« Instabilités stabilisées »

La volatilité stochastique: Le modèle, de la description à l’action

Élie Ayache

Colloque de l’Institut des Actuaires

Paris, Décembre 2018

LA VOLATILITÉ STOCHASTIQUE
N'EXISTE PAS

Élie Ayache
Colloque de l'Institut des Actuaires
Paris, Décembre 2018

Seul existe Black-Scholes-Merton

« Cela pourrait surprendre beaucoup de gens que, malgré l'inconsistance entre la dynamique réelle des prix des actifs financiers et la dynamique lognormale idéale postulée par le modèle de Black-Scholes, celui-ci soit toujours utilisé au quotidien dans les banques pour gérer le risque de leurs portefeuilles de produits dérivés. »

Lorenzo Bergomi

Head Quant, Société Générale

Stochastic Volatility Modeling (2015)

Seul existe Black-Scholes-Merton

« L’économie de Black-Scholes-Merton est risquée par définition puisqu’*on y échange de la volatilité*. Et le fait que ce risque soit matérialisé par un seul petit nombre σ le rend *palpable et immédiat* pour tout un chacun qui ne peut avoir l’excuse d’avoir été aveuglé par la complexité du modèle. »

Hélyette Geman

Professeur de Finance, Birkbeck,

Membre d’honneur de l’Institut des Actuaires Français

« De Bachelier à Black-Scholes-Merton » (1997)

BSM a mis en branle le marché des produits dérivés, en allant du prix du sous-jacent au prix du dérivé sans passer par la probabilité : il est trop précieux pour être abandonné.

BSM n'est pas juste un modèle quantitatif. Il faut interpréter ailleurs que dans le réalisme statistique ou temporel sa simplicité.

Comment une grandeur *statistique* (la volatilité σ) peut être *négociée*, voilà tout notre problème.

La volatilité statistique et la volatilité négociable appartiennent à deux registres du temps différents. (Elie Ayache, Time and Black-Scholes-Merton, **Wilmott**, April 2017)

Chronologie

1900 : L. Bachelier, *mouvement brownien*.

1973 : Black-Scholes-Merton, *volatilité*.

1987 : Krach du marché, *smile de volatilité*.

Plan

I. De Bachelier à Black-Scholes-Merton, à la volatilité stochastique
II. La réalité du marché des actifs contingents
III. La signification réelle de Black-Scholes-Merton

Glossaire

- Actif sous-jacent (*Underlying asset*)
- Produits dérivés (*Derivatives*)
- Actifs contingents (*Contingent claims*)
- Payoffs contingents (*Contingent payoffs*)

I
De Bachelier à Black-Scholes-Merton,
à la volatilité stochastique

THÉORIE

DE

LA SPÉCULATION,

Par M. L. BACHELIER.

INTRODUCTION.

Les influences qui déterminent les mouvements de la Bourse sont innombrables, des événements passés, actuels ou même escomptables, ne présentant souvent aucun rapport apparent avec ses variations, se répercutent sur son cours.

A côté des causes en quelque sorte naturelles des variations, interviennent aussi des causes factices : la Bourse agit sur elle-même et le mouvement actuel est fonction, non seulement des mouvements antérieurs, mais aussi de la position de place.

La détermination de ces mouvements se subordonne à un nombre infini de facteurs : il est dès lors impossible d'en espérer la prévision mathématique. Les opinions contradictoires relatives à ces variations se partagent si bien qu'au même instant les acheteurs croient à la hausse et les vendeurs à la baisse.

Le Calcul des probabilités ne pourra sans doute jamais s'appliquer aux mouvements de la cote et la dynamique de la Bourse ne sera jamais une science exacte.

Mais il est possible d'étudier mathématiquement l'état statique du marché à un instant donné, c'est-à-dire d'établir la loi de probabilité des variations de cours qu'admet à cet instant le marché. Si le marché, en effet, ne prévoit pas les mouvements, il les considère comme étant plus ou moins probables, et cette probabilité peut s'évaluer mathématiquement.

La recherche d'une formule qui l'exprime ne paraît pas jusqu'à ce jour avoir été publiée; elle sera l'objet de ce travail.

J'ai cru nécessaire de rappeler d'abord quelques notions théoriques relatives aux opérations de bourse en y joignant certains aperçus nouveaux indispensables à nos recherches ultérieures.

LES OPÉRATIONS DE BOURSE.

Opérations de bourse. — Il y a deux sortes d'opérations à terme :

Les opérations fermes;

Les opérations à prime.

Ces opérations peuvent se combiner à l'infini, d'autant que l'on traite souvent plusieurs sortes de primes.

Bachelier vs. Black-Scholes-Merton

- Bachelier : $dS = \sigma dW$
  - $E(dS) = 0$
  - Le prix de l'actif peut devenir négatif.
- Black-Scholes-Merton : $dS/S = \mu dt + \sigma dW$
  - Le rendement moyen du prix de l'actif risqué doit être supérieur au taux d'intérêt : $\mu > r$
- On ne parle pas de probabilité ou d'espérance mathématique dans BSM, mais d'arbitrage.

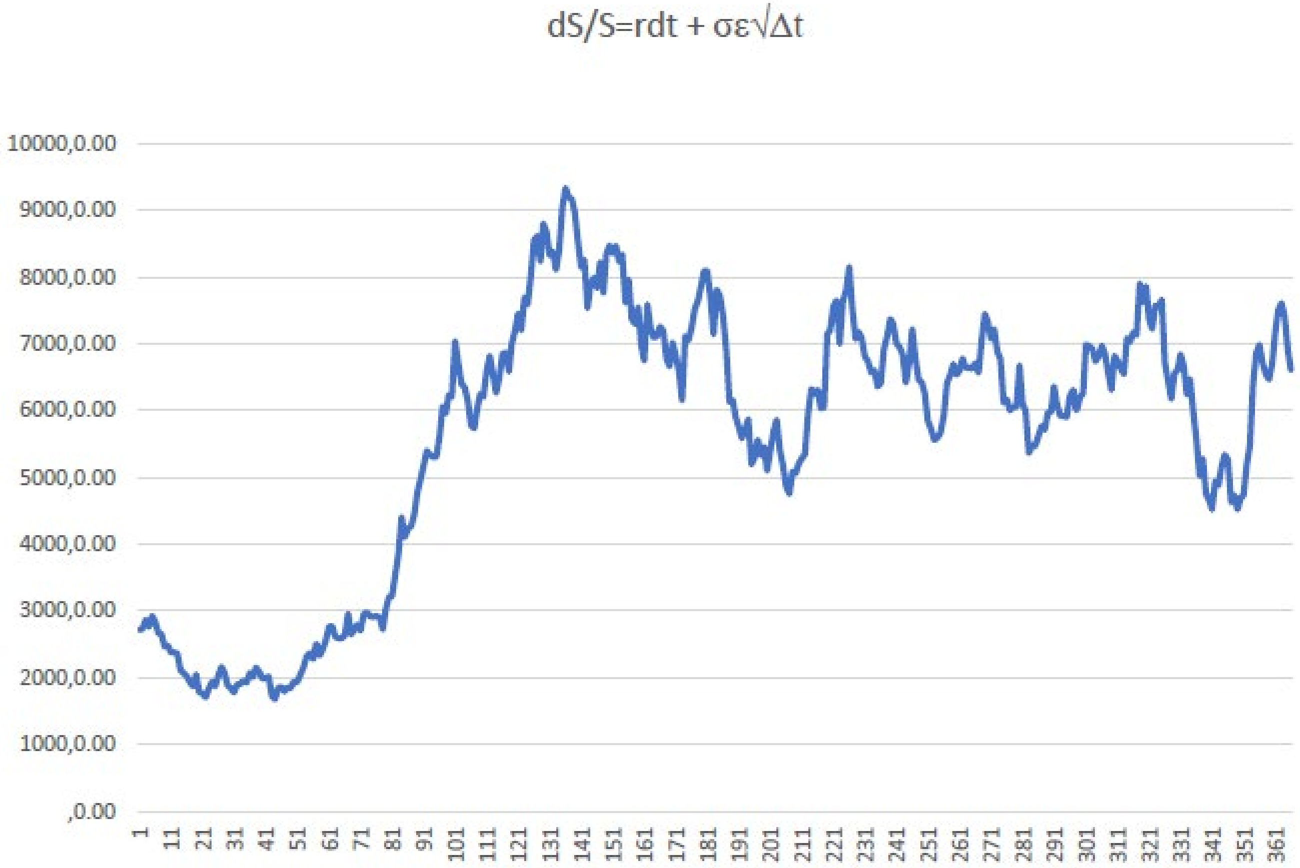
Autoréférence du trading

- Bachelier n'a pas vu la spécificité de la finance, qui est l'hypothèse de *trading* de l'actif sous-jacent S.
- le prix de l'actif, qui produit la loterie, est lui-même le billet pour acheter la loterie.
- Les écarts de prix d'un actif produisent de l'argent, avec lequel acheter un autre actif.

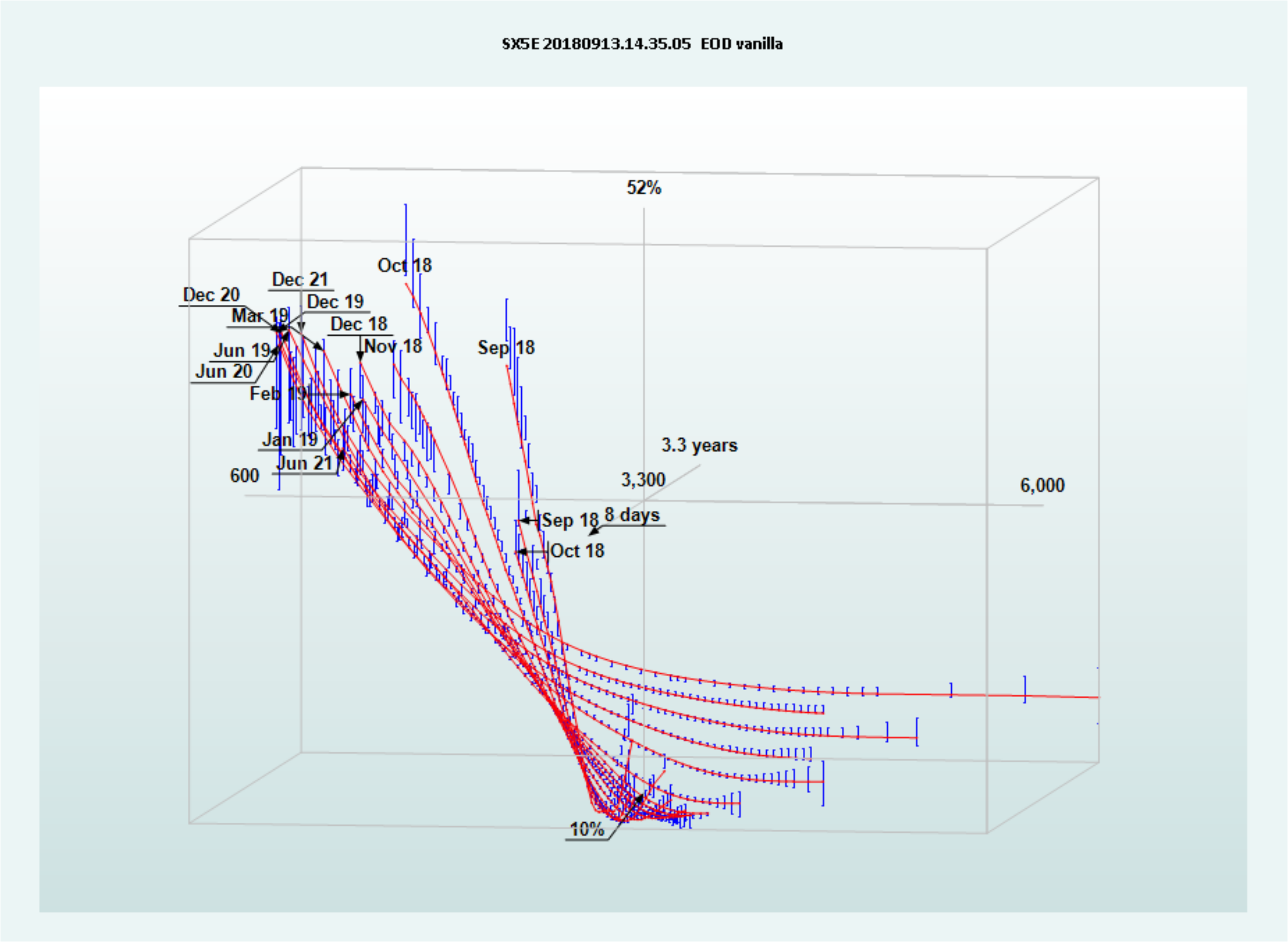
Endogénéité de la spéculation

- Comment *spéculer*, ou parier, où se situera, à terme, le prix de l'actif sous-jacent ?
- Il suffit d'acheter ou de vendre le contrat à terme F dont le prix d'exercice K (le niveau du pari à terme) est déterminé par arbitrage (et non pas la probabilité).
- Réplication statique du payoff, à la maturité T, du contrat à terme : $F_T = S_T - K$
- Réplication dynamique du payoff, à la maturité T, de l'option d'achat : $C_T = \max((S_T - K), 0)$

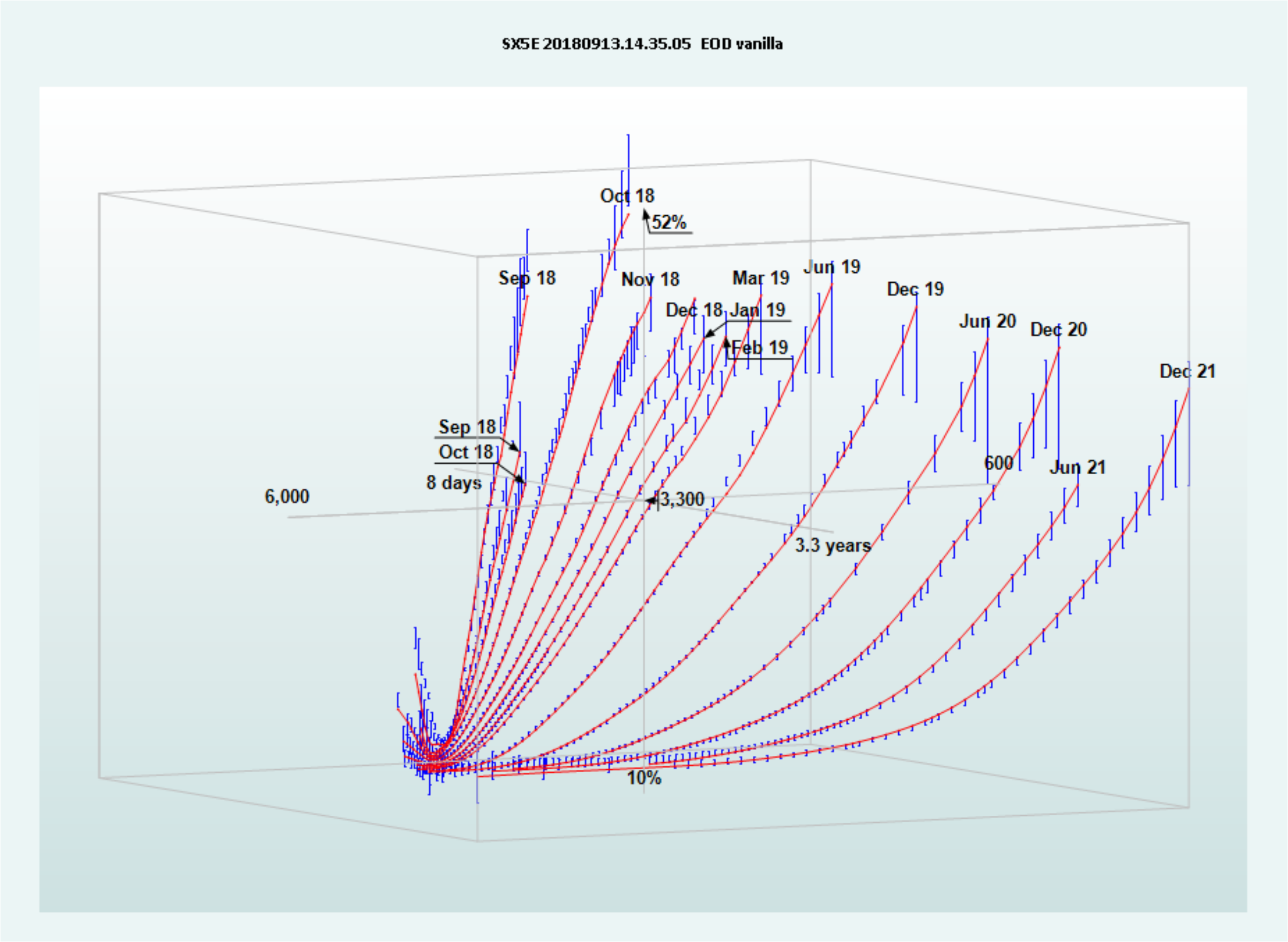
Mouvement brownien de volatilité σ



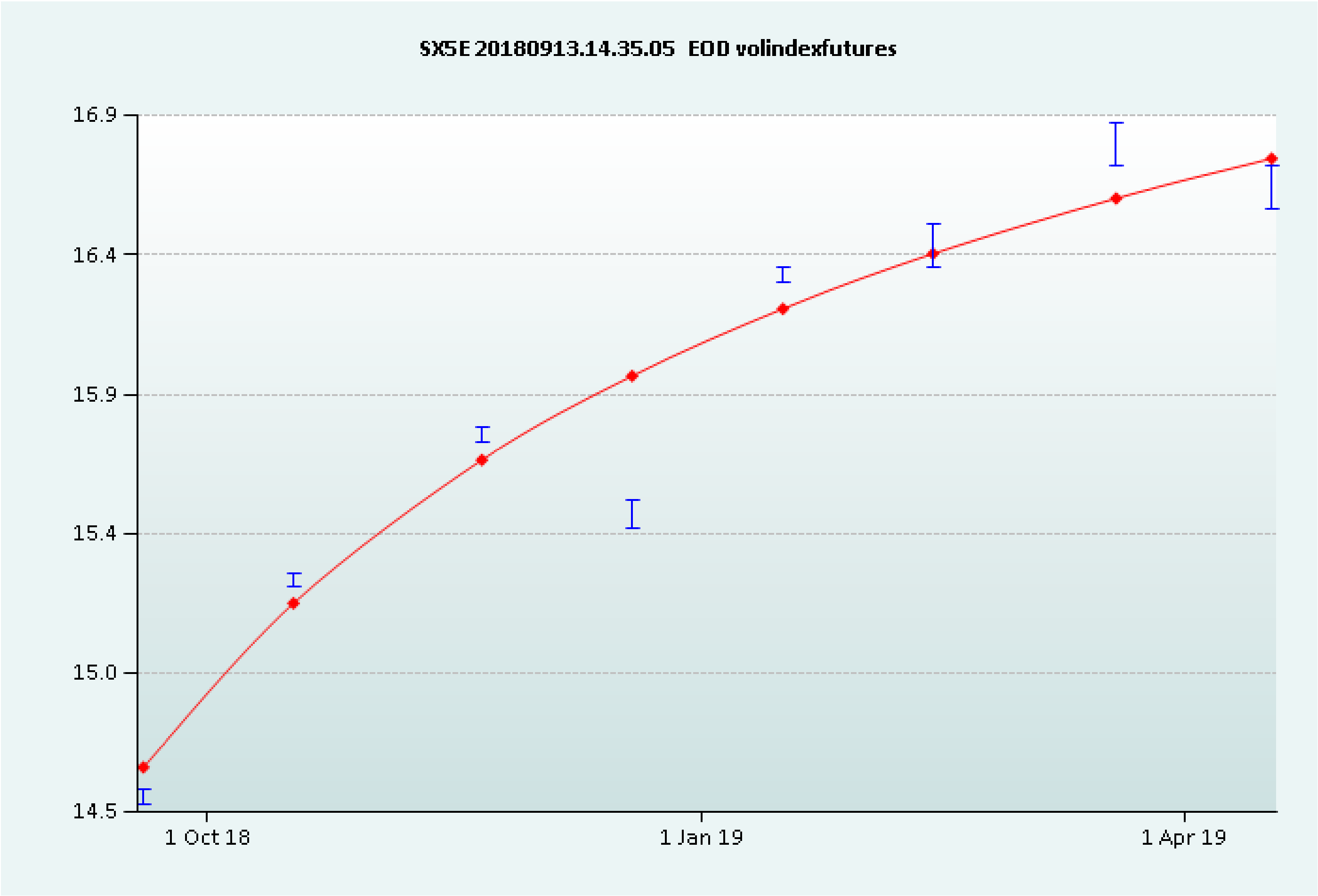
Surface de volatilités implicites
SX5E du 13 septembre 2018



Surface de volatilités implicites
SX5E du 13 septembre 2018



Vstoxx futures (index de volatilité)

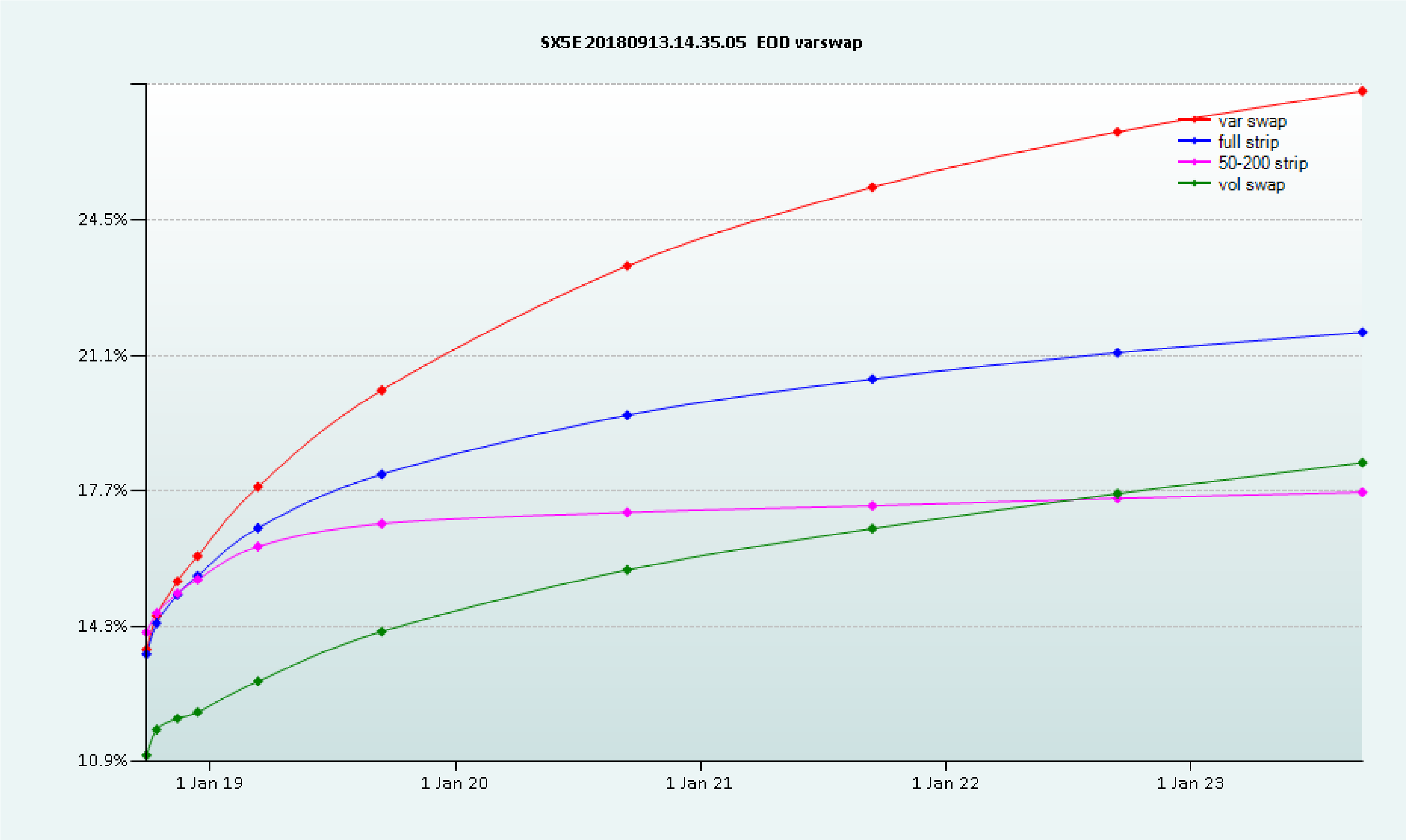


Risque de modèle

Le modèle de volatilité stochastique, une fois calibré aux options vanilles, évalue-t-il correctement les swaps de variance ?

$$N\left(\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\ln^2\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)-\sigma_I^2\right)$$

Index de volatilité vs. Swap de variance

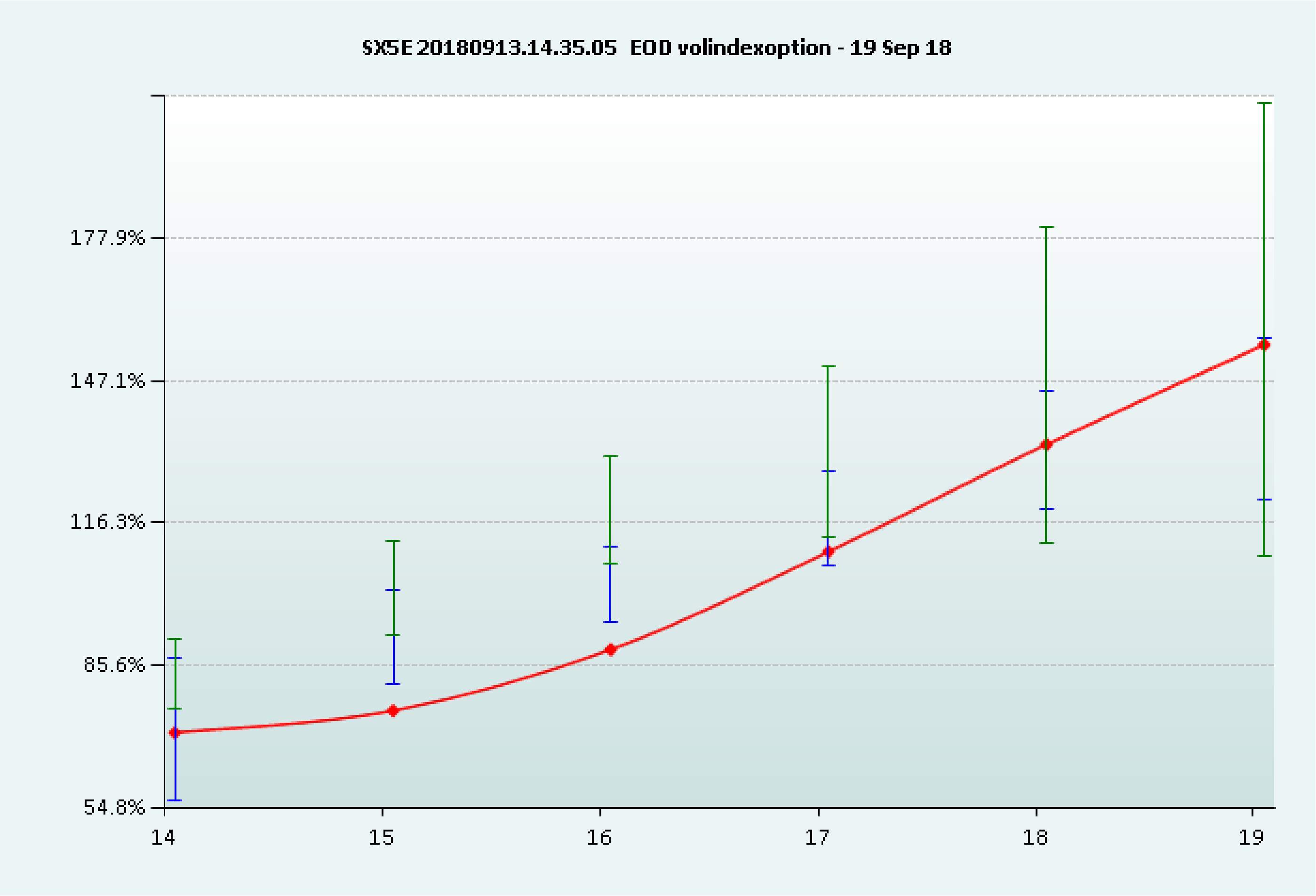


Risque de modèle

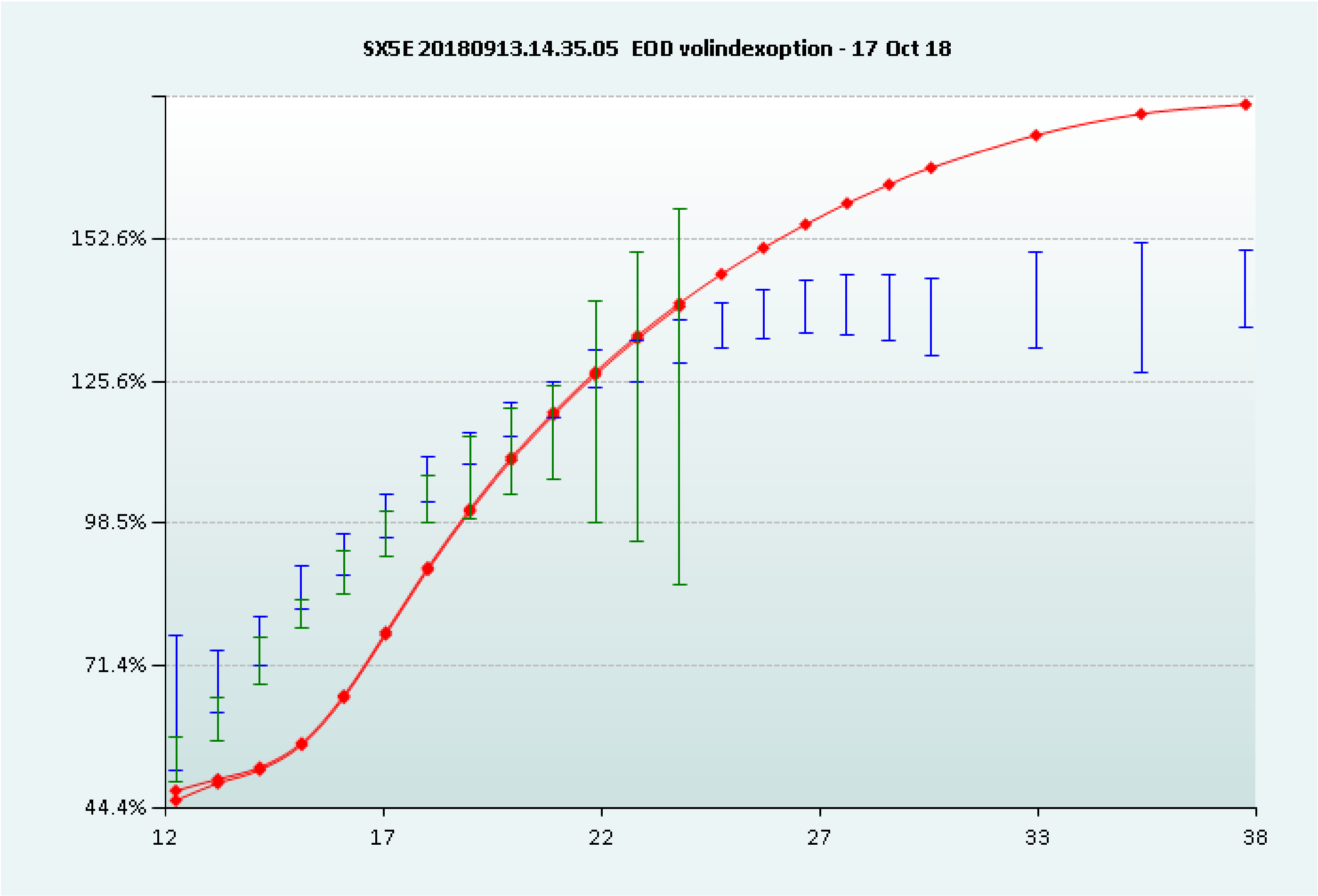
Plus généralement, notre modèle évalue-t-il correctement les options exotiques : options barrière, cliquets, etc. ?

La couverture dynamique qu'il propose pour les options vanilles est-elle même correcte ?

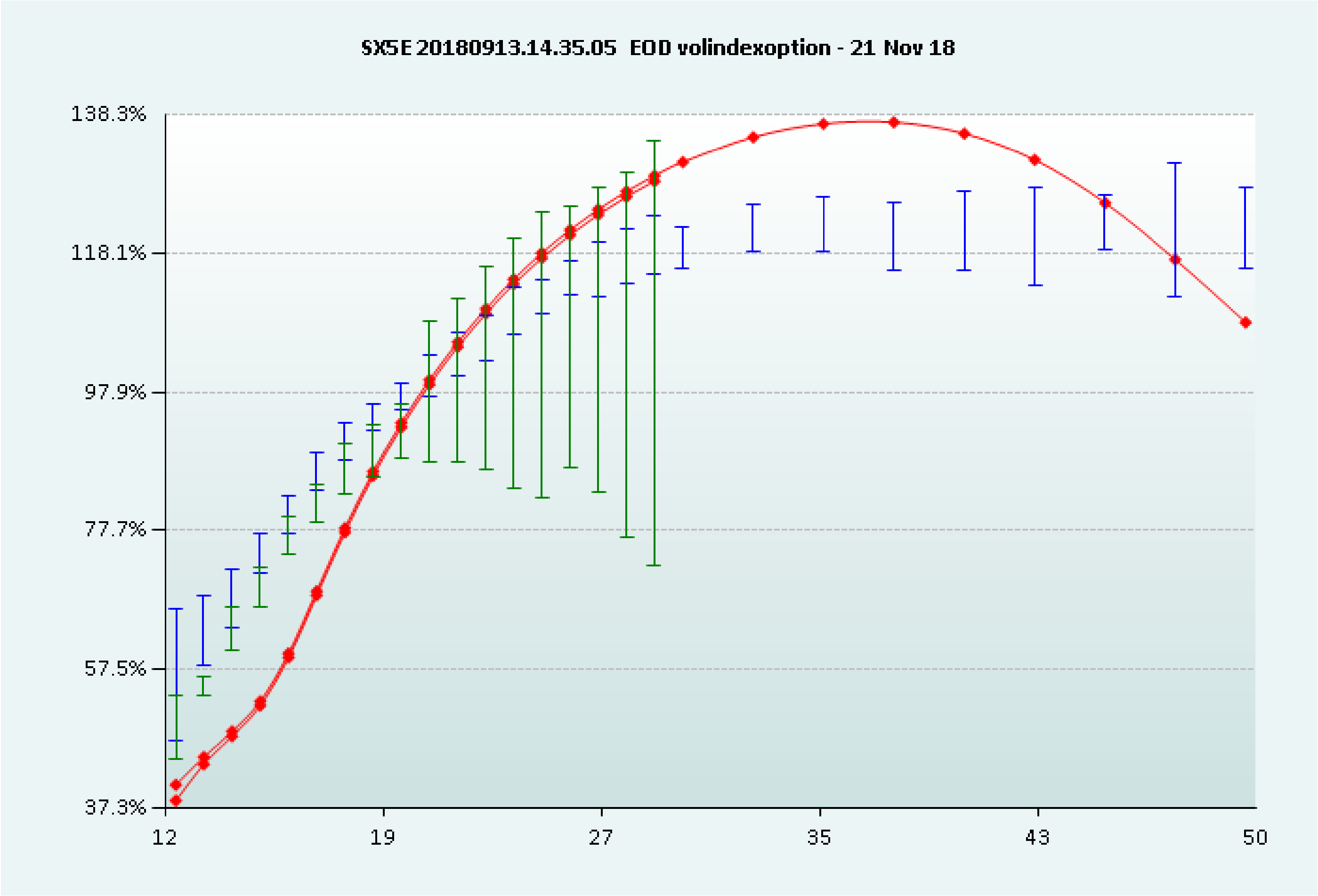
Options Vstoxx expirant 19 Sep 18



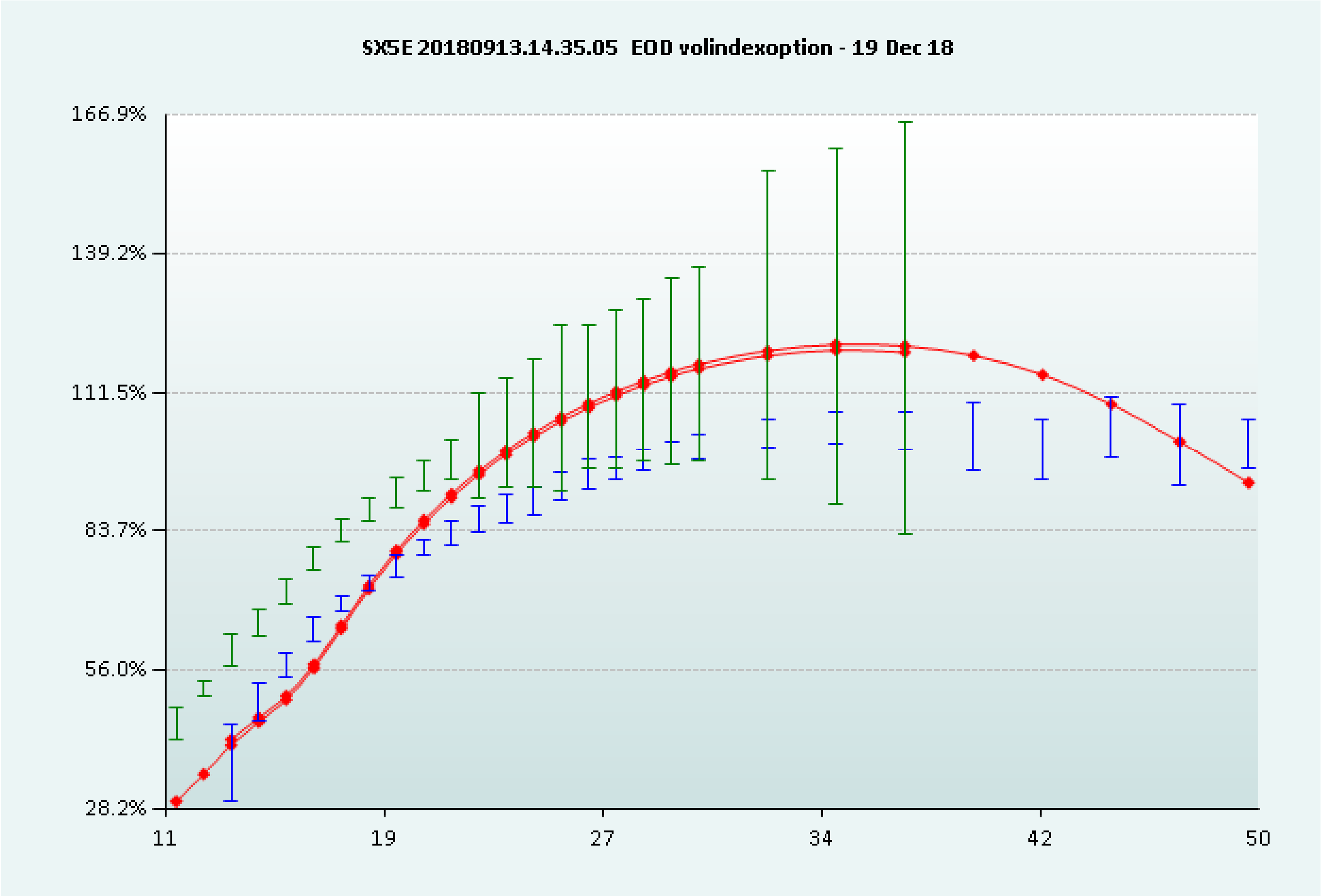
Options Vstoxx expirant 17 Oct 18



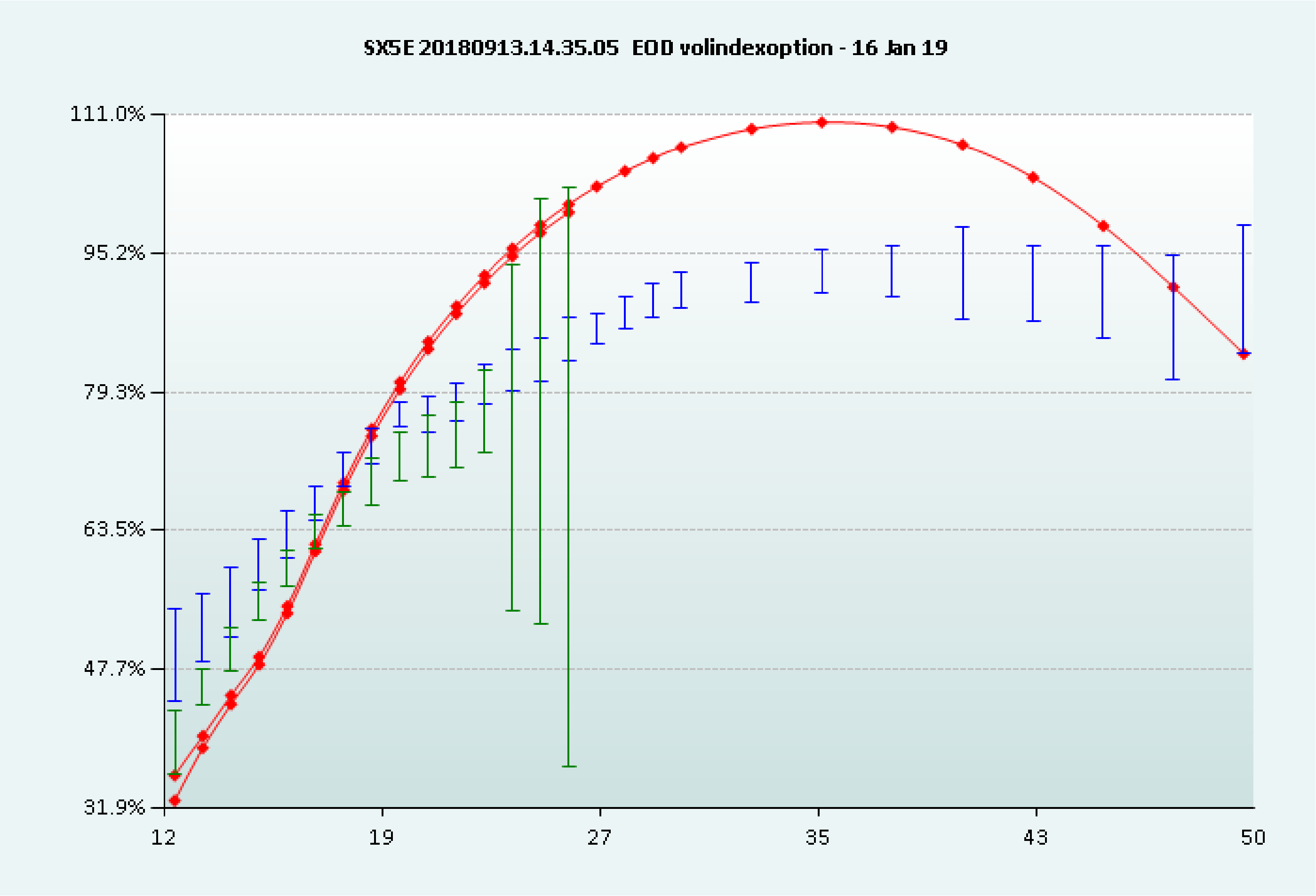
Options Vstoxx expirant 21 Nov 18



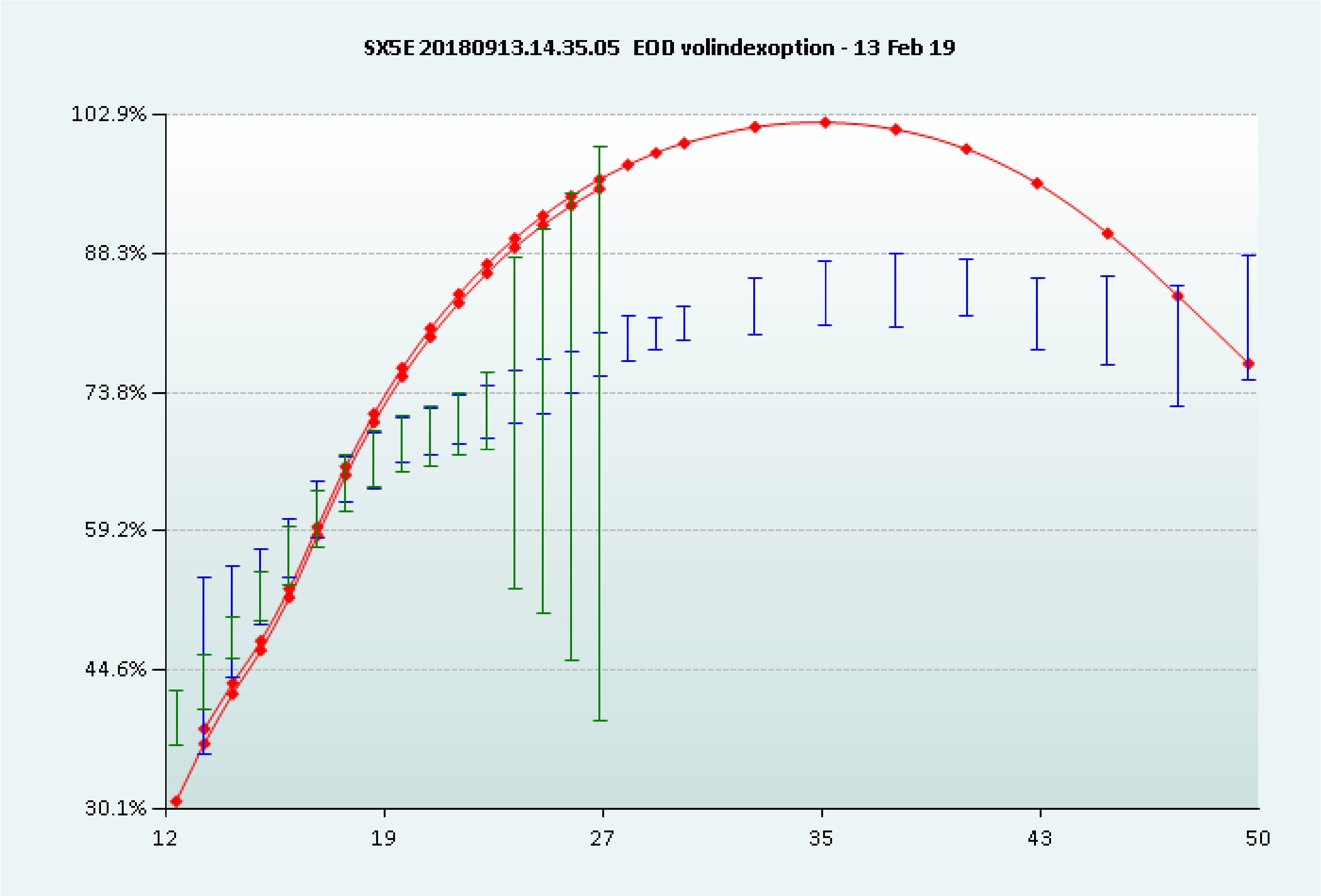
Options Vstoxx expirant 19 Dec 18



Options Vstoxx expirant 16 Jan 19



Options Vstoxx expirant 13 Feb 19



Solution : Un modèle à « géométrie variable », que l'on peut calibrer à toute option exotique.

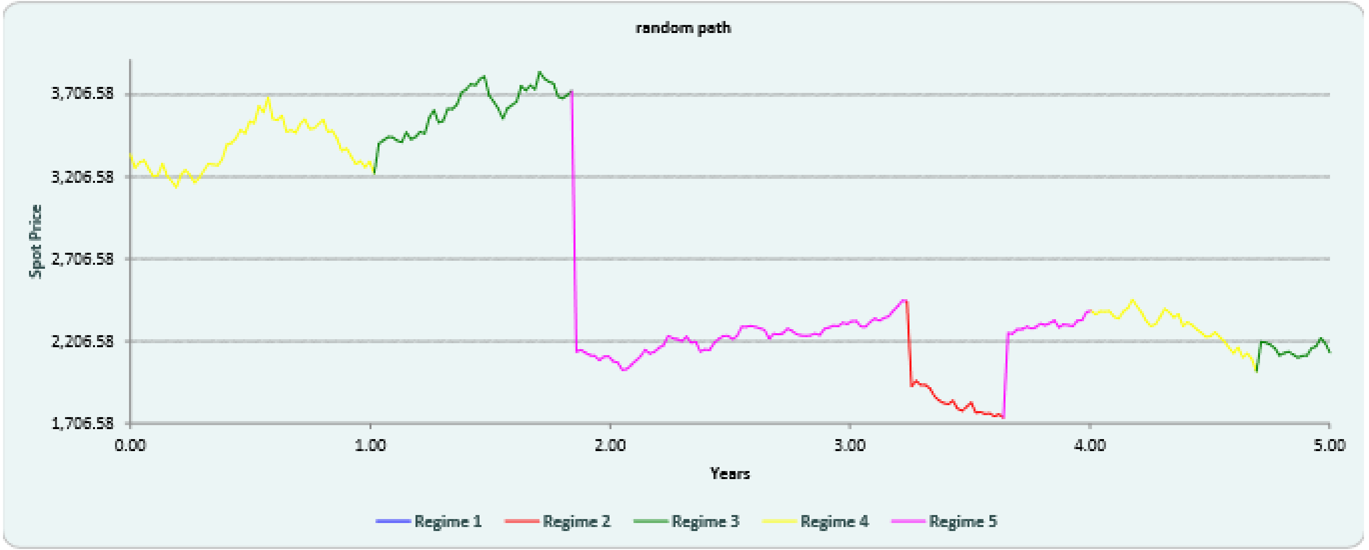
Modèle de changement de régimes de volatilité

Model Parameters of Session SX5E
20180913.14.35.05 EOD - Id 27595

	Volatility	Total Vol
Regime 1	7.99%	13.34%
Regime 2	11.46%	49.67%
Regime 3	8.69%	31.21%
Regime 4	11.96%	12.17%
Regime 5	6.35%	13.69%

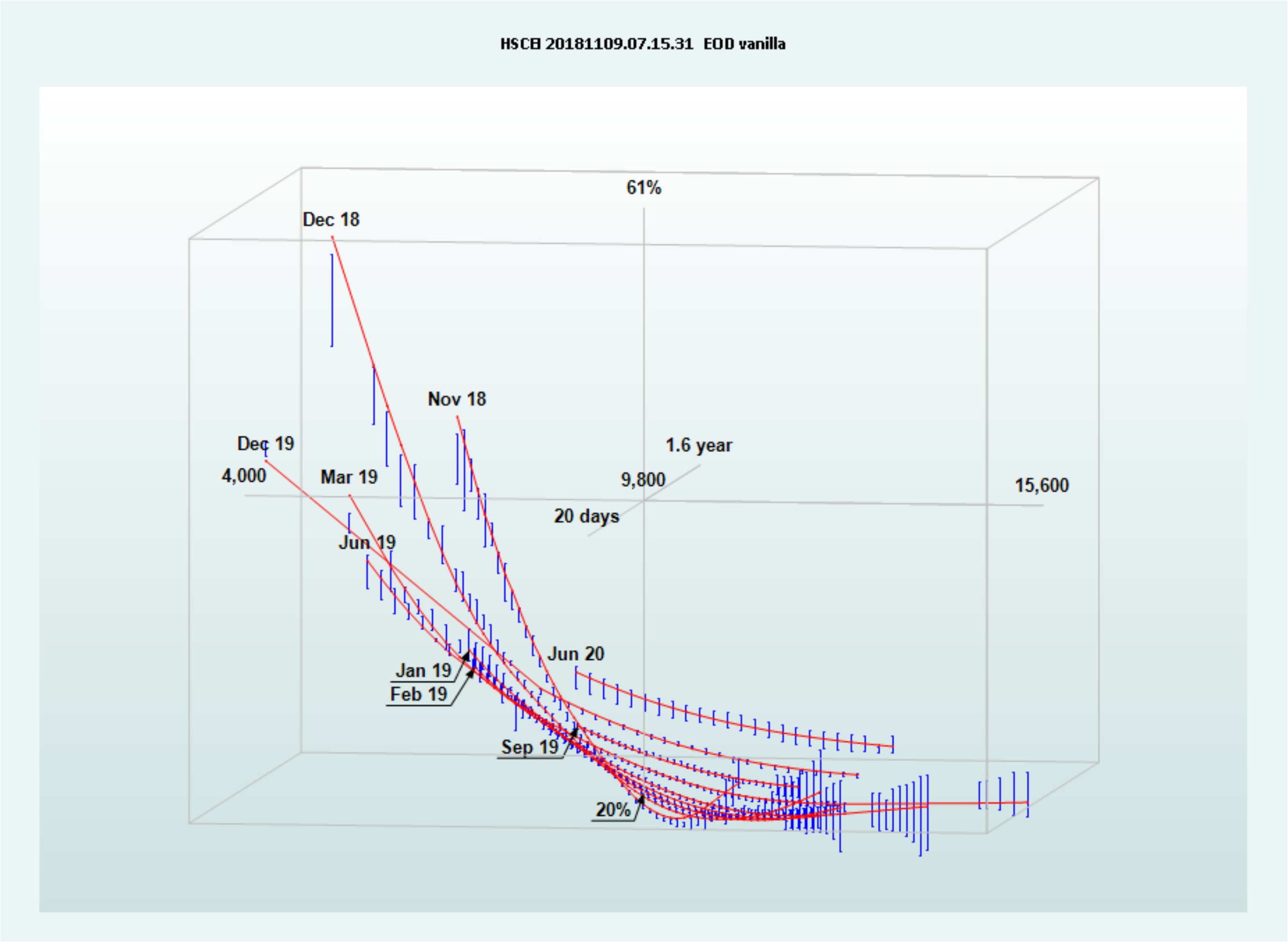
	Intensity	Size
Regime 1->2	0.322	-10.29%
Regime 1->3	0.000	+0.00%
Regime 1->4	3.424	-3.70%
Regime 1->5	6.028	+2.35%
Regime 2->1	0.000	+0.00%
Regime 2->3	0.855	-29.93%
Regime 2->4	0.000	+0.00%
Regime 2->5	2.050	+27.67%
Regime 3->1	0.043	-44.65%
Regime 3->2	0.027	-98.00%
Regime 3->4	0.000	+0.00%
Regime 3->5	0.305	-42.63%
Regime 4->1	0.000	+0.00%
Regime 4->2	0.000	+0.00%
Regime 4->3	0.085	+7.71%
Regime 4->5	0.000	+0.00%
Regime 5->1	0.000	+0.00%
Regime 5->2	0.344	-20.53%
Regime 5->3	0.000	+0.00%
Regime 5->4	0.758	-1.67%

Échantillon de trajectoire

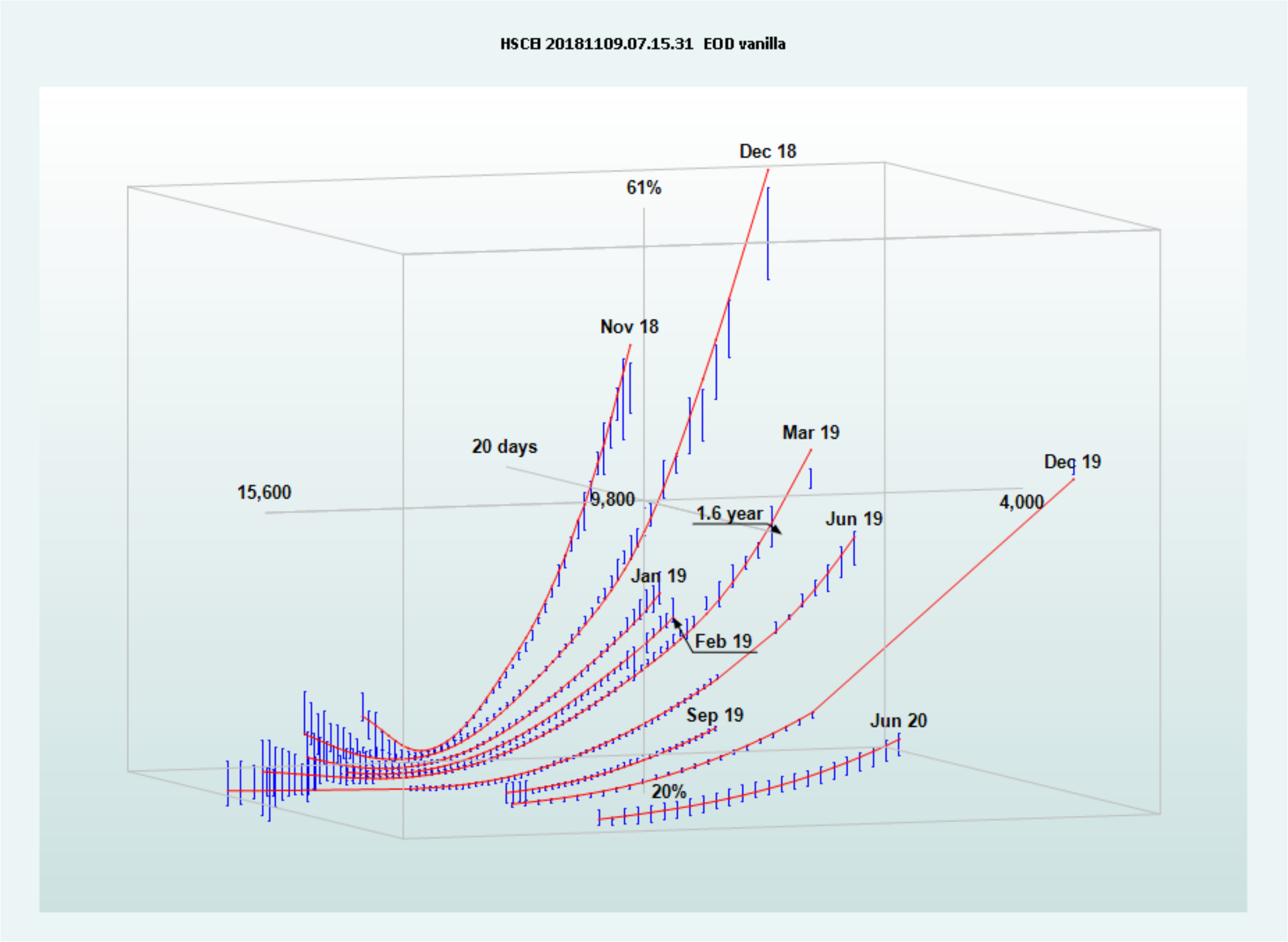


Échantillon de trajectoire

Surface de volatilités implicites
HSCEI du 11 novembre 2018



Surface de volatilités implicites
HSCEI du 11 novembre 2018



Modèle de changement de régimes de volatilité

Model Parameters of Session HSCEI
20181109.07.15.31 EOD - Id 28638

	Volatility	Total Vol
Regime 1	14.81%	25.32%
Regime 2	7.82%	24.19%
Regime 3	13.65%	21.86%

	Intensity	Size	Intensity	Size
Regime 1->1	1.633	+0.00%	4.494	-7.13%
Regime 1->2	0.007	-93.64%		
Regime 1->3	8.359	+3.95%		
Regime 2->1	1.295	+10.57%		
Regime 2->3	0.081	-68.32%		
Regime 3->1	0.416	-21.61%		
Regime 3->2	1.037	+9.68%		

II
La réalité du marché des actifs contingents

Problème du smile de volatilité

- Le mouvement brownien élémentaire ne se différentie pas en un processus temporel plus complexe : volatilité stochastique, sauts, etc.
- Il se différentie en l'évaluation puis le *trading indépendant* des produits dérivés de l'actif sous-jacent, puis en l'évaluation et le *trading indépendant* des produits dérivés de ceux-là, etc.
- Il n'y a pas de « risque de modèle », mais la nécessité d'un outil de pricing que l'on peut calibrer au prix de toute option exotique.

Le market-maker contrôle la dynamique du smile de volatilité des vanilles par les prix virtuels d'options exotiques.

Modèle de changement de régimes

- La variable d'état, le régime, ne porte pas le nom d'une variable, et n'est donc pas véritablement un *état*.
- Les régimes sont plus des « capacités » à recevoir des possibilités que des possibilités, et le modèle n'est pas véritablement un modèle.
- Régimes de régimes, probabilité et méta-probabilité : le schéma de l'abstraction probabiliste est bouleversé et l'algèbre des événements est délocalisée.

L'infini du marché

- Diagonale de Cantor : tout espace de trading, arrêté au niveau de complexité N, implique qu'un produit dérivé de niveau N + 1 sera évalué, dont le trading échappera à cet espace. (C'est un argument contre le trading algorithmique.)
- Cette irruption continuelle du nouveau prix, ou cette transgression ou disruption continuelle de l'espace des possibles, *se donne malgré tout* comme *la surface étendue et continue des prix*.

Nouvelle matière du marché

- Le « générateur aléatoire » du marché n’est pas la probabilité du prochain prix, mais la certitude du changement de la gamme des possibles.
- Les « Cygnes Noirs » ne peuvent qu’arriver, et la recalibration est la seule réalité.

III
La signification réelle de Black-Scholes-Merton

Deux schémas de pensée

- Le prix boursier est-il une variable aléatoire, soit l'*abstraction* d'une épreuve aléatoire concrète ω par ailleurs insondable :

$$\omega \to S(\omega) \ ?$$

- Ou l'aléatoire est-il inhérent au *trading*, qui est la variation jointe du prix boursier et de la taille de la position ?

Une volatilité constante

- La volatilité σ dans BSM est aussi constante et certaine que ne l'est le *concept* de trading.
- À partir d'une prime initiale et d'une stratégie de trading dynamique autofinancée de l'actif sous-jacent, l'algorithme de BSM permet de synthétiser des *payoffs contingents*.
- Cette évaluation est imparable, car elle est issue de la critique même de la notion de valeur.

Contre une idée reçue

- La raison pour laquelle le marché d'options existe n'est pas que la volatilité du sous-jacent est stochastique ou incertaine.
- Le market-maker d'options ne fait ce marché que grâce à la certitude du concept de trading.
- Il sait avec certitude ce qu'*est* la volatilité, et avec certitude que l'option est synthétisée.
- Fermeté de l'outil et non pas risque de modèle.

Deux sorties alternatives

- Non pas une sortie dans le temps (la volatilité qui devient stochastique).
- Mais dans la place : l'évaluation de l'actif contingent est tellement *l'événement* que la variation de son prix est le seul autre événement.
- Le plongement de l'actif contingent dans le pit et le prix qu'il reçoit sont la première et la seule sortie quantitative (opposée à la statistique).
- La seule volatilité, dans BSM, est la volatilité implicite.

Lorenzo Bergomi

- « La spécification d'une condition de break-even pour le portefeuille de couverture conduit à l'équation de BSM. Il se trouve que celle-ci est une équation parabolique et admet une interprétation probabiliste. »
- « L'argument se déroule dans ce sens et non pas dans le sens inverse – la modélisation en finance ne débute pas par l'hypothèse d'un processus stochastique pour S, et n'a pas grand-chose à voir avec le mouvement brownien. »

Références

- E. Ayache :
  - *The Medium of Contingency: An Inverse View of the Market*, Palgrave 2015.
  - From Within, **Wilmott**, March 2017, http://ito33.com/sites/default/files/articles/130317_ito33_march.pdf
  - Time and Black-Scholes-Merton, **Wilmott**, April 2017, http://ito33.com/sites/default/files/articles/230417_ito33_april.pdf
- L. Bergomi, *Stochastic Volatility Modeling*, Chapman & Hall 2015.
- H. Geman, De Bachelier à Black-Scholes-Merton, 1997.