = 0.75$, $\delta = 89.94\%$

pour déterminer le niveau d'équilibre de r^* , mais qu'il faut avoir recours à un algorithme de recherche de racine. Graphiquement nous voyons que, pour donner lieu à un contrat juste, r^* doit être égal à 2.5% si δ vaut 89.94 %.

4.1.2 Paramètres et valeur du contrat

Le point précédent nous permet de fixer les derniers paramètres nécessaires pour l'étude, à savoir r^* et δ . Ils sont choisis de manière à obtenir des contrats équitables. Le tableau 4.5 donne l'ensemble des valeurs des paramètres entrant en jeu. Certains sont susceptibles de changer par la suite, en particulier la volatilité σ , les paramètres λ et α ou la durée du contrat T .

FIG. 4.5 – Données

a	θ	η	r_0	α	A_0
0.463	0.0562	0.0067	2.91%	80%	100
σ	T	λ	r^*	δ	
10.25%	10	0,75	2.5%	89.94%	

A l'aide des paramètres du tableau 4.5, nous pouvons déterminer les valeurs pour les différentes espérances E_i de (3.7). Celles-ci permettent alors de valoriser les quatre sous-contrats et le contrat d'assurance. Ces valeurs sont données au tableau 4.6.

Ayant fixé tous les paramètres intervenant dans cette étude, nous allons analyser dans les sections suivantes l'influence de différents paramètres sur

FIG. 4.6 – Valeurs des E_i , des sous-contrats et du contrat

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
0.03973	0.16081	0.00112	0.03393	2.70067
E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}
0.05674	136.82414	0.73182	0.09579	8.51983
TG	BO	PO	LR	$V_L(0)$
98.6404	30.8238	0.5350	3.4045	79.9978

la probabilité de défaut, sur la valeur du contrat ou encore sur le niveau de la participation aux bénéfices caractérisant des contrats initialement justes.

Nous commençons par étudier l'impact du taux technique, pour considérer après l'influence de la volatilité des actifs. Ensuite, nous analysons la dépendance au niveau de la barrière réglementaire et au paramètre α . Nous terminons ce chapitre par une analyse de l'impact de la durée des contrats.

4.2 Sensibilité au taux technique

Ce point est consacré à l'étude de la sensibilité au taux technique. Nous commençons par analyser son influence sur la probabilité de décès avant de nous intéresser au taux de participation aux bénéfices requis pour rendre le contrat équitable.

4.2.1 Probabilité de défaut

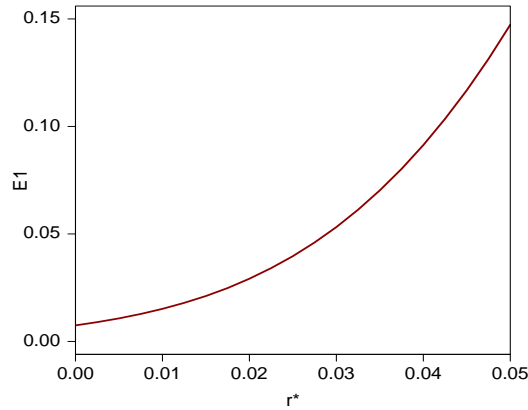
La figure 4.7 illustre la probabilité de défaut de la compagnie en fonction du taux garanti. Les paramètres prennent les valeurs définies en 4.5 et le taux technique varie entre 0% et 5%.

La probabilité de défaut est d'autant plus grande que le taux technique est élevé. Le défaut a été défini au chapitre 1 à l'aide de la barrière réglementaire B_t , donnée par (1.7) :

$$B_t = \lambda L_t^* = \lambda L_0 e^{r^* t}, \quad (4.1)$$

la compagnie d'assurance étant déclarée en faillite quand la valeur des actifs atteint cette limite.

FIG. 4.7 – Probabilité de défaut en fonction du taux technique
 $\alpha = 80\%$, $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $T = 10$, $\lambda = 0.75$



L_t^* représente l'engagement nominal de la compagnie d'assurance à l'égard des assurés à l'instant t . D'un point de vue formel, nous avons

$$L_t^* = L_0 e^{r^*t} = \alpha A_0 e^{r^*t}. \quad (4.2)$$

L_t^* équivaut à la prime initiale des assurés L_0 , valorisée au taux technique jusqu'à l'instant t .

Si le taux technique augmente, la garantie nominale des contrats est plus élevée. La barrière réglementaire est donc également plus élevée. La marge entre la valeur des actifs et la barrière se rétrécit et le risque de défaut devient plus important. Ce risque est d'autant plus grand que le taux technique est élevé.

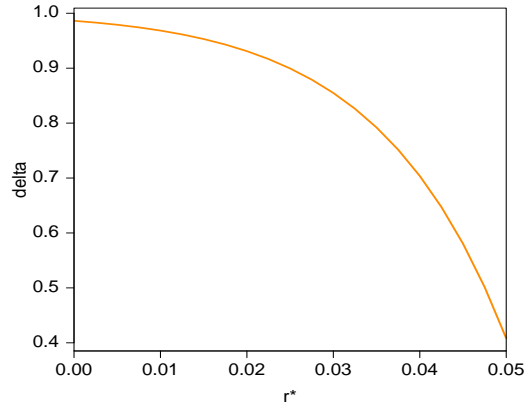
Avant de passer au point suivant, remarquons encore que la probabilité de défaut est non nulle pour un contrat sans taux technique ($r^* = 0$).

4.2.2 Participation bénéficiaire juste

L'étude de la valeur du contrat en fonction du taux technique a déjà été faite au point 4.1.1, nous nous intéressons donc directement à la participation bénéficiaire donnant lieu à des contrats initialement justes.

La figure 4.12 donne le taux de participation aux bénéfices en fonction du taux technique tel que le contrat soit initialement juste. r^* prend ses valeurs dans l'intervalle $[0\%, 5\%]$, les autres paramètres prennent les valeurs du tableau 4.5.

FIG. 4.8 – Valeurs équitables de δ en fonction de r^*
 $\alpha = 80\%$, $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $T = 10$, $\lambda = 0.75$



La figure 4.12 montre que, plus le taux garanti r^* est faible, plus il va falloir compenser par une participation aux bénéfices élevée. En effet, un taux technique plus faible est au désavantage du preneur d'assurances ; pour avoir un contrat équitable, δ doit donc augmenter.

4.2.3 Conclusion

Un contrat proposant un taux technique plus élevé a plus de valeur ; en même temps, il génère un risque de défaut plus important. Un taux technique plus élevé a pour effet d'augmenter la barrière réglementaire de solvabilité. Pour une même valeur initiale des actifs, la marge entre la valeur des actifs et la barrière est réduite en fonction du taux technique.

Rappelons que le taux technique est défini pour toute la durée du contrat. Pour éviter les problèmes de solvabilité quand les taux marchés baissent, il faut fixer le taux garanti de manière prudente.

En ce qui concerne la participation aux bénéfices rendant le contrat équitable à taux technique donnée, elle diminue en fonction du taux garanti. Un taux technique plus élevé représente évidemment un avantage pour les assurés. Afin de proposer un contrat équitable, la participation aux bénéfices doit donc être diminuée.

Ces points nous ont permis de montrer que le taux technique doit être fixé de manière à offrir un rendement suffisant sans pour autant prendre des risques de solvabilité trop grands.

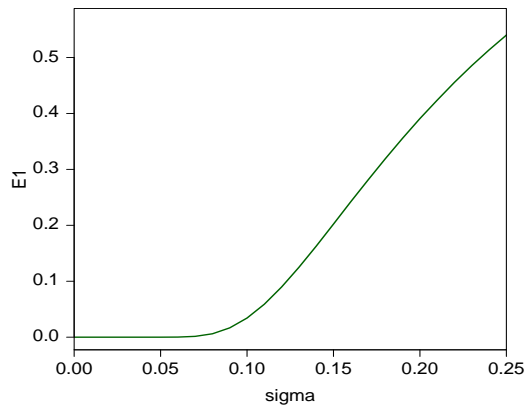
4.3 Sensibilité à la volatilité

A présent, nous nous intéressons à la sensibilité à la volatilité σ des actifs. La première partie donne une étude de l'influence de σ sur la probabilité de défaut. Ensuite, nous analysons son impact sur la valeur du contrat pour conclure avec une analyse de la dépendance du niveau de la participation bénéficiaire juste en fonction de σ .

4.3.1 Probabilité de défaut

La figure 4.9 représente la probabilité de défaut E_1 en fonction de la volatilité des actifs. Les paramètres autres que σ prennent les valeurs définies au tableau 4.5, la volatilité varie quant à elle dans l'intervalle $[0\%, 25\%]$.

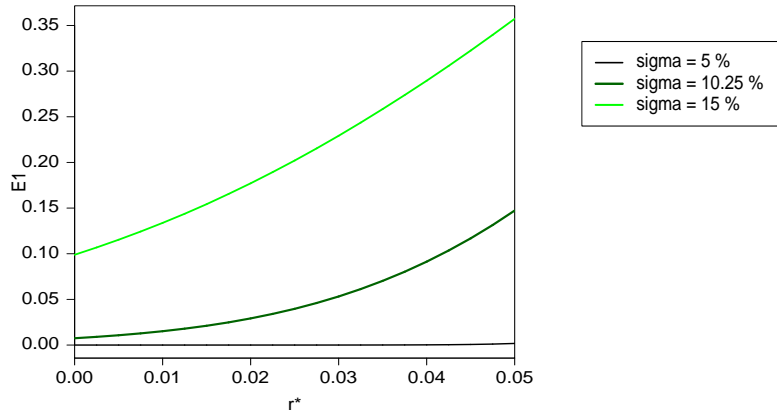
FIG. 4.9 – Probabilité de défaut en fonction de la volatilité des actifs
 $\alpha = 80\%$, $A_0 = 100$, $T = 10$, $\lambda = 0.75$, $r^* = 2.5\%$



Quand la volatilité des actifs est faible (inférieure à 7%), la probabilité de défaut est négligeable. Par contre, quand σ augmente, la probabilité de défaut croît également. Une volatilité plus élevée représente des actifs plus volatiles. Par conséquent la probabilité que la valeur des actifs traverse, à un instant donné, la barrière réglementaire, augmente. Pour une volatilité de 25%, E_1 prend ainsi une valeur dépassant les 50%.

Analysons à présent la probabilité de défaut en fonction du taux technique et de la volatilité. La figure 4.10 illustre l'évolution de E_1 en fonction de ces deux paramètres. r^* varie dans l'intervalle $[0\%, 5\%]$ et σ prend une valeur de 5%, 10.25% et 15% respectivement. Quand σ est égal à 10.25%, la courbe correspond à celle de la figure 4.7.

FIG. 4.10 – Probabilité de défaut en fonction de r^* et de σ
 $\alpha = 80\%$, $A_0 = 100$, $T = 10$, $\lambda = 0.75$



La figure 4.10 montre que, pour un taux technique donné, E_1 est d'autant plus élevé que la volatilité des actifs est grande.

Pour une faible volatilité des actifs ($\sigma = 5\%$, courbe noire en figure 4.10), la probabilité de défaut est négligeable et ceci indépendamment du taux technique.

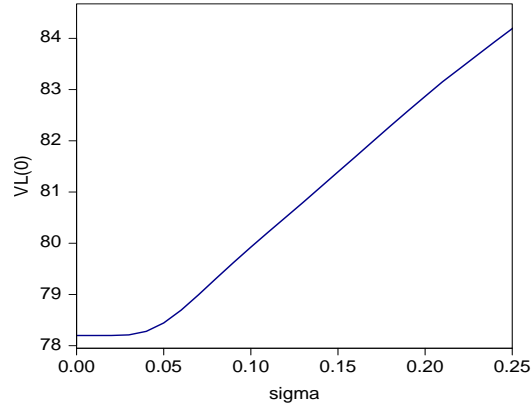
Si nous nous intéressons à présent à la courbe représentant une volatilité importante ($\sigma = 15\%$, courbe vert clair), nous constatons que, même pour des taux techniques faibles, la probabilité de défaut est très importante. Ainsi, E_1 a une valeur de l'ordre de 10% quand le taux technique est nul. La pente est de plus en plus importante : l'effet d'une volatilité élevée est donc de plus en plus important.

4.3.2 Evaluation du contrat d'assurance

En figure 4.11, nous illustrons la dépendance de la valeur du contrat d'assurance en la volatilité des actifs. Les paramètres autres que σ prennent les valeurs du tableau 4.5, la volatilité des actifs prend les valeurs dans une fourchette allant de 0% à 25%.

De la figure 4.11, il apparaît que la valeur du contrat est d'autant plus élevée que la volatilité des actifs est importante. En effet, une volatilité des actifs plus élevée entraîne des fluctuations plus grandes pour la valeur des actifs. La possibilité pour la compagnie de réaliser des rendements plus élevés est plus importante. En conséquence, le contrat a une valeur plus grande.

FIG. 4.11 – Valeur du contrat d’assurance en fonction de σ
 $\alpha = 80\%$, $A_0 = 100$, $T = 10$, $\lambda = 0.75$, $r^* = 2.5\%$, $\delta = 89.94\%$



Valeur des sous-contrats

Voyons à présent la valeur des quatre sous-contrats en fonction de la volatilité. Rappelons que TG correspond à la garantie finale, BO désigne l’option de participation aux bénéfices, PO l’option de défaut et LR représente le dédommagement des assurés en cas de faillite de la compagnie d’assurance.

Le tableau 4.12 donne les valeurs du contrat d’assurance et des sous-contrats pour différentes volatilités.

FIG. 4.12 – Valeur du contrat et des sous-contrats en fonction de σ
 $\alpha = 80\%$, $A_0 = 100$, $T = 10$, $\lambda = 0.75$, $r^* = 2.5\%$, $\delta = 89.94\%$

σ	$V_L(0)$	TG	BO	PO	LR
5%	78.4439	102.7214	27.0502	0.0895	0.0048
7.5%	79.1524	102.3950	28.4729	0.1985	0.2659
10%	79.9239	99.2072	30.5900	0.5105	2.9248
12.5%	80.6529	91.7429	33.0070	0.6392	9.3065
15%	81.3932	81.9504	35.4277	0.6074	17.8712
17.5%	82.1344	71.8670	37.6471	0.5218	26.8757
20%	82.8671	62.5687	39.6063	0.4295	35.3346
22.5%	83.5500	54.3621	41.2763	0.3501	42.9214
25%	84.1902	47.2459	42.7124	0.2799	49.5904

Si nous analysons la valeur de la garantie finale en fonction de la volatilité, nous voyons que TG est décroissant en fonction de σ . Pour les assurés, il

est ainsi de moins en moins intéressant de posséder ce sous-contrat. En effet, si la volatilité augmente, les actifs sont de plus en plus volatiles et la chance d'obtenir le paiement garanti à maturité diminue. Le sous-contrat comporte plus de risque et il a une valeur moindre.

D'un point de vue mathématique, il ressort de la formule (3.6) que TG est proportionnel à $1 - E_1$. Puisque la probabilité de défaut augmente en fonction de la volatilité, la valeur de TG diminue en fonction de ce paramètre.

La valeur de l'option de participation aux bénéfices BO est croissante en σ . Une volatilité plus élevée représente une possibilité accrue que les actifs de la compagnie aient un rendement supérieur. Ceci ouvre ainsi la voie à des participations bénéficiaires plus élevées.

La dépendance de l'option de défaut PO change en fonction de la valeur de la volatilité. Quand σ est inférieur à 12.5%, PO croît en fonction de σ , à partir des valeurs de σ supérieures à 12.5%, la valeur diminue.

La valeur de PO est conditionnelle au fait qu'il n'y ait pas eu de défaut avant le terme des contrats. De plus, elle dépend de σ à travers le *payoff* de l'option, la valeur d'un put étant croissant avec la volatilité du sous-jacent. PO dépend ainsi doublement de la volatilité.

Quand la volatilité est faible, c'est la dépendance du *payoff* de l'option qui l'emporte. Si σ augmente, la tendance s'inverse et c'est le risque de défaut (de plus en plus important) qui l'emporte.

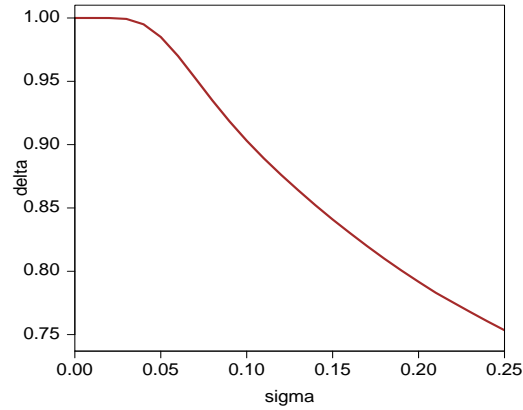
Le dédommagement LR en cas de faillite avant le terme des contrats est croissante en fonction de la volatilité des actifs. Une volatilité plus importante représente un risque de défaut plus élevé, la probabilité de toucher un paiement avant la maturité des contrats est donc plus grande. Le paiement du dédommagement étant conditionnel à une faillite avant maturité, la valeur de l'indemnisation gagne en valeur.

4.3.3 Participation bénéficiaire juste

La figure 4.13 illustre le niveau de la participation aux bénéfices requise pour avoir un contrat initialement juste. Comme pour les graphiques 4.9 et 4.11, la volatilité varie dans l'intervalle allant de 0% à 25%, les autres paramètres prenant les valeurs définies en 4.5.

A taux garanti constant, la participation aux bénéfices décroît en fonction de la volatilité. Le point précédent a montré que la valeur du contrat

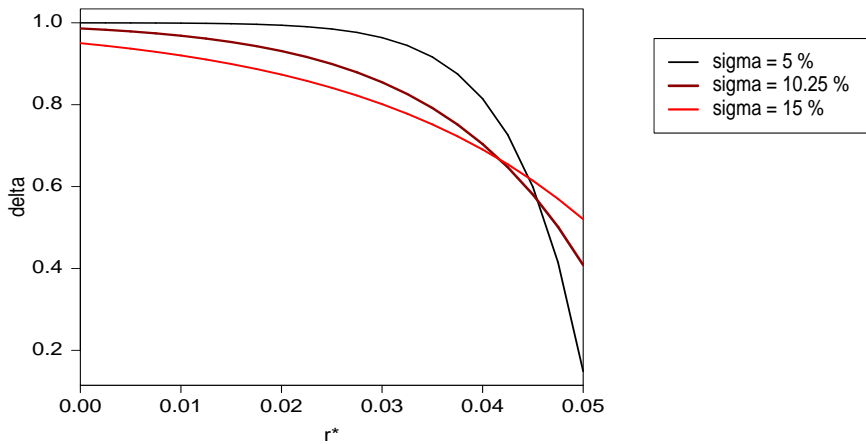
FIG. 4.13 – Valeurs équitables de δ en fonction de σ
 $\alpha = 80\%$, $A_0 = 100$, $T = 10$, $\lambda = 0.75$, $r^* = 2.5\%$



augmente avec σ . Une volatilité plus importante représente ainsi un contrat à l'avantage des assurés ; pour que le contrat ne favorise pas excessivement les assurés, il faut diminuer δ .

Intéressons-nous à présent à la relation entre les deux paramètres clés qui sont le taux technique et le taux de participation aux bénéfices. Cette relation est illustrée en figure 4.14 en fonction de différentes valeurs de la volatilité des actifs. Nous gardons une valeur de 10.25% pour σ et nous comparons les résultats à ceux obtenus avec une volatilité de 5% et de 15% respectivement.

FIG. 4.14 – Relation entre r^* et δ en fonction de σ
 $\alpha = 80\%$, $A_0 = 10$, $T = 10$, $\lambda = 0.75$



Pour des valeurs de r^* inférieures au taux sans risque en vigueur en $t = 0$,

il apparaît que la participation aux bénéfices est d'autant plus faible que la volatilité est élevée. En effet, lorsque la volatilité est faible, c'est-à-dire en quasi-absence de risque de défaut, l'augmentation de la volatilité induit une rentabilité plus forte ; pour que le contrat ne favorise pas excessivement l'assuré, la participation aux bénéfices doit baisser.

Cette tendance s'inverse par contre quand le taux technique s'approche des 5%. Dans ce cas, r^* est nettement supérieur au taux sans risque, initialement égal à 2.91%. Quand la volatilité des actifs est grande, le risque de défaut est important et les assurés supportent un risque croissant de ne pas récupérer entièrement leur capital investi. Pour un taux technique donné, la participation aux bénéfices doit nécessairement être augmentée pour garder un contrat équitable.

4.3.4 Conclusion

Les analyses de cette section montrent l'importance d'une bonne politique d'investissement à travers de la volatilité des actifs. Quand la volatilité est plus élevée, la probabilité de réaliser des rendements supérieurs est plus grande, d'une autre côté, la probabilité de subir des pertes élevées sur les marchés financiers est également grande.

Il ressort de l'étude ci-dessus qu'une volatilité plus élevée augmente le risque de défaut. La probabilité de toucher un dédommagement avant l'échéance du contrat est plus grande.

D'un autre côté, une volatilité plus importante permet la réalisation de rendements supérieurs, la valeur de leur contrat est ainsi plus grande. Une grande volatilité des actifs est à l'avantage des assurés ; pour éviter que le contrat ne favorise pas excessivement les assurés, la participation aux bénéfices juste doit être plus faible.

En conclusion, les compagnies d'assurance doivent choisir une politique d'investissement de manière à réaliser des rendements supérieurs, tout en évitant de mettre trop en danger leur solvabilité. Ceci explique l'intérêt accru pour une gestion actif-passif au sein des compagnies d'assurance.

4.4 Sensibilité au paramètre λ

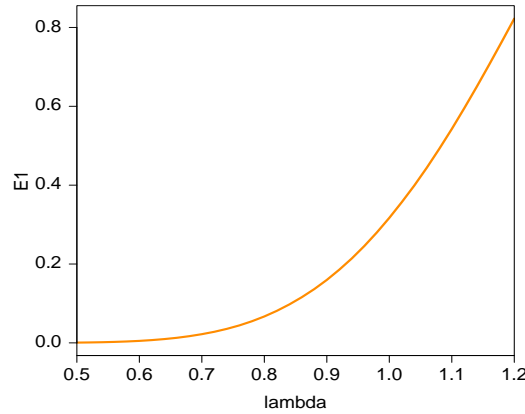
Considérons à présent la sensibilité au paramètre λ . λ représente l'exigence de solvabilité de la part de l'autorité de contrôle à travers le niveau de la barrière réglementaire B_t , rappelée en (4.1). Une valeur de λ plus élevée représente une autorité de contrôle plus stricte.

$\lambda \geq 1$ représente une situation dans laquelle l'autorité de contrôle oblige les compagnies à disposer d'une certaine marge entre le cours de leurs actifs et les engagements nominaux envers les assurés. En revanche, si $\lambda < 1$, l'autorité de contrôle admet des déficits limités et temporaires.

4.4.1 Probabilité de défaut

La figure 4.15 illustre la probabilité de défaut en fonction du paramètre λ qui représente le niveau de la barrière réglementaire exigée par l'autorité de contrôle.

FIG. 4.15 – Probabilité de défaut en fonction de λ
 $\alpha = 80\%$, $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $T = 10$, $r^* = 2.5\%$

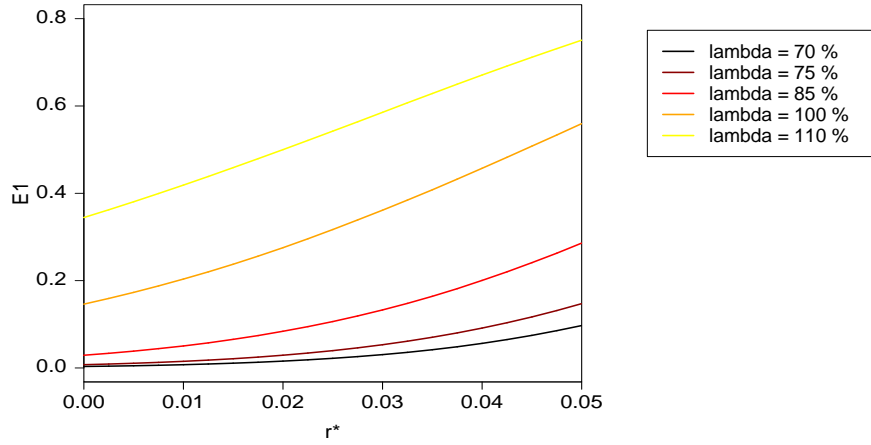


Il apparaît en figure 4.15 que la probabilité de défaut est croissante en fonction de λ . Si λ augmente, l'autorité de contrôle devient plus exigeante et demande des garanties de solvabilité plus importantes. Pour une même valeur initiale des actifs, la barrière réglementaire est donc plus élevée. La marge entre la barrière et le cours initial des actifs est réduit. La probabilité que la valeur des actifs va atteindre B_t augmente, E_1 s'en retrouve donc plus élevé.

Pour des valeurs de λ supérieures à 100%, nous constatons que la probabilité de défaut devient très importante : E_1 a des valeurs supérieures à 30% et dépasse même les 80% quand λ vaut 120%.

Analysons encore la probabilité de défaut en fonction du taux technique et de λ . En figure 4.16, nous représentons la probabilité de défaut en fonction du taux technique pour cinq niveaux de la limite réglementaire : λ prend les valeurs de 70%, 75%, 85%, 100% et 110% respectivement.

FIG. 4.16 – Probabilité de défaut en fonction de r^* et de λ
 $\alpha = 80\%$, $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $T = 10$

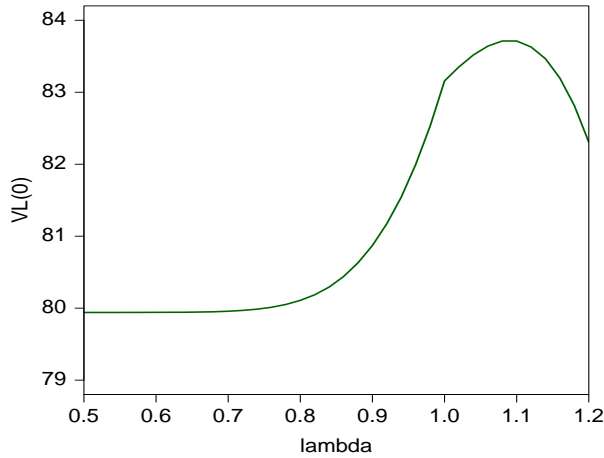


La probabilité de défaut est croissante en fonction de r^* et de λ . Quand λ a une valeur supérieure à 100%, nous constatons que, même pour un taux technique nul, le risque de défaut est non négligeable.

4.4.2 Evaluation du contrat d'assurance

Nous nous intéressons à présent à la dépendance de la valeur du contrat d'assurance en λ . La figure 4.17 représente la sensibilité de $V_L(0)$ à la hauteur du niveau de la barrière réglementaire.

FIG. 4.17 – Valeur du contrat d'assurance en fonction de λ
 $\alpha = 80\%$, $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $T = 10$, $r^* = 2.5\%$, $\delta = 89.94\%$



La courbe représentée en figure 4.17 présente une discontinuité quand λ est égal à 100%. En effet, ce point marque un changement dans la politique poursuivie par l'autorité de contrôle : d'une politique plus laxiste, elle passe vers une politique plus exigeante.

La courbe n'est pas monotone : la valeur du contrat commence à augmenter en fonction de la λ , puis, quand λ dépasse 110%, elle devient décroissante.

Une plus grande valeur de λ représente une barrière réglementaire plus élevée. Si la compagnie n'est pas déclarée en faillite avant le terme des contrats, les assurés ont une probabilité plus élevée d'obtenir un paiement égal à leur investissement initial. La valeur de leur contrat est donc croissante.

En même temps, la probabilité d'une fermeture forcée avant échéance devient plus importante. A partir d'une certaine valeur de λ , ce risque l'emporte et devient trop élevé. En conséquence, la valeur du contrat diminue.

Valeurs des quatre sous-contrats

Après avoir analysé la dépendance de la valeur du contrat, voyons à présent l'influence de λ sur les quatre sous-contrats composant le contrat d'assurance.

FIG. 4.18 – Valeur du contrat et des sous-contrats en fonction de λ
 $\alpha = 80\%$, $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $T = 10$, $r^* = 2.5\%$, $\delta = 89.94\%$

λ	$V_L(0)$	TG	BO	PO	LR
0.50	79.9402	102.6508	30.8361	1.2861	0.0376
0.60	79.9419	102.2038	30.8361	1.1236	0.3339
0.70	79.9572	100.4561	30.8339	0.7649	1.7415
0.80	80.1081	95.8380	30.7854	0.3127	6.2054
0.90	80.8708	86.3201	30.3798	0.0431	17.1210
1.00	83.1577	70.1579	28.4489	0.0000	39.9495
1.10	83.7120	47.0010	22.7196	0.0000	68.7525
1.20	82.3072	18.2490	10.6497	0.0000	107.2506

Si nous nous intéressons à l'influence de λ sur la garantie finale TG , nous voyons que la valeur de ce sous-contrat diminue en fonction de λ . La valeur de TG est conditionnelle à l'absence d'une faillite avant le terme des contrats. Une valeur de λ plus élevée représente une barrière réglementaire plus élevée, la probabilité d'une fermeture augmente donc. La probabilité que le contrat

arrive jusqu'au terme est plus faible et TG diminue.

Voyons à présent la valeur de l'option de participation aux bénéfices en fonction de λ . La valeur de BO diminue en fonction de λ . Tout comme TG , le paiement d'une participation bénéficiaire est conditionnelle au fait que le contrat arrive au terme, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas eu de défaut au préalable. Puisque la probabilité de faillite augmente en fonction λ , il y a de moins en moins de situations dans lesquelles les contrats vont arriver à échéance. La valeur de BO diminue en conséquence.

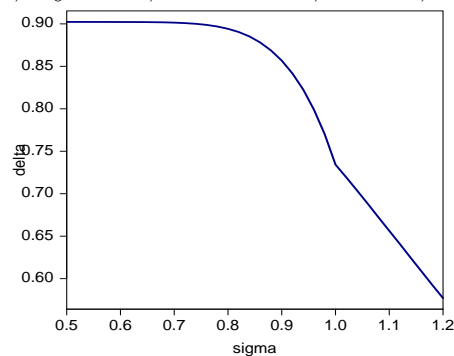
En ce qui concerne la dépendance de l'option de défaut PO en λ , la valeur de PO décroît avec λ . La valeur de PO est également conditionnelle au fait qu'il n'y a pas eu de défaut avant la maturité des contrats. Or, λ plus élevé représente un risque accru pour la compagnie de faire défaut, les assurés courent un risque plus élevé que les contrats ne vont pas vivre jusqu'au terme. Il s'ensuit une valeur décroissante de PO .

Le dédommagement aux assurés, LR , en cas de défaut de la compagnie croît en valeur si λ augmente. En effet, λ plus élevé représente une situation dans laquelle la probabilité de défaut est plus élevée. Les chances d'obtenir le dédommagement plutôt que le paiement au terme du contrat sont plus élevées, la valeur de LR est donc plus importante.

4.4.3 Participation bénéficiaire juste

Pour terminer l'étude de sensibilité au paramètre λ , nous nous intéressons à présent à la dépendance du taux de participation bénéficiaire juste en λ . La figure 4.19 illustre cette sensibilité.

FIG. 4.19 – Valeurs équitables de δ en fonction de λ
 $\alpha = 80\%$, $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $T = 10$, $r^* = 2.5\%$

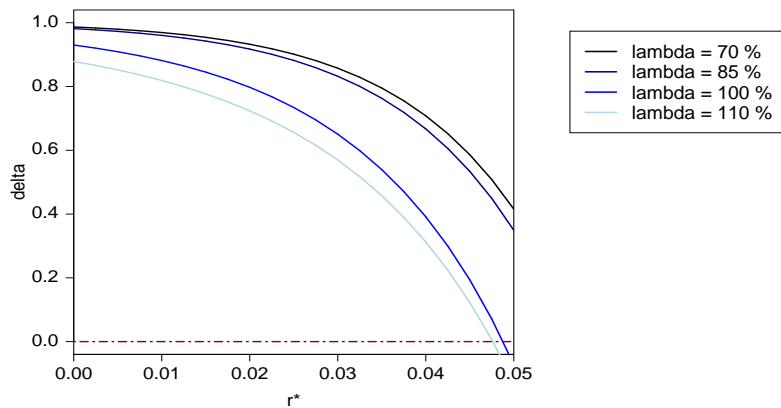


De nouveau, la courbe est discontinue en $\lambda = 100\%$. La participation aux bénéfices requise pour garantir l'équité du contrat est décroissante en fonction de λ . Une valeur de λ plus élevée représente une barrière réglementaire plus haute.

Dans le cas où les contrats arrivent jusqu'à maturité, une valeur élevée de λ représente un avantage pour les assurés puisque le cours moyen des actifs en T sera plus grand. Pour ne pas avantager trop les assurés, la participation bénéficiaire doit être réduite.

Pour terminer, nous analysons les taux de participation justes en fonction du taux technique et de λ . La figure 4.20 illustre l'impact du niveau de λ sur le couple (r^*, δ) représentant des contrats initialement justes.

FIG. 4.20 – Relation entre r^* et δ en fonction de λ
 $\alpha = 80\%$, $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $T = 10$



Pour un même taux technique, l'impact de λ sur la participation bénéficiaire juste est faible quand $\lambda < 1$. En revanche, le cas $\lambda \geq 1$ demande une participation bénéficiaire beaucoup plus faible. En effet, $\lambda \geq 1$ correspond quasiment à une absence de risques pour l'assuré, il est d'autant plus avantageux que λ est élevé.

Remarquez que le taux de participation aux bénéfices devient négatif pour certains couples de taux technique et de niveau de la barrière. C'est le cas quand le taux technique prend des valeurs très élevées par rapport aux taux en vigueur sur les marchés financiers et quand $\lambda \geq 1$, représentant une autorité de contrôle stricte. Chaque élément pris séparément représente un grand avantage pour les assurés, le cumul des deux favorise de manière excessive les assurés.

La combinaison d'un taux technique important et d'un paramètre λ tel que $\lambda \geq 1$ procure un avantage trop grand aux assurés. Dans cette situation, la réduction du taux de participation bénéficiaire ne suffit pas pour rendre le contrat équitable. La compagnie alors revoir les autres paramètres afin de réduire de déséquilibre.

4.4.4 Conclusion

Le paramètre λ est une donnée exogène au contrat. L'étude ci-dessus montre qu'il ne faut pas négliger son impact pour autant. λ modélise l'exigence de solvabilité de la part de l'autorité de contrôle, il influe donc indirectement sur le contrat d'assurance.

Une barrière élevée représente une situation assez sûre quand la compagnie n'est pas déclarée en faillite avant l'arrivée à terme des contrats. La valeur du contrat est ainsi croissante en λ .

Toutefois, dans le cadre de ce travail, le défaut est défini au travers de λ , la probabilité de défaut dépend ainsi fortement de ce paramètre et croît en fonction de λ . A partir d'une certaine valeur de ce paramètre, le risque de défaut l'emporte et la valeur du contrat décroît.

Afin de ne pas avantager les assurés, le taux de participation aux bénéfices juste décroît avec λ .

Remarquez que pour certaines combinaisons de λ et de taux technique, le contrat favorise excessivement les assurés, de sorte qu'il n'est pas suffisant de réduire la participation aux bénéfices pour obtenir un contrat équitable. Dans de tels cas, la compagnie doit revoir les autres paramètres afin de proposer un contrat initialement juste.

4.5 Sensibilité au paramètre α

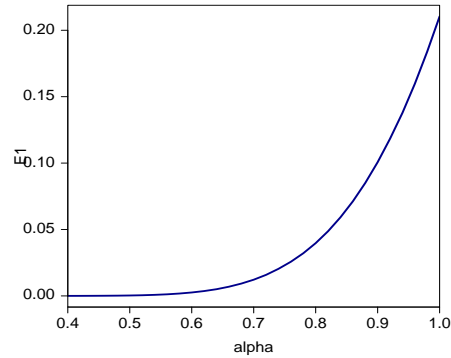
Le paramètre α donne la part initiale des primes dans les actifs de la compagnie. Une valeur de α plus élevée représente une compagnie disposant de moins de fonds propres puisque l'apport initial des actionnaires est plus faible pour une même valeur initiale des actifs. α modélise en quelque sorte la structure du passif de la compagnie d'assurance.

4.5.1 Probabilité de défaut

La figure 4.21 représente la probabilité de défaut en fonction du paramètre α . Les paramètres prennent les valeurs définies au tableau 4.5, à

l'exception de α qui varie de 40% à 100%.

FIG. 4.21 – Probabilité de défaut en fonction de α
 $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $T = 10$, $\lambda = 0.75$, $r^* = 2.5\%$

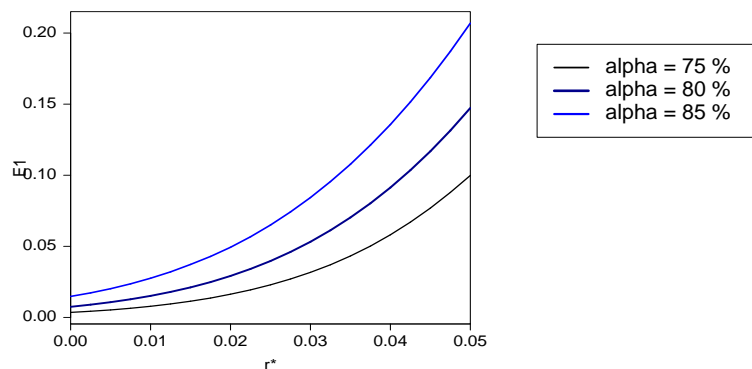


La probabilité de défaut est d'autant plus importante que la valeur de α est élevée. L'engagement nominal envers les assurés est donné par

$$L_t^* = L_0 e^{r^*t} = \alpha A_0 e^{r^*t}.$$

Une valeur de α plus élevée équivaut ainsi à un engagement nominal plus important à l'égard des assurés. Il s'ensuit une barrière réglementaire plus élevée pour une même valeur initiale des actifs. En conséquence, la probabilité que les actifs traversent la limite B_t est croissante avec α . Quand α est maximal ($\alpha = 100\%$), la probabilité de défaut atteint une valeur proche de 20%.

FIG. 4.22 – Probabilité de défaut en fonction de r^* et α
 $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $T = 10$, $\lambda = 0.75$



La figure 4.22 montre l'influence combinée de r^* et de α sur la probabilité de défaut. Comme pour le graphique 4.7, r^* varie dans l'intervalle [0%, 5%].

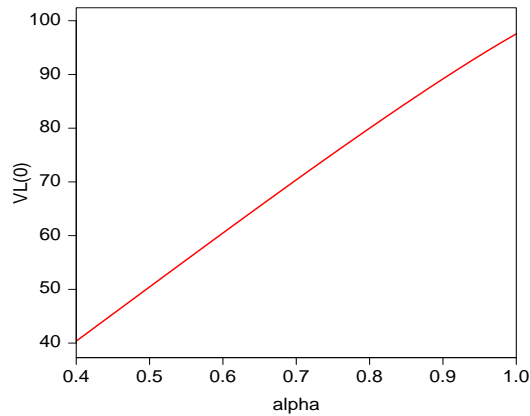
α prend les valeurs de 75%, 80% et 85%, les autres paramètres prenant la valeur définie en 4.5.

Nous observons en figure 4.22 les mêmes effets qu'en figure 4.21 : à taux technique donné, une valeur de α plus élevée implique une probabilité de défaut plus importante. De plus, pour α donné, la probabilité de défaut croît en fonction de r^* .

4.5.2 Evaluation du contrat d'assurance

La figure 4.23 représente la valeur du contrat en fonction de α quand les autres paramètres prennent la valeur définie au tableau 4.5.

FIG. 4.23 – Valeur du contrat d'assurance en fonction de α
 $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $T = 10$, $\lambda = 0.75$, $r^* = 2.5\%$, $\delta = 89.94\%$



Nous observons que la valeur du contrat est croissant en α . La prime initiale payée par les assurés est proportionnelle à α . Un investissement plus grand représente également une valeur plus grande.

Valeurs des sous-contrats

Analysons à présent la valeurs des quatre sous-contrats en fonction de α .

Commençons par étudier la dépendance de la garantie finale TG en α . La valeur de TG s'obtient à partir de la relation

$$TG = L_T^* (1 - E_1). \quad (4.3)$$

Même si la probabilité de défaut E_1 augmente en fonction de α , nous constatons que la valeur de TG croît en fonction de α .

FIG. 4.24 – Valeur du contrat et des sous-contrats en fonction de α
 $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $T = 10$, $\lambda = 0.75$, $r^* = 2.5\%$, $\delta = 89.94\%$

α	$V_L(0)$	TG	BO	PO	LR
40%	40.3683	51.3599	15.4181	0.0009	0.0008
45%	45.4120	57.7753	17.7308	0.0039	0.0046
50%	50.4512	64.1801	19.2726	0.0124	0.0162
55%	55.4790	70.5508	21.1998	0.0325	0.0343
60%	60.4870	76.8425	23.1271	0.0702	0.1592
65%	65.4590	82.9609	25.0543	0.1361	0.4041
70%	70.3815	88.7850	26.9812	0.2339	0.8940
75%	75.2320	94.0776	28.9063	0.3677	1.8337
80%	79.9978	98.6404	30.8239	0.5350	3.4044
85%	84.6500	102.0197	32.7126	0.7177	6.0147
90%	89.1677	103.9279	34.5270	0.9053	9.9531

La relation 4.3 montre que TG dépend doublement de α : une fois à travers la probabilité de défaut E_1 et une deuxième fois à travers le paiement garanti a priori L_T^* . E_1 croît en fonction de α , par contre L_T^* croît en fonction de α . L'effet exponentiel en L_T^* l'emporte sur l'augmentation de E_1 . Il s'ensuit une valeur croissante pour TG .

Quant à l'influence de α sur l'option de participation aux bénéfices, BO augmente en fonction de α . La participation aux bénéfices distribuée aux contrats est fonction de α , elle est définie par la relation (1.1) comme étant :

$$\beta_T = \delta \left[\alpha A_T - L_T^* \right]^+ .$$

Si la part initiale des actifs est plus élevée, les assurés ont droit à des participations plus élevées. Le sous-contrat BO a donc une valeur plus élevée.

La valeur de l'option de défaut PO est croissante en fonction de α . Le prix d'exercice de cette option est donné par le paiement garanti L_T^* . Celui-ci augmente en fonction de α et il s'ensuit que la valeur de PO est croissante en fonction de α .

La dépendance de LR en α est la même que pour σ et λ : LR est croissant en fonction de α . L'engagement nominal envers les assurés est plus important quand α est plus grand. La limite réglementaire étant définie sur base de cet engagement nominal, la probabilité de défaut augmente en fonction de α .

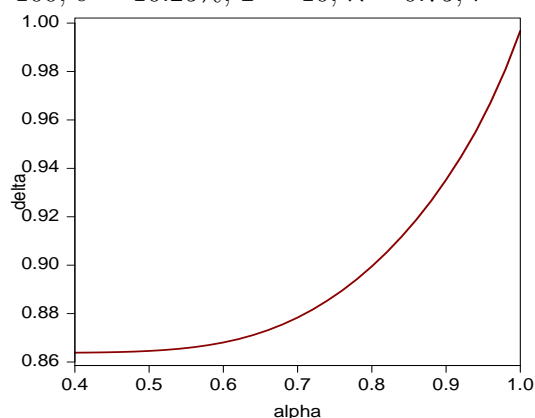
Puisque le *payoff* de LR est conditionnel au fait que la compagnie ait

été déclarée en faillite avant l'échéance des contrats, ce sous-contrat gagne en valeur.

4.5.3 Participation bénéficiaire juste

Pour conclure l'analyse de sensibilité au paramètre α , nous étudions à présent son influence sur le taux de participation aux bénéfices juste. La figure 4.25 représente δ en fonction de α . Le paramètre α varie de 40% à 100%, les autres paramètres prennent la valeur définie en 4.5.

FIG. 4.25 – Niveaux justes de δ en fonction de α
 $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $T = 10$, $\lambda = 0.75$, $r^* = 2.5\%$

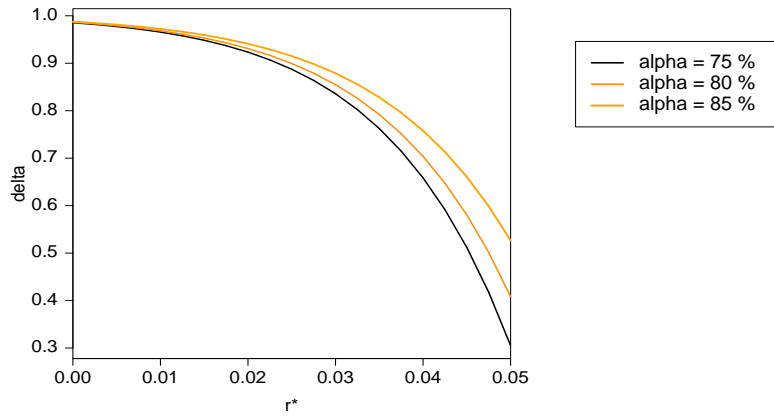


Nous voyons sans surprise que le taux de participation bénéficiaire donnant lieu à des contrats équitables croît en fonction de α ; le point précédent a montré en effet que la valeur du contrat est croissant en α . Afin de rendre le contrat juste, il faut donc diminuer δ .

Regardons à présent la sensibilité au paramètre α des couples (r^*, δ) rendant le contrat équitable. La figure 4.26 représente cette sensibilité quand α prend une valeur de 75%, 80% et 85% respectivement.

A taux technique égal, le taux de participation aux bénéfices est d'autant plus grand que α est important. La participation bénéficiaire est proportionnelle à α : si la part initiale des primes dans les actifs est plus élevée, les assurés ont droit à participer dans une plus grande mesure dans les rendements supérieurs de la compagnie d'assurance.

FIG. 4.26 – Relation entre r^* et δ en fonction de α
 $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $T = 10$, $\lambda = 0.75$



4.5.4 Conclusion

L'analyse de sensibilité au paramètre α montre l'impact de la structure du passif sur le risque de défaut, celui-ci est croissant en fonction de α . Une valeur plus élevée de α représente une compagnie d'assurance disposant de moins de fonds propres.

La valeur des contrats sont par contre plus élevés, l'investissement initial ayant été plus grand. Afin de garantir l'équité des contrats, le taux de participation bénéficiaire juste est plus faible.

4.6 Sensibilité à la durée du contrat d'assurance

Pour conclure ce chapitre, nous nous intéressons à présent à la sensibilité à la durée du contrat d'assurance, notée T .

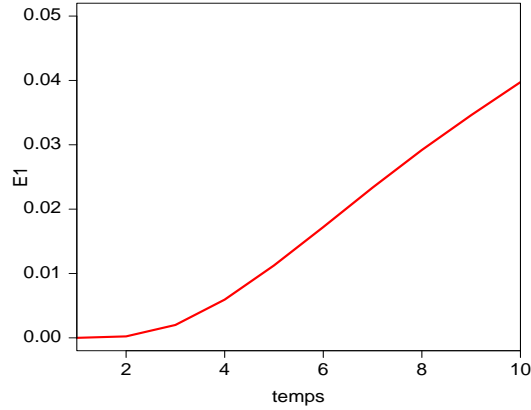
4.6.1 Probabilité de défaut

La figure 4.27 représente la probabilité de défaut en fonction de la durée du contrat, T variant entre une et dix années.

Le risque de défaut pour une compagnie vendant des contrats d'une durée de un ou deux ans, est négligeable. Sur une courte durée, la probabilité que le cours des actifs se trouve en-dessous de la limite imposée par l'autorité de contrôle est très faible.

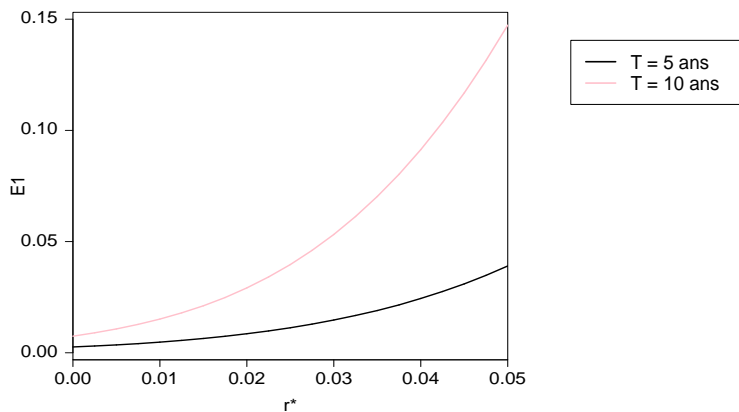
Le risque de défaut augmente avec la durée des contrats, l'écart-type des actifs devenant plus grand au cours du temps.

FIG. 4.27 – Probabilité de défaut en fonction de T
 $\alpha = 80\%$, $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $\lambda = 0.75$, $r^* = 2.5\%$



Analysons à présent l'impact de la durée sur la probabilité de défaut en fonction du taux technique. Le graphique 4.28 représente E_1 en fonction du taux technique pour deux durées de contrat différentes qui sont de cinq ans et de dix ans respectivement.

FIG. 4.28 – Probabilité de défaut en fonction de r^* et T
 $\alpha = 80\%$, $A_0 = 10$, $\sigma = 10.25\%$, $\lambda = 0.75$



A taux technique donné, la probabilité de défaut est d'autant plus grande que la durée du contrat est plus longue. Une durée de contrat plus longue implique une probabilité de défaut croissante avec le taux technique.

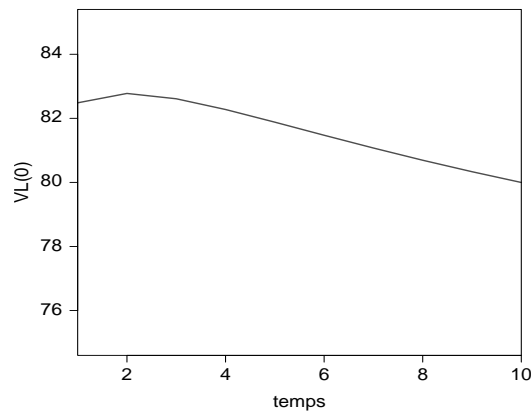
La pente de la courbe à dix ans est beaucoup plus grande que celle à cinq ans. Ceci montre ainsi que l'impact de la durée est de plus en plus important

avec le taux technique. Plus le taux technique du contrat est élevé, plus la durée du contrat a une influence sur la probabilité de défaut de la compagnie.

4.6.2 Evaluation du contrat d'assurance

Nous nous intéressons à présent à l'impact de la durée de contrat sur son prix marché. La figure 4.29 représente $V_L(0)$ en fonction de T .

FIG. 4.29 – Valeur du contrat en fonction de T
 $\alpha = 0.80$, $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $\lambda = 0.75$, $r^* = 2.5\%$, $\delta = 89.94\%$



$V_L(0)$ est décroissant en fonction de la durée de contrat. Une durée de contrat plus longue comporte un risque de défaut plus élevé, il s'ensuit alors que la valeur du contrat diminue en fonction de T .

Valeurs des quatre sous-contrats

Analysons à présent la valeur des quatre sous-contrats en fonction de la durée T . Le tableau 4.30 donne les valeurs des différents éléments composant le contrat en fonction de T .

Commençons par analyser la valeur de la garantie finale en fonction de T . TG est croissant en fonction de la durée T . Tout comme pour le paramètre α , la valeur de TG dépend doublement de T . Une durée plus longue donne lieu à un capital garanti plus élevé, la dépendance de L_T^* en T est exponentielle. D'un autre côté, une durée de défaut. De nouveau, l'effet de la hausse du capital garanti l'emporte sur l'augmentation du risque.

L'option de participation aux bénéfices a une valeur croissante en fonction de T . Sur une durée plus longue, les chances sont plus grandes que les

FIG. 4.30 – Valeur du contrat et des sous-contrats en fonction de T
 $\alpha = 80\%$, $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $\lambda = 0.75$, $r^* = 2.5\%$, $\delta = 89.94\%$

T	$V_L(0)$	TG	BO	PO	LR
1	82.4844	82.0252	3.3923	0.0375	0.0000
2	82.7772	84.0826	5.5388	0.2307	0.0144
3	82.6108	86.0581	7.8100	0.4278	0.1309
4	82.2759	87.8883	10.3018	0.5511	0.4018
5	81.8806	89.6319	13.0411	0.6104	0.7886
6	81.4719	91.3468	16.0400	0.6267	1.2527
7	81.0734	93.0751	19.3070	0.6143	1.7663
8	80.6920	94.8599	22.8521	0.5926	2.2998
9	80.3339	96.7194	26.6866	0.5655	2.8419
10	79.9978	98.6404	30.8238	0.5350	3.4045

actifs aient une bonne performance, permettant ainsi des participations bénéficiaires plus importantes.

Considérons à présent l'option de défaut en fonction de la durée T . La dépendance de PO en T ressemble à celle de PO en σ : PO commence par être croissant en fonction de T , à partir d'une durée dépassant 6 ans, PO est décroissant. Quand la durée est faible, c'est l'influence du prix d'exercice qui l'emporte, alors que le risque l'emporte pour des durées supérieures à six ans.

Pour finir, analysons la dépendance en T de la valeur du dédommagement en cas de défaut prématuré de la compagnie. LR a une valeur croissante en la durée du contrat d'assurance. Sur une durée plus longue, le risque de défaut est plus grand. La probabilité d'avoir un *payoff* avant le terme du contrat augmente et la valeur de ce sous-contrat est plus importante.

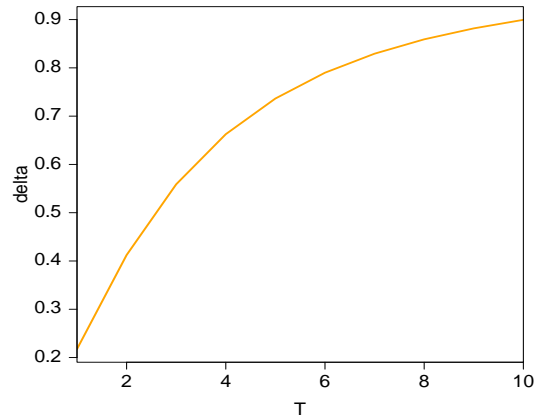
4.6.3 Participation bénéficiaire juste

Nous terminons ce chapitre par l'étude du taux de participation aux bénéfices rendant le contrat équitable. En figure 4.31, nous illustrons δ en fonction de la durée de contrat T .

Le graphique 4.31 montre que le taux de participation bénéficiaire doit être plus élevé si le contrat court sur une durée plus longue. Le point précédent a montré en effet que la valeur du contrat est décroissante en T ; afin de rendre le contrat équitable, il faut donc augmenter δ .

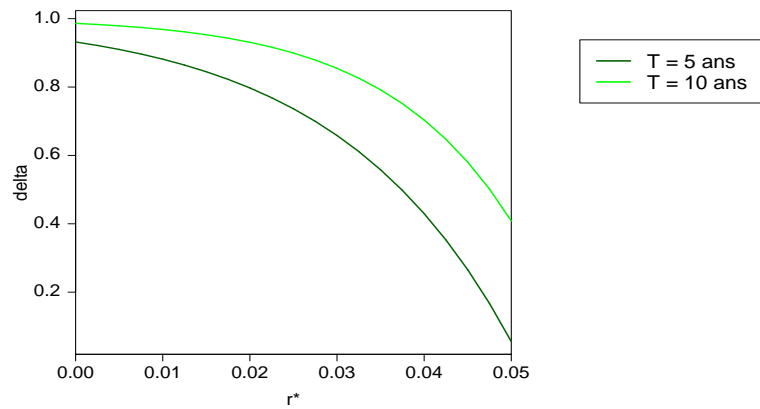
La figure 4.32 quant à elle représente les couples (r^*, δ) équitables en

FIG. 4.31 – Valeurs justes de δ en fonction de T
 $\alpha = 80\%$, $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $\lambda = 0.75$, $r^* = 2.5\%$



fonction de la durée de contrat.

FIG. 4.32 – Relation entre r^* et δ en fonction de T
 $\alpha = 80\%$, $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $\lambda = 0.75$



Pour un même taux technique, le taux de participation aux bénéfices doit être plus élevé si le contrat est conclu pour une durée plus longue. L'influence de la durée est croissante en fonction du taux technique.

4.6.4 Conclusion

L'analyse de sensibilité à la durée de contrat T a montré l'impact de la durée de contrat sur la probabilité de défaut de même que sur la *fair value* des contrats. La probabilité de défaut est d'autant plus grande que la durée de contrat est plus longue.

La valeur du contrat par contre diminue en fonction de la durée du contrat. En conséquence, la participation aux bénéfices rendant le contrat équitable doit augmenter.

4.7 Conclusion

En conclusion de cette étude numérique, les résultats montrent qu'une compagnie d'assurance doit tenir compte de nombreux paramètres afin de déterminer la *fair value* des contrats.

Lors de la conception d'une nouvelle assurance par exemple, pour bien faire, elle doit tenir compte de nombreuses variables :

- Elle ne doit pas fixer les éléments intrinsèques du contrat sans tenir compte des liens existants entre ceux-ci. Notre étude a montrée notamment l'influence du taux technique, du taux de participation aux bénéfices et de la durée du contrat. Le taux technique doit être fixé par exemple de manière à offrir un rendement suffisant sans pour autant mettre en danger la solvabilité.
- Elle doit également tenir compte de sa structure de bilan : la part initiale des primes dans les actifs et la politique d'investissement ont chacune une influence non négligeable sur la valeur du contrat et le risque de défaut. L'étude numérique a mis en évidence l'importance d'une bonne gestion actif-passif pour une compagnie d'assurance vie. La volatilité des actifs doit être suffisamment grande pour permettre des rendements assez grands ; il faut toutefois veiller à ce que le risque de défaut ne devient pas trop important.
- A côté de ces paramètres liées à la compagnie d'assurances, elle doit considérer des paramètres exogènes comme par exemple le niveau de la barrière réglementaire.

L'étude en fonction du niveau de la barrière réglementaire a permis de mettre en évidence la particularité suivante : certaines combinaisons de taux technique et de niveaux de la barrière demandent une participation aux bénéfices juste qui serait négative. Dans ces cas, le contrat est trop à l'avantage des assurés et la réduction de la participation bénéficiaire ne suffit pas pour le rendre équitable. La compagnie doit alors revoir les autres paramètres afin de réduire ce déséquilibre.

Le modèle de valorisation permet de mettre en évidence l'influence des

différents paramètres sur la solvabilité de l'assureur, sur la valeur des contrats et sur le taux de participation aux bénéfices rendant les contrats justes. Nous avons montré qu'il est indispensable pour l'assureur qu'il puisse estimer l'impact d'un changement d'un paramètre sur sa solvabilité et qu'il soit capable d'évaluer le risque qu'implique le changement.

Chapitre 5

Notions de mortalité

Avant de nous intéresser à l'évaluation d'une assurance de capital différé sans remboursement au chapitre suivant, nous rappelons dans ce chapitre quelques notions au sujet de la mortalité.

La première partie concerne les notations actuarielles et la deuxième section comporte une discussion sur les tables de mortalité utilisées par les compagnies d'assurance. Nous présentons également les tables dont nous allons nous servir au chapitre suivant.

5.1 Fonctions biométriques

Une table de mortalité est un modèle qui permet de tenir compte de la mortalité vécue par une cohorte d'individus nés tous la même année, depuis la naissance jusqu'à l'extinction complète de la génération.

C'est un tableau qui fournit le nombre de survivants, noté l_x , à chaque âge (entier) pour un même groupe de nouveaux-nés. Il permet d'introduire les fonctions biométriques suivantes. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer par exemple à GERBER (1997).

Le nombre de survivants

La fonction de survie $x \mapsto l_x$ décrit le nombre de survivants d'âge x issus d'une population de l_0 nouveaux-nés. Clairement, cette fonction est positive et non-croissante. A des fins théoriques, nous supposons que la fonction de survie l_x est continûment différentiable.

Théoriquement, partant d'un nombre l_0 de nouveaux-nés, l_x est le nombre moyen de survivants à l'âge x . La différence $l_x - l_{x+1}$ est le nombre de décès observés parmi les l_x individus âgés de x années ; ce nombre est noté d_x .

Quotient de mortalité

La probabilité pour une personne vivante à l'âge x de décéder dans l'année est représentée par q_x . Cette probabilité est encore appelée quotient de mortalité. q_x est déterminé à partir du nombre de survivants ou de décès de la manière suivante :

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}.$$

De manière similaire, ${}_nq_x$ représente la probabilité pour une personne d'âge x de décéder avant l'âge $x + n$. Formellement, nous avons :

$${}_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}.$$

Probabilité de survie

Introduisons également la probabilité annuelle de survie, notée p_x . p_x représente la probabilité pour une personne étant en vie à l'âge x de l'être encore à l'âge $x + 1$; p_x représente aussi la probabilité de décéder après l'âge $x + 1$. Nous avons alors :

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - q_x.$$

${}_np_x$ représente la probabilité pour une personne d'âge x d'être encore en vie à l'âge $x + n$. Nous avons la relation suivante en fonction du nombre de survivants :

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = \prod_{i=0}^{n-1} p_{x+i}.$$

Nous avons aussi :

$${}_np_x + {}_nq_x = 1.$$

Durée de vie restante

Nous pouvons formaliser les concepts ci-dessus en introduisant la variable aléatoire \mathbf{T} , appelée durée de vie¹. \mathbf{T}_x est la durée de vie restante d'un individu de la population de référence ayant atteint l'âge x . Ainsi, la personne vivante à l'âge x décèdera à l'âge $x + \mathbf{T}_x$.

La loi de probabilité de \mathbf{T} est caractérisée par la fonction de survie ${}_kp_x$:

$${}_kp_x = \Pr[\mathbf{T}_x > k], \quad k \geq 0,$$

¹La durée de vie est représentée à l'aide d'un \mathbf{T} gras, pour éviter la confusion avec la durée du contrat T qui est donnée en caractère normal.

${}_k p_x$ représente la probabilité pour une personne d'âge x d'être vivant en k . Il s'en suit :

$${}_k p_x = \Pr[\mathbf{T} > x + k | \mathbf{T} > x].$$

Nous avons également la relation suivante :

$${}_k q_x = 1 - {}_k p_x = \Pr[\mathbf{T}_x \leq k] = \Pr[\mathbf{T} < x + k | \mathbf{T} > x].$$

Bien entendu, nous avons ${}_0 q_x \equiv 0$ et ${}_0 p_x \equiv 1$.

Taux instantané de mortalité

A des fins théoriques, la fonction de survie l_x est supposée continûment différentiable, l_x représentant le nombre de survivants d'âge x , $x \in \mathbb{R}^+$.

Le taux instantané de mortalité à l'âge $x+t$, noté μ_{x+t} , est défini à partir de la limite suivante :

$$\begin{aligned} \mu_{x+t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\Pr[t < \mathbf{T}_x \leq t + \Delta t | \mathbf{T}_x > t]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{t + \Delta t q_x - t q_x}{{}_t p_x \Delta t} \\ &= \frac{1}{{}_t p_x} \frac{\partial}{\partial t} t q_x \end{aligned} \quad (5.1)$$

Si nous voyons \mathbf{T}_x comme une variable aléatoire continue, il est aisé d'obtenir sa densité de probabilité, donnée par

$$\frac{\partial}{\partial t} t q_x = {}_t p_x \mu_{x+t} \quad \Leftrightarrow \quad t q_x = \int_0^t {}_\xi p_x \mu_{x+\xi} d\xi.$$

Il est également possible d'obtenir les probabilités de survie en fonction des taux instantanés de mortalité. Partant de (5.1), il vient

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln {}_t p_x = -\mu_{x+t}.$$

En considérant cette dernière relation comme une équation différentielle en la fonction $t \mapsto {}_t p_x$, nous obtenons la solution suivante à x fixé

$${}_t p_x = \exp \left(- \int_0^t \mu_{x+\xi} d\xi \right)$$

grâce à la condition initiale ${}_0 p_x = 1$.

Instants non entiers

Au chapitre suivant, nous aurons besoin de déterminer des probabilités de survie à des instants non entiers. Pour ceci, nous choisissons d'approcher ces valeurs par approximation linéaire entre deux instants entiers.

Rappelons la méthode de l'approximation linéaire. Soit f une fonction dont nous connaissons la valeur en deux points x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$. Nous cherchons la valeur de f dans un point intermédiaire x_3 ($x_1 < x_3 < x_2$).

La formule suivante permet alors d'approcher la valeur de la fonction en x_3 :

$$f(x_3) = f(x_1) + (x_3 - x_1) \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

En effet, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ est la pente de la droite passant par les points $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

Dans la suite, nous aurons besoin de connaître ${}_t p_x$ pour des valeurs de t non entières avec $n < t < n + 1$, n entier. A partir de la table de mortalité utilisée, nous pouvons déterminer ${}_n p_x$ et ${}_{n+1} p_x$. Nous approchons alors la valeur de ${}_t p_x$ par

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= {}_n p_x + (t - n) \frac{{}_{n+1} p_x - {}_n p_x}{n + 1 - n} \\ &= {}_n p_x + (t - n) ({}_{n+1} p_x - {}_n p_x). \end{aligned}$$

5.2 Tables de mortalité

Pour la tarification des primes d'assurance, les assureurs se servent de deux types de tables de mortalité. Il y a d'une part les tables appelées statiques, qui sont obtenues à partir d'observations collectionnées durant une année calendrier et qui supposent que la mortalité va rester stable dans le futur. D'autre part, il existe les tables dites prospectives qui tiennent compte de l'allongement de la vie humaine.

Plusieurs facteurs influent sur la mortalité d'une personne :

- le sexe : les femmes ont une mortalité différente de celle des hommes,
- l'âge : il est clair que la probabilité de décès est plus élevée si une personne est plus âgée,
- le pays : l'environnement a une influence certaine sur la mortalité ; une personne vivant dans un pays en voie de développement a une autre espérance de vie qu'une personne vivant dans un pays développé, et finalement

- l'époque à laquelle vit une personne : il y a cent ans, à cause d'un mode de vie plus difficile, les gens avaient une probabilité de survie plus faible que de nos jours. C'est un fait connu que les gens vivent de plus en plus longtemps.

En Belgique et en France, les assureurs sont tenus d'appliquer un tarif minimum se déduisant des tables de mortalité officielles. Les tables réglementaires sont des tables ajustées sur base d'observations. Elles ont été élaborées afin de disposer de tables de référence prudentes pour la tarification des contrats d'assurance.

Parfois, les assureurs travaillent à l'aide de tables d'expérience, construites sur base de statistiques de décès observés. Toutefois, les tarifs qui en résultent ne peuvent en aucun cas être inférieurs à ceux qui résulteraient de la table réglementaire. En France par exemple, toute table d'expérience doit être validée par un actuaire indépendant et agréé par les autorités nationales.

Il existe plusieurs méthodes d'ajustement des tables de mortalité à partir d'observations. En Belgique par exemple, les tables officielles sont ajustées à l'aide d'un modèle de Makeham qui est fonction de quatre paramètres. Il tient compte de deux causes de décès, les accidents (indépendants de l'âge) et les maladies (en croissance exponentielle avec l'âge).

5.2.1 Table statique

Le premier type de table de mortalité utilisée est une table statique ou transversale, dressée à partir d'observations relatives à une seule année. L'hypothèse implicite est que les quotients de mortalité n'évolueront pas dans le futur.

Ces tables ne permettent pas de tenir compte de l'accroissement progressif de l'espérance de vie et conduisent dès lors à une sous-estimation systématique des primes des contrats en cas de vie. Il est ainsi insuffisant de se baser sur des tables statiques et il en résulte l'importance de l'élaboration de tables prospectives.

Nous utilisons les tables réglementaires actuellement en vigueur en Belgique : les tables MR/FR fixées par Arrêté Royal en 1992. L'Arrêté Royal fixe les constantes k , s , g et c qui permettent de déterminer le nombre de survivants à l'âge x à l'aide de la relation suivante :

$$l_x = k s^x g^{c^x}.$$

Les tables MR et FR sont des tables pour les opérations en cas de vie pour les hommes et les femmes respectivement. Pour une raison qui va deve-

FIG. 5.1 – Constantes de Makeham

	MR	FR
k	1 000 266.63	1 000 048.56
s	0.999 441 703 848	0.999 669 730 966
g	0.999 733 441 115	0.999 951 440 172
c	1.101 077 536 030	1.116 792 453 830

nir claire au prochain point, nous choisissons de travailler avec la table FR uniquement. Le tableau des l_x est donné dans l'annexe D.1.

Contrairement à ce qui se fait dans certains pays étrangers, notamment au Royaume-Uni, la table de mortalité est garantie en Belgique pour toute la durée de contrat. Ceci a conduit les autorités belges à déterminer prudemment les tables de mortalité officielles en y incorporant des chargements de sécurité implicites. Pour les opérations en cas de décès, les taux de mortalité ont été majorés alors que, pour les opérations en cas de vie, ils ont été réduits.

Les tables de mortalité officielles imposées par les autorités de contrôle et ne décrivent pas fidèlement la mortalité des assurés. Aujourd'hui, on constate des écarts sensibles entre la mortalité d'expérience et celle décrite par les tables officielles. En pratique, les assureurs belges appliquent un rajeunissement de cinq ans dans le calcul des primes. Une discussion à ce sujet se trouve par exemple dans BROUHNS & DENUIT (2002).

Ainsi, à côté du risque financier généré par la garantie du taux technique durant toute la vie du contrat, naît un nouveau risque résultant de l'évolution inconnue de la mortalité dans le futur. Ce nouveau risque est appelé risque de longévité et est d'autant plus important que le rythme d'allongement de la durée de vie est élevé.

5.2.2 Table prospective

Pour répondre au risque de longévité, les actuaires ont construit des tables de mortalité prospectives. Contrairement aux tables classiques qui supposent implicitement que la mortalité future sera identique à celle observée aujourd'hui, les tables prospectives prennent en compte l'impact du risque de longévité. Elles intègrent une amélioration progressive de la longévité.

Les tables prospectives ont deux entrées : l'âge et l'année de naissance des personnes. Pour chaque âge, elles donnent les probabilités de décéder au

cours d'une certaine année. Elles sont dressées à partir de modèles statistiques estimant les tendances de la mortalité et les extrapolant dans le futur. Voyez à ce sujet par exemple DELWARDE & DENUIT (2005).

A l'heure actuelle, il n'existe pas de table prospective officielle en Belgique, nous avons donc choisi la table TPRV 93 actuellement en vigueur en France, publiée par l'arrêté du 28 juillet 93. L'appellation TPRV est l'abréviation de **T**able **P**rospective de **R**ente **V**iagère. Son utilisation est obligatoire en France pour le calcul des rentes viagères sauf à utiliser une table d'expérience.

C'est une table unisexe basée sur la mortalité des femmes, qui ont une espérance de vie supérieure à celle des hommes. Elle ne donne qu'une liste du nombre de survivants, de même que des tableaux de décalage d'âge visant à déterminer l'âge technique d'un assuré.

Les individus nés avant 1947 sont vieillis d'une ou plusieurs années et les individus nés après 1952 sont systématiquement rajeunis : on rajoute ou on retranche à 65 ans le décalage d'âge estimé pour retrouver l'âge technique qu'ils ont dans la TPRV 93, afin de déterminer la tarification qui leur est applicable.

De la même manière qu'en Belgique, où les tables pour les opérations en cas de vie sont obsolètes, il y a des discussions autour de la table TPRV 93, qui donne lieu, dans certains cas, à des primes trop faibles, voyez les discussions dans BÉHAR (2005) et MAGIS, DENUIT & WALHIN (2005).

Le tableau des l_x de même que celui des décalages d'âges à appliquer en fonction de l'année de naissance sont donnés en annexe D.2. Ceux-ci sont disponibles sur internet, par exemple sur le site d'ACTUARIS, un cabinet d'actuaire conseil indépendants.

5.2.3 Notations

Les notations de la section 5.1 sont celles utilisées dans le cadre d'une table de mortalité statique; dans ce cas, les fonctions biométriques ne dépendent que de l'âge des individus.

Dans le cas d'une table prospective, les fonctions biométriques prennent un argument complémentaire qui représente l'année de naissance. Si N représente l'année de naissance d'un individu d'âge x , le quotient de mortalité est ainsi noté $q_x(N)$, de même la probabilité de survie est notée $p_x(N)$.

Afin d'alléger les notations, nous omettons l'argument N par la suite.

Les formules présentées au chapitre suivant peuvent s'appliquer directement aux tables prospectives en rajoutant un argument complémentaire.

5.2.4 Participation de mortalité

Les écarts de mortalité entre la mortalité tarifaire et celle observée par une compagnie d'assurance représente soit un bénéfice soit une perte pour l'assureur. Il y a un bénéfice de mortalité pour les opérations en cas de vie quand la mortalité observée est plus faible, pour les opérations en cas de décès il y a un bénéfice de mortalité quand la mortalité observée est plus rapide.

Un bénéfice de mortalité permet de distribuer une autre forme de participation bénéficiaire. Elle se traduit par exemple par une augmentation du capital assuré qui est décidée chaque année. Une participation de mortalité s'applique surtout aux opérations en cas de décès, puisque le risque de longévité n'intervient pas dans ce cas. Au contraire, les tables officielles donnent lieu à des primes beaucoup trop élevées.

5.2.5 Comparaison entre les deux tables

Nous terminons ce chapitre par une comparaison des deux tables de mortalité présentées ci-dessus. Le graphique 5.2 compare $\log(10^5 q_x)$ pour les deux tables, avec et sans correction d'âge.

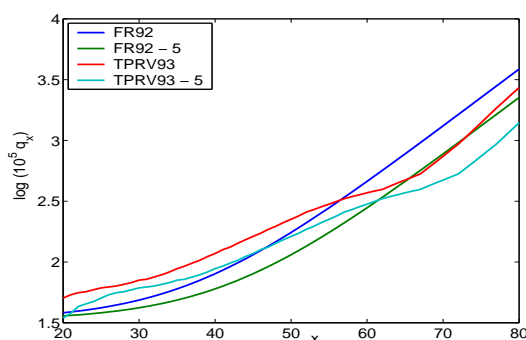


FIG. 5.2 – Comparaison des deux tables de mortalité

La courbe bleue donne les quotients de mortalité pour la table statique sans correction d'âge, la courbe verte est également relative à la table belge, mais avec application d'un rajeunissement de cinq ans.

La courbe rouge représente les quotients de mortalité tels que donnés par la table prospective sans correction d'âge, ce qui revient à considérer

une personne née en 1950. Finalement, la courbe turquoise donne les quotients de mortalité avec un rajeunissement de cinq ans, coefficients qu'il faut appliquer pour une personne née en 1980 par exemple.

La figure 5.2 montre l'effet de l'ajustement de Makeham : les deux courbes relatives à la table FR 92, les courbes bleues et vertes, sont lisses alors que celles relatives à la table française contiennent des bosses.

Nous allons étudier la figure 5.2 en distinguant les âges avant 60 ans et les âges au-dessus ; en effet, les positions relatives des quatre courbes changent aux alentours de 60 ans.

Jusqu'à 60 ans, les deux courbes relatives à la table prospective se trouvent au-dessus de celles de la table statique. Pour les âges de 20 à 60 ans, les quotients de mortalité de la table française sont donc plus élevés que ceux des tables belges. Dans la table TPRV 93, les individus ont une probabilité plus élevée de mourir, la table TPRV 93 est plus rapide que la table statique.

Le principe de sécurité dicte que, pour les opérations en cas de vie, il faut utiliser une table tarifaire assez lente. Pour les âges jusqu'à 60 ans, c'est la table belge qui donne un tarif plus prudent.

A partir de 60 ans, cette tendance s'inverse : les courbes belges passent au-dessus des courbes françaises. Ceci montre l'intérêt de la TPRV qui doit être appliquée pour les rentes viagères en France : aux âges élevés, la table est plus lente et donne lieu à des constitutifs de rente qui ne sous-estiment pas trop la prime réelle.

Nous constatons également que la TPRV 93 et FR 92 moins cinq ans donnent lieu à des quotients de mortalité assez proches. Ceci rejoint les critiques qui pensent que la TPRV est déjà dépassée, voir à ce sujet par exemple MAGIS , DENUIT & WALHIN (2005) et BÉHAR (2005).

L'effet d'un rajeunissement est le même pour les deux tables de mortalité : la table moins cinq ans est plus lente que celle sans correction d'âge.

Chapitre 6

Capital différé sans remboursement

Dans ce chapitre, nous introduisons une composante de mortalité dans le contrat d'assurance vie étudié. La combinaison d'assurance présentée est un capital différé sans remboursement (CDSR).

Nous allons comparer les résultats obtenus à l'aide d'une table statique et d'une table prospective. Pour ce type d'assurance, nous allons étudier la relation entre le taux technique et le taux de participation aux bénéfices donnant lieu à un contrat équitable.

6.1 Assurance de CDSR

La combinaison d'assurance que nous allons étudier est un capital différé sans remboursement (CDSR) à prime unique. Par le paiement d'une prime L_0 à l'instant $t = 0$, l'assuré acquiert le droit sur le paiement d'un capital au terme du contrat s'il est vivant à ce moment. Il n'y a aucun engagement de la part de l'assureur en cas de décès de la personne assurée avant la maturité du contrat.

Nous supposons que la compagnie ne vend qu'un seul type de contrat. Nous admettons dès lors que tous les assurés ont le même âge.

Le contrat court sur une durée de T années. Les engagements de l'assureur envers ses assurés sont les mêmes que pour le contrat étudié jusqu'à présent : le contrat contient une garantie de taux technique et une clause de participation aux bénéfices.

La participation bénéficiaire récompense uniquement le bénéfice financier du contrat. Nous supposons que les assurés meurent selon les tables et nous

ignorons ainsi le résultat de mortalité.

Si les actifs ont eu un rendement suffisant et si le preneur est en vie à maturité du contrat, il a droit au paiement d'un capital L_T^* , augmenté d'une éventuelle participation aux bénéfices; si les actifs n'ont pas connu une performance suffisante, le capital sera réduit. Le paiement à maturité est ainsi donné par la relation (1.10) :

$$\Theta_L(T) = \delta [\alpha A_T - L_T^*]^+ + L_T^* - [L_T^* - A_T]^+.$$

Nous supposons que le niveau de la barrière réglementaire est inchangé par rapport au contrat-épargne ci-dessus, elle est donnée par la relation (1.7) : $B_t = \lambda L_0 e^{r^*t}$.

Si la compagnie est déclarée en faillite avant la maturité du contrat et si le preneur est vivant à cet instant, il a droit à un dédommagement donné par (1.11) :

$$\Theta_L(\tau) = \min[\lambda, 1] L_\tau^*.$$

6.1.1 Evaluation actuarielle classique

Avant de nous intéresser à l'évaluation de marché de l'assurance CDSR, nous rappelons la formule servant à déterminer la prime unique ou le capital vie à maturité selon les méthodes de calcul actuarielles classiques.

Si C représente le capital vie à payer en T en cas de vie de l'assuré, la prime unique est déterminée par :

$$L_0 = C {}_T E_x,$$

où interviennent les notations suivantes :

$${}_T E_x = v^T {}_T p_x \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{1 + r^*}.$$

La prime est déterminée en actualisant les flux à l'aide du taux technique. Généralement, ${}_T p_x$ est dérivé d'une table de mortalité statique.

L'approche classique ne tient donc pas compte d'éventuelles participations bénéficiaires futures, ni de la probabilité que les actifs ne performant pas de manière suffisante. Elle ne fait aucun lien entre les actifs et les passifs de la compagnie.

6.1.2 Valeur de marché

Nous nous intéressons à présent à la valorisation de marché d'une assurance de CDSR. Nous partons ainsi des formules de valorisation du chapitre 3 et nous les adaptons au contrat de CDSR.

Pour déterminer la valeur de marché de l'assurance CDSR, il faut tenir compte de la probabilité que la compagnie ne doive pas payer de capital, ce qui arrive en cas de décès de l'assuré.

Une valorisation de marché d'un contrat d'assurance avec une composante de mortalité devrait se faire sur base d'une table d'expérience reflétant mieux la réalité qu'une table réglementaire. Ici, nous supposons que les assurés meurent selon les deux tables de mortalité présentées au chapitre précédent, notre but étant de mettre en évidence l'influence du choix d'une table de mortalité.

Désignons par $V_{L,x,N}^{CDSR}(t)$ la valeur en t du contrat de CDSR souscrit par un assuré d'âge x et né dans l'année N . Dans la suite, pour alléger les formules, nous omettons l'indice N , sans oublier toutefois qu'il faudra en tenir compte dans le cas où nous travaillons à l'aide de la table de mortalité prospective.

Désignons encore par \mathcal{P} l'espace de probabilité de la mortalité. Nous admettons l'indépendance entre les espaces de probabilité risque-neutre et forward-neutre et l'espace de probabilité de la mortalité.

Nous nous plaçons à l'instant $t = 0$. Pour déterminer la valeur de l'assurance de CDSR, nous allons procéder en deux étapes. Dans un premier temps, nous ignorons la possibilité d'un défaut antérieur à l'échéance du contrat pour l'introduire dans une deuxième phase.

Si nous ignorons la probabilité de défaut de la compagnie d'assurances, la valeur de marché du CDSR pour un assuré d'âge x est donnée par la relation suivante dans l'univers risque-neutre :

$$V_{L,x}^{CDSR}(0) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q} \times \mathcal{P}} \left[e^{-\int_0^T \mu_{x+\xi} d\xi} e^{-\int_0^T r_s ds} \Theta_L(T) \right].$$

Sous l'hypothèse habituelle d'indépendance entre les deux espaces de probabilité, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} V_{L,x}^{CDSR}(0) &= \mathbb{E}^{\mathcal{P}} \left[e^{-\int_0^T \mu_{x+\xi} d\xi} \right] \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} \Theta_L(T) \right] \\ &= TP_x \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} \Theta_L(T) \right]. \end{aligned}$$

Dans l'univers forward-neutre, la relation ci-dessus s'écrit :

$$V_{L,x}^{CDSR}(0) = {}_T p_x P(0, T) \mathbb{E}^{\mathcal{Q}_T} [\Theta_L(T)].$$

Introduisons à présent la probabilité que la compagnie fasse défaut avant l'instant T et l'indemnisation éventuelle $\Theta_L(\tau)$. Pour avoir droit au paiement du dédommagement, il faut que le preneur soit vivant à l'instant τ . Ceci se traduit alors par la relation

$$V_{L,x}^{CDSR}(0) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q} \times \mathcal{P}} \left[e^{-\int_0^T \mu_{x+\xi} d\xi} e^{-\int_0^T r_s ds} \Theta_L(T) \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}} + e^{-\int_0^\tau \mu_{x+\xi} d\xi} e^{-\int_0^\tau r_s ds} \Theta_L(\tau) \mathbf{1}_{\{\tau < T\}} \right].$$

Grâce à l'hypothèse d'indépendance, nous obtenons la relation suivante dans l'univers forward-neutre :

$$V_{L,x}^{CDSR}(0) = P(0, T) \mathbb{E}^{\mathcal{Q}_T} \left[{}_T p_x \Theta_L(T) \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}} + {}_\tau p_x e^{-\int_t^\tau r_s ds} \Theta_L(\tau) \mathbf{1}_{\{\tau < T\}} \right]$$

ou encore

$$V_{L,x}^{CDSR}(0) = {}_T p_x P(0, T) \mathbb{E}^{\mathcal{Q}_T} \left[\Theta_L(T) \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}} \right] + P(0, T) \mathbb{E}^{\mathcal{Q}_T} \left[{}_\tau p_x e^{-\int_t^\tau r_s ds} \Theta_L(\tau) \mathbf{1}_{\{\tau < T\}} \right], \quad (6.1)$$

où ${}_\tau p_x$ représente la probabilité d'un individu d'âge x d'être vivant à l'instant du défaut, τ .

6.1.3 Valorisation

A l'aide des notations de la section 3.2, nous pouvons réécrire la relation (6.1) comme suit :

$$V_{L,x}^{CDSR}(0) = P(0, T) \left({}_T p_x (TG + BO - PO) + LR'_x \right) \quad (6.2)$$

avec

$$LR'_x = \min[\lambda, 1] L_0 E'_{6,x} \quad (6.3)$$

et où nous introduisons la quantité suivante :

$$E'_{6,x} = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}_T} \left[{}_\tau p_x e^{\int_\tau^T r_s ds} e^{r^* \tau} \mathbf{1}_{\{\tau < T\}} \right]. \quad (6.4)$$

6.1.4 Contrats équitables

Intéressons-nous à présent aux couples de taux technique r^* et de taux de participation aux bénéfiques δ'_x donnant lieu à des contrats équitables.

A cause de la dépendance de la valeur du contrat en l'âge de l'assuré (et l'année de naissance dans le cadre des tables prospectives), le taux de participation aux bénéfiques dépend à présent également de l'âge de l'assuré et donc du choix de la table de mortalité.

Pour déterminer le taux de participation aux bénéfiques pour un taux technique donné et un assuré d'âge x , la relation (3.9) s'écrit à présent :

$$\delta'_x = \frac{\frac{L_0}{P(0,T)} - TP_x(TG - PO) - LR'_x}{TP_x(\alpha(E_7 - E_2) - L_T^*(E_8 - E_3))} \quad (6.5)$$

6.2 Résultats numériques

Pour l'assurance de capital différé sans remboursement, cette section va donner quelques résultats numériques. Nous avons procédé par simulation comme décrit à la section 3.4.1, tout en tenant compte de la mortalité comme décrit ci-dessus.

Nous commençons par fixer les valeurs des paramètres. Ensuite, nous étudions la valeur des contrats en fonction des deux tables de mortalité présentées au chapitre précédent. Contrairement à ce qui a été fait au chapitre 4, nous ne faisons pas d'étude de dépendance de la probabilité de défaut puisque celle-ci est indépendante de la mortalité.

Nous allons donc étudier l'impact de l'introduction de la mortalité sur la valeur du contrat d'assurance et sur le niveau juste de participation bénéficiaire.

6.2.1 Données

Pour l'étude de l'assurance de CDSR, nous reprenons les mêmes valeurs des paramètres que celles présentées au tableau 4.5. Nous avons fait ce choix dans le but d'analyser l'impact de l'introduction de la mortalité dans le contrat d'assurance.

Le tableau 6.1 rappelle les valeurs des paramètres.

FIG. 6.1 – Données

a	θ	η	r_0	α	A_0
0.463	0.0562	0.0067	2.91%	80%	100
σ	T	λ	r^*	δ	
10.25%	10	0,75	2.5%	89.94%	

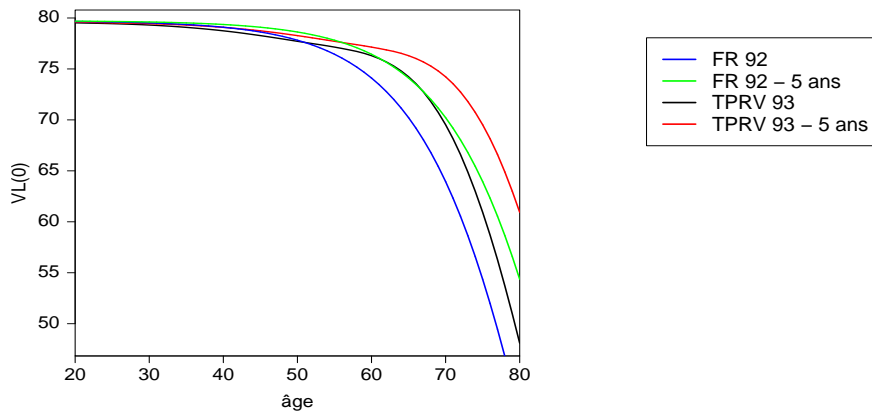
6.2.2 Evaluation du CDSR

Le but de ce point est l'analyse de l'impact de la mortalité sur la valeur initiale d'un contrat de CDSR quand les variables prennent les valeurs définies en 6.1. La figure 6.2 représente l'évolution de la valeur du CDSR en fonction de l'âge des assurés, qui varie entre 20 et 80 ans.

La courbe bleue donne les résultats pour la table de mortalité statique et la courbe verte est identique à l'exception près qu'elle applique une correction d'âge de cinq ans.

La courbe noire donne la valeur du CDSR pour la table de mortalité prospective sans correction d'âge, ce qui correspond à des assurés nés en 1950, la courbe rouge finalement représente les résultats pour des assurés nés 1980 (rajeunissement de cinq ans par rapport à la courbe noire).

FIG. 6.2 – Valeur du contrat en fonction de l'âge
 $\alpha = 80\%$, $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $T = 10$, $\lambda = 0.75$, $r^* = 2.5\%$, $\delta = 89.94\%$



La figure 6.2 montre que, quelque soit la table de mortalité utilisée, la valeur du contrat diminue en fonction de l'âge. Une personne plus âgée a une

mortalité plus élevée, les coefficients de survie ${}_t p_x$ et ${}_t \bar{p}_x$ qui interviennent dans la relation (6.2) ont alors une valeur plus petite. En conséquence, la valeur du CDSR diminue. Pour les âges élevés, nous constatons que l'effet dû aux probabilités de survie est très important.

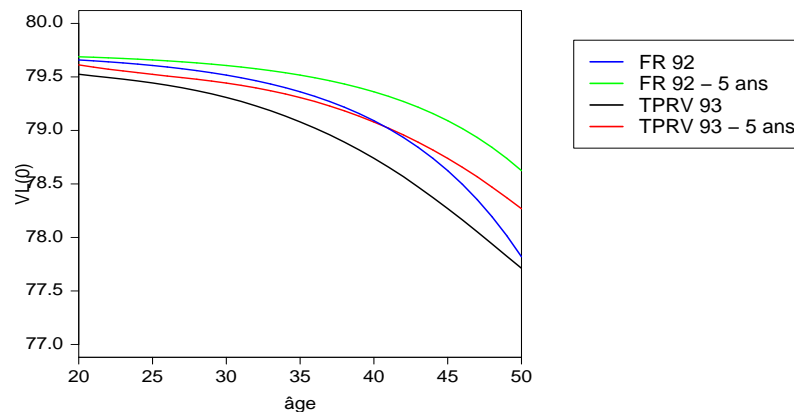
Dans les paragraphes suivants, nous nous intéressons aux âges élevés ; les âges inférieurs à 50 ans sont étudiés par la suite à l'aide de la figure 6.3.

C'est la table de mortalité prospective avec une année de naissance en 1980 qui donne lieu à la valeur la plus élevée. La figure 5.2 avait montré en effet que c'était la table la plus lente à partir de 60 ans.

Les positions relatives des quatre courbes se déduisent par ailleurs directement du graphique 5.2. En 5.2, nous avons représenté les coefficients de mortalité en fonction des quatre tables. Pour la détermination de la valeur du contrat, ce ne sont pas ces quotients qui interviennent mais les probabilités de survie. La courbe qui présentait les quotients les plus faibles en 5.2 donne ainsi lieu à la valeur la plus élevée pour le contrat.

Nous nous concentrons à présent sur les personnes ayant un âge inférieur à 50 ans : la figure 6.3 est identique au graphe 6.2, si ce n'est qu'elle illustre la valeur uniquement pour les âges compris entre 20 et 50 ans. Elle permet de visualiser mieux les effets de l'introduction de la mortalité.

FIG. 6.3 – Valeur du contrat en fonction de l'âge
 $\alpha = 80\%$, $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $T = 10$, $\lambda = 0.75$, $r^* = 2.5\%$, $\delta = 89.94\%$



A présent, c'est la table statique avec un rajeunissement de cinq ans qui donne la valeur la plus élevée au contrat. Les positions relatives des quatre courbes se déduisent de nouveau à partir du graphe 5.2.

Nous constatons que, pour les paramètres définis en 6.1, aucun âge ne permet d'obtenir un contrat équitable : toutes les courbes de 6.3 se trouvent en-dessous du niveau équitable de 80.

L'introduction de la mortalité implique que les actionnaires sont favorisés par rapport aux assurés. Il faut donc revoir les paramètres liés au contrat lors de l'introduction de la mortalité afin de proposer un contrat équitable. Une possibilité serait par exemple d'augmenter la participation aux bénéfices pour réintroduire l'équilibre entre les *stakeholders*. Cette question est abordée au point suivant.

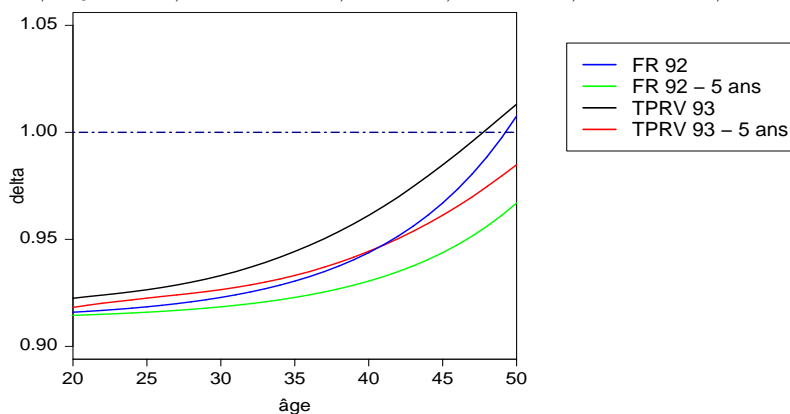
Pour les âges compris entre 20 et 50 ans, c'est la table statique moins cinq ans qui donne lieu à la valeur la plus élevée. En effet, la figure 5.2 montrait que c'est la table la plus lente dans cette tranche d'âge.

6.2.3 Participation bénéficiaire juste

Voyons à présent quelle est la participation aux bénéfices que la compagnie devrait proposer pour que le contrat de CDSR ait une valeur initialement juste. Les graphiques 6.2 et 6.3 ont montré qu'avec les paramètres de 6.1, il n'est possible d'obtenir un contrat équitable.

De plus, la valeur du contrat est décroissante en fonction de l'âge : il faut donc augmenter la participation aux bénéfices pour garantir une distribution équitable de valeur. La figure 6.4 représente le niveau de la participation bénéficiaire en fonction de l'âge des assurés.

FIG. 6.4 – Participation bénéficiaire en fonction de l'âge
 $\alpha = 80\%$, $A_0 = 100$, $\sigma = 10.25\%$, $T = 10$, $\lambda = 0.75$, $r^* = 2.5\%$, $\delta = 89.94\%$



Comme nous l'avons constaté ci-dessus, le niveau de la participation bénéficiaire doit être supérieure à 89.94% pour avoir un contrat initialement juste; à chaque âge le niveau de participation juste dépasse la valeur de 89.94%.

Les taux de participation aux bénéfices doivent donc être plus élevés que pour le contrat sans mortalité. Ceci est dû au fait que tous les assurés ne sont pas vivants à l'échéance des contrats. Les personnes décédées avant la maturité des contrats n'ont pas droit au paiement d'un capital ou d'une participation éventuelle. Par rapport au contrat sans mortalité, la compagnie est amenée à payer la même participation bénéficiaire globale, mais répartie sur une population réduite. Les survivants ont donc droit à un bonus plus élevé.

Nous constatons en figure 6.4 que le niveau des participations aux bénéfices devrait excéder les 100% à partir d'un certain âge, cet âge limite est fonction de la table de mortalité. Or, δ peut valoir au maximum 1. Ainsi, une hausse de δ n'est pas suffisante pour rendre le contrat juste entre assurés et actionnaires. Une compagnie voulant offrir des contrats équitables doit donc redéfinir les autres paramètres de manière à ce que δ soit inférieur à 1.

6.3 Conclusion

L'étude du contrat de capital différé sans remboursement montre que la *fair value* diminue considérablement en fonction de l'élément de mortalité. Ceci est d'autant plus important quand les assurés ont un âge élevé. Pour un âge donné, nous constatons que c'est la table de mortalité la plus lente qui donne la valeur la plus élevée pour le contrat.

En ce qui concerne le niveau juste de la participation aux bénéfices, la compagnie doit distribuer plus de bénéfices que pour le contrat sans mortalité. Ceci est dû au fait qu'elle doit payer une participation globale équivalente à un plus petit nombre d'assurés.

A partir d'un certain âge, l'introduction de la table de mortalité a comme conséquence que le taux juste de participation bénéficiaire devrait être supérieur à un. Dans ce cas, le contrat désavantage trop les assurés et une hausse de la participation bénéficiaire n'est pas suffisante pour rétablir l'équité du contrat. La compagnie doit donc revoir les autres paramètres afin de rendre le contrat équitable.

Chapitre 7

Conclusions

Ce travail développe un modèle de valorisation de marché des engagements d'une compagnie d'assurance vie à l'égard de ses assurés. Sur base de simulations, nous avons analysé l'impact de plusieurs variables sur la probabilité de défaut de l'assureur et sur la *fair value* du contrat d'assurance.

Nous avons commencé par modéliser un contrat d'assurance de capitalisation en prime unique. Le contrat proposé par la compagnie est une police avec participation bénéficiaire. Il contient une garantie de taux d'intérêt et le droit de participer dans les surplus de rendement.

Le modèle tient compte du risque d'intérêt ainsi que du risque de défaut. Le risque d'intérêt apparaît à travers des taux d'intérêt stochastiques. Le risque de défaut est introduit par une certaine exigence de solvabilité sous forme d'une barrière réglementaire que le cours des actifs ne doit pas atteindre. En cas de défaut, les actifs récupérés sont distribués aux *stakeholders*.

A l'aide de simulations de Monte Carlo, nous avons étudié l'impact de plusieurs variables sur la probabilité de défaut et la valeur du contrat d'assurance. De plus, nous avons analysé le taux de participation aux bénéfices caractérisant des contrats initialement justes. Il en sort que :

- Un taux technique plus élevé génère un risque de défaut plus important, tout en augmentant la valeur du contrat. La participation aux bénéfices doit par contre diminuer afin de donner lieu à un contrat initialement juste. Le taux technique doit donc être fixé de manière à offrir un rendement suffisant sans pour autant mettre en danger la solvabilité.

- Une volatilité plus élevée augmente le risque de défaut et la valeur du contrat. La participation aux bénéfices est plus faible pour éviter que le contrat ne favorise trop les assurés.
- Une hausse du niveau de la barrière réglementaire induit une augmentation de la valeur du contrat jusqu'à une certaine limite, la participation aux bénéfices juste diminue par contre.
- Une part des primes plus élevée dans les actifs initiaux représente un risque de défaut plus élevé et un contrat ayant une valeur plus grande. La participation aux bénéfices requise pour garantir l'équité est plus faible.
- Une durée de contrat plus longue présente un risque de défaut plus grand et une valeur plus faible du contrat. Par contre, la participation juste est plus grande.

L'étude en fonction du niveau de la barrière réglementaire a permis de mettre en évidence la particularité suivante : certaines combinaisons de taux technique et de niveaux de la barrière demandent une participation aux bénéfices juste qui serait négative. Dans ces cas, le contrat avantage trop les assurés et la réduction de la participation bénéficiaire ne suffit pas pour le rendre équitable. La compagnie doit alors revoir les autres paramètres afin de réduire ce déséquilibre.

Dans une seconde étape, nous avons introduit une composante de mortalité pour étudier une assurance de capital différé sans remboursement (CDSR). Cette deuxième partie est consacrée à l'étude de l'effet de la mortalité sur la valeur du contrat et la participation aux bénéfices juste, qui deviennent alors fonction de l'âge des assurés. Nous obtenons les résultats suivants :

- L'introduction de cet élément de mortalité diminue la valeur de l'assurance de CDSR, surtout pour des assurés plus âgés.
- Une table de mortalité plus lente donne lieu à une valeur plus élevée.
- La compagnie d'assurance doit distribuer plus de participations aux bénéfices que pour un contrat sans mortalité.

L'étude numérique a mis en évidence une particularité : à partir d'un certain âge, l'introduction d'une composante de mortalité donne lieu à une participation juste qui serait supérieure à 1. Dans ce cas, le contrat désavantage trop les assurés et une hausse de la participation bénéficiaire n'est pas

suffisante pour rétablir l'équité du contrat. La compagnie doit alors revoir les autres paramètres afin de rendre le contrat équitable.

Le modèle de valorisation permet de déterminer la *fair value* de l'engagement d'une compagnie d'assurance envers ses assurés, indépendamment des bases techniques du contrat. Il prévoit ainsi l'utilisation d'une table de mortalité prospective, plus prudente qu'une table statique réglementaire.

L'utilisation d'une table prospective pour les probabilités de survie donne lieu à des participations bénéficiaires équitables qui, en plus de dépendre de l'âge de l'assuré, sont fonction de son année de naissance ou, exprimé différemment, de la cohorte à laquelle il appartient.

En conclusion, les taux de participation justes varient au cours du temps suite aux effets de la longévité. Le modèle permet ainsi de quantifier le risque de longévité, un des risques clé dans *Solvency II*, nouvelle directive en matière de solvabilité qui devrait être d'application à partir de 2010.

Les résultats de ce travail appellent au moins à trois applications importantes. D'abord, les formules de valorisation peuvent être appliqués afin de déterminer la *fair value* des engagements d'assurance. Ceci est en ligne avec le développement actuel dans le domaine de la comptabilité dans lequel les recommandations vers une comptabilité de marché deviennent de plus en plus fortes. En matière des capitaux de solvabilité requis et les demandes de *Solvency II*, les exigences vont également dans le sens d'une évaluation de marché des engagements d'assurance.

Deuxièmement, les résultats peuvent être utilisés au cours de la conception de nouveaux produits. Si un assureur envisage la vente d'une nouvelle assurance, il doit pouvoir estimer l'impact de sa décision sur la solvabilité et il doit être capable d'évaluer les risques qu'elle implique.

Finalement, le modèle peut servir pour déterminer le taux de participation aux bénéfices qui ne favorise ni assurés ni actionnaires. En effet, le taux de participation juste est fonction du taux technique du contrat. Nous avons montré de plus qu'il dépend de l'âge et de l'année de naissance de la personne assurée. Un assureur qui veut distribuer ses bénéfices de manière équitable doit donc tenir compte des différents taux techniques composant son portefeuille de même que de l'âge et de l'année de naissance de l'assuré. De nouveau, le modèle permet de déterminer l'impact sur la solvabilité.

Même si le modèle présenté ici tient compte d'un bon nombre d'éléments, on peut envisager d'y apporter quelques améliorations. Ainsi, on pourrait introduire des primes périodiques dans le modèle. Un autre élément présent

dans de nombreux contrats qui n'est pas modélisé ici, est la possibilité de racheter son contrat avant le terme.

D'autre part, une extension possible serait la modélisation de polices comprenant des engagements en cas de décès, comme une assurance mixte. Finalement, le cas le plus général serait la modélisation d'une compagnie d'assurance ayant un portefeuille composé de différents types de polices.

Annexe A

Cas particuliers

Dans cette annexe, nous présentons deux cas particuliers pour la valorisation du contrat d'assurance. D'un côté, nous regardons ce que donnent les formules de valorisation dans l'approche de BRIYS & DE VARENNE (1994, 1997a). Ils ne tiennent pas compte d'une faillite éventuelle avant la maturité des contrats. D'un autre côté, nous présentons les résultats de GROSEN & JØRGENSEN (2002). Ces auteurs ont obtenu des formules fermées dans le cadre d'un taux d'intérêt sans risque constant.

A.1 Valorisation des engagements de la compagnie sans défaut précoce

Le premier cas particulier que nous présentons est celui qui a été étudié par BRIYS & DE VARENNE (1994, 1997a). Ils considèrent la possibilité de défaut uniquement à maturité des contrats. Dans BRIYS & DE VARENNE (1994), le taux d'intérêt sans risque suit un processus de HEATH, JARROW & MORTON (1992) pour une courbe des taux forward initiale donnée. Dans BRIYS & DE VARENNE (1997a), les auteurs considèrent par contre un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, ce qui équivaut au cadre de ce travail.

Contrairement à l'approche choisie dans cette étude qui consiste à valoriser l'engagement de la compagnie à l'égard des assurés, BRIYS & DE VARENNE (1994) étudient le point de vue des actionnaires.

Quand le contrat vient à maturité à l'instant T , les payoffs des assurés et des actionnaires sont donnés par les formules (1.10) et (1.12). Ces flux sont simplement fonction de la valeur finale des actifs :

$$\Theta_L(T) = \delta \left[\alpha A_T - L_T^* \right]^+ + L_T^* - \left[L_T^* - A_T \right]^+,$$

et

$$\Theta_E(T) = \left[A_T - L_T^* \right]^+ - \delta \alpha \left[A_T - \frac{L_T^*}{\alpha} \right]^+.$$

Ces formules montrent que les paiements $\Theta_L(T)$ et $\Theta_E(T)$ sont des payoffs finaux d'options d'achat européennes venant à maturité en T . Les valeurs marché de ces flux peuvent donc être déterminées dans le cadre classique de la tarification des options.

L'engagement de la compagnie envers les assurés peut ainsi être valorisé en t ($0 \leq t \leq T$) par :

$$V_L(t) = L_T^* P(t, T) - P_E(A_t, L_T^*) + \delta \alpha C_E(A_t, \frac{L_T^*}{\alpha}), \quad (\text{A.1})$$

où $P(t, T)$ désigne le prix en t d'un zéro-coupon venant à maturité en T , $P_E(A_t, L_T^*)$ représente le prix de l'option de défaut européenne de prix d'exercice L_T^* et $C_E(A_t, \frac{L_T^*}{\alpha})$ est un call européen de maturité T et de prix d'exercice $\frac{L_T^*}{\alpha}$.

Si $\mathcal{N}(\cdot)$ représente la fonction de répartition de la loi normale réduite, les valeurs des options sont données par :

$$P_E(A_t, L_T^*) = -A_t \mathcal{N}(-d_1) + P(t, T) L_T^* \mathcal{N}(-d_2) \quad (\text{A.2})$$

$$C_E(A_t, \frac{L_T^*}{\alpha}) = A_t \mathcal{N}(d_3) - P(t, T) \frac{L_T^*}{\alpha} \mathcal{N}(d_4) \quad (\text{A.3})$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln \left[\frac{A_t}{P(t, T) L_T^*} \right] + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2(t, T) (T - t)}{\bar{\sigma}(t, T) \sqrt{T - t}},$$

$$d_2 = d_1 - \bar{\sigma}(t, T) \sqrt{T - t},$$

$$d_3 = \frac{\ln \left[\frac{\alpha A_t}{P(t, T) L_T^*} \right] + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2(t, T) (T - t)}{\bar{\sigma}(t, T) \sqrt{T - t}},$$

$$d_4 = d_3 - \bar{\sigma}(t, T) \sqrt{T - t},$$

$$\bar{\sigma}^2(t, T) = \frac{1}{T - t} \int_t^T \left[\left(\sigma \rho + \sigma_P(u, T) \right)^2 + (1 - \rho^2) \sigma^2 \right] du.$$

A l'aide de (A.2) et (A.3), la relation (A.1) s'écrit :

$$V_L(t) = A_t \left(\mathcal{N}(-d_1) + \delta \alpha \mathcal{N}(d_3) \right) + P(t, T) L_T^* \left(\mathcal{N}(d_2) - \delta \mathcal{N}(d_4) \right). \quad (\text{A.4})$$

En ce qui concerne les actionnaires, la valeur de leur flux en t est donnée par :

$$V_E(t) = C_E(A_t, L_T^*) - \delta \alpha C_E(A_t, \frac{L_T^*}{\alpha}), \quad (\text{A.5})$$

où $C_E(A_t, L_T^*)$ représente un call européen de maturité T et de prix d'exercice L_T^* :

$$C_E(A_t, L_T^*) = A_t N(d_1) - P(t, T) L_T^* N(d_2). \quad (\text{A.6})$$

A l'aide de (A.3) et (A.6), la relation (A.5) s'écrit :

$$V_E(t) = A_t \left(\mathcal{N}(d_1) - \delta \alpha \mathcal{N}(d_3) \right) - P(t, T) L_T^* \left(\mathcal{N}(d_2) - \delta \mathcal{N}(d_4) \right). \quad (\text{A.7})$$

Contrats équitables

Du point de vue des actionnaires, la tarification de la police d'assurance doit se faire de sorte à ce qu'ils soient compensés de manière équitable pour détenir l'action de la compagnie d'assurance. Ceci se traduit par le fait que le taux garanti et la participation aux bénéfices doivent être tels que la mise de fonds initiale (prix d'émission initial) par les actionnaires est égale à la valeur présente de leur droit sur les flux futurs.

Cette valeur actuelle est connue : elle est donnée par l'expression (A.7). La condition d'équilibre sur r^* et δ est donnée par :

$$E_0 = (1 - \alpha)A_0 = V_E(0)$$

ou de manière équivalente

$$(1 - \alpha)A_0 = C_E(A_0, L_T^*) - \delta \alpha C_E(A_0, \frac{L_T^*}{\alpha}). \quad (\text{A.8})$$

En effet, les actionnaires ne vont jamais investir dans la compagnie d'assurance vie si la valeur de leur investissement est inférieure à leur dépense initiale.

L'équation (A.8) donne ainsi soit le taux garanti r^* , soit le niveau de participation δ comme variable d'équilibre. L'expression analytique pour déterminer δ s'écrit dans ce cas particulier :

$$\delta = \frac{C_E(A_0, L_T^*) - (1 - \alpha)A_0}{\alpha C_E(A_0, \frac{L_T^*}{\alpha})}. \quad (\text{A.9})$$

En remplaçant les options d'achat par leurs formules respectives et L_T^* par $\alpha A_0 e^{r^*T}$, la relation (A.9) se réécrit

$$\delta = \frac{\alpha \left(1 - P(0, T) e^{r^*T} \mathcal{N}(d_2) \right) + \mathcal{N}(d_1) - 1}{\alpha \left(\mathcal{N}(d_3) - P(0, T) e^{r^*T} \mathcal{N}(d_4) \right)}, \quad (\text{A.10})$$

où d_1 , d_2 , d_3 et d_4 sont définis comme ci-dessus.

En appliquant la parité call-put, le niveau de participation δ peut être réécrit en fonction du put de défaut :

$$\delta = \frac{\alpha A_0 - L_T^* P(0, T) + P_E(A_0, L_T^*)}{\alpha C_E(A_0, \frac{L_T^*}{\alpha})}. \quad (\text{A.11})$$

A partir des équations (A.4) et (A.7), BRIYS & DE VARENNE (1997a) montrent que $\bar{\sigma}$, la volatilité du ratio $\frac{A_t}{P(t, T)}$ est le paramètre important pour la tarification des engagements envers les actionnaires et les assurés.

A.2 Taux sans risque constant

Dans un cadre semblable à celui présenté dans ce travail, mais sous l'hypothèse d'un taux d'intérêt sans risque constant, GROSEN & JØRGENSEN (2002) ont obtenu des formules fermées pour valoriser les flux des assurés et des actionnaires.

Sous l'hypothèse que le taux d'intérêt sans risque r est constant et positif, la dynamique des actifs (2.4) suit un mouvement brownien géométrique qui s'écrit sous la mesure de probabilité neutre-risque :

$$dA_t = r A_t dt + \sigma A_t dZ^{\mathcal{Q}}(t). \quad (\text{A.12})$$

Si nous désignons par $V_i(A_t, t)$, $i = L$ ou E , la valeur en t des engagements de la compagnie envers les assurés et les actionnaires, nous pouvons réécrire la relation (3.1) comme suit :

$$V_i(A_t, t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}} \left[\Theta_i(A_T) \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}} \right] + \mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}} \left[e^{-r(\tau-t)} \Theta_i(\tau) \right]. \quad (\text{A.13})$$

Considérant le problème comme variante des problèmes standard des options barrière knockout, GROSEN & JØRGENSEN (2002) proposent les deux théorèmes suivants qui donnent des formules de valorisation fermées.

Théorème A.1 (La valeur du flux des assurés) *Sous réserve que la compagnie n'ait pas cessé son activité prématurément, le paiement à maturité aux assuré est donné par l'équation (1.10) :*

$$\Theta_L(T) = \delta \left[\alpha A_T - L_T^* \right]^+ + L_T^* - \left[L_T^* - A_T \right]^+.$$

Ce paiement est composé de trois parties : un élément d'option de participation bénéficiaire, un paiement fixé et un élément d'option put en position courte.

Dans le cas d'une atteinte prématurée de la barrière, une indemnisation est spécifiée par $\Theta_L(\cdot)$ dans l'équation (1.11) :

$$\Theta_L(\tau) = \min[\lambda, 1] L_{\tau}^*.$$

$V_L(A_t, t)$ est la somme de la valeur en t des quatre éléments distincts donnés ci-dessous dans (i)-(iv), où apparaît la notation

$$d_{\gamma}^{\pm}(x, t) = \frac{\ln(x) + (r - \gamma \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}},$$

et où $\mathcal{N}(\cdot)$ représente la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

(i) La valeur en t de l'élément d'option de participation aux bénéfices :

$$\begin{aligned} & e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}} \left[\delta [\alpha A_T - L_T^*]^+ \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}} \right] \\ &= \delta \alpha \left\{ A_t \mathcal{N} \left(d_0^+ \left(\frac{A_t}{X}, t \right) \right) - \frac{L_T^*}{\alpha} e^{-r(T-t)} \mathcal{N} \left(d_0^- \left(\frac{A_t}{X}, t \right) \right) - \left(\frac{A_t}{B_t} \right)^{1 - \frac{2(r-r^*)}{\sigma^2}} \right. \\ & \quad \left. \left[\frac{B_t^2}{A_t} \mathcal{N} \left(d_0^+ \left(\frac{B_t^2/A_t}{X}, t \right) \right) - \frac{L_T^*}{\alpha} e^{-r(T-t)} \mathcal{N} \left(d_0^- \left(\frac{B_t^2/A_t}{X}, t \right) \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

avec $X = \max[\lambda, \frac{1}{\alpha}] L_T^*$.

(ii) La valeur en t de l'élément conditionnel de paiement fixe :

$$\begin{aligned} & e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}} \left[L_T^* \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}} \right] \\ &= L_T^* e^{-r(T-t)} \left[\mathcal{N} \left(d_{r^*}^- \left(\frac{A_t}{B_t}, t \right) \right) - \left(\frac{A_t}{B_t} \right)^{1 - \frac{2(r-r^*)}{\sigma^2}} \mathcal{N} \left(d_{r^*}^- \left(\frac{B_t}{A_t}, t \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

(iii) La valeur en t de l'élément de put en position courte :

$$\begin{aligned} & -\mathbf{1}_{\{\lambda < 1\}} e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}} \left[[L_T^* - A_T]^+ \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}} \right] \\ &= -\mathbf{1}_{\{\lambda < 1\}} \left\{ L_T^* e^{-r(T-t)} \left[\mathcal{N} \left(-d_0^- \left(\frac{A_t}{L_T^*}, t \right) \right) - \mathcal{N} \left(-d_{r^*}^- \left(\frac{A_t}{B_t}, t \right) \right) \right] \right. \\ & \quad - A_t \left[\mathcal{N} \left(-d_0^+ \left(\frac{A_t}{L_T^*}, t \right) \right) - \mathcal{N} \left(-d_{r^*}^+ \left(\frac{A_t}{B_t}, t \right) \right) \right] - \left(\frac{A_t}{B_t} \right)^{1 - \frac{2(r-r^*)}{\sigma^2}} \\ & \quad \left\{ L_T^* e^{-r(T-t)} \left[\mathcal{N} \left(-d_0^- \left(\frac{B_t^2}{A_t L_T^*}, t \right) \right) - \mathcal{N} \left(-d_{r^*}^- \left(\frac{B_t}{A_t}, t \right) \right) \right] \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{B_t^2}{A_t} \left[\mathcal{N} \left(-d_0^+ \left(\frac{B_t^2}{A_t L_T^*}, t \right) \right) - \mathcal{N} \left(-d_{r^*}^+ \left(\frac{B_t}{A_t}, t \right) \right) \right] \right\} \right\} \end{aligned}$$

(iv) La valeur en t du remboursement en cas de défaut :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}} \left[e^{-r(\tau-t)} \min[\lambda, 1] L_0 e^{r^* \tau} \right] \\ &= \frac{\min[\lambda, 1]}{\lambda} A_t \left[\mathcal{N} \left(-d_{r^*}^+ \left(\frac{A_t}{B_t}, t \right) \right) + \left(\frac{A_t}{B_t} \right)^{-1 - \frac{2(r-r^*)}{\sigma^2}} \mathcal{N} \left(d_{r^*}^+ \left(\frac{B_t}{A_t}, t \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Théorème A.2 (La valeur du flux des actionnaires) *Sous réserve que la compagnie n'ait pas cessé son activité prématurément, le paiement à maturité aux actionnaires est donné par l'équation (1.12) :*

$$\Theta_E(T) = \left[A_T - L_T^* \right]^+ - \delta \alpha \left[A_T - \frac{L_T^*}{\alpha} \right]^+.$$

Ce paiement est la différence de deux payoffs d'options call : une option call de droit résiduel et une autre option call qui correspond à l'option de participation aux bénéfices des assurés.

Dans le cas d'une faillite prématurée, il peut y avoir un remboursement aux actionnaires comme spécifié par l'équation (1.13) :

$$\Theta_E(\tau) = \max[\lambda - 1, 0] L_{\tau}^*.$$

Avec les notations du théorème A.1, $V_E(A_t, t)$ est la somme de la valeur en t de trois éléments distincts, listés dans la suite.

(i) La valeur en t de l'élément d'option d'achat en position longue :

$$\begin{aligned} & e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}} \left[\left[A_T - L_T^* \right]^+ \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}} \right] \\ &= A_t \mathcal{N} \left(d_0^+ \left(\frac{A_t}{Y}, t \right) \right) - L_T^* e^{-r(T-t)} \mathcal{N} \left(d_0^- \left(\frac{A_t}{Y}, t \right) \right) - \left(\frac{A_t}{B_t} \right)^{1 - \frac{2(r-r^*)}{\sigma^2}} \\ & \quad \left[\frac{B_t^2}{A_t} \mathcal{N} \left(d_0^+ \left(\frac{B_t^2/A_t}{Y}, t \right) \right) - L_T^* e^{-r(T-t)} \mathcal{N} \left(d_0^- \left(\frac{B_t^2/A_t}{Y}, t \right) \right) \right] \end{aligned}$$

avec $Y = \max[B_t, L_T^*]$.

(ii) La valeur en t de l'option de participation aux bénéfices courte (voir la partie (i) du théorème A.1) :

$$\begin{aligned} & e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_t^{\mathcal{Q}} \left[\delta \left[\alpha A_T - L_T^* \right]^+ \mathbf{1}_{\{\tau \geq T\}} \right] \\ &= \delta \alpha \left\{ A_t \mathcal{N} \left(d_0^+ \left(\frac{A_t}{X}, t \right) \right) - \frac{L_T^*}{\alpha} e^{-r(T-t)} \mathcal{N} \left(d_0^- \left(\frac{A_t}{X}, t \right) \right) - \left(\frac{A_t}{B_t} \right)^{1 - \frac{2(r-r^*)}{\sigma^2}} \right. \\ & \quad \left. \left[\frac{B_t^2}{A_t} \mathcal{N} \left(d_0^+ \left(\frac{B_t^2/A_t}{X}, t \right) \right) - \frac{L_T^*}{\alpha} e^{-r(T-t)} \mathcal{N} \left(d_0^- \left(\frac{B_t^2/A_t}{X}, t \right) \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

avec $X = \max[\lambda, \frac{1}{\alpha}] L_T^*$.

(iii) La valeur en t du dédommagement des actionnaires en cas de défaut :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_t^Q \left[e^{-r(\tau-t)} \max[\lambda - 1, 0] L_0 e^{r^* \tau} \right] \\ &= \frac{\max[\lambda - 1, 0]}{\lambda} A_t \left[\mathcal{N} \left(-d_{r^*}^+ \left(\frac{A_t}{B_t}, t \right) \right) + \left(\frac{A_t}{B_t} \right)^{-1 - \frac{2(r-r^*)}{\sigma^2}} \mathcal{N} \left(d_{r^*}^+ \left(\frac{B_t}{A_t}, t \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Les formules pour les valeurs des droits des assurés et des actionnaires présentées dans les deux théorèmes ci-dessus sont des formules exactes qui peuvent être implémentées une fois que les paramètres ont été fixés.

Contrats équitables

Tout choix de paramètres ne va pas représenter des contrats justes. Ainsi, le taux d'intérêt garanti, r^* , et le coefficient de participation, δ , ne peuvent pas prendre tous les deux des valeurs arbitrairement hausses (à l'avantage des assurés) si tous les autres paramètres ont été fixés.

La question importante qui se pose alors est de savoir quelles sont les combinaisons de paramètres qui représentent des contrats initialement justes. Pour y répondre, il faut résoudre l'équation suivante :

$$L_0 \equiv \alpha A_0 = V_L(A_0, 0; \alpha, \delta, \lambda, \sigma, T, r, r^*), \quad (\text{A.14})$$

qui formalise l'exigence qu'à l'équilibre, il faut avoir une équivalence entre la contribution initiale des assurés aux actifs totaux et la valeur marché initiale de leur droit. Puisque

$$A_0 = V_L(A_0, 0) + V_E(A_0, 0), \quad (\text{A.15})$$

une approche équivalente serait de prendre le point de vue des actionnaires et de chercher les solutions de

$$E_0 \equiv (1 - \alpha)A_0 = V_E(A_0, 0; \alpha, \delta, \lambda, \sigma, T, r, r^*). \quad (\text{A.16})$$

Des routines de recherche numériques similaires à celles utilisées pour calculer les volatilités implicites à partir de la formule de BLACK & SCHOLES (1973), permettent d'établir des solutions à l'aide de (A.14) ou de (A.16). GROSEN & JØRGENSEN (2002) illustrent certaines relations typiques entre les paramètres de contrats initialement équitables.

Annexe B

Méthode d'évaluation de Fortet

Cette annexe présente les approches de BERNARD (2005) et de BERNARD, LE COURTOIS & QUITTART-PINON (2005) qui ont proposé une alternative aux simulations de Monte Carlo. Leur méthode se base sur l'approximation de FORTET (1943) et a été proposée par LONGSTAFF & SCHWARTZ (1995) ainsi que par COLLIN-DUFRESNE & GOLDSTEIN (2001).

LONGSTAFF & SCHWARTZ (1995) se sont servis de l'approximation de FORTET (1943) pour approcher la loi de τ dans un problème analogue à celui étudié dans le cadre de ce travail : le problème de l'évaluation structurelle des obligations à taux fixe ou flottant, en présence des risques de taux et de défaut.

Toutefois, l'approximation de LONGSTAFF & SCHWARTZ (1995) n'est pas suffisante et mathématiquement non valide. Cette méthode n'est bien adaptée que pour des processus de Markov unidimensionnels. COLLIN-DUFRESNE & GOLDSTEIN (2001) ont apporté une correction à l'approximation précédente qui valide le modèle pour des problèmes du même type que ceux étudiés ici.

BERNARD (2005) et BERNARD, LE COURTOIS & QUITTART-PINON (2005) ont appelé méthode de *Fortet étendue* cette extension qui tient effectivement compte du caractère stochastique du taux d'intérêt. Nous reprenons cette appellation et décrivons son fonctionnement par la suite.

B.1 Principe de l'approximation de *Fortet étendue*

Nous présentons dans cette section la méthode d'approximation utilisée par BERNARD (2005) et BERNARD, LE COURTOIS & QUITTART-PINON (2005) pour valoriser les contrats d'assurance vie étudiés. La méthode de *Fortet étendue* permet d'approcher la loi de τ sous la probabilité forward-neutre.

BERNARD, LE COURTOIS & QUITTART-PINON (2005) abordent le problème à l'aide de densités tandis que BERNARD (2005) travaille plutôt avec la notion de probabilité. Cette deuxième approche est préférable puisqu'elle ne suppose pas l'existence d'une densité. Nous reprenons ici les résultats de BERNARD (2005).

L'équation de Fortet décrit le principe suivant : la seule manière pour un processus continu d'avoir une valeur initiale au-dessus d'une limite et de terminer en une valeur inférieure à celle-ci consiste à passer par la limite à un instant intermédiaire. Nous allons expliciter par la suite comment se ramener à l'équation de Fortet dans le cadre présenté ici.

Pour commencer, on se ramène au cas d'une barrière constante en notant que τ est également le premier temps de passage du processus lognormal $\chi_t = A_t e^{-r^*t}$ par la barrière constante λL_0 . Si nous introduisons le processus $l_t = \ln(\chi_t) = \ln(A_t) - r^*t$, la barrière de défaut devient $h = \ln(\lambda L_0)$. Nous supposons qu'elle est inférieure l_0 , la valeur initiale du processus étudié.

Nous nous intéressons donc au temps de premier passage de l_t par la barrière constante h , ou plus explicitement

$$\tau = \inf \left\{ t \in [0, T] \mid l_t \leq h \right\}.$$

Mathématiquement, le principe de Fortet se traduit par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & \mathcal{Q}_T(l_t \in dl, r_t \in dr \mid l_0, r_0) \\ &= \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{Q}_T(l_t \in dl, r_t \in dr \mid l_s = h, r_s = r') \mathcal{Q}_T(r_\tau \in dr', \tau \in ds). \end{aligned}$$

Si nous intégrons l'équation précédente par rapport à l entre $-\infty$ et h , il vient :

$$\begin{aligned} & \mathcal{Q}_T(l_t \leq h, r_t \in dr \mid l_0, r_0) \\ &= \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{Q}_T(l_t \leq dl, r_t \in dr \mid l_s = h, r_s = r') \mathcal{Q}_T(r_\tau \in dr', \tau \in ds). \end{aligned} \tag{B.1}$$

Pour simplifier, introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \Phi(r_t, t) dr &= \mathcal{Q}_T(l_t \leq h, r_t \in dr \mid l_0, r_0), \\ \Psi(r_t, t, r', s) dr &= \mathcal{Q}_T(l_t \leq h, r_t \in dr \mid l_s = h, r_s = r'). \end{aligned}$$

L'équation (B.1) peut alors se réécrire de la manière suivante :

$$\Phi(r_t, t) = \int_{s \in [0, t]} \int_{r' \in \mathbb{R}} \Psi(r_t, t, r', s) \mathcal{Q}_T(r_\tau \in dr', \tau \in ds). \quad (\text{B.2})$$

Nous cherchons à connaître la loi de τ . Pour ceci, le temps et le taux d'intérêt sont discrétisés. L'intervalle $[0, T]$ est subdivisé en n_T sous-périodes de longueur $\delta_t = \frac{T}{n_T}$. Le taux d'intérêt est subdivisé entre r_{\min} et r_{\max} ¹ en n_r intervalles de même taille $\delta_r = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{n_r}$. Enfin, nous notons respectivement $t_j = j \delta_t$ et $r_i = r_{\min} + i \delta_r$ les valeurs discrétisées du temps et du taux d'intérêt.

Nous donnons une approximation récursive de la loi de τ comme une fonction constante par morceaux sur $[t_{j-1}, t_j]$ quand le taux d'intérêt est compris entre r_{i-1} et r_i .

Posons

$$q(i, j) = \mathcal{Q}_T(r_\tau \in [r_{i-1}, r_i], \tau \in [t_{j-1}, t_j]).$$

En approchant la loi exacte de τ par les valeurs des différentes probabilités $q(i, j)$ ci-dessus, l'écriture intégrale de la formule (B.2) devient une somme et se présente comme suit :

$$\Phi(r_i, t_j) = \sum_{v=1}^j \sum_{u=1}^{n_r} q(u, v) \Psi(r_i, t_j, r_u, t_v).$$

A partir de cette dernière relation, on obtient alors un algorithme récursif pour déterminer les valeurs de $q(i, j)$. Ainsi pour $j = 1$, la formule ci-dessus s'écrit :

$$\Phi(r_i, t_1) = \sum_{u=1}^{n_r} q(u, 1) \Psi(r_i, t_1, r_u, t_1).$$

Cette équation permet alors d'obtenir une valeur pour $q(i, 1)$. En effet, $\Psi(r_i, t_1, r_u, t_1) = \mathbf{1}_{\{r_i = r_u\}}$, et donc :

$$q(i, 1) = \Phi(r_i, t_1). \quad (\text{B.3})$$

¹Il faut choisir les deux valeurs extrêmes de telle sorte que la probabilité que le taux d'intérêt se trouve en dehors de cet intervalle, soit négligeable. Un processus d'Ornstein-Uhlenbeck prend en effet ses valeurs dans \mathbb{R} , mais les valeurs négatives ou très grandes de r_t sont très improbables.

Si le taux initial est compris autour de la moyenne à long terme plus ou moins une fois la volatilité, COLLIN-DUFRESNE & GOLDSTEIN (2001) remarquent qu'il suffit de prendre les valeurs minimale et maximale du taux d'intérêt de manière à considérer la moyenne à long terme plus ou moins trois fois la volatilité.

A partir des quantités $q(i, 1)$, les valeurs pour $q(i, j)$ ($j \geq 2$) s'obtiennent par récurrence en utilisant la relation suivante :

$$\begin{aligned}\Phi(r_i, t_j) &= \sum_{v=1}^j \sum_{u=1}^{n_r} q(u, v) \Psi(r_i, t_j, r_u, t_v) \\ &= \sum_{u=1}^{n_r} q(u, j) \Psi(r_i, t_j, r_u, t_j) + \sum_{v=1}^{j-1} \sum_{u=1}^{n_r} q(u, v) \Psi(r_i, t_j, r_u, t_v).\end{aligned}$$

Grâce à la relation $\Psi(r_i, t_j, r_u, t_j) = \mathbf{1}_{\{r_i=r_u\}}$, la formule précédente permet de dériver une expression pour $q(i, j)$:

$$q(i, j) = \Phi(r_i, t_j) - \sum_{v=1}^{j-1} \sum_{u=1}^{n_r} q(u, v) \Psi(r_i, t_j, r_u, t_v). \quad (\text{B.4})$$

Pour déterminer les $q(i, j)$, il ne reste plus qu'à connaître l'expression des termes $\Phi(r_i, t_j)$ et $\Psi(r_i, t_j, r_u, t_v)$. Rappelons que le couple des processus d'actifs et de taux est un processus de Markov gaussien. Nous appliquons alors la règle de Bayès du produit des densités conditionnelles : si nous notons f_{l_t, r_t} la densité du couple (l_t, r_t) sous la probabilité forward-neutre, nous avons :

$$f_{l_t, r_t}(l, r) = f_{r_t}(r) f_{l_t|r_t}(l).$$

Notons \mathfrak{S}_0 et \mathfrak{S}_s les tribus respectives de l'information disponible aux instant 0 et s . D'après la propriété de Markov de (l_t, r_t) , le conditionnement par rapport à \mathfrak{S}_s se résume à la connaissance de (l_s, r_s) . Nous en déduisons les expressions suivantes pour Φ et Ψ :

$$\Phi(r, t) = f_{r_t}(r | \mathfrak{S}_0) \int_{-\infty}^h f_{l_t|r_t}(l | \mathfrak{S}_0) dl,$$

$$\Psi(r, t, r', s) = f_{r_t}(r | \mathfrak{S}_s) \int_{-\infty}^h f_{l_t|r_t}(l | \mathfrak{S}_s) dl.$$

Comme le processus (l_t, r_t) est gaussien, la loi conditionnelle de $l_t|r_t$ par rapport à la tribu engendrée par l'information disponible à l'instant s est gaussienne de moyenne $\mu(r_t, l_s, r_s)$ et de variance $\Sigma^2(r_t, l_s, r_s)$; ces valeurs sont obtenues grâce au théorème de projection :

$$\mu(r_t, l_s, r_s) = \mathbb{E}(l_t | \mathfrak{S}_s) + \frac{\text{Cov}(l_t, r_t | \mathfrak{S}_s)}{\text{Var}(r_t | \mathfrak{S}_s)} \left(r_t - \mathbb{E}(r_t | \mathfrak{S}_s) \right)$$

et

$$\Sigma^2(r_t, l_s, r_s) = \text{Var}(l_t | \mathfrak{S}_s) - \frac{\text{Cov}(l_t, r_t | \mathfrak{S}_s)^2}{\text{Var}(r_t | \mathfrak{S}_s)}.$$

Notons \mathcal{N} la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. En utilisant la loi conditionnelle gaussienne décrite ci-dessus, nous obtenons

$$\Phi(r, t) = f_{r_t}(r|r_0) \mathcal{N}\left(\frac{h - \mu(r, l_0, r_0)}{\sqrt{\Sigma^2(r, l_0, r_0)}}\right),$$

$$\Psi(r, t, r', s) = f_{r_t}(r|r_s = r') \mathcal{N}\left(\frac{h - \mu(r, l_s, r_s)}{\sqrt{\Sigma^2(r, l_s, r_s)}}\right),$$

où nous disposons d'une formule explicite pour la densité de transition f_{r_t} du processus gaussien r :

$$f_{r_t}(r|r_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}v} e^{-\frac{(r-m)^2}{2v}},$$

où $m = \mathbb{E}[r_t|r_s]$ et $v = \text{Var}[r_t|r_s]$ désignent respectivement les moments conditionnels de r_t sachant r_s . Ils sont donnés au point B.3.

On dispose ainsi, grâce à la formule (B.4), d'une méthode de calcul des termes $q(i, j)$, approchant la densité de probabilité de la loi de τ . Cette formule est une formule de récurrence dans laquelle il faut connaître les fonctions Φ et Ψ introduites ci-dessus. À l'aide des $q(i, j)$, il est possible de calculer toute expression dans laquelle intervient τ .

B.2 Formules quasi-fermées

Pour évaluer le contrat décrit dans le troisième chapitre, il reste à déterminer chaque terme dans (3.7). Chaque terme faisant intervenir τ est déterminé en utilisant la méthode de *Fortet étendue*.

Pour cela, il faut connaître les moments de l_t^2 et de r_t de même que les moments conditionnels de l_t sachant r_t . Ces formules sont détaillées au point B.3.

Commençons par nous intéresser au calcul de E_1 . Si nous discrétisons selon le temps et le taux d'intérêt, il vient directement :

$$E_1 = \sum_{j=1}^{n_T} \sum_{i=1}^{n_r} q(i, j).$$

Pour déterminer les autres E_i faisant intervenir l'instant τ , on se sert principalement du conditionnement. En effet, la densité de l_T n'est pas connue, mais on connaît sa loi conditionnelle à r_T . La loi de $l_T|r_T$ conditionnelle à

²Les termes de la formule (3.7) qui s'expriment en fonction de A_t peuvent se réécrire en termes de l_t .

\mathfrak{S}_s est gaussienne ; ses deux premiers moments sont $\hat{\mu}_{s,T} = \mu(r_T, l_s, r_s)$ et $\hat{\Sigma}_{s,T}^2 = \Sigma^2(r_T, l_s, r_s)$. En se servant des propriétés de la loi de $l_T|r_T$ conditionnellement à \mathfrak{S}_s , on obtient des formules semi-fermées.

A l'aide des fonctions $\Phi_1(m; \sigma; a)$ et $\Phi_2(m; \sigma; a)$ introduites dans la section 3.4.2, on obtient les formules suivantes pour les espérances E_2 , E_3 , E_4 et E_5 :

$$E_2 = e^{r^*T} \sum_{j=1}^{n_T} \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{k=1}^{n_r} \delta_r f_{r_T}(r_k|r_i, \mathfrak{S}_j) \Phi_1\left(\hat{\mu}_{t_j,T}; \hat{\Sigma}_{t_j,T}; \frac{L_0}{\alpha}\right) q(i, j);$$

$$E_3 = e^{r^*T} \sum_{j=1}^{n_T} \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{k=1}^{n_r} \delta_r f_{r_T}(r_k|r_i, \mathfrak{S}_j) \mathcal{N}\left(\frac{\hat{\mu}_{t_j,T} - \ln\left(\frac{L_0}{\alpha}\right)}{\sqrt{\hat{\Sigma}_{t_j,T}^2}}\right) q(i, j);$$

$$E_4 = e^{r^*T} \sum_{j=1}^{n_T} \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{k=1}^{n_r} \delta_r f_{r_T}(r_k|r_i, \mathfrak{S}_j) \mathcal{N}\left(\frac{\ln(L_0) - \hat{\mu}_{t_j,T}}{\sqrt{\hat{\Sigma}_{t_j,T}^2}}\right) q(i, j);$$

$$E_5 = e^{r^*T} \sum_{j=1}^{n_T} \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{k=1}^{n_r} \delta_r f_{r_T}(r_k|r_i, \mathfrak{S}_j) \Phi_2\left(\hat{\mu}_{t_j,T}; \hat{\Sigma}_{t_j,T}; L_0\right) q(i, j).$$

Considérons à présent l'expression E_6 . Ce terme s'écrit sous forme approchée de la manière suivante :

$$E_6 = \sum_{j=1}^{n_T} \sum_{i=1}^{n_r} e^{r^* t_j} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}_T} \left[e^{\int_{t_j}^T r_u du} \mid r_{t_j} = r_i, t_j, l_{t_j} = h \right] q(i, j).$$

Le calcul de E_6 est possible puisque $\int_{t_j}^T r_u du$ suit une loi gaussienne sous \mathcal{Q}_T dont on peut déterminer les moments. Ils sont donnés dans la section B.3. Finalement E_6 est obtenu grâce à la propriété suivante sur les lois normales :

$$\text{Si } Y \text{ est une variable gaussienne } \mathcal{N}(m, \sigma^2), \text{ alors } \mathbb{E}[e^Y] = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}}.$$

Les espérances E_7 , E_8 , E_9 et E_{10} sont indépendantes de τ . Leurs formules sont données dans la section 3.4.2.

Dans le but de calculer les différents E_i , il faut connaître Φ_1 , Φ_2 , f_{r_t} et les différents moments apparaissant plus haut et explicités dans la section B.3, de même que les $q(i, j)$. Pour obtenir des résultats précis, il suffit de discrétiser assez finement, c'est-à-dire de choisir n_t et n_r assez grands.

B.3 Moments des processus

Moments conditionnels du processus l_t

Examinons les moments conditionnels du processus l_t . Ce processus vérifie l'équation différentielle stochastique suivante donnée par (2.8) :

$$dl_t = \left(r_t - r^* - \frac{\sigma^2}{2} - \sigma\rho\sigma_P(t, T) \right) dt + \sigma\rho dZ_1^{\mathcal{Q}_T} + \sigma\sqrt{1-\rho^2} dZ_2^{\mathcal{Q}_T},$$

où $Z_1^{\mathcal{Q}_T}$ et $Z_2^{\mathcal{Q}_T}$ sont deux mouvements browniens indépendants sous la mesure forward-neutre.

En intégrant, nous pouvons déterminer les deux premiers moments de ce processus gaussien. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}_T}(l_t | \mathfrak{S}_u) &= l_u - (t-u) \left(\frac{\sigma^2}{2} + r^* - \theta + \frac{\sigma\rho\eta}{a} + \frac{\eta^2}{a^2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{a} \left(1 - e^{-a(t-u)} \right) \left(\theta - r_u - \frac{\eta^2}{a^2} \right) - \frac{\eta^2}{2a^3} e^{-a(T-t)} \left(1 - e^{-2a(t-u)} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\rho\sigma\eta}{a^2} + \frac{\eta^3}{a^2} \right) e^{-a(T-t)} \left(1 - e^{-a(t-u)} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Var}^{\mathcal{Q}_T}(l_t | \mathfrak{S}_u) &= (t-u) \left(\frac{\eta^2}{a^2} + \sigma^2 + 2 \frac{\sigma\rho\eta}{a} \right) + \frac{\eta^2}{2a^3} \left(1 - e^{-2a(t-u)} \right) \\ &\quad - 2 \left(1 - e^{-a(t-u)} \right) \left(\frac{\eta^2}{a^3} + \frac{\rho\sigma\eta}{a^2} \right). \end{aligned}$$

Pour $s < t$, la covariance est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{Cov}^{\mathcal{Q}_T}(l_s, l_t | \mathfrak{S}_u) &= (s-u) \left(\frac{\eta^2}{a^2} + \sigma^2 + 2 \frac{\sigma\rho\eta}{a} \right) + \frac{\eta^2}{2a^3} e^{-a(t-s)} \left(1 - e^{-2a(s-u)} \right) \\ &\quad - \left(\frac{\eta^2}{a^3} + \frac{\rho\sigma\eta}{a^2} \right) \left(1 + e^{-a(t-s)} \right) \left(1 - e^{-a(s-u)} \right). \end{aligned}$$

Covariance entre l_t et r_t

Les processus l_t et r_t sont corrélés à travers le mouvement brownien $Z_1^{\mathcal{Q}_T}$. La covariance conditionnelle entre ces deux processus est donnée par :

$$\text{Cov}^{\mathcal{Q}_T}(l_t, r_t | \mathfrak{S}_u) = \left(1 - e^{-a(t-u)} \right) \left(\frac{\eta^2}{a^2} + \frac{\sigma\rho\eta}{a} \right) - \frac{\eta^2}{2a^2} \left(1 - e^{-2a(t-u)} \right).$$

Covariance entre r_t et r_s

Nous pouvons donner également la covariance entre r_t et r_s ($s < t$) conditionnellement à \mathfrak{S}_u :

$$\text{Cov}^{\mathcal{Q}_T}(r_s, r_t | \mathfrak{S}_u) = \frac{\eta^2}{2a} e^{-a(t-s)} \left(1 - e^{-2a(s-u)} \right).$$

Moments de $\int_u^T r_s ds$

Le calcul de E_6 nécessite la connaissance des moments de l'intégrale $\int_u^T r_s ds$ qui est une variable gaussienne sous \mathcal{Q}_T :

$$\begin{aligned} \int_u^T r_s ds &= \frac{r_u - r_T}{a} + \theta(T - u) - \frac{\eta^2}{a^2} \left(T - u - \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-u)}) \right) \\ &\quad + \frac{\eta}{a} \left(Z_1^{\mathcal{Q}_T}(T) - Z_1^{\mathcal{Q}_T}(u) \right). \end{aligned}$$

Ses moments sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}_T} \left(\int_u^T r_s ds \mid \mathfrak{S}_u \right) &= (1 - e^{-a(T-u)}) \left(\frac{r_u}{a} - \frac{\theta}{a} + \frac{2\eta^2}{a^3} \right) + \left(\theta - \frac{\eta^2}{a^2} \right) (T - u) \\ &\quad - \frac{\eta^2}{2a^3} (1 - e^{-2a(T-u)}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Var}^{\mathcal{Q}_T} \left(\int_u^T r_s ds \mid \mathfrak{S}_u \right) &= \frac{\eta^2}{a^3} \left(\frac{1}{2} (1 - e^{-2a(T-u)}) - 2(1 - e^{-a(T-u)}) \right) \\ &\quad + \frac{\eta^2}{a^2} (T - u). \end{aligned}$$

Annexe C

Algorithme de simulation en Fortran

C.1 Fonctions auxiliaires

```
real*8 function nbaleatoire(x)
use cdf_normal_mod
implicit none
integer status
real*8 valeur1, x
    call CDF_NORMAL(2,x,1-x,valeur1,0.D0,1.D0,status)
    nbaleatoire=valeur1
end

real*8 function normcdf(x)
use cdf_normal_mod
implicit none
integer status
real*8 x,temp,valeur
    call CDF_NORMAL(1,valeur,temp,x,0.D0,1.D0,status)
    normcdf=valeur
end

real*8 function prixzc(a,t,theta,eta,r0)
implicit none
real*8 a,theta,eta,r0,t
    prixzc=exp(t*(eta*eta/(2.D0*a*a)-theta)+(1.D0-exp(-a*t)) &
        *(theta-r0-eta*eta/(a*a))/a+eta*eta/(4.D0*a*a*a) &
        *(1.D0-exp(-2.D0*a*t)))
end
```

C.2 Algorithme de simulation

```

program MonteCarlo

implicit none

character*1 uplo
integer*4 A0, Ttot, t, nb, nT, j, i, k, nbsimu, info
integer*4 compteur1, compteur3, compteur4, mortalite
integer*4 decalagefr, iligne, x, naissance, decalage, tau
integer*4 table(115)
real*8 alpha, delta, rgar, lambda, Lini, a, theta, eta, sigma
real*8 rho, r0, l0, h, e_1, deltaT, nbaleatoire, prixzc, g
real*8 E1, E2 ,E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, normcdf, MT
real*8 VT, TG, B0, P0, LR, VL0, inttaux, valeur
real*8,allocatable :: tj(:), px(:), nbalea(:), processus(:)
real*8,allocatable :: cov(:,,:), acov(:), choleski(:,,:)
real*8,allocatable :: vecteur(:), partiefixe(:), taux(:)

open(unit=1,form='unformatted',file='c:\taux.txt')
open(unit=2,form='unformatted',file='c:\fichierMonteCarlo.txt')
open(unit=3,file='c:\Table_TPRV93.prn')
open(unit=4,file='c:\Tablebelge.prn')

5800 format(I8)

! Initialisation des variables
!-----

! Variables contractuelles:

A0=100 !Valeur intiale des actifs
alpha=0.8D0 !Part intiale des primes dans les actifs
!delta=0.8994D0 !Taux de PB
rgar=0.025D0 !Taux garanti
lambda=0.75D0 !Niveau de limite
Lini=alpha*dble(A0) !Primes initiales
Ttot=10 !Durée du contrat en années
t=0 !Instant de calcul
h=log(lambda*Lini)
e_1=exp(rgar*dble(Ttot))

```

```
! Variables de marché

a=0.463D0
theta=0.0562D0
eta=0.0067D0
r0=0.0291D0
sigma=0.1025D0 !Volatilité des actifs
rho=-0.05D0 !Corrélation
l0=log(dble(A0))

! Discrétisation du temps

nb=52 !Décomposition de l'année en nb unités
nT=(Ttot-t)*nb !Nombre de sous-périodes
deltaT=dblе(Ttot-t)/dblе(nT)

allocate(tj(nT))
do j=1,nT
    tj(j)=dblе(j)*deltaT
enddo

! Age et mortalité

mortalite=1 !1 = table TPRV, 0 = table belge
            ! et -1 = aucune table
decalagefr=0 !0 = table FR, -5 = FR - 5 ans

table(:)=0
if (mortalite>0) then
    do iligne=1,114
        read(3,5800) table(iligne)
    enddo
    else
    do iligne=1,115
        read(4,5800) table(iligne)
    enddo
endif

x=30 !age
naissance=1975 !année de naissance

if (mortalite>0) then ! Détermination des décalages d'âge
    if (and((naissance>1879),(naissance<1910))) then
        decalage=5
    enddo
endif
```

```
endif
if (and((naissance>1909),(naissance<1920))) then
    decalage=4
endif
if (and((naissance>1919),(naissance<1931))) then
    decalage=3
endif
if (and((naissance>1930),(naissance<1939))) then
    decalage=2
endif
if (and((naissance>1938),(naissance<1947))) then
    decalage=1
endif
if (and((naissance>1946),(naissance<1953))) then
    decalage=0
endif
if (and((naissance>1952),(naissance<1960))) then
    decalage=-1
endif
if (and((naissance>1959),(naissance<1966))) then
    decalage=-2
endif
if (and((naissance>1965),(naissance<1971))) then
    decalage=-3
endif
if (and((naissance>1965),(naissance<1979))) then
    decalage=-4
endif
if (and((naissance>1965),(naissance<2007))) then
    decalage=-5
endif
else
    decalage=decalagefr
endif

if (mortalite>-1) then ! Construction de npx
    do i=1,Ttot
        px(i*nb)=dble(table(x+1+decalage+i)) &
            /dble(table(x+1+decalage))
    enddo
    do j=1,nb-1
        px(j)=1+dble(j)*(px(nb)-1)/dble(nb)
    enddo
    do i=1,Ttot-1
```



```

        do j=1,nb-1
            px(i*nb+j)=px(i*nb)+dble(j)*(px((i+1)*nb)- &
                px(nb*i))/dble(nb)
        enddo
    enddo
    else
        px(:)=1.D0
    endif

! Décomposition de Cholesky
!-----

allocate(cov(nT,nT), acov(nT*(nT+1)/2))

cov(:,:)=0.D0
acov(:)=0.D0

do i=1,nT
    do j=1,nT
        g=Dmin1(tj(i),tj(j))
        cov(i,j)=g*(sigma*sigma+2.D0*rho*sigma*eta/a+ &
            eta*eta/(a*a))-(eta*eta+a*rho*eta*sigma)/(a*a*a)* &
            (exp(-a*tj(i))+exp(-a*tj(j)))*(exp(a*g)-1) &
            + exp(-a*tj(i))*exp(-a*tj(j))*(exp(2*a*g)-1) &
            *eta*eta/(2.D0*a*a*a)
        enddo
    enddo

do j=1,nT
    do i=j,nT
        acov(i+int((j-1)*(int(2*nT)-j)/2))=cov(i,j)
    enddo
enddo

deallocate(cov)

uplo='L'

allocate(choleski(nT,nT))
choleski(:,:)=0.D0

call dpptrf(uplo,nT,acov,info)
!Appel de la procédure pour Cholesky

```

```

do j=1,nT
  do i=j,nT
    choleski(i,j)=acov(i+int((j-1)*(int(2*nT)-j)/2))
  enddo
enddo

deallocate(acov)

! Simulations
!-----

nbsimu=5000000

allocate(nbalea(nT), partiefixe(nT), processus(nT))
allocate(vecteur(nT), taux(nT))

nbalea(:)=0.D0
processus(:)=0.D0
taux(:)=0.D0
partiefixe(:)=0.D0

do j=1,nT
  partiefixe(j)=dble(A0)/prixzc(a,tj(j),theta,eta,r0)* &
    exp(-tj(j)*(sigma*sigma/2.D0+rgar+eta*eta/ &
      (2.D0*a*a)+eta*sigma*rho/a)+(eta*eta/(a*a*a) &
      +eta*sigma*rho/(a*a))*exp(-a*dble(Ttot))* &
      (exp(a*tj(j))-1)-eta*eta/(2.D0*a*a*a)* &
      exp(-a*(dble(Ttot)+tj(j)))*(exp(2*a*tj(j))-1) &
      +eta*eta/(4.D0*a*a*a)*(1-exp(-2.D0*a*tj(j))))
enddo

call random_seed()

do k=1,nbsimu
  do j=1,nT
    call random_number(valeur)
    nbalea(j)=nbaleatoire(valeur)
  enddo
  vecteur(:)=MATMUL(choleski,nbalea)
  do j=1,nT
    processus(j)=partiefixe(j)*exp(vecteur(j))
  enddo
  write(2) processus(1:nT)

```

```

    taux(1)=r0*exp(-a*deltaT)+(theta-eta*eta/(a*a))* &
        (1-exp(-a*deltaT))+eta*eta/(2.D0*a*a)* &
        exp(-a*(tj(nT)-tj(1)))*(1-exp(-2.D0*a*deltaT)) &
        + nbalea(1)*eta* sqrt((1-exp(-2.D0*a*deltaT)) &
        /(2.D0*a))*sqrt(deltaT)
    do j=2,nT
        taux(j)=taux(j-1)*exp(-a*deltaT)+(theta-eta*eta/(a*a)) &
            *(1-exp(-a*deltaT))+eta*eta/(2.D0*a*a)* &
            exp(-a*(tj(nT)-tj(j)))*(1-exp(-2.D0*a*deltaT)) &
            +nbalea(j)*eta*sqrt((1-exp(-2.D0*a*deltaT))/ &
            (2.D0*a))*sqrt(deltaT)
    enddo
    do j=1,nT
        processus(j)=partiefixe(j)*exp(vecteur(j))
    enddo
    write(1) taux(1:nT)
enddo

deallocate(nbalea,partiefixe,choleski)

! Détermination des E_i et de la valeur du contrat
-----

compteur1=0
compteur3=0
compteur4=0
compteur8=0
compteur9=0

E1=0.D0
E2=0.D0
E3=0.D0
E4=0.D0
E5=0.D0
E6=0.D0
E7=0.D0
E8=0.D0
E9=0.D0
E10=0.D0

rewind 2
rewind 1

```

```

do k=1,nbsimu
  read(2) processus(1:nT)
  read(1) taux(1:nT)
  do j=1,nT-1
    if (processus(j)< (lambda*Lini)) then
      compteur1=compteur1 + 1
      if (processus(nT)> (Lini/alpha)) then
        compteur3=compteur3 + 1
        E2=E2+(processus(nT)* e_1)
      endif
      if (processus(nT)< Lini) then
        compteur4=compteur4 + 1
        E5=E5+(processus(nT)* e_1)
      endif
      tau=0
      inttaux=0.D0
      tau=j
      do i=tau,nT-1
        inttaux=inttaux+taux(i)*deltaT
      enddo
      E6=E6+exp(inttaux)*exp(tj(tau)*rgar)*px(tau)
      exit
    endif
  enddo
enddo

deallocate(processus,taux)

E1=dbl(e(compteur1)/dbl(nbsimu))
E3=dbl(e(compteur3)/dbl(nbsimu))
E4=dbl(e(compteur4)/dbl(nbsimu))
E2=E2/dbl(nbsimu)
E5=E5/dbl(nbsimu)
E6=E6/dbl(nbsimu)

MT=log(dbl(A0)/prixzc(a,tj(nT),theta,eta,r0))-tj(nT)*&
  (eta*eta/(2*a*a)+rho*eta*sigma/a+sigma*sigma*0.5D0+rgar) &
  +(1-exp(-a*tj(nT)))*(eta*eta/(a*a*a)+rho*eta*sigma/(a*a)) &
  -(1-exp(-2.D0*a*tj(nT)))*eta*eta/(4.D0*a*a*a)

VT=tj(nT)*(eta*eta/(a*a)+sigma*sigma+2.D0*rho*sigma*eta/a) &
  -2.D0*(1-exp(-a*tj(nT)))*(eta*eta/(a*a*a)+rho*sigma* &
  eta/(a*a))+(1-exp(-2.D0*a*tj(nT)))*eta*eta/(2.D0*a*a*a)

```

```
E7=e_1*exp(MT+VT*0.5D0)*normcdf((MT+VT-log(Lini/alpha))/sqrt(VT))
E8=normcdf((MT-log(Lini/alpha))/sqrt(VT))
E9=normcdf((log(Lini)-MT)/sqrt(VT))
E10=e_1*exp(MT+VT*0.5D0)*normcdf((log(Lini)-MT-VT)/sqrt(VT))

TG=0.D0
B0=0.D0
P0=0.D0
LR=0.D0

TG=Lini*e_1*(1-E1)
!B0=alpha*delta*(E7-E2)-delta*Lini*e_1*(E8-E3)
P0=Lini*e_1*(E9-E4)-E10+E5
LR=Dmin1(lambda, 1.D0)*Lini * E6

delta=(Lini/prixzc(a,tj(nT),theta,eta,r0)-px(nT)*TG+px(nT)*P0-LR)&
      /(px(nT)*((alpha*(E7-E2)-e_1*Lini*(E8-E3))))

B0=alpha*delta*(E7-E2)-delta*Lini*e_1*(E8-E3)

VL0=0.D0
VL0=prixzc(a,tj(nT),theta,eta,r0)*(px(nT)*(TG+B0-P0)+LR)

deallocate(tj,px)

end program MonteCarlo
```

Annexe D

Tables de mortalité

D.1 Table statique FR 92

Age	l_x	Age	l_x	Age	l_x	Age	l_x
0	1 000 000	29	989 331	58	952 625	87	470 977
1	999 664	30	988 866	59	949 044	88	432 633
2	999 328	31	988 386	60	945 096	89	393 505
3	998 990	32	987 887	61	940 744	90	353 988
4	998 653	33	987 369	62	935 942	91	314 540
5	998 314	34	986 828	63	930 645	92	275 668
6	997 974	35	986 263	64	924 800	93	237 916
7	997 634	36	985 671	65	918 351	94	201 840
8	997 292	37	985 047	66	911 238	95	167 983
9	996 949	38	984 389	67	903 394	96	136 845
10	996 605	39	983 693	68	894 747	97	108 845
11	996 258	40	982 954	69	885 223	98	84 294
12	995 910	41	982 167	70	874 740	99	63 363
13	995 560	42	981 327	71	863 213	100	46 069
14	995 208	43	980 427	72	850 551	101	32 273
15	994 852	44	979 461	73	836 663	102	21 688
16	994 494	45	978 421	74	821 452	103	13 915
17	994 133	46	977 299	75	804 822	104	8 477
18	993 768	47	976 084	76	786 678	105	4 874
19	993 398	48	974 768	77	766 928	106	2 627
20	993 024	49	973 337	78	745 485	107	1 317
21	992 645	50	971 779	79	722 274	108	609
22	992 260	51	970 079	80	697 231	109	258
23	991 868	52	968 222	81	670 315	110	99
24	991 469	53	966 190	82	641 506	111	34
25	991 062	54	963 962	83	610 817	112	10
26	990 646	55	961 517	84	578 299	113	3
27	990 220	56	958 831	85	544 045	114	1
28	989 782	57	955 877	86	508 203		

D.2 Table prospective TPRV 93

Age	l_x	Age	l_x	Age	l_x	Age	l_x
0	100 000	29	94 555	58	90 155	87	55 255
1	97 047	30	94 491	59	89 844	88	51 700
2	95 995	31	94 424	60	89 523	89	47 999
3	95 793	32	94 356	61	89 191	90	44 172
4	95 653	33	94 285	62	88 849	91	40 248
5	95 556	34	94 211	63	88 498	92	36 261
6	95 515	35	94 133	64	88 126	93	32 253
7	95 477	36	94 050	65	87 733	94	28 330
8	95 442	37	93 963	66	87 319	95	24 535
9	95 410	38	93 871	67	86 882	96	20 914
10	95 379	39	93 774	68	86 422	97	17 513
11	95 359	40	93 670	69	85 911	98	14 373
12	95 336	41	93 560	70	85 343	99	11 530
13	95 311	42	93 442	71	84 711	100	9 014
14	95 284	43	93 318	72	84 007	101	6 843
15	95 254	44	93 185	73	83 224	102	5 023
16	95 221	45	93 043	74	82 337	103	3 547
17	95 185	46	92 892	75	81 333	104	2 395
18	95 144	47	92 732	76	80 198	105	1 535
19	95 101	48	92 560	77	78 913	106	926
20	95 056	49	92 378	78	77 462	107	519
21	95 008	50	92 183	79	75 840	108	267
22	94 957	51	91 976	80	74 030	109	123
23	94 904	52	91 756	81	72 016	110	50
24	94 850	53	91 520	82	69 780	111	17
25	94 794	54	91 273	83	67 306	112	5
26	94 736	55	91 013	84	64 621	113	1
27	94 677	56	90 741	85	61 719		
28	94 617	57	90 455	86	58 596		

Décalage d'âge

Année de naissance	Décalage	
1880	1909	5
1910	1919	4
1920	1930	3
1931	1938	2
1939	1946	1
1947	1952	0
1953	1959	-1
1960	1965	-2
1966	1970	-3
1971	1978	-4
1979	2006	-5

Bibliographie

ACTUARIS. <http://www.actuaris.com>.

ALBIZZATI M.-O. & GEMAN H. Interest Rate Risk Management and Valuation of the Surrender Option in Life Insurance Policies. *The Journal of Risk and Insurance*, 61(4) : 616–637, 1994.

ARS P. & DEVOLDER P. Calcul stochastique et Applications à la finance II. Institut des Sciences Actuarielles, UCL, 2004.

AZIZIEH C. Gestion et analyse financière des entreprises d'assurance. Institut des Sciences Actuarielles, UCL, 2005.

BACINELLO A. R. Fair pricing of life insurance participating policies with a minimum interest rate guarantee. *ASTIN Bulletin*, 31(2) : 275–297, 2001.

BACINELLO A. R. Fair valuation of a guaranteed life insurance participating contract embedding a surrender option. *The Journal of Risk and Insurance*, 70(3) : 461–487, 2003.

BACINELLO A. R. & ORTU F. Pricing equity-linked life insurance with endogenous minimum guarantees. *Insurance : Mathematics and Economics*, 12 : 245–257, 1993.

BERNARD C. *Approche Optionnelle de l'Evaluation de Garanties en Assurance et en Finance*. PhD thesis, ISFA, Université de Lyon 1, 2005.

BERNARD C., LE COURTOIS O. & QUITTART-PINON F. Market Value of Life Insurance Contracts under Stochastic Interest Rates and Default Risk. *Insurance : Mathematics and Economics*, 36 : 499–516, 2005.

BÉHAR J. L'ajustement des tables de mortalité des régimes de retraite. Application à la population de la CNRACL. *Questions retraite*, 65, disponible sur <http://www.cdc.retraites.fr>, 2005.

BJÖRK T. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. OXFORD University Press, Second Edition, 2004.

- BLACK F. & SCHOLES M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81 : 637–654, 1973.
- BOYLE P. P. & SCHWARTZ E. S. Equilibrium Prices of Guarantees under Equity-Linked Contracts. *Journal of Risk and Insurance*, 44 : 639–660, 1977.
- BRENNAN M. J. Aspects of insurance, intermediation and finance. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 18(1) : 7–30, 1993.
- BRENNAN M. J. & SCHWARTZ E. S. The Pricing of Equity-Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee. *Journal of Financial Economics*, 3 : 195–213, 1976.
- BRENNAN M. J. & SCHWARTZ E. S. Alternative Investment Strategies for the Issuers of Equity Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee. *Journal of Business*, 52(1) : 63–93, 1979.
- BRIYS E. & DE VARENNE F. Life Insurance in a Contingent Claim Framework : Pricing and Regulatory Implications. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 19 : 53–72, 1994.
- BRIYS E. & DE VARENNE F. On the Risk of Life Insurance Liabilities : Debunking Some Common Pitfalls. *The Journal of Risk and Insurance*, 64(4) : 673–694, 1997a.
- BRIYS E. & DE VARENNE F. Valuing Risky Fixed Rate Debt : An Extension. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32(2) : 239–248, 1997b.
- BROUHNS N. & DENUIT M. Risque de longévité et rentes viagères I. Evolution de la mortalité en Belgique de 1880 à nos jours. *Belgian Actuarial Bulletin*, 2 : 26–48, 2002.
- CHARLIER E. & KLEYNEN R. *Fair Valuation of Life Insurance Contracts : The Interaction between Assets and Liabilities*. AFIR, Maastricht, 2003.
- COLLIN-DUFRESNE P. & GOLDSTEIN R. S. Do Credit Spreads Reflect Stationary Leverage Ratios? *The Journal of Finance*, 56(5) : 1929–1957, 2001.
- COMMISSION BANCAIRE, FINANCIÈRE ET DES ASSURANCES. <http://www.cbfa.be>.
- DELWARDE A. & DENUIT M. *Construction de Tables de Mortalité Périodiques et Prospectives*. Collection Audit-Actuariat-Assurance, Economica, Paris, 2005.
- DENUIT M. Assurances de personnes. Institut des Sciences Actuarielles, UCL, 2004.

- DEVOLDER P. Calcul stochastique et Applications à la finance I. Institut des Sciences Actuarielles, UCL, 2003.
- FONTAINE M. *Droit des Assurances*. Précis de la Faculté de Droit de l'Université catholique de Louvain, Larcier, Deuxième édition, 1996.
- FORTET R. Les fonctions aléatoires du type de Markov associées à certaines équations linéaires aux dérivées partielles du type parabolique. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 22 : 177–243, 1943.
- GERBER H. U. *Life Insurance Mathematics*. Springer, Third Edition, 1997.
- GROSEN A. & JØRGENSEN P. L. Valuation of early exercisable interest rate guarantees. *The Journal of Risk and Insurance*, 64(3) : 481–503, 1997.
- GROSEN A. & JØRGENSEN P. L. Fair Valuation of Life Insurance Liabilities : The Impact of Interest Rate Guarantees, Surrender Options and Bonus Policies. *Insurance : Mathematics and Economics*, 26 : 37–57, 2000.
- GROSEN A. & JØRGENSEN P. L. Life Insurance Liabilities at Market Value : An Analysis of Insolvency Risk, Bonus Policy and Regulatory Intervention Rules in a Barrier Option Framework. *The Journal of Risk and Insurance*, 69(1) : 63–91, 2002.
- HARRISON M. J. & KREPS D. M. Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets. *Journal of Economic Theory*, 80 : 381–408, 1979.
- HEATH D., JARROW R. & MORTON A. Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A New Methodology for Contingent Claim Valuation. *Econometrica*, 60(1) : 77–105, 1992.
- HULL J. *Options, futures et autres actifs dérivés*. Pearson Education France, 5e édition, 2004.
- JAUMAIN C. Assurance Vie I. Institut des Sciences Actuarielles, UCL, 2003a.
- JAUMAIN C. Assurance Vie II. Institut des Sciences Actuarielles, UCL, 2003b.
- JÄCKEL P. *Monte Carlo Methods in finance*. John Wiley & Sons, Ltd, 2002.
- JENSEN B., JØRGENSEN P. L. & GROSEN A. A Finite Approach to the Valuation of Path Dependant Life Insurance Liabilities. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 26 : 57–84, 2001.
- JØRGENSEN P. L. Life Insurance Contracts with Embedded Options. *Journal of Risk Finance*, 3(1) : 19–30, 2001.

- JØRGENSEN P. L. *Fair Valuation of Life Insurance Liabilities in the Presence of Default Risk and Stochastic Interest Rates*. Conférence IME, Lyon, Juin 2003.
- JØRGENSEN P. L. On accounting standards and fair Valuation of Life Insurance and Pension Liabilities. *Scandinavian Actuarial Journal*, 5 : 372–394, 2004.
- LONGSTAFF F. A. & SCHWARTZ E. S. A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt. *The Journal of Finance*, 50(3) : 789–820, 1995.
- MAGIS C., DENUIT M. & WALHIN J.-F. La TPRV française : dépassée? *Bulletin Français d'Actuariat*, 2005.
- MERTON R. C. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1) : 141–183, 1973.
- MERTON R. C. On the pricing of corporate debt : The risk structure of interest rates. *The Journal of Finance*, XXIX : 449–470, 1974.
- MERTON R. C. An analytic derivation of the cost of deposit insurance and loan guarantees : An application of modern pricing theory. *Journal of Banking and Finance*, 1 : 3–11, 1977.
- MERTON R. C. On the cost of deposit insurance when there are surveillance costs. *Journal of Business*, 51 : 439–452, 1978.
- MERTON R. C. On the application of the continuous-time theory of finance to financial intermediation and insurance. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 14 : 225–262, 1989.
- MILTERSEN K. R. & PERSSON S.-A. Guaranteed investment contracts : distributed and undistributed excess return. *Scandinavian Actuarial Journal*, 4 : 257–279, 2003.
- NIELSEN J. A. & SANDMANN K. Equity-linked life insurance : A model with stochastic interest rates. *Insurance : Mathematics and Economics*, 16 : 225–253, 1995.
- ØKSENDAL B. *Stochastic Differential Equations : An introduction with applications*. Springer Verlag, 2003.
- TANSKANEN A. J. & LUKKARINEN J. Fair valuation of path-dependant participating life insurance contracts. *Insurance : Mathematics and Economics*, 33 : 595–609, 2003.
- VASICEK O. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5 : 177–188, 1977.

