

PROMOTION: 2008

Mémoire d'actuariat présenté devant
le Jury du C E A

pour l'obtention du

Diplôme d'Actuaire du CENTRE D'ETUDES ACTUARIELLES

Par : M. Blaise BOURGEOIS (GIE AXA)
M. Gwendal POUGNET (AXA Cessions)

Sur le sujet

Réassurance et techniques financières de transfert de risque
- l'exemple du « mortality bond » : une obligation indexée au risque de (sur)mortalité -

Devant un jury composé de

Liste du jury Assurance :

Thomas BEHAR
Arnaud COHEN
Gérard CROSET
Jean-Pierre DIAZ
Michel FROMENTEAU
Pierre MATHOULIN
Pierre PETAUTON
Florence PICARD
Christian-Yann ROBERT

Directeurs du mémoire :

Référent CEA :
M. Christian-Yann ROBERT
Directeur des Etudes du CEA

Référent AXA :
M. Sylvain CORIAT
Directeur Technique Vie du Groupe AXA

Liste du jury Finance :

Jean-Luc AURÉ
Arnaud CLEMENT-GRANDCOURT
Arnaud COHEN
Gérard CROSET
Jean-Michel EYRAUD
Daniel HUGUEL
Pierre MATHOULIN
Florence PICARD
Christian-Yann ROBERT

Invité(s) :

N/A



REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier chaleureusement notre directeur de mémoire, M. Sylvain CORIAT, pour le temps qu'il a bien voulu nous accorder, sa passion pour les sujets traités dans ce mémoire et ses précieux conseils tout au long de notre réflexion.

Merci également à :

- Jean-Christophe MENIOUX, directeur central des financements du Groupe AXA
- François ROBINET, directeur central des risques du Groupe AXA

pour nous avoir offert l'opportunité de contribuer en tant que *project manager* à la mise en œuvre de solutions alternatives de réassurance au sein du Groupe AXA.

Nous remercions enfin M. Christian-Yann ROBERT d'avoir accepté d'être notre référent au CEA pour ce mémoire.

AVERTISSEMENT AU LECTEUR – JUIN 2008

Les marchés financiers traversent depuis le 2^{ème} semestre 2007 une crise profonde dont l'origine se trouve en partie dans l'accroissement du risque de défaut d'obligations indexées à des prêts *subprime* aux Etats-Unis. Depuis la fin 2007, la crise s'est ancrée au secteur interbancaire et financier, remettant au moins momentanément en cause la capacité des banques et autres établissements financiers à transférer leurs risques de crédit sous forme de titrisation.

Or, dans le cycle de faible coût du crédit autorisé par une politique monétaire accommodante depuis la fin des années 1990, ces actifs titrisés (ABS, CDO, CLO...) avaient été particulièrement recherchés par les investisseurs, ayant recours au levier de la dette pour financer une part substantielle de leurs investissements.

Bien qu'ayant résisté de manière efficace jusqu'au 1^{er} trimestre 2008 de par la diversification et la décorrélation du marché des transferts de risque d'assurance aux autres classes d'actifs, le compartiment des *Insurance-Linked Securities (ILS)*, dont il est notamment question dans ce mémoire, a depuis lors été rattrapé par la crise : la liquidité déjà faible de ce marché de niche (récent) s'est encore réduite. Un certain nombre d'acteurs ont dû soit quitter le marché faute de capacité financière suffisante (rehausseurs de crédit, investisseurs institutionnels ou *hedge funds*), soit revoir à la hausse leur appréciation de la valeur du risque (agences de rating).

Finalisé à la fin de l'année 2007 sur la base d'observations collectées tout au long des trois dernières années, ce mémoire n'étudie pas spécifiquement la résilience du marché des *ILS* à la crise actuelle. A l'aune des récents événements, un certain nombre de résultats théoriques ou empiriques présentés dans ce mémoire doivent ainsi être pris avec davantage de prudence qu'en période « normale » de marché.

RESUME / ABSTRACT

Le risque de mortalité est un risque sous-jacent à de nombreux produits d'assurance qui offrent un capital en cas de décès de l'assuré. Face à un tel risque, le principe de mutualisation ou de chargement du tarif initial sont nécessaires mais insuffisants pour permettre à l'assureur de s'immuniser contre le risque de perte ou de ruine. Une technique originale de couverture « naturelle » entre longévité et mortalité est proposée, mais l'asymétrie du bénéfice de la couverture en cas de variations extrêmes de l'espérance de vie ne permet pas à l'assureur de se couvrir convenablement dans le temps. Dans un contexte normatif de plus en plus exigeant en matière de couverture des risques d'assurance (Solvency II) et face aux limites de capacité du marché de la réassurance traditionnelle et l'insuffisance des modes de couverture offerts en pratique, nous présentons une technique innovante de couverture du risque de déviation de la mortalité par une obligation dont le remboursement du principal est indexé au risque de surmortalité. L'analyse des différentes phases de construction de cette obligation permet d'exposer en détail le profil de risque transféré aux marchés de capitaux et de comprendre ainsi l'équilibre de prix auquel le marché consent à absorber un tel risque de surmortalité. Différentes techniques sont ensuite mises en œuvre pour justifier à posteriori la prime de risque exigée par les investisseurs pour s'exposer à un tel risque : extraction des coefficients d'aversion au risque implicite du marché ou changement de mesure du risque selon une approche inspirée du principe de probabilité risque-neutre. Sous certaines conditions d'utilisation, ces méthodes permettent de proposer des prévisions quant au comportement des obligations émises à ce jour. Enfin, nous montrons que dans une approche CAPM, le bénéfice de la diversification apportée par le risque de mortalité ne justifie pas une telle prime de risque.

Mortality risk is present in a number of insurance products offering a capital protection in the event of the policyholder's death. To face such a risk, mutualisation or loading principles are necessary but insufficient to offset the insurer's risk of loss or risk of ruin. A non-traditional approach based on the principle of a "natural" hedging between longevity and mortality is analyzed but reveals that large variations in life expectancy prevent the insurer from benefiting from an adequate hedge over time. In a context of increased normative pressure urging insurers to better hedge their risks (Solvency II), coupled with the capacity constraints of the traditional reinsurance sector and the practical limitations of the various types of covers available, we lay out an innovative technique to hedge extreme mortality risk based on a bond whose redemption depends on realized deviations of mortality. The analysis of the various construction phases of this mortality-linked bond enables to highlight the risk profile transferred to the capital markets and thus better understand the price equilibrium at which the market is willing to take on the risk. Various techniques are then implemented to justify ex post the risk premium charged by investors to bear such risk: implied risk aversion coefficients are extracted from market prices and key risk metrics; a change of risk measure inspired from the risk-neutral probability framework is calibrated to available market data. Under certain practical considerations, these measures enable to predict certain price behaviours of the mortality bonds issued to date. We finally show that under a CAPM framework, such risk premiums are not justified given the diversification benefit brought by the mortality risk.

TABLE DES MATIERES

	Page
INTRODUCTION	7
<u>PARTIE I – SYNTHÈSE DES ENJEUX</u>	10
Section 1 Les risques en jeu : que cherche-t-on à couvrir ?	11
1) Les risques humains et financiers	
2) Eviter le risque de ruine	
Section 2 Les marchés financiers comme alternative à la réassurance traditionnelle	17
1) Le formidable essor des <i>Insurance-Linked Securities</i>	
2) Vers un nouveau ' <i>business model</i> ' de l'assurance ?	
Section 3 Quantifier la 'juste valeur' des risques extrêmes	24
1) Mesurer les risques extrêmes	
2) Tarifier les risques extrêmes	
<u>PARTIE II – POURQUOI LE « MORTALITY BOND » ?</u>	27
Section 1 Quantification du risque de surmortalité	27
1) Rappel – principes de tarification et de comptabilité des contrats d'assurance décès	
2) Principe de mutualisation des risques décès	
3) Quantification du risque de surmortalité	
Section 2 Une couverture naturelle entre mortalité et longévité ?	53
1) Présentation des hypothèses et de la démarche analytique	
2) Simulation de la couverture naturelle sous différents <i>scenarii</i>	
3) Revue critique du modèle	
Section 3 La réassurance traditionnelle du risque de mortalité	66
1) Principe de réduction de la variance du résultat	
2) Limites du marché de la réassurance vie	
3) Intérêt d'une solution de marché	

PARTIE III – CONSTRUCTION D'UNE OBLIGATION INDEXEE AU RISQUE DE MORTALITE

Section 1	La structure du <i>Mortality bond</i>	80
1)	Schéma & fonction de <i>payoff</i>	
2)	Choix de la juridiction pour le SPV : enjeu comptable / réglementaire / fiscal	
Section 2	Calibration du modèle paramétrique	86
1)	Présentation du portefeuille	
2)	Construction de l'indice synthétique de mortalité	
3)	Tendance ; fréquence / sévérité	
Section 3	Projections et simulations numériques	104
1)	Les étapes de calcul	
2)	Définition des probabilités d'occurrence et <i>Expected Loss</i>	
3)	Résultats obtenus et commentaires	
Section 4	Discussion autour des limites du modèle	114
1)	Une calibration délicate dans la perspective de <i>Solvency II</i>	
2)	Le risque de pandémie : un risque « <i>Cat</i> » ?	

PARTIE IV – ESTIMATION DE LA VALEUR DU RISQUE SUR LES MARCHES DE CAPITAUX

Section 1	Les <i>Mortality bonds</i> émis à ce jour	119
1)	Caractéristiques techniques des opérations Swiss Re, Scottish Re & AXA	
2)	Dynamique du marché des <i>Mortality bonds</i>	
Section 2	Evaluation à <i>priori</i> du risque et prix à <i>posteriori</i> de marché	124
1)	Approche économétrique	
2)	Approche par les opérateurs de distorsion	
3)	Analyse du degré d'aversion au risque du marché des <i>Mortality bonds</i>	
Section 3	Méthode alternative de quantification du risque : l'approche EVT	149
1)	La théorie des valeurs extrêmes : quelques résultats utiles	
2)	Application au <i>Mortality bond</i> de Swiss Re (2003)	
3)	Les limites de l'approche par EVT	

Section 4	La prime de risque des <i>Cat bonds</i> dans une approche CAPM	159
1)	Rappels – théorie de gestion de portefeuille	
2)	Contribution théorique d'un <i>Cat bond</i> à un portefeuille	
3)	Application pratique – estimation des primes de risque minimales	
CONCLUSION		176
BIBLIOGRAPHIE		178
ANNEXES		184
A.	Approche <i>Standard & Poor's</i>	185
B.	Tarification élémentaire et illustration de la réduction de variance par la réassurance	191
C.	Modélisation du risque terroriste	202
D.	Données utilisées et analyse des pandémies passées	211
E.	Analyse des séries temporelles de mortalité & régressions Cobb-Douglas	231
F.	Eléments de théorie de la mesure du risque	243

*

* *

INTRODUCTION

Les secteurs de l'assurance et de la réassurance connaissent depuis une quinzaine d'années une transformation progressive de leur « *business model* ». Dans un contexte normatif convergent (IFRS, directive européenne sur la réassurance, Solvency II), la désintermédiation financière et la mesure toujours plus fine des risques conduisent à une redistribution des rôles traditionnellement dévolus à ces deux métiers, aujourd'hui encore complémentaires et à l'avenir peut-être concurrents (*cf.* note de recherche de **MORGAN STANLEY [2007]**).

Là où l'assureur souscrivait des risques à son bilan et gérait son équilibre actif/passif de manière prudente en tablant sur la mutualisation des risques et sur l'écrêtement des pointes par la mise en place de programme de réassurance optimale, le réassureur prenait quant à lui des risques toujours plus extrêmes en optimisant sa gestion par la recherche de la plus grande diversification des risques, des programmes de rétrocession et de provisionnement conservateurs, enfin une gestion actif / passif encore plus prudente (part d'obligations *vs.* actions plus élevée chez les réassureurs que chez les assureurs).

Comme le note **DEELSTRA & PLANTIN [1999]**, « *l'efficacité et la capacité du marché de la réassurance déterminent directement celles des marchés d'assurance (...) seule la réassurance leur permet de lisser dans l'espace et le temps des pointes de sinistralité autrement trop importantes pour leurs fonds propres* ».

La survenance d'un nombre croissant de catastrophes majeures au cours des 15 dernières années (ouragans Andrew & Wilma en 1992 et 1994, Lothar & Martin en 1999, événements du 11 septembre 2001, AZF, Katrina en 2005...) a conduit à une réévaluation du coût du risque porté par les (ré)assureurs : recalibration des modèles de catastrophes naturels (en fréquence et sévérité), meilleure prise en compte des risques de chocs (mortalité) ou « *tail-risk* » à déroulement tendanciel (longévité), meilleure compréhension de la dynamique des corrélations au bilan (notamment par le recours à la théorie des copules).

Dans un tel environnement, la part de risques que peuvent finalement supporter les réassureurs est nécessairement limitée. Malgré la création de nouveaux acteurs (notamment « bermudiens ») ou l'injection de ressources venant du *private equity*, les turbulences traversées par certains 'gros' réassureurs sur la période 1999 – 2005 rappellent au besoin que la réassurance est un métier où même l'expérience cumulée sur des dizaines d'années ne suffit pas à gérer sereinement le risque souscrit. Il a donc fallu trouver des modes alternatifs de gestion du risque que seuls les marchés financiers pouvaient finalement offrir.

De par leur profondeur et la recherche toujours plus marquée d'actifs financiers assurant un tryptique optimal entre rendement, risque et diversification, les marchés de capitaux sont devenus sinon la, du moins une nouvelle source privilégiée de transfert des risques d'assurance.

Avec l'émission de la première obligation indexée au risque de tempête américaine en 1992, l'émergence progressive du marché des « *Cat bonds* » tout au long de la décennie 1997 – 2007 et plus récemment des traités en *quota-share* dits « *side cars* » ont commencé à modifier le partage des risques entre assureurs et réassureurs.

En mutualisant les risques sur une base élargie d'investisseurs, le recours aux techniques financières de transfert de risque (« *Alternative Risk Transfer* » ou « ART ») offre aux assureurs trois avantages principaux : (i) ces techniques permettent d'accéder à des capacités de couverture qui font défaut ou sont trop chères sur le marché de la réassurance traditionnelle ; (ii) en sécurisant un prix fixe sur une durée d'au moins 3 ans, l'assureur peut mieux piloter son résultat et faire face aux éventuels ajustements des cycles tarifaires de la réassurance ; (iii) enfin, ces techniques de transfert de risque permettent aux assureurs de réduire leur exposition au risque de contrepartie sur les réassureurs.

Les réassureurs devraient eux aussi bénéficier d'un tel marché et lisser progressivement leurs primes. La convergence de rôle entre marchés de capitaux et réassurance ne fait que commencer (cf. **SWISS RE [2001a]**). Sous-tendant un mouvement plus profond de désintermédiation financière et de fragmentation des risques, la concurrence entre (ré)assureurs pour y transférer directement les risques est également lancée. Avec près de \$33 milliards d'encours à décembre 2007, le marché des « *Insurance-Linked Securities* » (« ILS ») constitue le premier réassureur au monde et concentre un tiers des primes de réassurance (**MORGAN STANLEY [2007]**).

Outre les enjeux techniques de capacité et de gestion des risques, la deuxième motivation principale du recours à l'ART réside dans l'amélioration escomptée du rendement des fonds propres. Le recours des banques commerciales à la titrisation de leurs créances dès les années 80 a permis d'améliorer significativement leur « *return on equity* » (de 3% environ en 1984 à 12% en moyenne en 2004). L'espérance de retour sur fonds propres tend à prouver que le secteur de l'assurance reste sous-évalué par rapport au secteur bancaire (ratio *Price/Earnings* de 9 contre 12 en moyenne respectivement). Or ce sont près de € 450 milliards d'*asset-backed securities* bancaires qui ont été émises sur la seule année 2006 contre un encours à fin 2006 de seulement \$25 milliards de titrisation d'assurance (*Cat bonds*, titrisation liée à la régulation 'XXX' aux USA, monétisation d'*Embedded Value*). La demande pour les « ILS » n'a jamais été aussi forte. La récente crise de l'été 2007 a plus que jamais renforcé ce besoin de diversification pour tous les investisseurs qualifiés à une telle prise de risque (*hedge funds*, gérants d'actifs, banques privées...).

Ce mémoire a pour objectif d'illustrer l'utilisation pratique d'une telle technique financière pour couvrir le risque de surmortalité : l'analyse de la construction et la tarification d'une obligation indexée au risque de déviation de mortalité (« *Mortality bond* ») permet de faire ressortir la perception du risque par le marché et l'équilibre de prix auquel celui-ci consent à absorber un tel risque.

Comme le remarque **C.M. COSTE** au chapitre 20 de **La Réassurance – approche technique [2003]** : « *A une époque où les risques financiers et d'assurance sont de plus en plus imbriqués et où les parallèles entre produits ou théories se dessinent nettement, l'existence d'un unique principe d'évaluation du prix du risque, assurant la cohérence entre ces deux mondes, apparaît comme une nécessité* ».

C'est à ce 'principe d'évaluation du prix du risque' que nous tachons d'apporter certains éclairages à partir d'une part de la mesure du risque sous-jacent (modèle explicatif du risque de surmortalité) et en inférant d'autre part la distorsion de probabilité implicite qui permet d'équilibrer les prix de marché à la probabilité de perte théorique des souches de « *Mortality bonds* » émises à ce jour.

Seule l'approche du passif a été envisagée dans le cadre de ce mémoire : l'interaction plus complexe du risque d'actifs lié à un choc de mortalité n'a pas été abordée, bien que l'impact soit potentiellement réel et important et envisagé comme tel par un certain nombre de régulateurs (notamment suisse – le FOPI).

Dans un premier temps, nous nous attachons à démontrer que pour éviter le risque de ruine de la compagnie d'assurance, d'autres techniques de couverture du risque de mortalité peuvent être envisagées, notamment au travers la mise en place d'un portefeuille viager « delta neutre » qui optimise l'allocation entre rentes viagères et temporaires décès. Cette couverture apparaît efficace pour de petites variations de l'espérance de vie. Les limites d'une telle approche sont discutées pour mieux justifier l'intérêt d'une couverture séparée entre risque de mortalité d'un côté et risque de longévité de l'autre.

La couverture spécifique du risque de mortalité sur le marché de la réassurance traditionnelle se heurte toutefois aux limites de capacité des acteurs traditionnels et aux pratiques de ce marché (la réassurance excluant par exemple le risque de pandémie) : cette situation a conduit certains gros (ré)assureurs à trouver des solutions innovantes fondées sur des techniques de transfert de risque.

Dans la deuxième partie du mémoire, nous détaillons la démarche de construction du « *Mortality bond* » d'AXA : d'abord en proposant un aperçu sur les enjeux comptables, réglementaires et fiscaux de la structure générale de la transaction puis en présentant le portefeuille de polices sur lequel repose le transfert de risque. Enfin, la méthodologie retenue pour mesurer les probabilités d'occurrence et l'espérance de perte moyenne est analysée pour discuter les avantages et limites d'une telle modélisation.

En troisième partie, nous analysons la tarification du risque par les marchés de capitaux et proposons de recourir aux opérateurs de distorsion pour évaluer la prime de risque implicite exigée par les investisseurs : cette démarche permet de mesurer la valeur relative des opérations tant du côté émetteurs que du côté investisseurs. Elle autorise finalement à s'interroger sur la pertinence de la mesure initiale du risque de surmortalité et sur la justification des primes de risque demandées par les investisseurs.

Ce mémoire reflète le travail directement accompli par l'un des rédacteurs entre 2005 et 2006 au sein de la Direction Centrale des Finances du Groupe AXA en étroite collaboration avec les équipes du Risk Management et AXA Cessions (plateforme centrale de réassurance). C'est pourquoi, au-delà du formalisme mathématique requis pour un mémoire présenté à l'Institut des Actuaire, le point de vue du praticien est également privilégié.

*

* *

PARTIE I – SYNTHÈSE DES ENJEUX

L'objet de ce mémoire est de présenter les motivations tant théoriques que pratiques pouvant conduire une compagnie d'assurance aussi diversifiée que le Groupe AXA à analyser l'intérêt de recourir à des solutions innovantes adossées aux marchés de capitaux en matière de gestion et transfert de risques.

Le domaine de réflexion sur les risques viagers extrêmes comme la mortalité (analysée dans ce mémoire sous l'angle d'un choc instantané¹) ou la longévité (envisagée en termes de dérive lente mais quasi certaine de la durée de vie humaine) a démarré en 2000 – 2002. Deux événements ont à notre sens marqué les esprits : le choc constitué par le 11 septembre 2001 d'une part et d'autre part, les mises en faillite de certains régimes à prestations définies aux USA (compagnies aériennes, automobiles...) ainsi que la publication d'une note du régulateur anglais (la FSA) en mai 2002 sur le risque de longévité (« **Financing the future : mind the gap !** »).

Comme nous l'avons esquissé en introduction, la réflexion sur les outils disponibles au secteur de la (ré)assurance pour couvrir les risques extrêmes en assurance non-vie s'est structurée dès 1992 – 1995. **CHARPENTIER [2002]** note ainsi : « *Les catastrophes naturelles (...) sont des points singuliers qui concentrent des montants inhabituels de risque. Il faudrait au secteur de l'assurance plusieurs dizaines de milliards de dollars de fonds propres supplémentaires pour offrir une couverture totale de ces risques* ».

Or le paradoxe, souligné par **SCHERER [2000]**, est que « *d'un côté, il y a trop de fonds propres au niveau macro-économique dans le secteur de l'assurance. (...) D'un autre côté, l'assurance manque de fonds propres pour couvrir certains risques extrêmement volatils comme les catastrophes naturelles* ». L'on pourrait aisément étendre l'argument aux risques viagers.

Au-delà du débat sur la nature de l'évènement en cause (cause unique ou causes multiples), la vulnérabilité du secteur dans son ensemble tient en réalité à l'interaction et l'interdépendance des acteurs entre eux : toute perte, d'où qu'elle provienne reste cantonnée au sein de la même communauté de (ré)assureurs par les traités proportionnels, *CAT XL* ou en *stop-loss*. Ce n'est donc pas tant le niveau de fonds propres en base absolue qu'il convient d'apprécier pour faire face à un péril, mais bien la part relative des fonds propres du secteur qui pourra être économisée si d'autres acteurs sont à même de supporter les risques. Or dans des scénarios de risque extrêmes, la probabilité de perte augmente de toute part : elle tend même à s'accélérer du fait des expositions croisées des acteurs du secteur et de l'interaction en chaîne de nature systémique qui en découle (*cf.* mémoire de **GRINDA & NGUYEN [2000]**).

Après avoir rappelé les enjeux humains et financiers du risque de déviation de la mortalité, qui a fait l'objet de nombreuses études ces dernières années (**Section 1**), nous mettons en lumière l'extraordinaire développement des techniques modernes de transfert de risque d'assurance – les « *ILS* » (**Section 2**). Nous nous interrogeons enfin sur les différentes méthodes pertinentes pour refléter la 'juste valeur' du risque ainsi transféré aux marchés financiers (**Section 3**).

¹ On ne regarde pas la mortalité comme le ferait *Solvency II* dans les *Quantitative Impact Studies* (QIS 3) : scénario 'à la russe' de lente dérive de mortalité (+25% par an uniformément sur tout le portefeuille)

Section 1 – Les risques en jeu : que cherche-t-on à couvrir ?

Le risque de mortalité envisagé dans ce mémoire peut revêtir des causes multiples : déviation d'une tendance naturelle à l'amélioration de l'espérance de vie, pandémie venant ponctuellement ou durablement affecter cette tendance naturelle, choc de mortalité dû à un événement terroriste... Parmi ces différents éléments, aucune cause ne peut / ne doit être privilégiée par rapport à une autre : en effet, ce qui nous intéresse ici n'est pas tant la qualification de la perte par tête assurée, mais la quantification de la probabilité de survenance d'un choc de mortalité lié à un événement quelconque. C'est ce qui rend la modélisation d'un tel risque aussi complexe.

Sur fond de grippe aviaire, le risque de mortalité est un enjeu qui a fait l'objet d'une très forte attention médiatique à la fin de l'année 2005 et tout au long de l'année 2006. Des organismes publics (Congrès aux USA, Institut de Veille Sanitaire en France) et privés (agences de *rating*, réassureurs) ont également participé au débat d'idées en proposant de nombreuses études et revues des risques potentiels auquel le secteur de la (ré)assurance est exposé et au-delà la société tout entière.

1.1 Les risques humains et financiers

Nous ne proposons pas ici de faire une revue exhaustive des études réalisées sur le thème de la mortalité, mais privilégions la synthèse offerte par les trois grandes agences de *rating* (Moody's, Standard & Poor's et Fitch). Ces agences sont des entités indépendantes qui, par des analyses approfondies, proposent aux marchés financiers une grille de lecture homogène du risque de crédit par industries, entreprises et pays.

S'agissant de la (ré)assurance, les agences de *rating* ont cherché à mesurer la vulnérabilité des principaux acteurs du secteur à un choc de mortalité. A partir des différentes analyses d'experts médicaux et mesures épidémiologiques qu'elles ont pu rassembler, les trois agences de *rating* dressent un tableau assez convergent de l'impact potentiel qu'un scénario de pandémie pourrait avoir sur l'économie en général et le secteur de la (ré)assurance en particulier.

FITCH [2006] estime ainsi les pertes probables pour l'industrie d'assurance et de réassurance à partir d'un modèle calibré sur des opinions d'experts et une analyse des pandémies passées, dont le tableau suivant résume les principaux événements :

Previous Flu Pandemics		
	Worldwide Death Estimates (m)*	Worldwide Population (bn)**
Spanish Flu 1918–1919	20	1.80
Asian Flu 1957–1958	4	2.89
Hong Kong Flu 1968–1969	4	3.56

Source: *World Health Organization, **U.S. Census Bureau.

Fitch estime que les USA seraient exposés à hauteur de 200,000 décès et l'Europe à un peu moins de 400,000 en cas de scénario de pandémie de grippe aviaire. Le coût pour l'industrie s'élèverait en conséquence à \$18 milliards et £20 milliards respectivement pour les USA et l'Europe. Le tableau suivant extrait de l'étude mentionnée recense les tranches d'âges principalement affectées par un tel scénario :

Estimation of Flu Pandemic Effect on U.S. and European Insurance Market

	Age Group					Total
	Under 35	34-44	44-54	55-64	65+	
Projected U.S. Insured Deaths*						
Individual	30,696	1,801	2,357	4,314	56,332	95,490
Group	50,854	2,774	2,707	4,420	29,919	90,675
Total Projected U.S. Insured Deaths	81,541	4,576	5,064	8,733	86,251	186,165
Projected U.S. Insurance Benefit (USD)**						
Individual	97,200	153,800	102,200	87,900	44,600	-
Group	155,000	360,000	152,000	107,000	62,000	-
Projected Death Benefits (USDm)						
Individual	2,983	277	241	379	2,512	6,392
Group	7,882	999	412	473	1,855	11,621
Total Projected U.S. Death Benefits	10,865	1,276	652	852	4,367	18,013
Projected European Insured Deaths***						
Individual	58,729	3,447	4,511	8,256	107,812	182,756
Group	97,329	5,310	5,182	8,459	57,262	173,541
Total Projected European Insured Deaths	156,058	8,757	9,693	16,715	165,074	356,297
Projected European Insurance Benefit (GBP)**						
Individual	55,734	88,188	58,601	50,401	25,573	-
Group	88,876	206,422	87,156	61,353	35,550	-
Projected Death Benefits (GBPm)						
Individual	3,273	304	264	416	2,757	7,015
Group	8,650	1,096	452	519	2,036	12,753
Total Projected European Death Benefits	11,923	1,400	716	935	4,793	19,767

*These amounts represent deaths projected on insured households, the basis for which was obtained from the Insurance Information Institute (III) study, "Pandemic: Can the Life Insurance Industry Survive the Avian Flu?" dated Jan. 17, 2006, (updated Feb. 9, 2006) pp 9-12, written by Steven Weisbart, PH.D., CLU. Death rates were estimated using the same methodology as the severe case in the aforementioned III study, pp 9-12, but using 209,000 deaths, adjusted for the noninsured, and using Fitch estimated rates, which were slightly different than the study: 0.6% for ages 35 and under, 35-44, and 45-54; 0.9% for ages 55-64; and 1.2% for the 65 and over age group. Fitch also notes the study provides a severe case scenario with 1.9 million projected deaths leading to US\$133 billion in projected death claims (57% of U.S. life insurance and reinsurance industry statutory surplus). **These figures represent the death benefit amounts per household adjusted by two-thirds to approximate the per-individual amounts (since some households have only one earner and others have two). This approach was taken in the III study mentioned earlier. Please see that study for more details. European insurance amounts were converted to British pounds using a 1.744 exchange rate. ***European projected insured deaths were estimated using the same methodology and death rates assumed in the U.S. projections. Assumed total deaths were estimated at 400,000. GBP - British pounds. US\$ - U.S. dollar. Note: Numbers may not add due to rounding.
Source: Fitch and III's report "Pandemic: Can the Life Insurance Industry Survive The Avian Flu?"

Fitch mentionne que la majorité des traités de réassurance dans le monde sont des traités proportionnels, si bien que l'exposition du secteur apparaît bien systémique et affecterait ainsi tous les acteurs du secteur de manière *quasi* simultanée.

De plus, il ressort de l'analyse que 66% de la réassurance décès dans le monde est concentrée sur les USA ; l'Europe consomme 25% de la réassurance décès (dont 50% pour le Royaume-Uni). Ainsi, le risque de concentration des décès et des sommes en jeu est particulièrement aigu et renforce la vulnérabilité du secteur.

Enfin, Fitch élargit l'analyse en listant, sans toutefois les quantifier, les conséquences du scénario étudié dans d'autres domaines de couverture : assurance d'interruption d'activité ou d'évènement, assurance santé, assurance voyage, assurance en matière agricole...

L'analyse menée en mai 2006 par l'agence **STANDARD & POOR'S [2006]** sur un panel de grands réassureurs reflète là aussi des chiffres d'une ampleur jamais réalisée : la perte estimée pour l'industrie pourrait s'élever jusqu'à € 9 milliards.

L'analyse repose à la fois sur un modèle épidémiologique (% de la population infectée) et un modèle de sévérité en cas de contamination (taux de mortalité) avec les deux scénarios suivants (A et B) :

Estimated Potential Losses For Global Reinsurers In Pandemic Scenarios

	Proportion of people who become infected (%)	Death rate for those infected	Simplistic estimate of mortality impact as a percentage of premiums
Basis A	25	1 in 400	12.5
Basis B	15	1 in 100	30

L'impact de ces deux scénarios sur les principaux réassureurs du secteur est résumé dans le tableau suivant :

Potential Effects Of Pandemic Scenarios On Rated Global Reinsurers

Group name	Insurer financial strength rating on core operating entity (at May 8, 2006)	Life and health reinsurance premiums (bil. €)	Proportion of total premiums (%)	Basis A (mil. €)	Basis B (mil. €)
Swiss Re*	AA/Watch Neg	6.7	38	844	2,024
GE Frankona**†	A/Watch Pos	1.0	19	125	300
Munich Re	A+/Stable	7.4	18	925	2,220
Hannover Re	AA-/Negative	1.0	25	125	300
Reviros	A-/Stable	1.0	100	125	300
RGA Re	AA-/Negative	3.3	100	408	980

*Swiss Re is currently in the process of acquiring GE Frankona. †Figures for GE Frankona and Hannover Re are from 2004. All others are from 2005.

Nous renvoyons en **Annexe A** pour une version plus détaillée de l'analyse de Standard & Poor's, qui reste assez qualitative dans l'ensemble.

L'analyse proposée en avril 2007 par **MOODY'S [2007]** nous paraît la plus complète et la plus intéressante en terme d'analyse de sensibilités dans la mesure où elle déroule deux scénarios calibrés sur des données historiques rassemblées par le département *Health & Human Services* du ministère de la Santé des USA.

Un scénario « modéré » (événements de 1958/1968) pourrait conduire à environ 209,000 décès tandis que le scénario « sévère », calibré sur l'épisode de grippe espagnole de 1918, pourrait provoquer jusqu'à 1,9 millions de décès (en plus de la mortalité naturelle attendue).

Les conclusions de l'analyse révèlent ainsi que les assureurs américains directs pourraient perdre entre \$6 et \$24 milliards (brut de réassurance). Exprimé en termes de stock, l'exposition des réassureurs s'élèverait entre \$4 et \$16 milliards.

Or l'analyse souligne que les réassureurs ne pourraient sans doute pas payer plus de la moitié des sommes sous risque dans de tels scénarios, ce qui reflète là encore la vulnérabilité systémique du secteur dans son ensemble : c'est toute la chaîne de transfert de risque qui pourrait ainsi être mise à mal dans de tels scénarios.

Comme le notait **MOODY'S [2007]** pour l'industrie d'assurance aux Etats-Unis : « *In a severe pandemic influenza, the projected results for the industry could prove devastating, resulting in the elimination of almost a quarter of its statutory surplus on a gross basis as well as downgrades (multi-notch) of a significant number of life insurers / reinsurers* ».

Toutefois, l'agence de notation note que de tels scénarios ne se produisent qu'à une fréquence de 1,75% par an. Conditionnellement à la survenance d'une telle pandémie, Moody's estime ainsi que le taux de surmortalité théorique serait compris entre 0,5 - 1% et 2%.

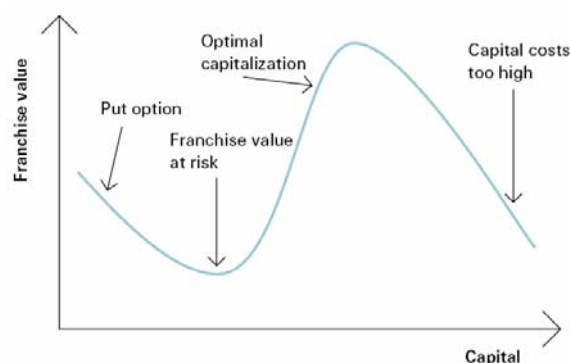
L'ampleur des pertes possibles ne doit pas surprendre: elle reflète dans les pays occidentaux la meilleure couverture de l'assurance décès ainsi que l'inflation dans la valeur des sommes assurés. Ainsi tous les scénarios qui reposent sur une extrapolation de la grippe de 1918 concourent à produire des chiffres de pertes pour le moins substantiels, même lorsqu'ils sont conditionnés par leur probabilité d'occurrence.

1.2 Eviter le risque de ruine

Etant donné les enjeux financiers estimés par les agences de *rating* au paragraphe précédent, il apparaît légitime de s'interroger à l'échelle micro-économique ce que la recherche de protection permet de couvrir.

A titre individuel, une compagnie d'assurance ou de réassurance doit concilier des objectifs potentiellement divergents : ses actionnaires recherchent le meilleur retour sur investissement en optimisant l'effet levier entre la quantité de capital mis en jeu pour soutenir la croissance de l'activité et le rendement attendu par de telles activités de prise de risque ; les assurés (ou leurs régulateurs) recherchent en revanche l'allocation maximum de fonds propres pour éviter le risque de ruine (après mutualisation / diversification des risques).

Un schéma extrait de **SWISS RE [2001b]** permet d'illustrer la dynamique de création / destruction de valeur pour les deux points extrêmes de cette axiomatique du risque de ruine :



L'analyse proposée dans cet article présente les différentes alternatives à la disposition d'une compagnie d'assurance pour piloter efficacement sa gestion en capital et par là même sa couverture du risque de ruine. Outre la recherche permanente de la plus grande diversification des risques (abordée dans ce mémoire sous l'angle de la couverture naturelle entre mortalité et longévité dans la Section 3 de la Partie II), l'autre piste privilégiée réside dans le recours au transfert de risque (Partie III).

Il y a un intérêt financier à transférer du risque au marché ou à la réassurance quand le coût marginal du transfert est moindre que le coût marginal du capital employé pour couvrir ce risque du point de vue de la solvabilité. Comme le note **MORGAN STANLEY [2003]**, c'est ce « *tradeoff* » qui a sans doute conduit Swiss Re à titriser pour la première fois son exposition au risque de surmortalité en décembre 2003 :

Why has Swiss Re done this?

Understanding the true economic capital requirements of life reinsurance business is not straightforward — there is little guidance on the subject from rating agencies or regulators — and we think it is the corporates themselves — especially the global market leader Swiss Re (market share ~25%) - that probably have the best insight and therefore potential ability to benefit from arbitrage opportunities. *Swiss Re must be taking a view that the cost of capital that is relieved via this transaction exceeds the effective net cost of servicing the bond.*

If we assume that Swiss Re invests the proceeds of the bond in a risk-free manner then we might regard the annual cost to Swiss Re as being 135bp of \$400mn or \$5.4mn. Assuming a cost of capital of 9%, then we might suggest that at least \$60mn (5.4/0.09) of capital is relieved as a result of the transaction, say SFr 100mn.

Looking at the embedded value disclosure, we note adjusted net shareholders worth of SFr 7.7bn at end 2002. Thus this is not especially material — a relief of only 1.3% of the existing capital base.

Looked at another way, we know Swiss Re had claims of SFr 10,084mn in its life business in 2002 — equal to around 32bp of the sum at risk of ~\$2trillion. Observed mortality in the range 130-150% of this base would give claims of SFr 13.1bn to SFr 15.1bn — a range of SFr 2,017mn or \$1,260mn. Thus protection for around one-third of this range is afforded by the new security — opening the possibility for future tranches of similar securities — at this range (130-150%) or other ranges of observed mortality at the adverse end of the tail. We understand that appetite for this security from investors was strong.

We might additionally infer that Swiss Re's economic capital model says that there is a probability of at least ~4% (1,260/400 x 1.3%) that the bottom end of this range is breached in any year (i.e. this represents a one in twenty-five year event). Intuitively this perhaps suggests that the capital model is relatively conservative.

Enfin, deux contributions méritent d'être citées pour étayer sur un plan plus axiomatique l'intérêt d'un recours aux techniques financières de transfert de risques d'assurance : **MACMINN & RICHTER [2004]** et **NELL & RICHTER [2004]**. Ces deux analyses mettent en évidence, d'un point de vue microéconomique, l'intérêt pour les (ré)assureurs et la société en général de mutualiser les risques d'assurance à une échelle encore plus grande que le simple marché de la réassurance ou de la rétrocession, à savoir les marchés de capitaux.

Les auteurs font référence à différentes contributions académiques dont le point commun est d'analyser l'intérêt de programmes optimaux de couverture intégrant aussi bien la réassurance traditionnelle que des techniques financières de transfert de risques. Les principaux avantages identifiés sont les suivantes :

- la titrisation permet de réduire l'aléa moral : bien que créant un risque de base pour l'émetteur, le risque d'aléa moral est considérablement réduit lorsque l'information du risque sous-jacent repose sur un indice construit de manière objective, c'est-à-dire non contestable et dont le principe de calcul est défini à l'avance (à partir de données publiques de taux de mortalité par exemple)
- la titrisation réduit considérablement le risque de contrepartie pour le (ré)assureur, dans la mesure où la plupart des structures bénéficiant des *ratings* des agences sont collatéralisées (« *fully funded* »)
- les coûts de transaction demeurent élevés mais devraient à terme se réduire, dès lors que la titrisation devient une technique banalisée de gestion des risques et que les investisseurs sur les marchés de capitaux apprécient mieux les risques transférés (modification de la structure d'aversion au risque, notamment sur les tranches hautes par une meilleure information sur la 'juste valeur' des risques).

D'un point de vue plus formel, en supposant un assureur 'primaire' risque-averse et en notant les hypothèses de la manière suivante :

X	perte aléatoire réelle subie par l'assureur
A	couverture « indicielle » (paramétrique / non-indemnitare, qui laisse subsister un risque de base) ; la couverture paye 0 ou A en fonction des états de la nature Ω
\bar{p}	probabilité d'exercice de la couverture A
Y	perte aléatoire 'exogène', corrélée à X , qui déclenche la couverture A si la perte atteint un niveau fixé de manière initiale à \bar{y}

la corrélation entre X et Y est exprimée à travers la probabilité conditionnelle :

$$p(x) = \Pr(Y \geq \bar{y} | X = x), \text{ d'où l'on tire que } \bar{p} = E^X [p(X)]$$

De manière triviale, si $p(x)$ indépendant de x , alors $p(x) \equiv \bar{p}$, l'assureur ne peut réduire son risque par le biais du *Cat bond* indexé sur Y offrant la protection A , car l'assureur paye une protection pour laquelle il n'a pas d'exposition en terme de risque. Pour être efficace, la couverture qui paye A si elle se réalise à partir de la perte aléatoire Y ne doit pas être totalement indépendante du risque sous-jacent X porté par l'assureur.

On suppose par ailleurs pour ne pas perdre en généralité l'argumentation sur le risque de base que celui-ci peut-être encadré de manière continue de la façon suivante :

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_1 \\ 0 < p(x) < 1 & \text{si } x_1 < x < x_2 \\ 1 & \text{si } x \geq x_2 \end{cases} \quad \text{pour } x_1 < x_2 \quad \text{et } p'(x) = \frac{1}{x_2 - x_1} > 0$$

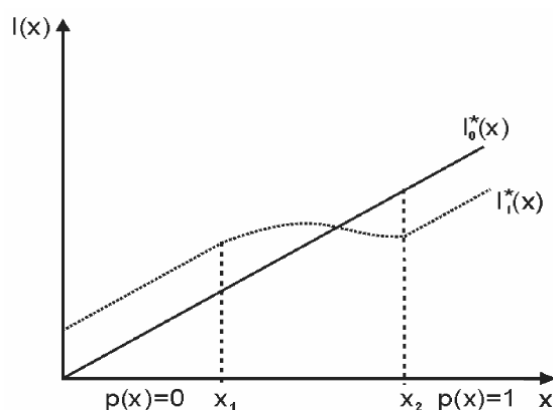
Pour des petits niveaux de pertes aléatoires (x_1), la protection ne se déclenche pas (il n'y a pas de risque de base, mais un risque de perte faible pour l'assureur).

Pour des niveaux de perte croissante (comprise entre x_1 et x_2), la probabilité de déclenchement de la couverture indicielle est croissante, mais fait subir un risque de base important à l'assureur tant en terme de probabilité de déclenchement (perte réelle subie mais protection non encore activée) qu'en valeur de protection (perte réelle potentiellement supérieure à la protection reçue).

Enfin, pour des niveaux de perte significativement élevée, il y a convergence entre la probabilité d'occurrence de l'aléa X et Y : à ce niveau de perte, le risque de base est réduit (principe d'une perte « systémique » où la protection absorbe la perte réellement subie – ce qui permet notamment de bien calibrer les tailles transférées aux marchés financiers en recourant à la technique de surréplication si besoin par exemple).

En théorie comme en pratique, la démarche analytique consiste à déterminer le niveau optimal d'attachement du *Cat bond* en fonction de la valeur du risque de base pour un assureur risque-averse (par maximisation de l'utilité marginale et détermination d'un niveau de première perte ou rétention acceptable). En appliquant un raisonnement traditionnel de microéconomie, les auteurs démontrent ainsi que :

- la demande de protection pour des *Cat bonds* en termes de capacité est d'autant plus forte que la couverture indicielle compense les pertes réellement subies (*i.e.* minimise le risque de base)
- l'allocation optimale entre réassurance traditionnelle et couverture indicielle par *Cat Bond* repose sur un *tradeoff* entre le coût de chargement de la couverture (indemnitaire I_1 ou indicielle I_0) et l'impact du risque de base sur la fonction d'utilité de l'assureur primaire. Au-delà d'un certain niveau de perte réelle, la couverture indicielle devient plus avantageuse que la couverture indemnitaire :



- le recours à la titrisation des risques extrêmes permet enfin à l'assureur d'optimiser son budget de réassurance en concentrant sa demande de réassurance traditionnelle sur les tranches basses sur lesquelles un grand nombre d'acteurs devraient pouvoir offrir des tarifs concurrentiels.

Ce dernier point renforce l'idée que la meilleure couverture du risque systémique (tranches hautes du risque sous-jacent) réside dans des instruments du type *Cat bond* : ces derniers permettent en effet de satisfaire aux trois avantages mentionnés plus haut. Il convient toutefois de noter que de telles tranches (souvent notées « *investment grade* » par les agences de rating) sont plus difficiles à placer auprès des investisseurs.

Section 2 – Les marchés financiers comme alternative à la réassurance traditionnelle

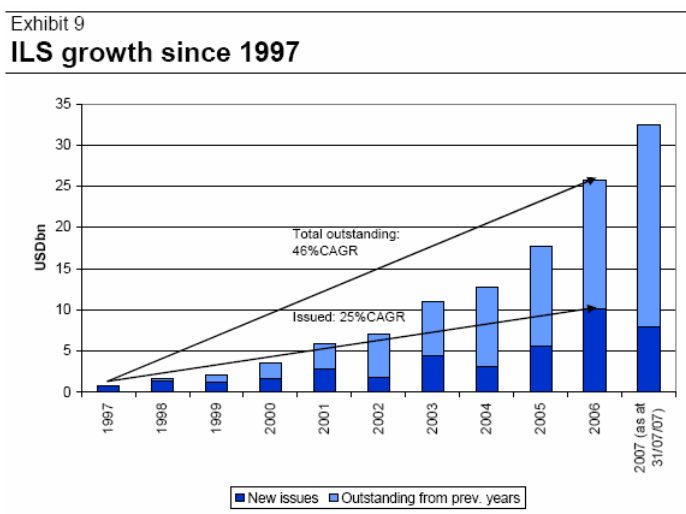
Le recours croissant du secteur de la (ré)assurance aux marchés financiers et aux techniques de titrisation habituellement réservées aux banques ne fait que s'amorcer. La croissance soutenue des volumes de titrisation d'assurance, également appelée « *Insurance-Linked Securities* » (ILS), se confirme chaque année un peu plus, et notamment depuis 3 - 4 ans.

Cette croissance résulte de la rencontre entre d'une part un besoin croissant des compagnies de (ré)assurance de procéder à une gestion dynamique de leurs risques et d'autre part la demande de diversification et la recherche de rendements supplémentaires des investisseurs qui voient dans les risques d'assurance une nouvelle classe d'actifs décorrélée et donc par là-même très recherchée.

2.1 Le formidable essor des ILS

Inexistant il y a 10 ans, la classe d'actifs des *ILS* a crû en rythme annuel de 46% et 'pèse' à fin 2007 près de \$33 milliards. Le marché des *ILS* est ainsi devenu le premier réassureur du monde en concentrant près du tiers du marché de la réassurance (mesuré en montant de primes annuelles).

La dynamique du marché est particulièrement forte depuis 2003 (+25% d'émissions nouvelles tous les ans en moyenne depuis 1997 et +50% environ depuis 2005). Outre le nombre important de transactions qui sont proposées au marché (30 émissions en 2005), c'est la capacité d'absorption du marché qui apparaît impressionnante : ceci reflète l'appétit toujours plus grand des investisseurs pour ces actifs où le notional moyen émis ne fait que croître également (\$100 millions avant 2000, plus de \$300 millions en 2006).



A côté des transactions publiques de marché, l'essor d'un compartiment plus discret connu sous le nom de « *side-cars* » est également notable, comme le remarque **LANE [2007]** : peu de transaction avant 2005, près de \$1,7 milliards placés en 2005 et plus de \$4 milliards en 2006. Les *side-cars* s'apparentent à des traités « *quota-share* » plutôt qu'en « *excess of loss* ». Ils sont la plupart du temps souscrits sur une base collatéralisée pour éviter tout risque de contrepartie (Hannover Re possède par exemple un programme dédié, dénommé « K »). Ce segment a toutefois fortement ralenti sur la 2^{ème} moitié de l'année 2007.

La décomposition plus fine des volumes émis permet de rendre compte d'une dynamique sans précédent dans l'histoire de l'émergence des classes d'actifs sur les marchés financiers.

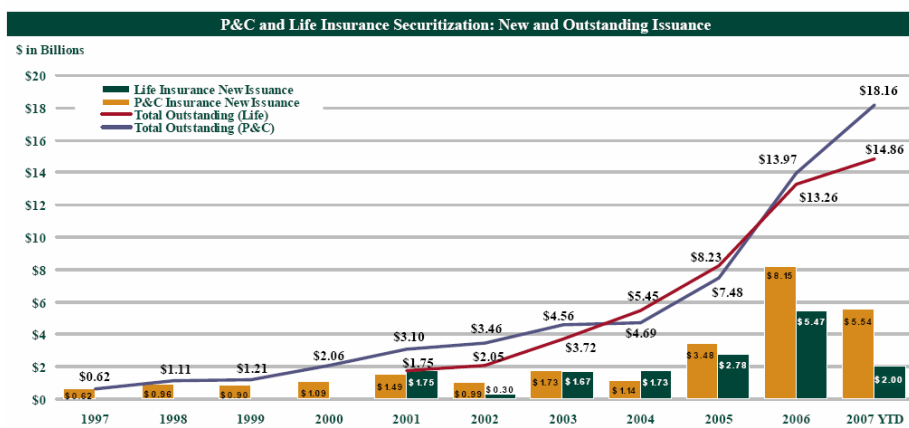
La part des volumes de transaction à support IARD (catastrophes naturelles pour l'essentiel et à la marge, titrisation de portefeuilles de masse comme les opérations SPARC d'AXA en 2005 et 2007) reste prépondérante.

Toutefois, la hausse des transactions en Vie est extrêmement soutenue depuis 2004 (du fait notamment de la mise en œuvre de la régulation XXX aux Etats-Unis et de quelques transactions de monétisation d'*Embedded Value* en Europe).

Growth of the Insurance Securitization Market

June 2007 Market Update

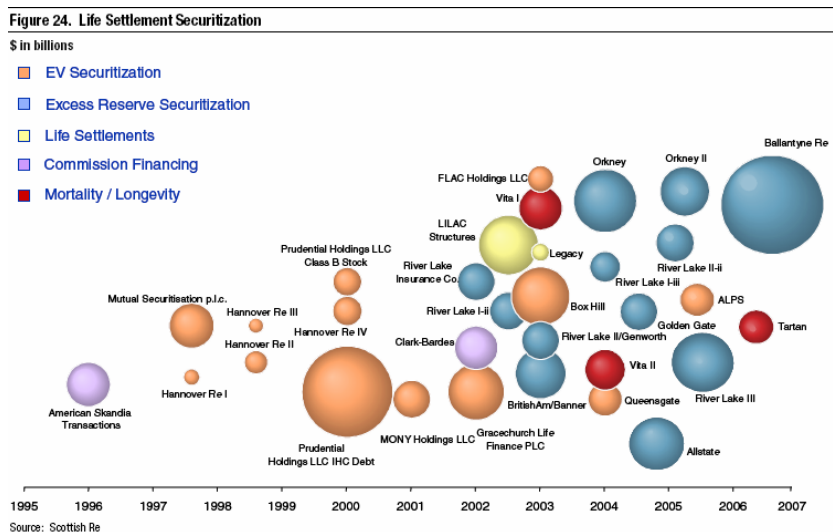
The total volume of insurance securitizations outstanding has grown to ~\$33bn, attracting investors across the rating spectrum (both investment grade and non-investment grade).



Source: Lehman Brothers. Transactions settled as of June 30, 2007. Includes P&C catastrophe bonds, P&C sidecar debt and equity, P&C embedded value, life reserve funding, life embedded value and catastrophic mortality securitizations. Includes 144A and select private transactions only.

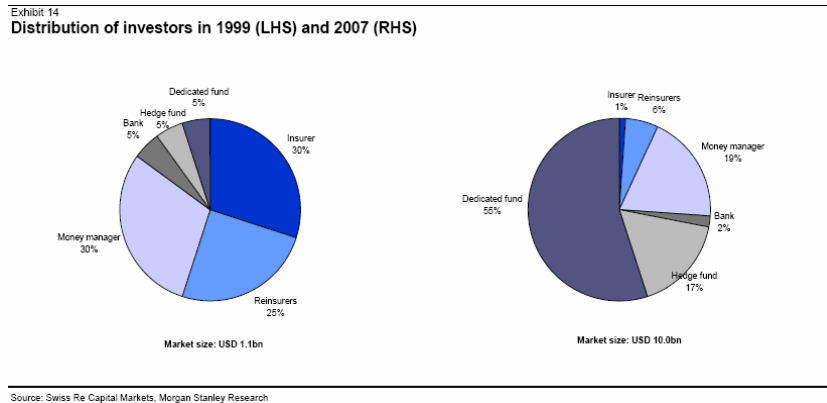
LEHMAN BROTHERS

La part de la titrisation des risques de mortalité extrême est par contre encore très limitée (\$2 milliards d'encours) comme le montre ce graphique d'une analyse de la banque CITIGROUP [2006]² :

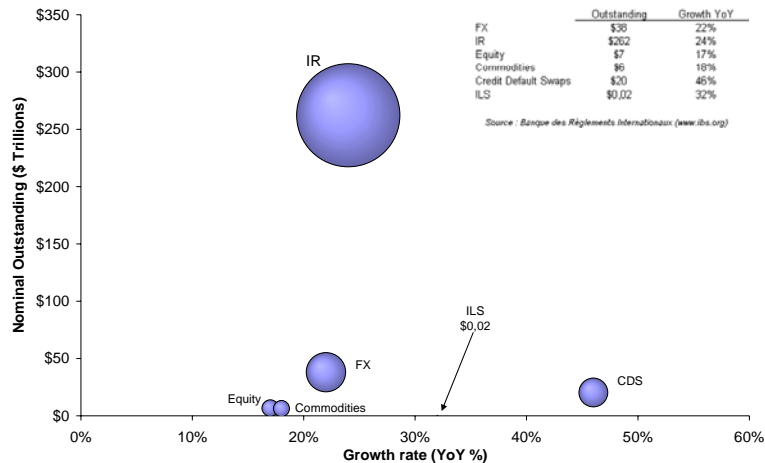


² Réalisée avant l'opération OSIRIS d'AXA (novembre 2006) et VITA III de Swiss Re (janvier 2007)

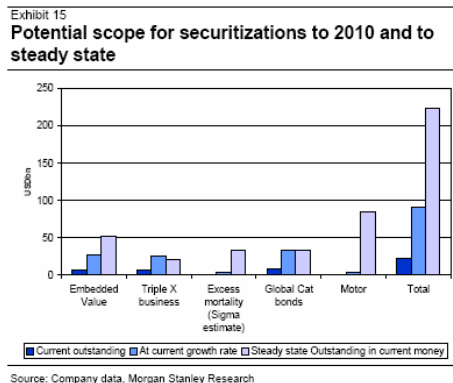
La base des investisseurs a également évolué de manière substantielle au cours des 10 dernières années tendant vers une base d'investisseurs toujours plus sophistiqués (fonds 'Cat' spécialisés ou *hedge funds* notamment) :



Le marché des *ILS* demeure ainsi un marché de spécialiste, ce qui pourrait apparaître comme un frein au développement à long terme de ce segment du marché financier. La compilation des données de la Banque des Règlements Internationaux à fin 2006 reflète la taille négligeable qu'occupent aujourd'hui les *ILS* au regard des masses de capitaux en jeu sur les sous-jacents et dérivés de taux d'intérêt, change, actions ou crédit :



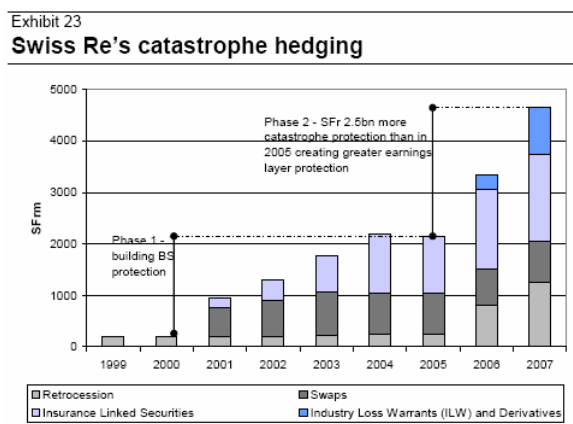
Swiss Re estime pourtant que l'encours des *ILS* devrait croître d'ici 2010 à un niveau compris entre \$90 et 150 milliards, ce que semble confirmer la projection effectuée par **MORGAN STANLEY [2007]** :



2.2 Vers un nouveau « business model » de l'assurance ?

Outre certains gros (ré)assureurs américains, le marché des *ILS* a été intensément utilisé par les réassureurs européens, et notamment les plus gros d'entre eux (Swiss Re, Munich Re, Hannover Re). La taille du marché des *ILS* a été suffisante pour absorber des risques au demeurant assez semblables (avec notamment une forte concentration de risques naturels US, Japon ou Europe).

L'analyse du « mix » de protection des résultats de Swiss Re témoigne de l'évolution des techniques utilisées par ce réassureur très sophistiqué dans sa gestion des risques : la part des *ILS* croît régulièrement depuis 2001 au détriment de la rétrocession traditionnelle (même si celle-ci a pu s'exprimer sous une autre forme avec l'émergence des « *side-cars* » à partir de 2005/2006 notamment). Il est à noter que Swiss Re intervient aussi bien pour compte propre sur le marché des *ILS* que comme facilitateur pour compte de tiers, ce qui est une évolution notable du *business model* traditionnellement dévolu aux réassureurs.



Le fait le plus marquant est que depuis peu, les compagnies d'assurance primaire peuvent également accéder aux marchés financiers directement, en limitant ainsi leur recours à la réassurance traditionnelle. Comme en témoigne cette note d'analyste, des grands groupes comme Allianz se perçoivent comme des transformateurs de risques (« *risk trader / transformer* ») et non plus seulement des 'entrepôts' de risques (« *risk carrier* »).

CHEUVREUX 11.07.2007

Allianz (EUR170.21) 1/Selected List
 Target Price: EUR220.00 ALV GR/ALVG.DE Market Cap: EUR76.379bn
 INSURANCE GERMANY

More securitizations in the future
 According to the FTI, Paul Achleitner, member of Allianz' top management, expects Allianz to transfer more insurance risks to the capital markets by means of securitizations. With Dresdner Kleinwort, Allianz enjoys a competitive advantage in the field of risk securitizations. So no sale of the investment bank planned. We reiterate our 1/Selected List rating, FV EUR220.

More risk securitization in the future: According to the Financial Times Deutschland, Paul Achleitner, member of Allianz' top management, expects Allianz to transfer more insurance risks to the capital markets by means of securitizations in the coming years. Such a step would lower capital requirements. Like banks (with credit risks), insurance companies will move more from being risk carriers towards risk traders. Achleitner expects the global volume of insurance risk securitizations to increase from EUR30bn to EUR300bn within the next 10 years. Last year, Allianz securitized USD1bn in insurance risks with private placements.

No sale of Dresdner Kleinwort: To further push risk securitizations Allianz created a JV with its reinsurance division, experts from investment bank Dresdner Kleinwort and the finance division. With the bank, Allianz enjoys a competitive advantage in the field of risk securitizations. According to Achleitner, the investment bank is also helpful in the outsourcing of corporate pension liabilities for other companies when Allianz Pension Consult, Allianz Leben and Dresdner Kleinwort can collaborate.

1/Selected List, FV EUR220 per share: We maintain our 1/Selected List rating and our FV of EUR220 per share.

	2007E	2006E	2006E
Net revenues (m)	99632	105119	110922
Net profit (m)	8553	8630	9397
Reported EPS	19.41	19.16	20.97
Clean EPS	19.41	19.16	20.97
P/E	8.8	8.9	8.1
P/E incl. GW	8.8	8.9	8.1
Embedded value	126.7	147.2	169.3
P/Emb. value	1.3	1.2	1.0
Net yield	3.4	4.0	4.4

Outre les raisons de théorie microéconomique que nous avons exposées, des motivations plus financières peuvent également justifier le recours aux techniques de titrisation des risques d'assurance. Les motivations tant du côté de l'offre que de la demande sont les suivantes (**MORGAN STANLEY [2007]**) :

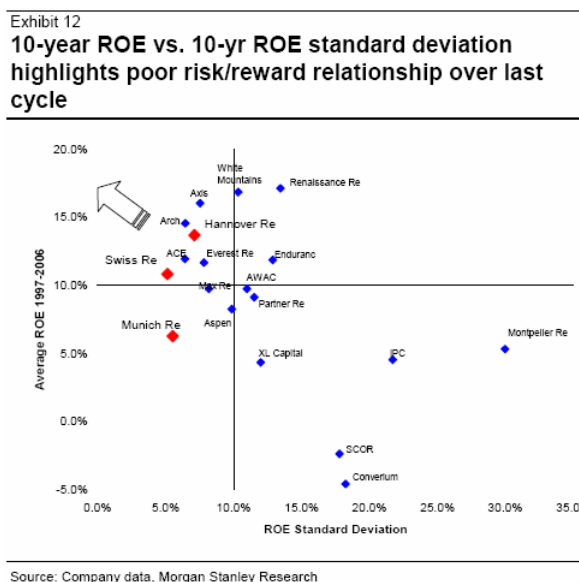
Exhibit 13
Reasons for securitising insurance risk

Originator		Investor	
Enhanced ROE	Using capital from the capital markets arbitrages the non-economic requirements of regulators and rating agencies	Uncorrelated risks	Primarily the risks are uncorrelated in most circumstances to the capital markets, which can be portfolio enhancing – same investment yield for lower volatility
Cost	Transactional costs of securitisation deals could trend below traditional reinsurers' costs and brokers' expenses. We could be approaching that time now for some securitisations.	Pure insurance risk	Access to insurance risk without management risk, run-off risk, capital market risk etc.
Coverage	Flexibility and innovation should mean it is possible to cover risks difficult to place in the traditional market e.g. Munich Re's recent transaction with East Japan Railway Co.	Range of risk/reward instruments	Provide a range of risk/reward characteristics ranging from AAA to sub-investment grade.
Reliable source of Capacity	An alternative and enormous source of capital that can provide a more consistent supply than the traditional reinsurance market	Range of durations	Bond issuances range from 1 to 5 years providing a spectrum of investment durations.
Security	Fully collateralized and diversified source of protection reduces credit risk	Reliable supply of underlying risk assets	Reliable supply of investable assets (Earthquake, hurricane, motor, mortality (!) etc risk is not going away)
Cashflow	Accelerates cash returns from long-term portfolios to allow reinvestment.		
Stable pricing	Contracts are typically 3-5 years in duration and so provide (re)insurers with a stable expense base and more reliable return		
Tax Benefits	Some transactions can create tax benefits		

Source: Morgan Stanley Research

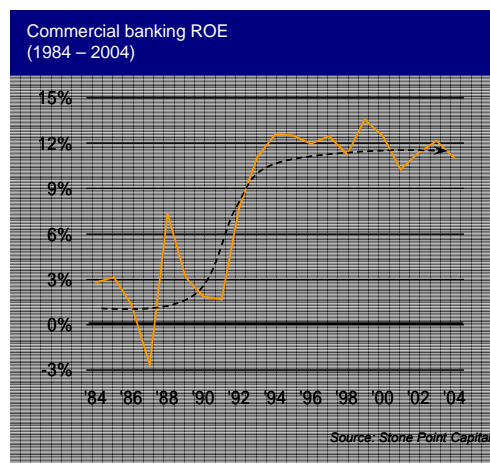
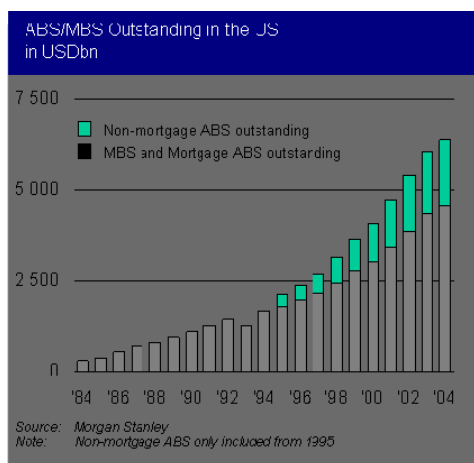
Outre le fait que la titrisation sécurise la capacité de protection à travers une partie du cycle de la réassurance et permet d'améliorer par certains aspects les standards de souscription de réassurance, la titrisation pourrait à terme être reconnue par les régulateurs comme un outil encore plus efficace de couverture des risques que la réassurance traditionnelle. Mais comme le souligne **ANDERSEN [2002]**, l'arbitrage réglementaire n'est plus un objectif en soi de la titrisation, sauf peut-être en matière de libération de surplus (« *excess capital* »).

La démarche de titrisation des risques contribue lentement à améliorer le ratio Sharpe (espérance de rendement par unité de risque pris) du secteur comme l'illustre le graphique ci-dessous extrait de la même étude :

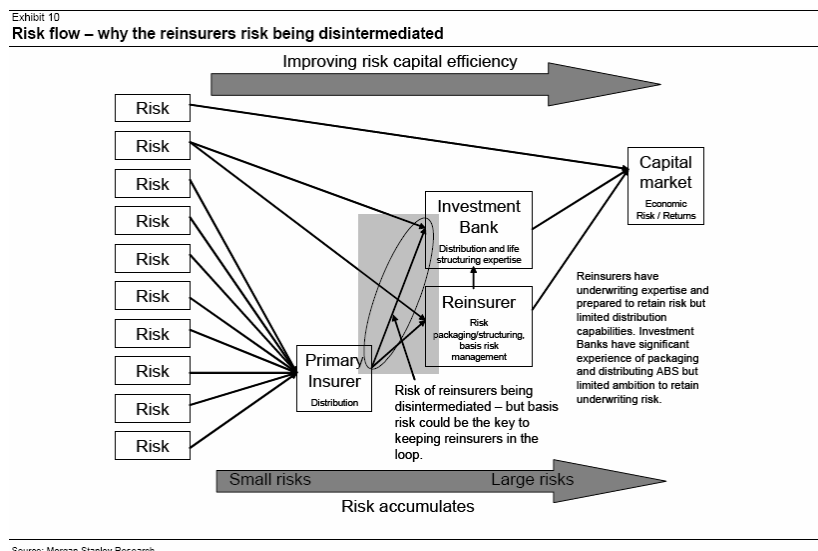


A terme, en supposant que le secteur de l'assurance suive la même évolution de création de valeur que le secteur bancaire, les « RoE » (*Return on Equity*) des (ré)assureurs devraient naturellement s'en trouver rehaussés (évolution vers le cadran en haut à gauche des acteurs du secteur).

En effet, depuis la création des premières titrisations de « *mortgage* » dans l'industrie bancaire américaine des années 80, le rendement sur fonds propres des banques commerciales s'est considérablement amélioré comme l'illustre le parallélisme entre les deux graphiques suivants :



Or ces motivations valent aussi bien pour les réassureurs que pour les assureurs (aux capacités d'innovation et de souplesses propres aux organisations pour travailler en équipe sur des projets / montages complexes qui supposent une bonne compréhension de la dynamique des risques sous-jacents). Ces raisons pourraient conduire à terme à un mouvement de désintermédiation de la réassurance, celle-ci pouvant être obtenue directement par les assureurs sur les marchés financiers.



Cela pose à terme la question de la raison d'être des réassureurs : cette évolution conduira très vraisemblablement à une redéfinition de leur rôle traditionnel, en proposant notamment la réassurance du risque de base entre perte indemnitaire et perte paramétrique (transférée aux marchés financiers). Or cette évolution commence à dépasser le cadre strict de l'assurance et s'étend maintenant à des sociétés industrielles (EDF – programme Pylon en 2005/2006 ; Japan Railway – programme Midori en 2007). Cette évolution n'en est qu'à ses débuts mais doit interroger sur la nature des changements profonds qui sont en cours.

Section 3 – Quantifier la ‘juste valeur’ des risques extrêmes

Le parallélisme avec le secteur bancaire fait ressortir un enjeu majeur pour les acteurs qui participent au développement du marché des *ILS* : définir la juste valeur du risque transféré à des investisseurs, qui bien que spécialisés, ne sont pas des (ré)assureurs traditionnels. Ces investisseurs se retrouvent donc de fait dans une position d'asymétrie d'information par rapport à la mesure du risque sous-jacent.

C'est dans l'intérêt des acteurs de la (ré)assurance d'expliquer comment mesurer de tels risques, notamment lorsque ceux-ci apparaissent comme extrêmes : plus les investisseurs sauront comment évaluer les risques d'assurance sous-jacents aux protections qu'ils offrent, moins ils exigeront une prime de risque qui apparaît aujourd'hui difficile à justifier au vu du bénéfice de diversification apportée par des telles risques.

En effet, on constate que les rendements demandés par les investisseurs du marché des *ILS* s'équilibrent à des multiples de l'espérance de perte des risques sous-jacents : 3 à 4 fois l'espérance de perte sur les catastrophes naturelles et près de 10 fois sur les risques viagers. Nous proposons en Partie IV une grille de lecture des profils de risque pris par les investisseurs pour mieux faire ressortir les discontinuités de leurs profils de perte.

3.1 Mesurer les risques extrêmes

Par construction, les risques extrêmes sont (très) rares : il n'y a pas de repères historiques fiables (c'est-à-dire proches de nous d'un point de vue temporel, et mesurés avec des instruments de sondage robustes). Par ailleurs, il est très délicat d'ajuster une queue de distribution épaisse tant la calibration à des données réelles est sujette à de nombreuses hypothèses et choix méthodologiques.

En effet, la théorie des valeurs extrêmes repose pour l'essentiel sur le choix d'un seuil au-delà duquel on considère se trouver dans les valeurs extrêmes. En pratique, sur un risque comme la mortalité, à partir de quel seuil de déviation de la mortalité doit-on caler le percentile de perte extrême et jusqu'où doit-on laisser la modélisation dévier dans l'univers de l'extrême ? Par ailleurs, il convient que la probabilité soit mesurable, c'est-à-dire que le pavé de mesure sous-jacent dispose d'une mesure intégrable.

En plus d'un choix méthodologique nécessairement arbitraire, faute de base de réplique ou comparaison disponible, l'utilisateur fait également face au problème de la simulation numérique. Le « *run-time* » pour effectuer un nombre de tirages aléatoires suffisant pour dérouler le champ le plus large de scénarios possibles et sécuriser la convergence des résultats (stabilité de la moyenne / réduction de la variance) peut devenir très long.

Aussi, le point de vue défendu dans ce mémoire est qu'il doit être possible de modéliser de manière compréhensible et suffisamment fine le risque de déviation de mortalité sur courte période à partir d'un modèle historique de fréquence / sévérité et en prolongeant les séries historiques de mortalité à court terme.

3.2 Tarifer les risques extrêmes

La mesure du risque peut s'exprimer à travers différentes mesures de probabilité reflétant l'occurrence d'un évènement encadré en bas et en haut par son point d'attachement (« *trigger* ») et sa borne d'expiration (« *exhaustion* »). La probabilité de perte moyenne reflète la probabilité de perdre au moins la moitié de son investissement initial entre les deux bornes du risque ainsi circonscrit : c'est la mesure privilégiée du risque sous-jacent.

Un résultat classique de la pratique de la réassurance (BLONDEAU & PARTRAT [2003]) montre que plus le point d'attachement se situe à un niveau élevé de sinistralité, plus la prime de risque exigée par le réassureur augmente (principe du « *risk loading* »). Cette tarification ne suit pas le principe cher à la microéconomie, à savoir que seule l'égalisation des rendements aux coûts marginaux assure un équilibre optimal. L'incertitude ou l'asymétrie d'information qui entoure de tels niveaux de risque pourrait dans une certaine mesure justifier un tarif supérieur à la simple espérance de perte.

Sur un plan plus pratique, il est possible d'extraire à partir des prix de réassurance ou des « *spreads* » des « *Mortality bonds* » émis à ce jour les primes de risque implicitement demandées par les investisseurs. Nous montrons que ces primes ne sont pas identiques en fonction du niveau d'attachement du risque de déviation de mortalité, de la longueur de l'intervalle du risque, de la maturité des obligations émises ainsi que la nature des investisseurs qui se positionnent en face des différentes tranches cédées au marché.

Pour autant que les métriques de risque soient 'justes', des techniques relativement simples dans leur démarche analytique (développées notamment dans CHRISTOFIDES [1998] & [2000]) permettent de mesurer les coefficients d'aversion au risque du marché. De manière réciproque, on peut mesurer la distorsion implicite de probabilité que les investisseurs font subir au profil de perte auquel ils s'exposent pour justifier la rémunération du risque pris par le marché sur les *Mortality bonds* (WANG [1996] & [2002] ou LIN [2005]).

La construction théorique qui sous-tend une telle justification des primes requises renvoie à la notion de tarification 'risque-neutre' : cette démarche axiomatique est au cœur de la finance moderne. Elle pose notamment qu'il existe une unique mesure de probabilité sous laquelle le processus aléatoire suivi par tout actif financier constitue une martingale, c'est-à-dire que le prix de tout actif est égal à son espérance de gain actualisé. Les espérances de rendement de tous les actifs sont identiques et égales au taux sans risque. C'est cette probabilité corrigée du risque qui permet de construire le cadre théorique d'absence d'opportunité d'arbitrage. MOLLER [2002] offre une synthèse passionnante de la frontière commune entre tarification des risques en assurance et valorisation des paiements contingents (dérivés) en finance de marché.

Nous n'apportons pas une réponse unique à la valeur du risque sous-jacent mais proposons différentes méthodes de mesure de la valeur attribuée par les marchés financiers aux risques transférés : la combinaison de ces différentes grilles de lecture autorisent à dévoiler une dynamique des risques et à envisager des prévisions sur ce que devrait être l'équilibre de marché à tout instant. Cette démarche pourra intéresser aussi bien les émetteurs que les investisseurs futurs de ce type d'instruments.

Au final, loin de justifier une valeur du risque difficile à mesurer et à objectiver, la tarification du risque de déviation de mortalité doit s'intégrer dans une démarche plus large de gestion de portefeuille. A ce titre, la titrisation des risques d'assurance pris globalement permet de compléter les marchés financiers et offre une gamme de risques extrêmement diversifiant pour les gérants d'actifs.

L'amélioration très nette du ratio Sharpe (surplus de rendement par unité de risque pris) ne justifie pas les primes de risque actuelles, malgré le caractère illiquide ou récent (prime de nouveauté) de ces instruments financiers. Nous défendons le point de vue selon lequel les prix des obligations indexées au risque d'assurance en général et aux risques de mortalité en particulier sont largement surévalués et devraient à terme se réduire.

Addendum Juin 2008

Si la crise récente n'a qu'indirectement affecté le marché des *ILS*, il est certain que l'aversion au risque croissante des investisseurs pour des risques complexes et inhabituelles a quelque peu ralenti la croissance du volume des émissions, même si elle ne l'a pas complètement tarié : les investisseurs spécialisés (*Cat funds*) restent particulièrement actifs sur ce marché et les opportunités de diversification de portefeuille demeurent toujours d'actualité pour des risques d'assurance décorrélés des marchés traditionnels (taux, crédit, actions).

Pour autant, un certain nombre de *spreads* d'obligations se sont élargis, et notamment (paradoxalement) pour les tranches de risque qui étaient à l'origine les mieux notées : ceci reflète non seulement le risque de défaut croissant des *monolines* (réhausseurs de crédit) qui se positionnaient sur les tranches hautes de risque (les *monolines* ont subi de plein fouet la crise du *subprime*) mais aussi la défiance du marché envers des ratings d'agences de notation qui ont quelque peu perdu en crédibilité au cours des 12 derniers mois ainsi que la vente forcée d'actifs par certains investisseurs en besoin urgent de *cash* pour honorer leurs appels de marge sur d'autres actifs financiers traditionnels.

La faible liquidité du marché ne semble pas à ce jour être un obstacle à l'activité secondaire du marché des *ILS*.

*

* *

PARTIE II – POURQUOI LE MORTALITY BOND ?

Un grand nombre de produits d'assurance sont déclenchés par le décès des assurés : il peut s'agir de l'assurance « temporaire décès » (annuelle ou pluri annuelle, individuelle ou collective), de l'assurance « vie entière » ou encore de l'assurance emprunteur. Le mécanisme d'assurance est le même : l'assuré verse une prime qui servira le cas échéant à financer la prestation éventuelle que les ayants droits recevront dans le temps. Pour réaliser l'équilibre des opérations, l'assureur mutualise les primes au sein d'une réserve qu'il place sur les marchés financiers dans le but d'augmenter le fonds d'assurance par des revenus supplémentaires. Lorsqu'un décès survient, la prestation est financée en puisant dans ce fonds et en vendant les actifs correspondants.

Dans la mesure où les contrats d'assurance décès reposent sur la base d'une équivalence financière et viagère des engagements réciproques de l'assureur (payer la prestation) et de l'assuré (payer ses primes tant qu'il est en vie), l'assureur est exposé à deux types de risques : d'une part, l'insuffisance des rendements financiers des placements par rapport au rendement anticipé et d'autre part, l'augmentation de la mortalité réelle par rapport à la mortalité anticipée à la souscription du contrat.

L'assureur est particulièrement exposé si le fonds d'assurance qu'il a constitué ne suffit plus à financer tous les sinistres. Dans ce cas, pour tenir ses engagements, l'assureur serait dans l'obligation de prélever les sommes nécessaires sur ses propres fonds (capital apporté par les actionnaires), avec comme risque ultime sa ruine.

Entre ces deux risques (financiers et viagers), nous n'envisageons dans ce mémoire que la gestion du risque de passif, que l'on peut encore qualifier de « risque de modèle », c'est-à-dire le risque de déviation de la mortalité effective par rapport à la mortalité théorique tarifée en amont de la réalisation du risque. Ce risque de modèle est particulièrement élevé dans le cadre d'une déviation importante de sinistralité due à une pandémie, autrement appelée risque « extrême », « choc » de mortalité ou risque de « surmortalité ».

Après un rappel nécessaire sur les méthodes de tarification classiques des contrats d'assurance décès et les avantages / limites du principe de mutualisation des risques (**Section 1**), nous proposons une première solution originale de réduction de l'exposition de l'assureur selon un principe de couverture « naturelle » entre risque de mortalité et risque de longévité (**Section 2**). Après une discussion des limites de cette méthode de couverture, nous examinons les alternatives disponibles en matière de réassurance traditionnelle (**Section 3**) pour mieux faire ressortir l'intérêt d'une solution de marché (**Section 4**).

Section 1 – Quantification du risque de surmortalité

Le risque décès est traditionnellement considéré comme un risque simple (**TOSETTI [2002]**, **PETAUTON [2004]**). Pourtant, la sensibilité des tarifs initiaux au risque de modèle est très forte et permet de rendre compte des risques auxquels est exposé l'assureur qui commercialise, même en masse, ce type de polices.

Sous certains scénarios en effet, le principe de mutualisation des risques n'est plus suffisant pour réduire l'exposition au risque décès. Tout au long de cette section, différents exemples de portefeuilles illustreront le propos : portefeuille d'assurance temporaire au décès annuelle ; portefeuille d'assurance temporaire au décès de 10 ans ; portefeuille d'assurance au décès « vies entières ».

1.1 Rappels : principes de tarification et de comptabilité des contrats d'assurance décès

Les contrats d'assurance en cas de décès promettent le versement d'un capital C si l'assuré meurt pendant la période de garantie. Pour l'assureur, l'aléa porte sur la date de paiement de la prestation (qui coïncide avec la date de décès) et non sur le montant de la prestation³.

i. Hypothèse de base sur la mortalité

Par construction, le système d'assurance vie repose sur le principe d'équivalence financière et viagère des engagements réciproques de chacune des parties du contrat :

- l'équivalence financière vise à déterminer la valeur actuelle de l'échéancier des flux futurs de paiement (prime ou prestation) de chacune des parties (assuré ou assureur). En assurance vie, cette actualisation s'effectue avec un taux technique indépendant de la maturité du flux, et dont la valeur maximale est définie par une réglementation prudente (art. A132-1 du *Code des assurances*)
- l'équivalence viagère vise à pondérer les montants actualisés des flux futurs par la probabilité de l'état viager de l'assuré (survie ou décès) à la date du flux, afin de quantifier la vraisemblance que le flux ait lieu à cette date.

Il est donc nécessaire d'introduire les probabilités viagères⁴. Par définition, il s'agit de la métrique de la variable aléatoire T_x qui représente la durée de vie résiduelle de la tête d'âge x :

$$P[T_x > t] = {}_t p_x$$

est la probabilité que la tête d'âge x soit toujours en vie à la date $(x+t)$.

$$P[t \leq T_x \leq t+1] = {}_t|1 q_x$$

est la probabilité que la tête x décède entre les dates $(x+t)$ et $(x+t+1)$.

³ en assurance emprunteur, le montant de la prestation correspond au capital restant dû au titre du crédit (montant connu)

⁴ cf. Cours d'Assurance (CEA 1ère année)

D'après le théorème des probabilités totales, il vient :

$${}_{t|}q_x = {}_t p_x - {}_{t+1} p_x$$

Comme il est d'usage, nous noterons également :

p_x , le taux annuel de vitalité d'une tête d'âge x ;

q_x , le taux annuel de mortalité d'une tête d'âge x .

De même, d'après le théorème des probabilités totales : $p_x + q_x = 1$

Si la variable T_x « durée de vie résiduelle de la tête d'âge x » est difficilement observable, les décès eux le sont. On peut en pratique modéliser la mortalité à partir des observations de l'état civil (INSEE en France).

Les anticipations de survie obtenues grâce aux modélisations sont résumées dans des tables réglementaires (ou tables certifiées par l'Institut des Actuaires) qui décrivent le nombre de survivants l_x par âge x d'une population initialement composée de 100,000 personnes à la naissance.

Ces tables permettent de quantifier *a priori* le nombre à venir de survivants et donc d'obtenir les probabilités de survie ou de décès par âge. Sous hypothèse d'indépendance des décès entre eux (*i.e.* sans phénomène contagieux), nous pouvons écrire :

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} \qquad {}_{t|}q_x = \frac{l_{x+t'} - l_{x+t'+t}}{l_x}$$

x (ans)	l_x (table TD)	Taux mortalité annuel (%) - Table TD	l_x (table TV)	Taux mortalité annuel (%) - Table TV
20	98 277	1,42	98 869	0,47
25	97 524	1,55	98 640	0,51
30	96 759	1,67	98 371	0,62
35	95 878	2,11	98 031	0,91
40	94 746	2,85	97 534	1,24
45	93 133	4,36	96 810	1,94
50	90 778	6,69	95 752	2,76
55	87 165	10,60	94 215	3,90
60	81 884	15,66	92 050	5,73
65	74 720	22,02	88 978	8,45
70	65 649	32,08	84 440	14,08
75	53 818	50,76	77 104	25,52

Tableau II - 1 : Taux de mortalité (%) anticipés par les tables réglementaires de survie des populations masculines et féminines (TD 88-90 et TV 88-90)

L'évolution des ℓ_x de ces tables montre notamment qu'entre 20 et 75 ans, les hommes décèdent (en moyenne) en plus grand nombre que les femmes.

ii. *Principe de tarification*

Le prix du contrat est formé par l'équivalent financier et viager du montant de la prestation que l'assureur s'engage à honorer dans le futur. La prime périodique ou unique du contrat que devra verser l'assuré se calcule par égalisation des valeurs actuelles probables (VAP) à la souscription des engagements assuré / assureur :

$$VAP(\text{Engagement de payer ses primes si vivant}) = VAP(\text{Engagement de payer la prestation})$$

$$VAP(\text{Assuré}) = VAP(\text{Assureur})$$

Notations utilisées :

i	taux de capitalisation technique du contrat
$v = \frac{1}{(1+i)}$	facteur d'actualisation
ω	l'âge maximal de la durée de vie humaine

Nombre de commutations classiques :

$$D_x = v^x \cdot \ell_x$$

$$N_x = \sum_{k=0}^{\omega} D_{x+k}$$

$$C_{x+k} = v^{x+k+\frac{1}{2}} \cdot (\ell_{x+k} - \ell_{x+k+1})$$

$$M_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} C_{x+k}$$

Hypothèse : le capital C est réglé en moyenne en milieu d'année au constat du décès.

Nous renvoyons en Annexe B pour une revue des résultats classiques de tarification des principaux contrats d'assurance décès.

iii. Comptabilité des contrats d'assurance décès

La comptabilité des contrats d'assurance décès doit s'envisager sous deux angles : d'une part, sous l'angle du provisionnement des risques souscrits (provision mathématiques) et d'autre part, du financement des sinistres attendus et enfin de l'espérance de résultat sous les hypothèses du tarif.

▪ Comptabilité des contrats

Une fois que les sinistres survenus au cours de l'exercice ont été réglés, il peut rester un excédent de prime. Dans le cas de contrats pluriannuels, cet excédent ne correspond pas à un bénéfice pour l'exercice en cours, mais à une provision qui sert à couvrir les sinistres à venir.

Nous supposons que tous les contrats ont été souscrits en début de première année d'assurance (1^{er} janvier).

A chaque fin d'exercice, l'assureur effectue l'inventaire de ses dettes (évaluation des engagements pris) et de ses créances (évaluation des engagements des assurés) afin de construire bilan et compte de résultat.

L'assureur calcule plus exactement les provisions mathématiques (PM) qui reflètent la différence entre :

- a. la valeur actuelle probable des engagements de l'assureur
- b. la valeur actuelle probable des engagements pris par l'assuré.

Les provisions mathématiques représentent ainsi l'encours des prestations futures nettes des primes à recevoir. Ces provisions sont évaluées contrat par contrat, immédiatement avant le paiement des primes dans le cas de primes périodiques. La provision mathématique en fin d'exercice t d'un contrat portant sur une tête d'âge x à la souscription, sera notée ${}_tV_x$.

Dans le cas d'une temporaire au décès annuelle souscrite en début d'année, la fin de l'année correspond à la fin de la période de garantie : la provision mathématique du contrat est nulle par construction, car l'assureur ne doit plus rien à l'assuré : si l'assuré est décédé, la prestation a déjà été réglée ; si l'assuré est vivant, l'assureur n'est plus en risque.

PM D'UN CONTRAT D'ASSURANCE TEMPORAIRE AU DECES ANNUEL

(au 31 décembre pour un contrat souscrit au 1^{er} janvier de l'année en cours)

Si l'assuré d'âge x à la souscription est vivant à la fin de l'exercice t :

$${}_tV_x = 0$$

Si l'assuré d'âge x à la souscription est décédé au cours de l'exercice t :

$${}_tV_x = 0$$

PM D'UN CONTRAT D'ASSURANCE TEMPORAIRE AU DECES 10 ANS

(au 31 décembre pour un contrat souscrit au 1^{er} janvier de l'année en cours)

Si l'assuré d'âge x à la souscription est vivant à la fin de l'exercice t :

Si l'assuré d'âge x à la souscription est décédé au cours de l'exercice t :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_tV_x = C \cdot \frac{M_{x+t} - M_{x+10}}{D_{x+t}} - P \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+10}}{D_{x+t}} \\ {}_{10}V_x = 0 \end{array} \right. \quad {}_tV_x = 0$$

Pour un même capital garanti ($C = €100,000$), les provisions mathématiques sont croissantes avec le risque, *i.e.* avec l'âge x de l'assuré.

On observe par ailleurs la croissance puis la décroissance des provisions mathématiques dans le temps : en effet, tant que la prime annuelle reçue est supérieure au prix réel du risque annuel sous-jacent, il y a mise en réserve de la fraction excédentaire de prime.

Quand le prix réel du risque annuel devient supérieur à la prime annuelle reçue, l'assureur finance ce décalage en puisant dans les réserves.

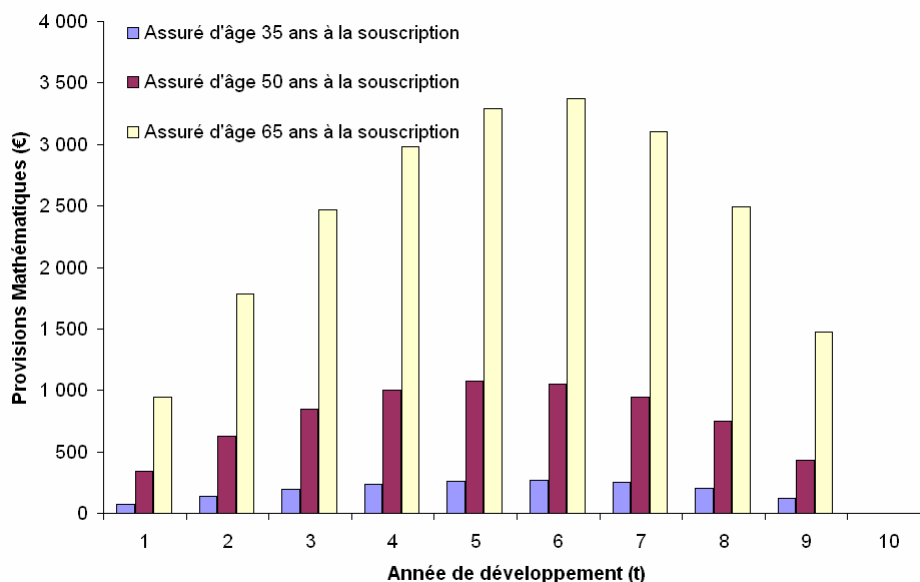


Figure II - 1 : Provisions mathématiques d'un contrat d'assurance temporaire au décès 10 ans de capital garanti $C = €100,000$ (tarif donné avec la table TD 88-90), en supposant que l'assuré ne décède pas au cours des 10 ans

Nous étudierons plus en détail ce principe de compensation par lissage de la prime au paragraphe suivant.

PM D'UN CONTRAT D'ASSURANCE AU DECES « VIE ENTIERE »(au 31 décembre pour un contrat souscrit au 1^{er} janvier de l'année en cours)Si l'assuré d'âge x à la souscription est vivant à la fin de l'exercice t :Si l'assuré d'âge x à la souscription est décédé au cours de l'exercice t :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_tV_x = C \cdot \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - P_\infty \cdot \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}}, \quad t < \omega \\ \omega V_x = 0 \end{array} \right. \quad {}_tV_x = 0$$

Les provisions mathématiques sont croissantes avec l'âge x de l'assuré ; à terme, elles valent le capital garanti.

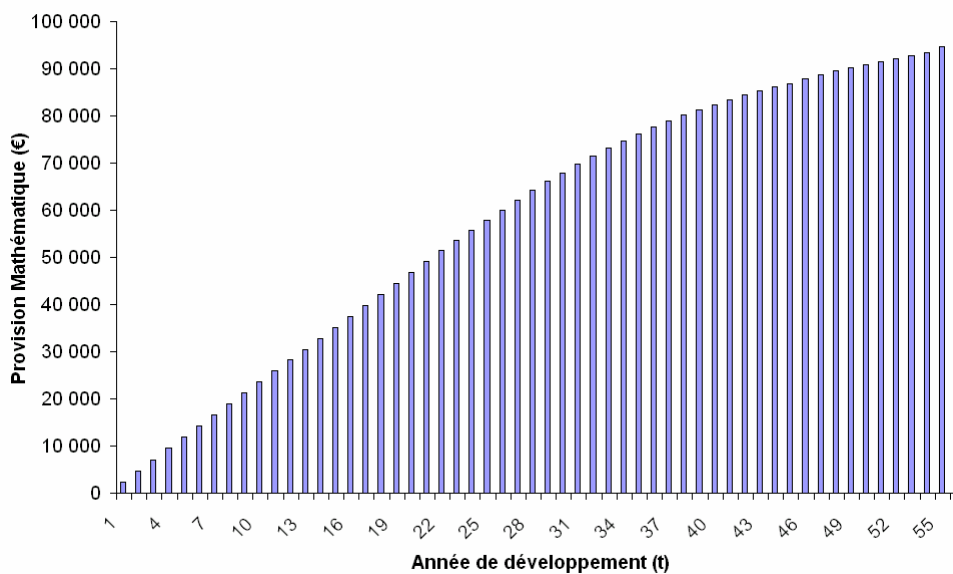


Figure II - 2 : PM d'un contrat d'assurance au décès « vie entière » de capital garanti $C = €100,000$ pour un assuré d'âge 50 ans à la souscription – en supposant que l'assuré décède à l'âge ω prévu par la table TD 88-90

- Financement des sinistres

Dans le cas de contrats annuels, la prime P collectée en début d'année doit financer les sinistres à venir au cours de la période.

Dans le cas des contrats pluriannuels à primes annuelles, la prime P et la provision mathématique ${}_kV_x$ disponibles en début de période d'assurance $k + 1$ doivent financer :

- le coût de la prestation C en cas de décès de l'assuré, avec la probabilité q_{x+k} (en supposant que les décès sont payés en milieu d'année) ;
- la constitution de la provision mathématique ${}_{k+1}V_x$ de fin d'exercice en cas de survie de l'assuré, avec la probabilité $(1 - q_{x+k})$.

La traduction des formulations précédentes en termes de valeurs actuelles probables s'écrit :

$$P + {}_kV_x = C \cdot v^{\frac{1}{2}} \cdot q_{x+k} + v \cdot (1 - q_{x+k}) \cdot {}_{k+1}V_x$$

En début de première année ($k = 0$), on retrouve bien la formule de cotation de la prime annuelle P ; cette formule est également valable pour les contrats annuels, puisque les provisions mathématiques du contrat en début et fin de période sont nulles.

En regroupant les termes :

$$P + {}_kV_x = v^{\frac{1}{2}} \cdot q_{x+k} \cdot (C - v^{\frac{1}{2}} \cdot {}_{k+1}V_x) + v \cdot {}_{k+1}V_x$$

Le 1er terme du second membre de cette égalité est assimilable à une prime pure d'assurance temporaire un an sur la tête d'âge $x + k$ portant sur le capital :

$$C_r(x, k) = C - v^{\frac{1}{2}} \cdot {}_{k+1}V_x$$

Ce montant correspond au « capital sous risque » du contrat au cours de l'exercice k , puisqu'il s'agit de l'écart entre les primes collectées et provisionnées et le montant C que l'assureur garantit à terme. La prime P peut alors se décomposer en :

$$P = P_r + P_e$$

où :

$$P_r = v^{\frac{1}{2}} \cdot q_{x+k} \cdot C_r(x, k) \quad \text{est la « prime de risque » ;}$$

$$P_e = v \cdot {}_{k+1}V_x - {}_kV_x \quad \text{est la « prime d'épargne ».}$$

L'assureur perçoit ainsi en début d'année :

- une prime de risque P_r qui servira éventuellement à payer en milieu d'année le capital sous risque C_r au décès de l'assuré ;
- une prime d'épargne P_e qui, ajoutée à la provision ${}_kV_x$ sera capitalisée sur un an pour former la provision mathématique ${}_{k+1}V_x$ de fin d'exercice : ${}_{k+1}V_x = (1 + i) \cdot ({}_kV_x + P_e)$

Dans le cas où l'assuré décède en milieu d'année, on n'aura alors qu'une capitalisation de 6 mois de la prime d'épargne P_e et de la provision ${}_kV_x$, soit $(1+i)^{\frac{1}{2}} \cdot ({}_kV_x + P_e)$.

Lorsque l'on ajoute le capital sous risque $C_r(x, k)$ à cette somme, il vient :

$$(1+i)^{\frac{1}{2}} \cdot ({}_kV_x + P_e) + C_r(x, k) = (1+i)^{\frac{1}{2}} \cdot ({}_kV_x + (v \cdot {}_{k+1}V_x - {}_kV_x)) + (C - v^{\frac{1}{2}} \cdot {}_{k+1}V_x) = C$$

En d'autres termes, le capital en cas de décès C est constitué par :

- une provision constituée par accumulation et capitalisation des primes d'épargne
- le capital sous risque.

Ainsi, dans le cas d'un contrat « vie entière » par exemple, la prime de risque est croissante avec le risque, *i.e.* avec l'âge x de l'assuré. Lorsque la prime d'épargne devient négative, cela signifie que les provisions mathématiques diminuent pour financer le risque annuel.

Les décrochements des primes de risque et d'épargne observés aux 45 - 47 - 51^{ème} années de développement proviennent de la table TD 88-90 : les taux de mortalité annuels sont relativement plus élevés ces années là que pour les années précédentes.

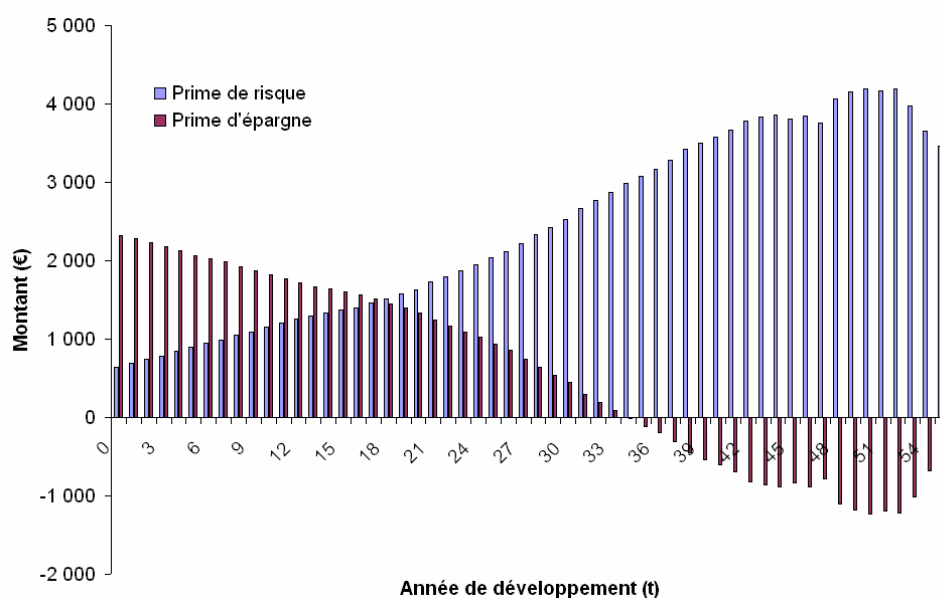


Figure II - 3 : Evolution des primes P_r et P_e dans le cas d'un contrat « vie entière » de capital garanti $C = €100,000$, pour un assuré d'âge 50 ans à la souscription – en supposant que l'assuré décède à l'âge ω prévu par la table TD 88-90

Le capital sous risque diminue car les provisions mathématiques augmentent :

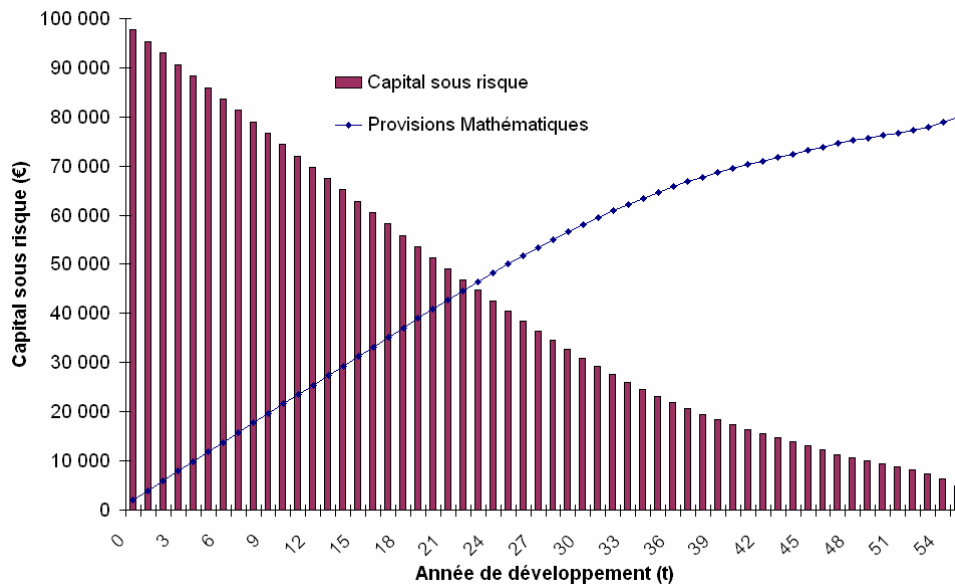


Figure II - 4 : Evolutions du capital sous risque et des provisions mathématiques.

Cas d'un contrat « vie entière » de capital garanti $C = €100,000$, pour un assuré d'âge 50 ans à la souscription en supposant que l'assuré décède à l'âge ω prévu par la table TD 88-90

▪ Résultat du contrat

Le résultat annuel d'un contrat s'obtient par différence entre les produits (primes reçues et produits financiers des placements) et les charges de l'exercice (reprise sur provision et paiement du sinistre si décès, ou dotation aux provisions si survie). Par soucis de simplicité et d'allègement des écritures, nous ne tenons pas compte des frais de gestion et chargements d'acquisition des contrats. Nous supposons implicitement que l'assureur équilibre ses frais par le bon chargement de prime (marge de gestion nulle).

Le résultat de l'exercice k se décompose en fonction des événements viagers suivants :

- Si l'assuré survit, alors le résultat R_k^1 escompté en début d'année est :

$$R_k^1 = P + ({}_kV_x - v \cdot {}_{k+1}V_x)$$

$$R_k^1 = (P_r + P_e) + ({}_kV_x - v \cdot {}_{k+1}V_x) = P_r$$

- Si l'assuré décède (au milieu d'année), alors le résultat R_k^2 escompté en début d'année est :

$$R_k^2 = P + {}_kV_x - v^{\frac{1}{2}} \cdot C$$

$$R_k^2 = (P_r + P_e) + {}_kV_x - v^{\frac{1}{2}} \cdot C = P_r - v^{\frac{1}{2}} \cdot (C - v^{\frac{1}{2}} \cdot {}_{k+1}V_x) = P_r - v^{\frac{1}{2}} \cdot C_r(x, k)$$

Ainsi, le résultat R_k d'un contrat d'assurance en cas de décès (pour un contrat ni racheté, ni réduit, ni résilié) suit une loi de Bernoulli qui prend les valeurs :

$$\begin{cases} R_k^1 = P_r & \text{en cas de survie de l'assuré, avec la probabilité théorique } p_{x+k} \\ R_k^2 = P_r - v^{\frac{1}{2}} \cdot C_r(x, k) & \text{en cas de décès, avec la probabilité théorique } q_{x+k} \end{cases}$$

Si les réalisations sont conformes aux hypothèses, c'est-à-dire si l'assureur observe au cours de la durée du contrat une mortalité qui suit celle prévue par la table, alors l'espérance mathématique $E[R_k]$ du résultat de l'exercice k sera nulle :

$$E[R_k] = R_k^1 \cdot p_{x+k} + R_k^2 \cdot q_{x+k} = P_r - q_{x+k} \cdot v^{\frac{1}{2}} \cdot C_r(x, k) = 0$$

L'expérience reste cependant aléatoire.

Les fluctuations du résultat R_k du contrat autour de son espérance peuvent être mesurées par l'écart type

$\sigma_{R_k} = \sqrt{V[R_k]}$, où $V[R_k]$ est la variance du contrat.

Comme ici $V[R_k] = E[R_k^2] = v \cdot p_{x+k} \cdot q_{x+k} \cdot C_r(x, k)^2$, il vient que : $\sigma_{R_k} = C_r(x, k) \cdot \sqrt{v \cdot p_{x+k} \cdot q_{x+k}}$

Ainsi, la volatilité du résultat décroît avec le risque (avec l'âge x de l'assuré) car le risque décès augmente :

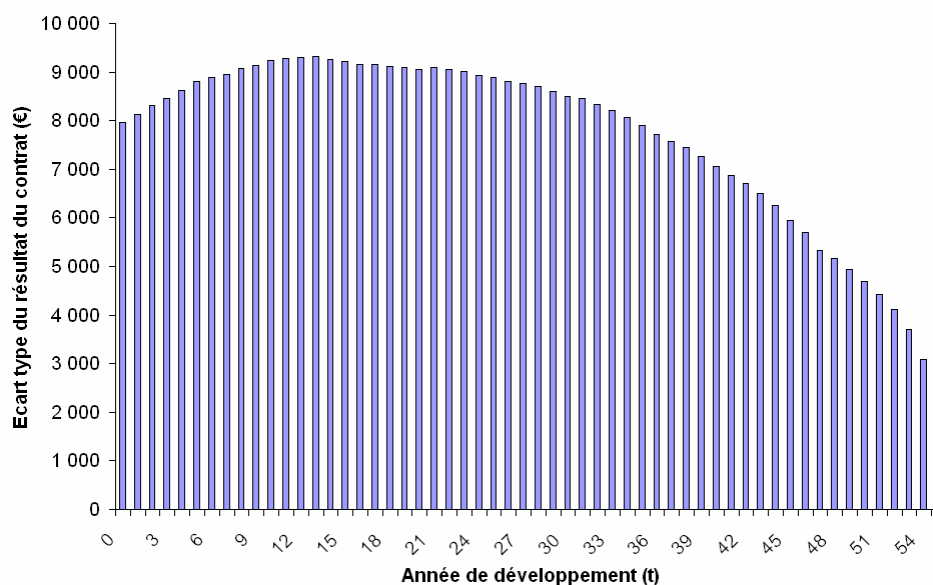


Figure II - 5 : Evolution de l'écart type dans le temps. Cas d'un contrat « vie entière » de capital garanti $C = €100,000$, pour un assuré d'âge 50 ans à la souscription – en supposant que l'assuré décède à l'âge ω prévu par la table TD 88-90

1.2 Principe de mutualisation des risques décès

En assurance décès, l'incertitude ne porte pas sur le coût de la prestation mais sur l'intensité des décès.

Lorsque la mortalité effective des assurés au cours de l'exercice k devient $q'_{x+k} \neq q_{x+k}$, le résultat R_k du contrat s'écrit :

$$E[R_k] = R_k^1 \cdot p'_{x+k} + R_k^2 \cdot q'_{x+k} = P_r - v^{\frac{1}{2}} \cdot q'_{x+k} \cdot C_r(x, k)$$

soit :

$$E[R_k] = v^{\frac{1}{2}} \cdot (q_{x+k} - q'_{x+k}) \cdot C_r(x, k)$$

Comme pour une assurance en cas de décès le capital sous risque $C_r(x, k)$ est positif, il en résulte que :

- pour toute aggravation de la mortalité ($q'_{x+k} > q_{x+k}$), le résultat du contrat sera négatif ;
- pour toute amélioration de la mortalité ($q'_{x+k} < q_{x+k}$), le résultat du contrat sera positif.

Le résultat R_k du contrat ne sera nul en espérance mathématique que si les hypothèses du modèle se réalisent.

La variabilité de la mortalité réelle par rapport aux hypothèses représente par conséquent un risque pour l'assureur que nous nous proposons d'illustrer dans les paragraphes suivants.

i. Sensibilité du résultat de l'assureur à la mortalité réalisée

L'influence de la mortalité sur le résultat d'un contrat se mesure par sa variabilité autour de son espérance, c'est-à-dire par son écart type σ_{R_k} . Afin d'apprécier la variabilité du résultat par unité de résultat, l'indicateur pertinent est l'incertitude relative du résultat :

$$\frac{\sigma_{R_k}}{E[R_k]}$$

Au cours de l'exercice k , lorsque le taux effectif de mortalité annuel d'une population assurée d'âge x à la souscription est q'_{x+k} , l'écart type du résultat d'un contrat s'écrit :

$$\sigma_{R_k} = C_r(x, k) \cdot \sqrt{v \cdot p'_{x+k} \cdot q'_{x+k}}$$

En notant δ l'accroissement annuel effectif de mortalité, on a :

$$q'_{x+k} = q_{x+k} \cdot (1 + \delta)$$

il vient :

$$\frac{\sigma_{R_k}}{E[R_k]} = \frac{\sqrt{p'_{x+k} \cdot q'_{x+k}}}{(q_{x+k} - q'_{x+k})} = \frac{\sqrt{(1 - q_{x+k} \cdot (1 + \delta)) \cdot q_{x+k} \cdot (1 + \delta)}}{q_{x+k} \cdot \delta}, \text{ pour } \delta \neq 0$$

Le tableau ci-dessous montre que le résultat annuel d'un contrat est très sensible aux déviations de mortalité : les multiples étant très élevés, cette simulation montre que le résultat est plus sensible lorsque la mortalité augmente (*i.e.* déviations δ positives) que lorsque la mortalité diminue (*i.e.* déviations δ négatives).

δ	Valeur de $\frac{\sigma_{R_k}}{E[R_k]}$ pour $x + k =$			
	35	45	55	65
-50%	31	21	14	9
-25%	75	52	34	23
-10%	206	143	92	63
-5%	424	295	188	130
5%	-446	-310	-198	-137
10%	-228	-158	-101	-70
25%	-97	-68	-43	-30
50%	-53	-37	-24	-16
75%	-38	-27	-17	-12
100%	-31	-21	-14	-9
150%	-23	-16	-10	-7
200%	-19	-13	-8	-6

Tableau II - 2 : Incertitude relative du résultat en fonction de l'âge de l'assuré $x + k$ et du niveau de déviation de mortalité δ (donné par la table TD 88-90)

Dans le cas des faibles déviations de mortalité δ , l'incertitude relative du résultat d'un contrat diverge car le dénominateur du ratio est proche de zéro (le résultat étant théoriquement nul pour $\delta = 0$).

On établit ainsi la corrélation négative entre le signe du résultat et le sens de variation de la mortalité.

Vu l'amplitude que peut prendre l'incertitude relative du résultat d'un seul contrat, il n'est pas évident de voir l'intérêt que peut avoir un assureur à prendre le risque de s'engager dans une seule affaire.

ii. *Mutualisation du risque*

Si nous considérons maintenant un portefeuille de n contrats identiques, le résultat S_n de ce portefeuille sera égal à la somme des résultats individuels R des contrats qui le composent :

$$S_n = \sum_{\text{Portefeuille}} R$$

Sous réserve que les réalisations des contrats soient indépendantes et identiquement distribuées entre elles (« risques homogènes et indépendants »), le comportement asymptotique de la loi de la somme S_n des résultats individuels des contrats en portefeuille suivra une loi non dégénérée.

En effet, d'après le théorème central limite, la loi du résultat du portefeuille S_n suit asymptotiquement une loi normale (SAPORTA [1990]) :

$$\frac{S_n - n \cdot E[R]}{\sqrt{n} \cdot \sigma_R} \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} N(0,1) \quad , \text{ où } N(0,1) \text{ est la loi normale centrée réduite.}$$

L'incertitude relative $\frac{\sigma(S_n)}{E[S_n]}$ du résultat de l'ensemble du portefeuille peut alors s'écrire :

$$\frac{\sigma(S_n)}{E[S_n]} = \frac{\sqrt{n} \cdot \sigma_R}{n \cdot E[R]} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sigma_R}{E[R]}$$

L'incertitude relative du résultat de l'ensemble du portefeuille est plus faible que l'incertitude relative d'un seul contrat, avec un coefficient de réduction de $1/\sqrt{n}$. Ainsi la mutualisation des risques relatifs à un même type de police transforme les risques individuels en un risque global de portefeuille dont la marge technique bénéficie d'une variabilité réduite.

iii. *Chargement de sécurité*

Cependant, la mutualisation ne suffit pas à éliminer totalement la variabilité du risque. L'assureur doit charger la prime pure, c'est-à-dire augmenter son tarif, afin de diminuer le risque pris globalement.

Un principe de tarification classique en assurance est le « principe de l'écart type », une technique de chargement permettant à l'assureur de réduire son risque de baisse de son résultat.

L'assureur ajoute à la prime pure P un chargement de sécurité proportionnel à l'écart type théorique du résultat σ_R pour constituer la prime corrigée du risque P' :

$$P' = P + \rho \cdot \sigma_R, \quad \rho > 0$$

Lorsque la mortalité effective de l'exercice k est q'_{x+k} , l'espérance mathématique du résultat R' escompté en début d'année du contrat de l'assuré d'âge x à la souscription devient alors :

$$E[R'] = v^{\frac{1}{2}} \cdot (q_{x+k} - q'_{x+k}) \cdot C_r(x, k) + \rho \cdot \sigma_R = v^{\frac{1}{2}} \cdot C_r(x, k) \cdot \left((q_{x+k} - q'_{x+k}) + \rho \cdot \sqrt{p_x \cdot q_x} \right)$$

L'écart type du résultat est inchangé (la variance étant invariante par ajout d'une constante) ; aucun assureur ne peut accepter le cas $\rho < 0$, c'est-à-dire avoir une prime de risque inférieure à la prime pure (cf. **Annexe F**).

En d'autres termes, le résultat du contrat devient une perte à l'issu de l'exercice k dès lors que :

$$q'_{x+k} > q_{x+k} + \rho \cdot \sqrt{p_x \cdot q_x}$$

Comme précédemment, nous noterons δ l'accroissement annuel de mortalité : $q'_{x+k} = q_{x+k} \cdot (1 + \delta)$. Nous n'étudierons que le cas $\delta > 0$ (*i.e.* augmentation de mortalité), car il s'agit du sens du risque pour l'assureur.

δ	$\rho = \delta \cdot \sqrt{\frac{q_x}{p_x}}$ (calculé à partir de la table TD 88-90)			
	$x = 35$	$x = 45$	$x = 55$	$x = 65$
1%	0,05%	0,07%	0,10%	0,15%
3%	0,14%	0,20%	0,31%	0,45%
5%	0,23%	0,33%	0,52%	0,75%
10%	0,46%	0,66%	1,04%	1,50%
15%	0,69%	0,99%	1,55%	2,25%
20%	0,92%	1,32%	2,07%	3,00%
50%	2,30%	3,31%	5,18%	7,50%
100%	4,59%	6,62%	10,35%	15,00%
150%	6,89%	9,93%	15,53%	22,51%
200%	9,19%	13,23%	20,70%	30,01%

Tableau II - 3 : Coefficients ρ annulant les niveaux de déviation de mortalité δ dont l'assureur veut se protéger (en fonction de l'âge de l'assuré x à la souscription) dans le cas d'une temporaire décès annuelle

Plus la déviation de mortalité que l'on cherche à couvrir est grande, plus le coefficient de chargement de sécurité ρ est élevé. Ce coefficient (croissant avec l'âge) dépend aussi du risque de mortalité intrinsèque.

Ce procédé augmente la sécurité de l'assureur car il diminue l'incertitude relative $\frac{\sigma(S_n)}{E[S_n]}$ du résultat de

l'ensemble du portefeuille :

$$\frac{\sigma(S_n)}{E[S_n]} = \frac{\sqrt{n} \cdot \sigma_R}{n \cdot E[R']} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sigma_R}{E[R] + \rho \cdot \sigma_R} < \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sigma_R}{E[R]} \quad \text{puisque } \rho > 0$$

où $E[R]$ représente l'espérance mathématique du contrat avec prime non chargée.

Dans le même temps, la prime associée à ce chargement de sécurité s'accroît de :

$$\frac{P' - P}{P} = \frac{C \cdot v^{\frac{1}{2}} \cdot (q_x + \rho \cdot \sqrt{p_x \cdot q_x})}{C \cdot v^{\frac{1}{2}} \cdot q_x} - 1 = \rho \cdot \sqrt{\frac{p_x}{q_x}} = \delta$$

Avec le principe de chargement de l'écart type, le taux d'augmentation du prix du contrat vaudra ainsi exactement le taux de déviation de mortalité δ que l'assureur souhaite couvrir par son tarif.

Au final, le procédé de chargement de la prime permet de réduire la variabilité relative du résultat des contrats, mais l'assureur ne peut indéfiniment augmenter son tarif sous peine de perte de compétitivité. Même réduite, la variabilité du résultat demeure pourtant toujours suffisante pour menacer les fonds propres de l'assureur.

iv. Risque de ruine

Des écarts de mortalité particulièrement élevés peuvent provoquer des pertes telles qu'elles pourraient causer la faillite de l'assureur. Il s'agit toutefois d'événements dont la probabilité reste très faible. Si le nombre de contrats en portefeuille est suffisamment élevé pour des risques homogènes et indépendants, le théorème central limite permet d'écrire que la loi du résultat S_n du portefeuille est distribuée selon une loi normale :

$$P\left(E[S_n] - t \cdot \sigma_{S_n} < S_n < E[S_n] + t \cdot \sigma_{S_n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^t e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot du = 1 - 2\Phi(t)$$

où t est le fractile de la loi normale correspondant à la probabilité $\Phi(t)$.

A t fixé, si le nombre de contrats est assez élevé, la probabilité que le résultat S_n du portefeuille soit inférieure à $E[S_n] - t \cdot \sigma_{S_n}$ sera : $P(S_n < E[S_n] - t \cdot \sigma_{S_n}) = 1 - \Phi(t)$

Cette perte dépassera un certain montant K avec la probabilité $1 - \Phi(\beta)$ (que l'on souhaite la plus petite possible) pour un fractile particulier que l'on nommera coefficient de sécurité β :

$$K = \beta \cdot \sigma_{S_n} - E[S_n]$$

soit

$$\beta = \frac{K + E[S_n]}{\sigma_{S_n}}$$

Plus β est élevé, plus il est improbable que la perte atteigne le montant K , que l'on peut assimiler à la perte maximum que l'assureur accepte d'enregistrer dans un exercice (par exemple, le montant de ses fonds propres).

La ruine devient en théorie pratiquement impossible si $\beta > 3.1$, ce qui correspond à une probabilité de ruine d'au maximum 0,1% (dans le cadre de l'approximation normale), soit une période de retour du cas de faillite de l'assureur tous les 1,000 ans.

Si nous considérons un ensemble de n contrats où le capital sous risque est $C_r(z)$ et où les assurés (de même âge z) payent la prime chargée P' , nous aurons :

$$E[S_n] = n \cdot v^{\frac{1}{2}} \cdot (q_z - q'_z) \cdot C_r(z) + n \cdot \rho \cdot \sigma_R$$

$$V[S_n] = n \cdot v \cdot p'_z \cdot q'_z \cdot C_r(z)^2$$

Soit, en remplaçant dans l'expression du coefficient de sécurité :

$$\beta = \frac{K + n \cdot v^{\frac{1}{2}} \cdot (q_z - q'_z) \cdot C_r(z) + n \cdot \rho \cdot \sigma_R}{C_r(z) \cdot \sqrt{n \cdot v \cdot p'_z \cdot q'_z}}$$

Minimiser le risque de défaillance de l'assureur revient donc à maximiser le rapport précédent. De manière assez classique, l'assureur peut jouer sur différents leviers pour diminuer son risque de ruine :

- augmenter la solvabilité de l'entreprise en augmentant les fonds propres K , mais cette possibilité est limitée par l'exigence de rentabilité des actionnaires et le coût du capital ;

- favoriser la mutualisation des risques :
 - o maximiser le nombre de polices n , c'est-à-dire développer le portefeuille, mais cette possibilité dépend de la profondeur du marché, du niveau de compétition qui y règne et du degré d'homogénéité des risques souscrits ;
 - o privilégier les petites affaires, car à garantie globale équivalente, il sera plus avantageux pour la sécurité de l'entreprise d'avoir une masse de petits contrats plutôt que quelques gros contrats (même si les petits contrats coûtent relativement plus cher en gestion) car la quantité au second membre est pour une même valeur de $(n \cdot C_r(z))$, croissante avec n ;
- augmenter le tarif en renforçant le chargement de sécurité ρ , mais cette solution se heurte à la pression concurrentielle, le tarif devant rester compétitif sous peine de perte d'affaires ;
- réduire tous les capitaux sous risque initialement souscrits par un transfert de risque du type réassurance proportionnelle ;
- réduire uniquement la valeur du terme $(q_z - q'_z) \cdot C_r(z)$ (qui devient négatif lorsque la mortalité augmente) par un transfert de risque qui s'activera lors de la survenance d'un événement prédéfini (réassurance en excédent de sinistre).

L'hypothèse clé qui sous-tend ce raisonnement axiomatique réside en l'indépendance des décès les uns par rapport aux autres. Or dans un scénario de pandémie précisément, cette hypothèse se trouve profondément invalidée : le caractère de choc systémique de la pandémie déstabilise le cadre conceptuel traditionnel. C'est pourquoi les deux derniers points en particulier font l'objet de développements ultérieurs sur les différents mécanismes traditionnels de transfert de risque (réassurance proportionnelle et non proportionnelle).

v. *L'exigence réglementaire en capital*

L'importance des fonds propres K que l'assureur peut consacrer à l'amortissement d'une perte éventuelle est une ressource déterminante pour assurer la sécurité de l'entreprise, et par là même celle des assurés. C'est la protection des assurés qui conduit légitimement le législateur / régulateur à imposer aux compagnies d'assurance le principe d'une solvabilité suffisante (art. R334-1 du *Code des assurances*).

La réglementation actuelle en matière de solvabilité des assurances (*Solvency I*) exige que les compagnies offrant des garanties en cas de décès (branche n°20 de la classification – art. R321-1) disposent de fonds propres au moins égaux à une fraction forfaitaire des provisions mathématiques et des capitaux sous risque (art. R334-13 ; pour le détail des éléments constitutifs de cette marge, voir art. R334-11).

L'intérêt de ces fonds propres prudentiels est de permettre aux assureurs de faire face à tous les aléas quels qu'ils soient, même si l'on ne connaît ni la probabilité d'occurrence ni l'ampleur éventuelle de tels risques. Dans le cadre réglementaire *Solvency I*, il peut toutefois y avoir inadéquation entre le niveau de fonds propres prudentiels et la valeur des risques que l'assureur a souscrits, la marge de solvabilité étant parfois excessive pour les risques encourus. Les règles devraient toutefois évoluer sous *Solvency II* (prévu pour 2010-2012).

Cette nouvelle approche prudentielle devrait s'appuyer sur une évaluation économique des risques encourus : le risque « zéro » ne sera pas le but, mais aura vocation à être remplacé par un niveau de risque « acceptable », c'est-à-dire un niveau de probabilité de ruine à un an inférieur à 0,5% (soit un niveau de défaillance de la compagnie une fois tous les 200 ans, ce qui correspond à un coefficient de sécurité $\beta = 2,5758$ dans le cadre de l'approximation normale).

Quoique légitime, cette exigence en capital apparaît parfois comme un frein au développement de l'assureur, car la croissance peut justement être limitée par le manque de capital : risque de non respect de l'exigence de marge de solvabilité minimale et donc refus d'affaires nouvelles lorsque les capitaux sous risques sont trop élevés. L'enjeu pour les assureurs va consister à (apprendre à) tarifier les produits dans une logique d'optimisation de capital en assurant d'un point de vue dynamique une adéquation toujours plus forte entre profil de risque, tarification initiale et coût d'utilisation des fonds propres.

1.3 Quantification du risque de surmortalité

Le résultat technique de l'assureur est exposé à tous les risques susceptibles de faire dévier la mortalité des assurés par rapport aux anticipations de la table de référence. En première analyse, deux tendances de fond peuvent remettre en cause les hypothèses : d'une part, le risque de longévité (les assurés survivent plus longtemps que prévu), risque qui ne pose évidemment pas de problème en assurance décès ; d'autre part, le risque de mortalité (les assurés disparaissent plus nombreux et/ou plus vite que prévu).

i. Identification des risques

Le risque de mortalité se manifeste par des phénomènes que l'assureur peut ou ne peut pas *a priori* contrôler :

- Phénomènes contrôlables :
 - o le risque d'auto sélection : comme chaque souscripteur cherche le contrat qui maximise son utilité personnelle, les garanties en cas de décès peuvent attirer des personnes en mauvaise santé. Ce risque est supposé compensé par une sélection médicale à la souscription et par le choix de la table de survie masculine pour tarifier les primes (principe de prudence) ;
 - o le risque de fraude : ce risque est surveillé, la preuve et les conditions du décès devant satisfaire les clauses du contrat (le suicide peut ainsi être exclu du cadre de la garantie) ;
 - o les comportements à risque : la pratique d'activités dangereuses (sports mécaniques, sports aériens, usage de drogues) ou les professions dangereuses (pompiers, militaires, policiers) sont généralement exclues des garanties du contrat.

- Phénomènes incontrôlables :
 - o le risque structurel (ou risque de masse) : la mortalité augmente brutalement au sein de la population assurée du fait de facteurs qui touchent indistinctement toutes les catégories de cette population (guerre, pandémie) ;
 - o le risque lié à une tête (ou risque de pointe) : les assurés qui ont les plus fort capitaux sous risque du portefeuille décèdent ;
 - o le risque lié à un événement (ou risque de concentration) : la mortalité augmente ponctuellement sur un groupe de tête *a priori* indépendant au sein de la population assurée, du fait de la survenance d'événements naturels (tsunami, tremblement de terre, vague de chaleur), accidentels (crash d'avion, explosion d'usine) ou encore d'attaques terroristes.

Ces risques constituent autant de menaces que l'assureur se doit de réduire afin de sécuriser son résultat et préserver sa solvabilité car, malgré le chargement de sécurité et la mutualisation des risques, le résultat peut se transformer en perte suite à la disparition d'une seule tête ou à la survenance d'un seul événement.

A chaque type de risque correspond des stratégies spécifiques (prévention, mutualisation ou couverture).

ii. *Cas de la mortalité extrême*

La mortalité extrême, ou « choc de mortalité » reflète une ou des périodes de mortalité anormalement élevées ; ces périodes sont toujours brutales et temporaires (au maximum d'une durée de 2 ans), comme le montrent les exemples suivants :

- Les pandémies :

de tous les virus pathogènes qui ont décimé l'humanité (peste, choléra, variole, tuberculose), la grippe reste l'un des rares à toujours rester potentiellement fortement endémique. Les spécialistes recensent 31 épidémies de grippe depuis 1580, épidémies dont les sévérités furent inégales. La grippe « espagnole » de 1918-1920 reste à ce jour la plus morbide (entre 20 et 100 millions de décès).

- Les catastrophes naturelles :

L'augmentation des phénomènes atmosphériques (ouragans, tornades, typhons) en lien avec le réchauffement climatique observé actuellement, la concentration de populations souvent riches dans des zones urbaines ou périurbaines fortement exposées aux tremblements de terre (Californie et Japon par exemple) sont autant de facteurs qui exposent les assureurs.

Dans le passé récent, on peut noter certains évènements de surmortalité liés à des phénomènes naturels :

<u>Evénement</u>	<u>Pays</u>	<u>Année</u>	<u>Nombre de décès</u>
Tremblement de terre (plaine du Kanto)	Japon	1923	143,000
Ouragan	Etats Unis	1900	6,000
Tremblement de terre	Japon	1948	5,131
Tempête	Japon	1959	5,098
Tremblement de terre	Italie	1980	4,689
Tempête	Japon	1917	4,000
Tempête	Japon	1945	3,746
Tremblement de terre	Japon	1933	3,008
Tempête	Japon	1934	3,006
Tempête	Japon	1923	3,000
Tsunami	Japon	1933	3,000

Plus récemment (1980 – 2004) :

<u>Evénement</u>	<u>Pays</u>	<u>Année</u>	<u>Nombre de décès</u>
Tsunami	Asie	2004	186,000
Ouragan (Katrina)	Etats-Unis	2005	1,836
Vague de chaleur	France	2003	15,000
Tremblement de terre (Kobe)	Japon	1995	5,297
Vague de chaleur	Etats-Unis	1995	670
Tornade	Etats-Unis	1984	600
Blizzard	Etats-Unis	1983	500
Inondations	Japon	1982	345
Blizzard	Etats-Unis	1982	270

- Le crash de météorites :

les paléontologues évoquent un crash qui aurait provoqué l'extinction des dinosaures il y a 65 millions d'années. La puissance des explosions est donnée en équivalent TNT (bombe d'Hiroshima : 15 kT).

<u>Année</u>	<u>Evénement</u>	<u>Puissance de l'explosion</u>
1908	Une météorite de 55 mètres s'écrase au cœur de la Sibérie orientale, dans la forêt bordant la rivière Tunguska	15,000 kT
1947	Shikhote Alin (Sibérie orientale)	20 kT
2002	Région d'Irkoutsk (Sibérie orientale)	205 kT

- Les accidents industriels (y compris accidents nucléaires, radioactifs, bactériologiques et chimiques) :

malgré un très fort degré de prévention et de protection, les accidents industriels sont toujours possibles. Tchernobyl en est l'archétype : il reste le pire accident nucléaire de l'histoire humaine. Cet accident a directement provoqué la mort de plus de 1,000 personnes et a contribué à l'augmentation de 2% des taux de cancer dans la région (chiffres officiels, très probablement sous-estimés par les autorités).

- Les guerres :

dans l'histoire de l'humanité, les guerres ont été relativement fréquentes. De fortes tensions subsistent encore aujourd'hui au sein de certaines régions du globe, comme au Moyen-Orient, en Inde et au Pakistan, en Corée du Nord, etc., qui sont autant de pays possédant l'arme nucléaire.

- Les attaques terroristes :

le terrorisme apparaît aujourd'hui comme le moyen d'action privilégié de certains groupes radicaux. Depuis l'attentat du World Trade Center le 11 septembre 2001 (qui a coûté la vie à près de 3,000 personnes), la menace apparaît désormais mondiale et sans limite.

- Les risques émergents :

si la plupart des risques majeurs sont déjà identifiés, d'autres sont encore émergents et peuvent potentiellement augmenter la mortalité de manière significative, comme :

- o les phénomènes d'obésité et de diabète
- o les revers possibles des progrès technologiques, avec notamment :
 - les champs électromagnétiques (CEM) (antennes pour téléphone mobile, etc.) ;
 - les organismes génétiquement modifiés (OGM) et nanotechnologies ;
 - le changement climatique (vision prospective de **GORE [2006]**) :
 - des températures toujours plus élevées, avec davantage de journées chaudes et de vagues de chaleur pourraient contribuer à la hausse des décès et des maladies chez certaines personnes, notamment en milieu urbain dues au retour de maladies infectieuses (tuberculose, choléra...) portées par certains animaux nuisibles vecteurs de maladies (moustiques, rats...) ;
 - par ailleurs, la hausse des précipitations lors des cyclones tropicaux ou des vagues de sécheresses pourraient contribuer à la propagation d'épidémies infectieuses (Inde, Bengladesh, Indonésie, Chine, Sahel...).

iii. *Mortalité extrême : scénario de référence*

De tous les périls présentés ci-dessus, le principal risque de mortalité extrême dont peut souffrir un portefeuille d'assurance décès reste le risque de pandémie. Ce risque est bien réel :

- d'une part tous les épidémiologistes sont unanimes pour dire qu'une pandémie aura lieu (**ALFERIEFF & LE GOFF [2007]**), même si des difficultés subsistent pour en mesurer précisément l'impact (on ne peut prédire ni la virulence du virus, ni sa contagiosité, ni la durée de l'événement) ;
- d'autre part, les fortes densités de population urbaines contribuent à accentuer la propagation des virus ; enfin, les risques de diffusion sont amplifiés par l'intensité des migrations et du tourisme, elle-même favorisée par les transports de masse.

Face à la complexité des modèles épidémiologiques, nous privilégions une approche par scénario pour estimer l'impact d'une pandémie significative. Le scénario de référence demeure à ce jour la grippe de 1918 – 1920.

Dans le cas de la grippe, on doit faire deux hypothèses (mentionné dans l'étude citée plus haut):

- taux d'incidence du virus (taux de contraction au sein de la population), qui est généralement compris entre 10% et 50% de la population. L'Organisation Mondiale de la Santé (OMS) suggère de prendre un taux d'incidence de 25% (**LAZZARI & STOHR [2004]**) ;
- taux de mortalité des personnes atteintes : en dépit des progrès médicaux et des plans de gestion de crise sanitaire qui seraient mis en place par les pouvoirs publics, la morbidité du virus de 1918-1920 demeure la référence, soit une surmortalité des personnes infectées comprise entre 3,7‰ et 25‰.

Pour la France par exemple, une pandémie de grippe particulièrement sévère provoquerait ainsi entre 55,500 et 375,000 décès annuels supplémentaires (en combinant ces deux hypothèses sur la base d'une population de 60 millions de personnes).

En représentant en fonction de l'âge le rapport de ces taux de surmortalité moyens sur la probabilité annuelle de décès de la table TD 88-90, on obtient avec ces hypothèses la fourchette du taux de déviation $\delta(x)$ de la mortalité annuelle pour chaque classe d'âge :

$$\text{hypothèse basse} \quad \delta_{\text{Basse}}(x) = \frac{(q_x + 25\% \times 3,7\text{‰}) - q_x}{q_x} = \frac{0,93\text{‰}}{q_x}$$

$$\text{hypothèse haute} \quad \delta_{\text{Haute}}(x) = \frac{(q_x + 25\% \times 25\text{‰}) - q_x}{q_x} = \frac{6,25\text{‰}}{q_x}$$

L'amplitude de ces taux de déviation de la mortalité est très élevée, surtout chez jeunes adultes (tranche des 20-40 ans), avec des taux d'accroissement de la mortalité $\delta(x)$ allant de 70% à plus de 400%.

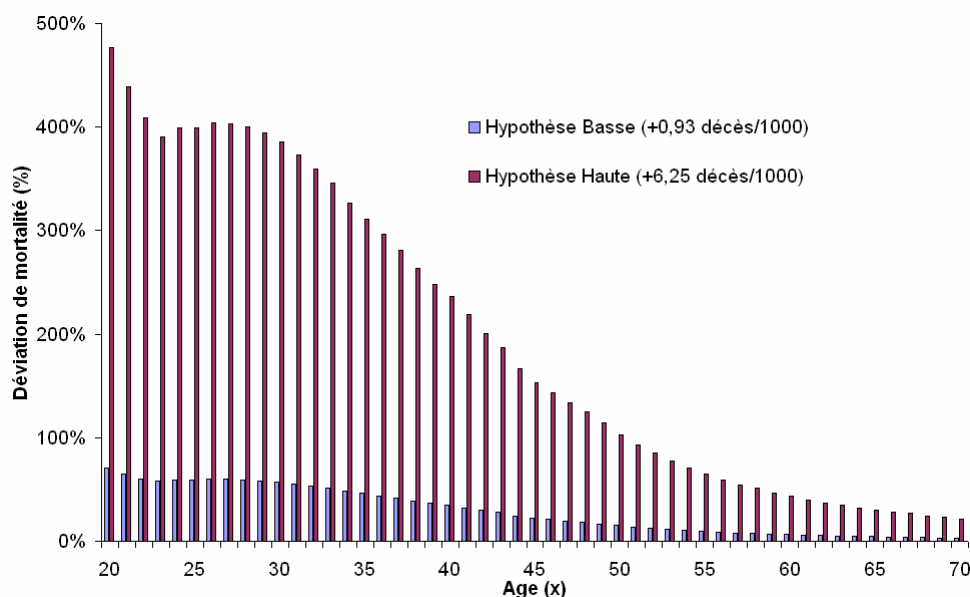


Figure II - 6 : Déviation $\delta(x)$ par âge x du taux annuel de mortalité q_x anticipé par la table TD 88-90 en cas de pandémie du type « grippe de 1918 »

iv. *Quantification du risque de mortalité extrême sous le scénario de référence*

Considérons les 4 portefeuilles suivants, composé chacun de $n = 10,000$ polices d'assurance temporaire au décès annuelles souscrites en même temps par des assurés d'âges respectifs : 35, 45, 55 et 65 ans.

Dans chaque cas, les polices garantissent le versement du capital $C = \text{€}100,000$ en cas de décès de l'assuré.

L'assureur charge toutes les primes pures selon le principe de chargement de l'écart type.

Ce chargement est calculé pour absorber jusqu'à 10% de déviation de la mortalité de la table TD 88-90.

D'après l'article R334-13 du *Code des assurances*, la marge de solvabilité réglementaire de chaque portefeuille est égale à 0,1% des capitaux sous risque, soit $\text{€}1\,000\,000$.

Nous supposons que les fonds propres de l'assureur sont à chaque fois égaux à cette exigence de marge de solvabilité minimale.

Dans l'hypothèse d'une grippe type 1918, la cohorte d'âge 35 ans subit une déviation de mortalité comprise sur un intervalle [46,04% ; 311,11%]. Pour un taux de déviation de mortalité supérieur à 61% (51% sans chargement de sécurité), l'assureur est ruiné.

Taux de déviation de mortalité liée à pandémie	Taux surmortalité de la classe d'âge 35 ans (%)	Nb additionnel de morts dans portefeuille par rapport mortalité anticipée	Résultat du portefeuille (€)	Coefficient de sécurité résultant
0,01%	0,0002	0,00	208 410	2,66
0,1%	0,0020	0,02	206 620	2,66
1%	0,0201	0,20	188 717	2,61
5%	0,1004	1,00	109 152	2,38
10%	0,2009	2,01	9 695	2,12
50%	1,0045	10,04	-785 960	0,39
100%	2,0089	20,09	-1 780 529	-1,22
200%	4,0179	40,18	-3 769 667	-3,53
300%	6,0268	60,27	-5 758 805	-5,26

Tableau II - 4 : Résultat du portefeuille des assurés d'âge 35 ans en fonction de la déviation de mortalité

Dans l'hypothèse d'une grippe type 1918, la cohorte d'âge 45 ans subit une déviation de mortalité comprise sur un intervalle [22,64% ; 153%]. Pour un taux de déviation de mortalité supérieur à 36% (26% sans chargement de sécurité), l'assureur est de toute manière ruiné.

Taux de déviation de mortalité liée à pandémie	Taux surmortalité de la classe d'âge 45 ans (%)	Nb additionnel de morts dans portefeuille par rapport mortalité anticipée	Résultat du portefeuille (€)	Coefficient de sécurité résultant
0,01%	0,0004	0,00	431 236	2,19
0,1%	0,0041	0,04	427 596	2,19
1%	0,0408	0,41	391 194	2,12
5%	0,2042	2,04	229 408	1,84
10%	0,4085	4,08	27 175	1,50
20%	0,8170	8,17	-377 291	0,87
30%	1,2255	12,25	-781 757	0,29
40%	1,6340	16,34	-1 186 223	-0,24
50%	2,0425	20,42	-1 590 689	-0,74

Tableau II - 5 : résultat du portefeuille des assurés d'âge 45 ans en fonction de la déviation de mortalité

Dans l'hypothèse d'une grippe type 1918, la cohorte d'âge 55 ans subit une déviation de mortalité comprise sur un intervalle [9,62% ; 65,02%]. Pour un taux de déviation de mortalité supérieur à 21% (11% sans chargement de sécurité), l'assureur est de toute manière ruiné.

Taux de déviation de mortalité liée à pandémie	Taux surmortalité de la classe d'âge 55 ans (‰)	Nb additionnel de morts dans portefeuille par rapport mortalité anticipée	Résultat du portefeuille (€)	Coefficient de sécurité résultant
0,01%	0,0010	0,01	1 048 663	2,02
0,1%	0,0096	0,10	1 040 097	2,01
1%	0,0961	0,96	954 437	1,92
5%	0,4806	4,81	573 728	1,51
10%	0,9612	9,61	97 841	1,03
15%	1,4419	14,42	-378 045	0,57
20%	1,9225	19,22	-853 931	0,13
25%	2,4031	24,03	-1 329 818	-0,29
35%	3,3644	33,64	-2 281 591	-1,09

Tableau II - 6 : résultat du portefeuille des assurés d'âge 55 ans en fonction de la déviation de mortalité

Dans l'hypothèse d'une grippe type 1918, la cohorte d'âge 65 ans subit une déviation de mortalité comprise sur un intervalle [4,48% ; 30,28%]. Pour un taux de déviation de mortalité supérieur à 16% (6% sans chargement de sécurité), l'assureur est de toute manière ruiné.

Taux de déviation de mortalité liée à pandémie	Taux surmortalité de la classe d'âge 65 ans (‰)	Nb additionnel de morts dans portefeuille par rapport mortalité anticipée	Résultat du portefeuille (€)	Coefficient de sécurité résultant
0,01%	0,0021	0,02	2 177 818	2,19
0,1%	0,0206	0,21	2 159 422	2,17
1%	0,2064	2,06	1 975 460	2,04
5%	1,0322	10,32	1 157 854	1,45
10%	2,0644	20,64	135 845	0,75
15%	3,0965	30,97	-886 163	0,07
20%	4,1287	41,29	-1 908 171	-0,57
25%	5,1609	51,61	-2 930 179	-1,19
30%	6,1931	61,93	-3 952 188	-1,79

Tableau II - 7 : résultat du portefeuille des assurés d'âge 65 ans en fonction de la déviation de mortalité

Ces exemples montrent qu'à l'évidence, un assureur ne peut supporter à lui tout seul le poids d'une forte déviation de mortalité au sein de son portefeuille, ses capacités étant limitées pour des risques « illimités ».

A ce stade, les premiers axes de réflexion du *risk management* seraient d'envisager si l'assureur peut :

- soit exclure ce risque du cadre des garanties offertes (ou à défaut, voir s'il peut limiter la concentration du risque en portefeuille). Mais une telle politique de souscription paraît périlleuse car elle irait à l'encontre de l'esprit même d'une assurance en cas de décès
- soit tarifier une prime spécifique pour le risque couru. Il s'agirait de la solution la plus juste d'un point de vue économique. Mais il est impossible en pratique de mesurer l'exposition réelle des assurés au risque de pandémie (car il est toujours possible de contracter un virus par d'autres personnes sans nécessairement s'exposer soi-même à un environnement ou des activités particulièrement périlleuses).

D'autres solutions doivent être envisagées. Quelles sont les moyens à la disposition de l'assureur pour mutualiser efficacement et durablement un tel risque de déviation de la mortalité ?

Section 2 – Une couverture naturelle entre mortalité et longévité ?

Un premier moyen de mutualisation des risques consiste à exploiter l'interaction suivante : pour une évolution donnée de la mortalité, les résultats techniques attendus par l'assureur qui offre des garanties en cas de décès et ceux attendus par l'assureur qui offre des rentes viagères sont négativement corrélés.

En effet, si la mortalité observée augmente (les assurés décèdent plus tôt que prévu), l'assureur qui offre des garanties de décès subira une perte technique car ses engagements augmenteront (il versera les capitaux garantis plus tôt que prévu) ; en revanche, l'assureur qui offre des rentes viagères constatera un bénéfice technique car ses engagements diminueront (il servira les rentes à moins de personnes que prévu). Inversement, si la mortalité observée diminue (les assurés vivent plus longtemps que prévu) : l'assureur qui offre des garanties de décès constatera un bénéfice technique car ses engagements diminueront (il versera les capitaux garantis plus tard que prévu) ; l'assureur qui offre des rentes viagères subira au contraire une perte technique car ses engagements augmenteront (il servira les rentes plus longtemps que prévu).

Ainsi, comme l'envisagent **COX & LIN [2005a]**, l'assureur qui cherche à couvrir son résultat technique contre le risque de modèle pourrait utiliser cette interaction naturelle entre assurance de décès et assurance de rente pour compenser les éventuelles déviations de mortalité. Nous nous proposons d'étudier cette 'couverture naturelle'.

Il s'agit de calculer le rapport efficient entre « vie entières » et « rentes viagères » afin de construire un portefeuille « delta neutre » pour utiliser un concept propre à l'environnement *Black & Scholes*. Ces portefeuilles sont ainsi dénommés car ils sont insensibles à toute déviation ponctuelle de la mortalité.

2.1 Présentation des hypothèses et de la démarche analytique

Le cadre proposé dans cette section est purement théorique : ce sont moins les résultats absolus qui importent que la démarche d'esprit et la méthode permettant d'y arriver qui nous semblent pertinentes.

i. Hypothèses de base et construction du portefeuille

Nos hypothèses seront les suivantes :

- 1) Garanties « vies entières » de € 100,000 souscrites par des têtes d'âge 35 ans
- 2) Rentes viagères annuelles illimitées de € 2,307 servies d'avance, souscrites par des têtes d'âge 65 ans (ainsi les valeurs actuelles probables des 2 engagements sont égales)
- 3) La prime annuelle de la « vie entière » est tarifée à l'aide la table TD 88-90
- 4) La rente annuelle est tarifée à l'aide de la table TPRV 93
- 5) Le taux d'intérêt technique \dot{i} est supposé identique et constant à 2,20%
- 6) Les garanties en cas de décès sont payées en fin d'année
- 7) Les portefeuilles de vies entières et de rentes sont déjà constitués au début du 1^{er} exercice
- 8) La déviation de mortalité ε est exprimé en pourcentage de l'intensité de mortalité théorique μ

▪ Ligne des vies entières

L'assureur est certain de payer le capital garanti, mais ne sait pas quand.

La valeur actuelle probable de l'engagement de l'assureur de payer € 1 à la fin de l'année de survenance du décès est :

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k}$$

où x est l'âge de la tête assurée lors de la formation du contrat.

La valeur actuelle probable de l'engagement de l'assuré de payer € 1 de primes annuelles versées d'avance tant qu'il est vivant est :

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_x = \frac{N_x}{D_x}$$

La prime annuelle P que devra verser l'assuré pour lui permettre d'obtenir € 1 de capital garanti se déduit des deux quantités précédentes :

$$P \cdot \ddot{a}_x = A_x$$

Pour un capital de € 100,000 en cas de décès, la prime annuelle P que devra verser l'assuré sera de € 1,653.

Dans la suite, nous noterons $K(x)$ la variable aléatoire réelle qui correspond à la partie entière de la variable aléatoire réelle T_x 'durée de vie résiduelle de la tête d'âge x à la souscription' (cf. Section 1) :

$$K(x) = Ent(T_x)$$

La variable $K(x)$ prend la valeur k (entière) avec la probabilité ${}_k|_1 q_x$.

Ainsi, lorsque la tête assurée x décède à l'âge $x + K(x)$, la valeur actuelle du résultat R d'un contrat (exprimée pour € 1 de capital garanti) sera alors :

$$R = P \cdot (1+i) \cdot \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} - v^{K(x)+1} = P \cdot (1+i) \cdot \frac{1-v^{K(x)+1}}{i} - v^{K(x)+1}$$

En effet, pour payer € 1 de capital dans $K(x) + 1$ années, l'assureur doit capitaliser les primes annuelles P reçues au cours des $K(x) + 1$ années. Au final, le résultat R s'obtient par différence entre la valeur actuelle de ce qui est effectivement reçu et la valeur actuelle du capital garanti à verser l'année du décès.

- Espérance du résultat de la ligne des vies entières :

Par linéarité, l'espérance mathématique du résultat s'écrit :

$$E[R] = E\left[\sum P \cdot v^{K(x)+1}\right] - E\left[v^{K(x)+1}\right]$$

Or, d'après la formule de l'espérance de la fonction d'une variable aléatoire :

$$E\left[v^{K(x)+1}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_k|_1 q_x = A_x$$

$$E\left[\sum P \cdot v^{K(x)+1}\right] = P \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} i|_1 q_x \right) \cdot v^{k+1}$$

Comme

$$\sum_{i=k}^{\infty} {}_i|1q_x = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\ell_{x+i} - \ell_{x+i+1}}{\ell_x} = \frac{\ell_{x+k}}{\ell_x} = {}_kP_x$$

Nous obtenons :

$$E\left[\sum P \cdot v^{K(x)+1}\right] = P \cdot \sum_{k=0}^{\infty} {}_kP_x \cdot v^{k+1} = P \cdot \ddot{a}_x$$

Nous retrouvons ainsi le résultat démontré en Section 1 (pour le résultat annuel), c'est-à-dire que si les réalisations sont conformes aux hypothèses, alors l'espérance mathématique du résultat du portefeuille des vies entières sera nulle :

$$E[R] = P \cdot \ddot{a}_x - A_x = 0 \quad (\text{équation de tarification})$$

- Variance du résultat de la ligne des vies entières :

Comme l'espérance mathématique du résultat est nulle, la variance s'écrit :

$$V[R] = E[R^2] - (E[R])^2 = E[R^2]$$

soit

$$V[R] = E\left[\left(\sum (P \cdot v^{K(x)+1}) - v^{K(x)+1}\right)^2\right]$$

en développant :

$$V[R] = P \cdot E\left[\left(\sum v^{K(x)+1}\right)^2\right] + E\left[\left(v^{K(x)+1}\right)^2\right] - 2P \cdot E\left[\left(\sum v^{K(x)+1}\right) \cdot v^{K(x)+1}\right]$$

Nous avons

$$E\left[\left(v^{K(x)+1}\right)^2\right] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k+2} \cdot {}_k|1q_x$$

Mais la décomposition de la somme $\left(\sum_{i=1}^n v^i\right)^2 = \sum_{k=i}^n v^{2i} + 2\sum_{i<j} v^i \cdot v^j$ ne nous permet pas d'obtenir une

expression simple pour $E\left[\left(\sum v^{K(x)+1}\right)^2\right]$.

Par conséquent, nous n'obtenons pas d'expression simple ni pour $E\left[\left(v^{K(x)+1}\right)^2\right]$ ni pour l'espérance du produit de convolution $E\left[\left(\sum v^{K(x)+1}\right) \cdot v^{K(x)+1}\right]$ et au final pour la variance du portefeuille des vies entières.

- Ligne des rentes viagères

L'assureur sait combien il doit payer à chaque période, mais ne sait pas pendant combien de temps. La valeur actuelle probable de l'engagement de l'assureur de servir une rente viagère annuelle illimitée de € 1 en début de chaque année tant que l'assuré survit, est :

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_x = \frac{N_x}{D_x}$$

où x est l'âge de la tête assurée lors de la formation du contrat.

Si la tête assurée x décède à l'âge $x + K(x)$, alors la valeur actuelle du résultat R d'un contrat (exprimée pour € 1 de rente viagère annuelle) sera alors :

$$R = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} = \ddot{a}_x - \frac{1 - v^{K(x)+1}}{i}$$

En effet, le résultat R s'obtient par différence entre la valeur actuelle probable de l'engagement initial et la valeur actuelle des ses paiements effectifs.

- Espérance du résultat de la ligne des rentes viagères :

Par linéarité, l'espérance mathématique du résultat s'écrit :

$$E[R] = E[\ddot{a}_x] - E\left[\sum v^{K(x)+1}\right]$$

Or d'après le paragraphe précédent,

$$E\left[\sum v^{K(x)+1}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x \cdot v^{k+1} = \ddot{a}_x$$

Ainsi, lorsque les réalisations sont conformes aux hypothèses, l'espérance mathématique du résultat du portefeuille des rentes viagères sera nulle :

$$E[R] = \ddot{a}_x - \ddot{a}_x = 0$$

- Variance du résultat de la ligne des rentes viagères :

Comme l'espérance mathématique du résultat est nulle, la variance s'écrit :

$$V[R] = E[R^2] - (E[R])^2 = E[R^2]$$

soit

$$V[R] = \ddot{a}_x^2 + E\left[\left(\sum v^{K(x)+1}\right)^2\right] - 2\ddot{a}_x \cdot E\left[\sum v^{K(x)+1}\right]$$

$$V[R] = \ddot{a}_x^2 + E\left[\left(\sum v^{K(x)+1}\right)^2\right] - 2\ddot{a}_x \cdot \ddot{a}_x$$

$$V[R] = E\left[\left(\sum v^{K(x)+1}\right)^2\right] - \ddot{a}_x^2$$

Comme précédemment, nous ne trouvons pas d'expression simple pour $E\left[\left(\sum v^{K(x)+1}\right)^2\right]$, et nous ne définissons pas d'expression simple pour la variance du portefeuille des rentes viagères.

- Portefeuille étudié

Le résultat du portefeuille d'assurance composé par les deux lignes de contrats précédents se comporte comme la somme des résultats des deux portefeuilles précédents.

- Espérance du résultat du portefeuille combiné :

Sous l'hypothèse d'une mortalité effective conforme à la mortalité théorique, l'espérance mathématique du résultat de ce portefeuille sera nulle (par linéarité de l'espérance).

- Variance du résultat du portefeuille combiné :

Comme les deux lignes de portefeuilles ne sont pas indépendantes, la variance du portefeuille combiné s'exprime à l'aide des variances et covariances des lignes respectives de produits.

ii. Démarche analytique

Nous nous proposons d'étudier le comportement du résultat attendu de ce portefeuille lorsque survient une modification de la mortalité.

La déviation de mortalité est modélisée par un pourcentage ε de l'intensité de mortalité théorique μ_y , avec :

$$\begin{aligned} \text{si } 0 < \varepsilon < 1, \text{ l'expérience de mortalité s'améliore : } \mu'_y &= (1 - \varepsilon) \cdot \mu_y < \mu_y \\ \text{si } -1 < \varepsilon < 0, \text{ l'expérience de mortalité se dégrade : } \mu'_y &= (1 - \varepsilon) \cdot \mu_y > \mu_y \end{aligned} \quad -1 < \varepsilon < 1$$

Comme la probabilité ${}_t p_x$ de survie entre x et $x+t$ de la tête assurée d'âge x est reliée à l'intensité de mortalité par :

$$\ln {}_t p_x = - \int_x^{x+t} \mu_y \cdot dy$$

les probabilités de survie déviées au niveau ε se déduisent alors des probabilités de survie théoriques par la relation suivante :

$${}_t p'_x = ({}_t p_x)^{1-\varepsilon}$$

Ainsi, la fonction de survie d'une personne assurée d'âge 35 ans est donnée par la relation :

$${}_t p_{35} = \frac{\ell_{35+t}}{\ell_{35}} \quad \rightarrow \quad {}_t p'_{35} = \left(\frac{\ell_{35+t}}{\ell_{35}} \right)^{1-\varepsilon}$$

Le graphique ci-dessous illustre l'impact des différentes contraintes sur l'espérance de durée de vie d'une cohorte d'âge 35 ans :

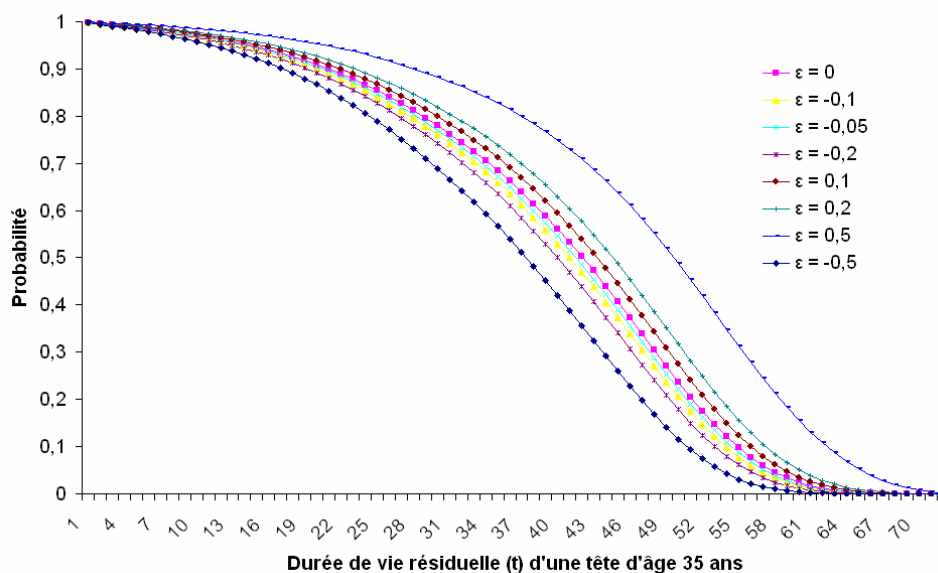


Figure II - 7 : Fonction de survie d'une tête d'âge 35 ans en fonction de la variation de mortalité ε sur la table TD 88-90

Dans ce modèle, nous ne modifions pas la durée maximale de vie humaine ω donnée par la table.

Contrainte	Espérance de vie à la naissance	Surmortalité moyenne de 0 à 75 ans
$\varepsilon = -0,5$	70,01 ans	4,01‰
$\varepsilon = -0,2$	72,38 ans	1,61‰
$\varepsilon = -0,1$	73,30 ans	0,81‰
$\varepsilon = -0,05$	73,80 ans	0,40 ‰
$\varepsilon = 0$	74,32 ans	0,00 ‰
$\varepsilon = 0,05$	74,87 ans	-0,40 ‰
$\varepsilon = 0,1$	75,45 ans	-0,81‰
$\varepsilon = 0,2$	76,70 ans	-1,62 ‰
$\varepsilon = 0,5$	81,72 ans	-4,06 ‰

Tableau II - 8 : Espérance de vie à la naissance et surmortalité moyenne en fonction des variations de mortalité ε de la table TD 88-90

e_x , l'espérance de vie à l'âge x (espérance mathématique de la variable aléatoire T_x , durée de vie résiduelle de la tête d'âge x) est donné par :

$$e_x = \sum_{k=1}^{\omega} k p_x$$

Comme ${}_t p'_x = ({}_t p_x)^{1-\varepsilon}$, il vient : $1 - q'_x = (1 - q_x)^{1-\varepsilon}$, le développement limité au premier ordre donne alors : $q'_x \approx (1 - \varepsilon) \cdot q_x$ pour ε au voisinage de 0.

2.2 Simulation de la couverture naturelle sous différents scénarii

Nous souhaitons observer l'évolution du résultat du portefeuille précédent composé par les lignes vies entières et rentes viagères en fonction des différentes déviations de mortalité de niveau ε .

i. Simulation des différents scénarii ε impactant la mortalité

Une méthode de simulation numérique permet d'obtenir différents échantillons d'âge de décès de populations initialement âgées de 35 ans et de 65 ans.

En simulant les « lois de survie déviées au niveau ε » par des tirages aléatoires sur la loi uniforme $U[0,1]$, on constitue des échantillons d'âge de décès. Nous pouvons alors calculer la valeur actuelle du résultat de chaque contrat en portefeuille par les formules obtenues précédemment.

Pour les différentes déviations de mortalité de niveau ε , on calcule la fonction de gain - perte $GP_C(\varepsilon)$ du contrat C :

$$GP_C(\varepsilon) = \frac{\bar{R}_C(\varepsilon) - E[R_C]}{VAP_C(\text{Assureur})} \times 100$$

où :

$$\bar{R}_C(\varepsilon) - E[R_C]$$

mesure l'écart entre le « résultat actualisé à la souscription » moyen du contrat C sous la contrainte d'une déviation de mortalité de niveau ε (obtenu par simulation) et l'espérance mathématique du résultat actualisé à la souscription de ce contrat (espérance nulle d'après la théorie) ;

$$VAP_C(\text{Assureur})$$

est la valeur actuelle probable à la souscription de l'engagement de l'assureur pour le contrat C .

Ce rapport représente le pourcentage de gain ou de perte du contrat C pour une unité de valeur actuelle probable de l'engagement initial de l'assureur.

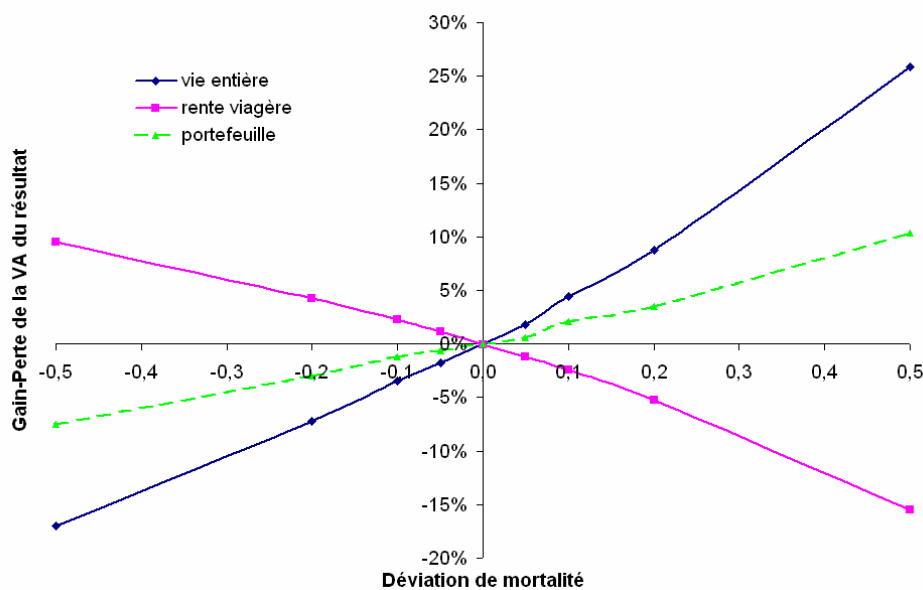


Figure II - 8 : Fonctions $GP_C(\varepsilon)$ des différents contrats C pour les déviations de mortalité ε de la table TD 88-90 (120.000 simulations pour chaque déviation de niveau ε)

Considérons une amélioration $\varepsilon = 0,10$ de la mortalité :

- l'assureur de rentes viagères subit une perte de 2,40% de la VAP de ses paiements
- l'assureur des garanties de décès gagne 4,45% de la VAP de ses paiements
- si ces deux types de contrats sont souscrits par le même assureur, l'impact de cette amélioration de mortalité sera atténué : l'assureur voit apparaître un gain net de 2,05% de la VAP de ses paiements.

Considérons une dégradation $\varepsilon = -0,10$ de la mortalité :

- l'assureur de rentes viagères gagne 2,27% de la VAP de ses paiements
- l'assureur des garanties de décès subit une perte de 3,50% de la VAP de ses paiements
- si ces deux types de contrats sont souscrits par le même assureur, l'impact de cette dégradation de mortalité est atténué : l'assureur subit une perte nette de 1,23% de la VAP de ses paiements.

Ce modèle illustre bien le principe de « couverture naturelle ». On note que les risques se compensent, mais pas dans les mêmes proportions pour des engagements qui ont pourtant des valeurs actuelles probables équivalentes.

ii. Construction d'un portefeuille « delta neutre »

Nous lissons les courbes des fonctions de gain - perte $GP_C(\varepsilon)$ obtenues par simulation dans le paragraphe précédent par des fonctions polynomiales (de degré 2) sur la plage de déviation $\varepsilon \in [-50\%; 50\%]$.

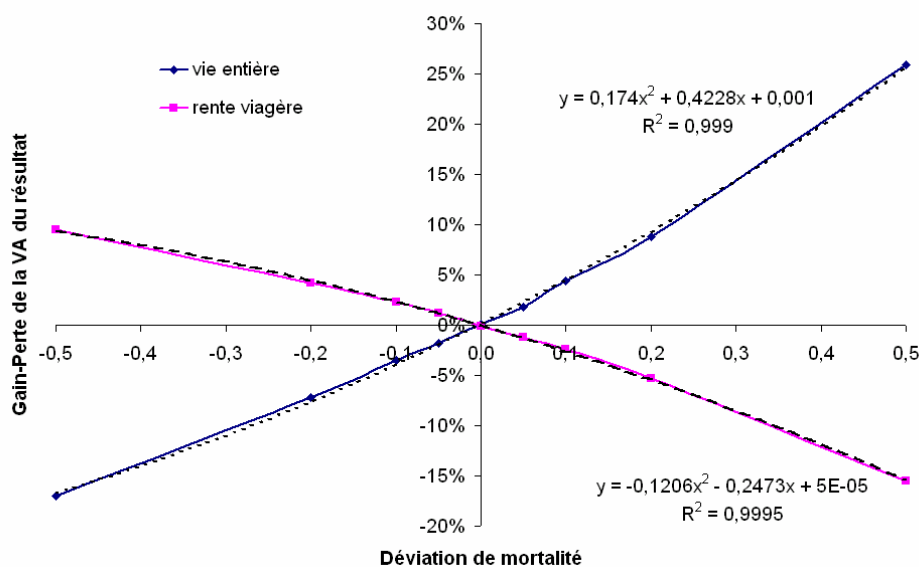


Figure II - 9 : Ajustement polynomial des fonctions $GP_C(\varepsilon)$ des différents contrats C pour les déviations de mortalité ε de la table TD 88-90

Par définition, le résultat d'un portefeuille « delta neutre » est insensible aux déviations de mortalité de niveau ε , c'est-à-dire que la variation d'un portefeuille compense toujours la variation de l'autre portefeuille :

$$\alpha \cdot GP_{rente\ viag\grave{e}re}^{ajust\acute{e}}(\varepsilon) + \beta \cdot GP_{vie\ enti\grave{e}re}^{ajust\acute{e}}(\varepsilon) = 0$$

le couple $(\alpha ; \beta)$ correspond aux proportions relatives de chaque ligne de produit en portefeuille (en % de la valeur actuelle probable des engagements initiaux).

L'étude de ce modèle linéaire nous permet ainsi de construire 2 portefeuilles « delta neutre » tels que :

- Portefeuille n°1 :

Pour un contrat offrant une garantie « vie entière » de € 100,000 souscrite par une tête d'âge 35 ans, on a besoin de 1,7052 contrat de rente viagère illimitée de € 2,307 souscrite par une tête d'âge 65 ans :

$$-\frac{\alpha}{\beta} = -1,7052 = \frac{\text{cov}\left(GP_{vie\ enti\grave{e}re}^{ajust\acute{e}}(\varepsilon); GP_{rente\ viag\grave{e}re}^{ajust\acute{e}}(\varepsilon)\right)}{V\left[GP_{rente\ viag\grave{e}re}^{ajust\acute{e}}(\varepsilon)\right]}$$

(le signe négatif traduit la corrélation négative de la couverture naturelle)

- Portefeuille n°2 :

Réciproquement, pour un contrat de rente viagère illimitée de € 2,307 souscrite par une tête d'âge 65 ans on a besoin de 0,5862 contrat offrant des garanties « vie entière » de € 100,000 souscrite par une tête d'âge 35 ans :

$$-\frac{\beta}{\alpha} = -0,5862 = \frac{\text{cov}\left(GP_{vie\ enti\grave{e}re}^{ajust\acute{e}}(\varepsilon); GP_{rente\ viag\grave{e}re}^{ajust\acute{e}}(\varepsilon)\right)}{V\left[GP_{vie\ enti\grave{e}re}^{ajust\acute{e}}(\varepsilon)\right]}$$

(le signe négatif traduit la corrélation négative de la couverture naturelle)

Le fait de prendre les coefficients des régressions linéaires ne procure pas d'immunisation parfaite mais procure une immunisation relativement satisfaisante pour les déviations ε comprises dans l'intervalle $[-17\% ; +20\%]$, puisque le gain du portefeuille « delta neutre » y est positif.

Au delà de ces bornes, le résultat est une perte : tout mouvement de mortalité supérieur à 15% en moyenne à la hausse ou à la baisse n'assure plus la couverture initiale, sauf à ajuster celle-ci au cours du temps (comme on le ferait dans le cadre d'un portefeuille autofinancé « delta-neutre » en univers *Black & Scholes*).

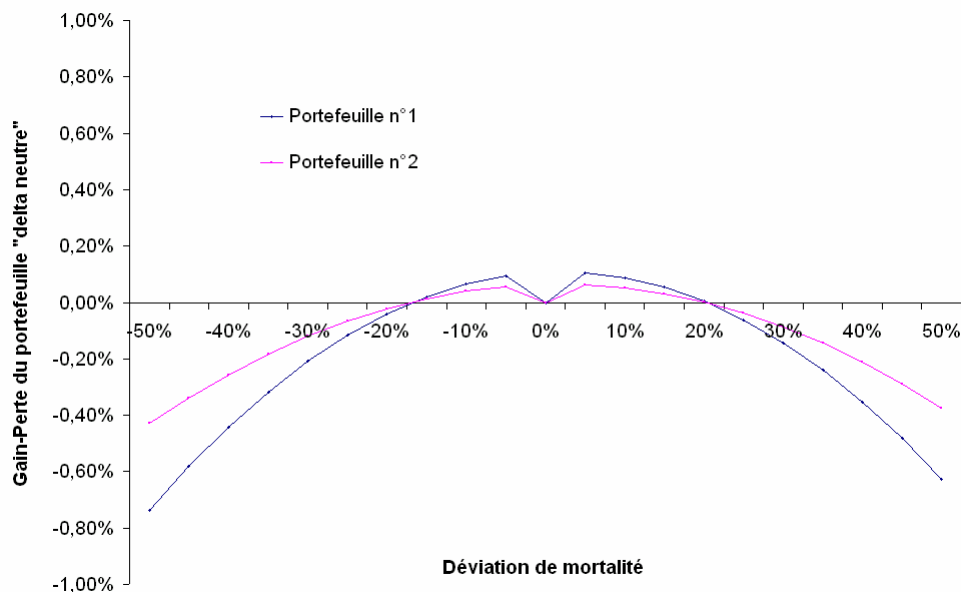


Figure II - 10 : Fonctions $GP(\varepsilon)$ des portefeuilles « delta neutres » pour les déviations de mortalité ε de la table TD 88-90

Vu les ordres de grandeur, cette ‘couverture naturelle’ n’apparaît pas très efficace pour faire face à des déviations extrêmes de mortalité. Intuitivement, il apparaît assez clairement qu’il n’y a pas symétrie dans le sens de la couverture : un portefeuille exposé à la longévité (rentes) constitue une bonne couverture au risque de mortalité (la surmortalité pouvant réduire le nombre de rentiers), mais un portefeuille de mortalité ne suffit pas en soi à couvrir un portefeuille de longévité (où le risque s’étale dans le temps mais n’est pas un choc).

2.3 Revue critique du modèle

Nous avons cherché à construire une ‘couverture naturelle’ au du risque de déviation de la mortalité, les gains d’un portefeuille d’assurance décès compensant les pertes d’un portefeuille de rentes. L’analyse économique (*i.e.* vision *a posteriori*) du résultat du portefeuille « delta neutre » ci-dessus montre que la couverture fonctionne relativement bien pour des petites variations de mortalité (résultat effectivement positif ou nul).

Cependant, la modélisation de la déviation de mortalité est assez grossière : celle-ci s’applique en effet uniformément sur toute la durée du contrat. Cela apparaît pertinent pour le risque de longévité (phénomène continu et générationnel, bien que le modèle ne fasse pas évoluer la durée maximale de la vie humaine ω en fonction du niveau de déviation ε) mais inapproprié pour le risque de mortalité, qui se traduit davantage par des chocs ou des sauts.

Par conséquent, le bénéfice réel d’une telle couverture semble limité pour un assureur car il y a un décalage dans le fonctionnement de la couverture : pertes immédiatement constatées sur le portefeuille des vies entières, gains constatés à la fin des contrats pour les rentes viagères ; de plus, les populations assurées sur les deux types de contrats ne sont pas forcément soumises aux mêmes déviations de la mortalité.

Ce décalage cumule les risques pour l'entreprise (risque de trésorerie, pertes qui s'accroissent au fil des exercices comptables) avant que le transfert de risque ne soit réellement effectif entre le portefeuille des rentes et le portefeuille des vies entières.

En outre, nous pouvons remarquer que ce modèle de couverture naturelle reste plutôt théorique car il est assez éloigné de toute considération administrative, organisationnelle, commerciale, financière et réglementaire de l'entreprise :

- aspect administratif : demande d'agrément pour souscrire une nouvelle branche pas automatique ;
- aspect organisationnel : un assureur spécialisé dans les risques décès doit développer une expertise supplémentaire dans les risques en cas de vie, ce qui implique :
 - o une augmentation de ses fonds propres pour satisfaire à l'exigence de marge de solvabilité
 - o le recrutement, l'installation et la formation d'une nouvelle équipe
 - o le développement d'outils et d'infrastructures adaptés aux produits ;
- aspect commercial : s'il est envisageable pour un assureur de vendre ses produits dans l'optique de constituer un portefeuille « delta neutre », cet objectif demeure contraignant pour la direction commerciale et le réseau de distribution (surtout dans un contexte fortement concurrentiel) ;
- aspect financier : le pilotage du résultat par la rentabilité des produits et non par la recherche d'un équilibre « delta neutre » sur l'ensemble des produits dicte le choix de la composition du portefeuille sous la contrainte des fonds propres disponibles ;
- aspect *risk management* :
 - o dans le cadre *Solvency I*, la réduction de la volatilité des résultats est recherchée au niveau de chaque portefeuille pris isolément, et non sur l'ensemble des portefeuilles (la réglementation *Solvency II* devrait toutefois reconnaître les bénéfices de la diversification consolidée) ;
 - o la couverture naturelle n'est pas un processus statique, il faut adapter en permanence la composition du portefeuille produit.

Selon **COX & LIN [2005b]**, la manière la plus efficace d'exploiter cette interaction naturelle entre assurance décès et assurance de rente serait de mettre en place un swap de mortalité (« *Mortality swap* ») entre différents acteurs spécialisés. Dans ce montage :

- l'assureur de rente paierait un flux à l'assureur décès uniquement si la mortalité du portefeuille décès excède un seuil prédéfini (nombre de décès) ;
- l'assureur décès paierait un flux à l'assureur de rentes uniquement si la mortalité du portefeuille de rentes excède un seuil prédéfini (nombre de survivants) ;
- l'arrangeur assurerait l'intermédiation entre les deux parties.

Ce développement reste encore aujourd'hui relativement théorique car le *pricing* des jambes du *swap* demeure complexe malgré des hypothèses simplificatrices (risque de contrepartie ignoré, utilisation de la même table pour tarifier les risques décès et rentes, définition de la méthode de calcul des seuils, nécessité de réviser régulièrement la structure en fonction de l'évolution des portefeuilles sous jacents...).

En outre dans ce type de transaction, la proximité de la composition (par âge et par sexe) des 2 populations assurées joue un rôle déterminant dans la qualité de la couverture. Si un assureur décès est principalement en risque sur des personnes âgées de 20 à 50 ans et que l'assureur de rente est en risque sur des personnes de plus de 50 ans, alors une épidémie qui ne toucherait massivement que les moins de 50 ans (comme ce fut le cas pour la grippe de 1918) déséquilibrerait le *swap* et n'immuniserait pas parfaitement l'assureur de rente.

Les critiques ainsi soulevées montrent qu'un assureur ne peut « s'auto-immuniser » efficacement contre le risque de petites déviations de mortalité. Malgré cet équilibre théorique, le recours à un tiers pour mutualiser les risques apparaît nécessaire pour éviter le risque de ruine.

Section 3 – La réassurance traditionnelle du risque de mortalité

A ce jour, le marché des *ILS* n'étant pas encore un marché complet, sur lesquels des actifs (*cash* ou dérivés) ayant pour sous-jacents des risques de longévité ou de mortalité sont échangés, force est de constater que face à la problématique des « grands risques », seules des solutions plus classiques restent efficaces. Si l'assureur ne peut répartir / échanger horizontalement ses risques avec d'autres assureurs primaires, il peut les transférer pour tout ou partie sur un marché secondaire d'assurance, où des tiers preneurs de risque (réassureurs) acceptent de couvrir les risques moyennant versement d'une prime de réassurance.

Nous examinons d'abord les bénéfiques techniques de la réassurance, puis présentons le positionnement des réassureurs vie ainsi que les tendances du marché de réassurance. Cette démarche nous permet de mieux appréhender la qualité de l'offre de réassurance à la disposition de l'assureur pour la couverture du risque de mortalité extrême.

3.1 Principe de réduction de la variance du résultat

Nous continuons à noter q_z la probabilité annuelle de décès de la table et q'_z la probabilité réelle de la tête assurée d'âge z .

i. L'offre de réassurance sur risque décès

Comme nous l'avons vu à la Section 1, en l'absence de réassurance, le résultat escompté d'un contrat en début d'année s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} R_1 = v^{\frac{1}{2}} \cdot q_z \cdot C_r(z) & \text{en cas de survie de l'assuré, avec la probabilité } 1 - q'_z \\ R_2 = -v^{\frac{1}{2}} \cdot p_z \cdot C_r(z) & \text{en cas de décès (en milieu d'année), avec la probabilité } q'_z \end{array} \right.$$

Ainsi, l'espérance et la variance du résultat d'un contrat non réassuré peuvent s'écrire :

$$E[R] = v^{\frac{1}{2}} \cdot (q_z - q'_z) \cdot C_r(z)$$

$$V[R] = v \cdot p'_z \cdot q'_z \cdot C_r(z)^2$$

Il existe deux formes de réassurance traditionnelle : l'une dite proportionnelle et l'autre dite non proportionnelle.

- REASSURANCE DECES PROPORTIONNELLE : cas du traité en *quote part*

Ce type de couverture permet de partager proportionnellement les risques entre l'assureur et le réassureur. L'assureur cède au réassureur la proportion θ de toutes les primes qu'il souscrit, et en contrepartie le réassureur s'engage à rembourser la proportion θ de tous les sinistres survenus. En outre, le réassureur verse également une commission proportionnelle τ à la prime qui lui a été cédée afin de participer aux frais de souscription et de gestion de l'assureur.

Même si l'assureur n'est en risque que sur la proportion $(1 - \theta)$ des engagements, il est tenu de représenter 100% des engagements initialement souscrits au passif de son bilan. Cela signifie que vis-à-vis des assurés, l'assureur cédant supporte le risque de défaut du réassureur auquel il fait face.

Néanmoins en réassurance proportionnelle, un poste d'actif vient compenser le décalage entre les engagements bruts et nets de réassurance dans le bilan de l'assureur afin de refléter la part des réassureurs dans les provisions techniques. Ce poste, assimilable à une créance sur les réassureurs, augmente la marge de solvabilité de l'assureur, ce qui constitue l'un des principaux avantages de la réassurance proportionnelle (en plus de la commission de réassurance habituelle).

Recevant la proportion θ de toutes les primes, le réassureur est quant à lui tenu de constituer dans son bilan la proportion θ des provisions techniques des engagements correspondants.

Ainsi, au niveau d'un contrat pour lequel l'assuré paye la prime annuelle P , le résultat d'un contrat net de réassurance escompté en début d'année devient :

	probabilité				
$\left\{ \begin{array}{l} R'_1 = (1 - \theta) \cdot \left(v^{\frac{1}{2}} \cdot q_z \cdot C_r(z) \right) + \tau \cdot \theta \cdot P \\ R'_2 = - (1 - \theta) \cdot \left(v^{\frac{1}{2}} \cdot p_z \cdot C_r(z) \right) + \tau \cdot \theta \cdot P \end{array} \right.$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center;">en cas de survie de l'assuré</td> <td style="width: 50%; text-align: right;">$1 - q'_z$</td> </tr> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center;">en cas de décès (en milieu d'année)</td> <td style="width: 50%; text-align: right;">q'_z</td> </tr> </table>	en cas de survie de l'assuré	$1 - q'_z$	en cas de décès (en milieu d'année)	q'_z
en cas de survie de l'assuré	$1 - q'_z$				
en cas de décès (en milieu d'année)	q'_z				

L'espérance et la variance du résultat R' d'un contrat net de réassurance deviennent alors :

$$E[R'] = v^{\frac{1}{2}} \cdot (1 - \theta) \cdot (q_z - q'_z) \cdot C_r(z) + \theta \cdot P \cdot \tau$$

$$V[R'] = v \cdot (1 - \theta)^2 \cdot p'_z \cdot q'_z \cdot C_r(z)^2 < V[R]$$

La réassurance proportionnelle permet ainsi de réduire la variabilité du résultat contre la perte d'une partie de l'espérance de gain – partiellement compensée par la commission de réassurance.

▪ REASSURANCE DECES NON PROPORTIONNELLE

Comme c'est l'importance du capital sous risque qui détermine l'ampleur des aléas, c'est lui qu'il convient de transférer au moins pour partie au réassureur. Les traités XL par tête / par événement permettent justement de mettre en œuvre cette stratégie, ces contrats procurant à l'assureur une couverture annuelle contre :

- le risque de pointe (les têtes ayant les plus gros capitaux sous risque du portefeuille disparaissent) ;
- le risque de concentration (un événement provoque la mort d'un grand nombre d'assurés).

L'abréviation « XL » pour « *Excess of Loss* » ou « en excédant de sinistre » résume le mécanisme de cette couverture : l'assureur fixe sa rétention, c'est-à-dire le montant de risque qu'il accepte de prendre à sa charge (la sécurité de l'entreprise n'étant alors pas compromise) et transfère le risque excédentaire au réassureur.

En échange de cette couverture, l'assureur verse une prime de réassurance calculée sur la base du risque transféré (cession non proportionnelle du volume de prime initialement souscrit). Contrairement à la réassurance proportionnelle, l'assureur porte toutes les provisions techniques dans son bilan et conserve ainsi l'intégralité de leur gestion financière.

- Cas du traité XL par tête :

Si la rétention de l'assureur est F et si la prime de réassurance vaut $\alpha \cdot (C_r(z) - F)$, alors le résultat R' d'un contrat net de réassurance escompté en début d'année s'écrit :

		probabilité
$R'_1 = v^{\frac{1}{2}} \cdot q_z \cdot C_r(z) - \alpha \cdot (C_r(z) - F)$	en cas de survie	$1 - q'_z$
$R'_2 = -v^{\frac{1}{2}} \cdot p_z \cdot C_r(z) - \alpha \cdot (C_r(z) - F) + v^{\frac{1}{2}} \cdot (C_r(z) - F)$	en cas de décès	q'_z

L'espérance et la variance du résultat R' d'un contrat net de réassurance deviennent alors :

$$E[R'] = v^{\frac{1}{2}} \cdot (q_z - q'_z) \cdot C_r(z) - (C_r(z) - F) \cdot (\alpha - v^{\frac{1}{2}} \cdot q_z) < E[R]$$

$$V[R'] = v \cdot p'_z \cdot q'_z \cdot F^2 < V[R]$$

La réassurance XL par tête permet aussi de réduire la variabilité du résultat face aux déviations de mortalité, toujours en échange d'une partie de l'espérance de gain.

- Cas du traité XL par événement (ou « *Life CAT XL* ») :

Cette couverture sera activée lorsqu'un accident ou un événement provoque le décès d'au moins m têtes et dont la perte totale dépasse la rétention F . Le réassureur prend alors à sa charge le montant des capitaux sous risque des décès excédentaires à m (certains contrats fixent même le montant maximum réassuré par tête).

Le montant réassuré s'élèvera à une proportion (généralement 90%, voire 95%) du montant excédent la rétention, dans la limite de la capacité de la couverture par risque / par événement. Une dernière clause peut éventuellement venir limiter l'engagement annuel du réassureur (« *Annual Agregate Limit* » ou « *AAL* »).

Exemple :

$$m = 4$$

Rétention : $F = 30M \text{ EUR}$

Capacité de la tranche : $40M \text{ EUR}$

Taux récupération des sinistres réassurés : 75%

Engagement annuel max : $60M \text{ EUR}$

Evénement	Nombre de morts	Sommes assurées	Sinistres réassurés	Commentaire
#1	5	20	0	Couverture non déclenchée
#2	5	70	30	Couverture activée et traversée
#3	4	40	0	Couverture non déclenchée
#4	3	70	0	Couverture non déclenchée
#5	7	50	15	Couverture activée. Il reste une capacité de 15 MEUR

Tableau II - 9 : Illustration du fonctionnement d'un traité *Life CAT XL*

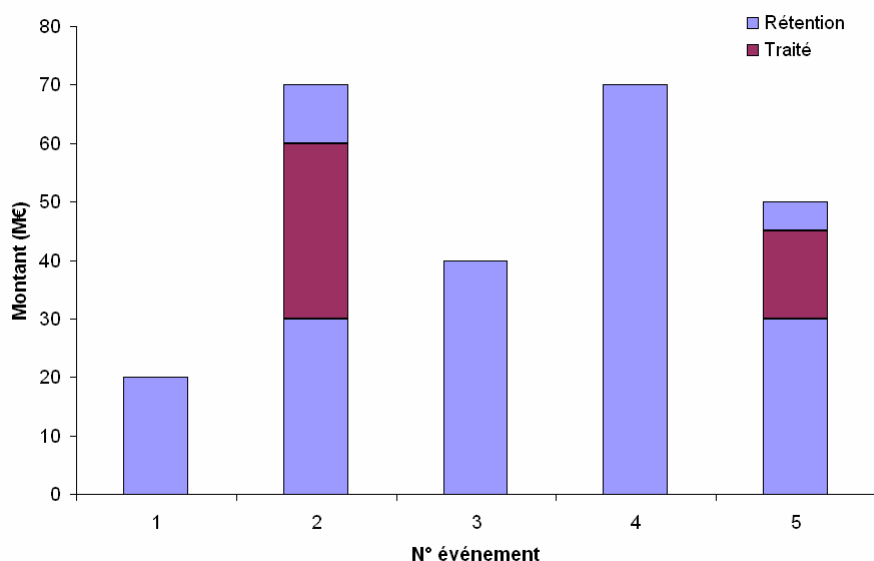


Figure II - 11 : Montant des sinistres à charge du réassureur en fonction des événements

- Cas du *Stop Loss* :

Le traité *Stop Loss* offre quant à lui une couverture lorsque le montant global de pertes dépasse un certain montant (dans la limite de la capacité de la couverture), et cela quelque soit l'origine des pertes (risque de pointe, risque de concentration ou risque de masse).

L'indicateur clé sera la valeur du *loss ratio* de l'assureur qui, s'il excède un certain seuil, déclenchera le transfert de risque de l'assureur vers le réassureur.

ii. *Stratégie de l'assureur*

Bien que la réassurance réduise significativement la variabilité du résultat, l'assureur doit veiller à ne pas céder trop de prime pour le niveau de risque qu'il souhaite couvrir.

Naturellement, l'assureur préférera un traité XL et le réassureur un traité en quote part.

Malgré son prix, le traité *Stop Loss* fournit une protection idéale contre toute déviation défavorable de la mortalité annuelle au-delà d'un certain seuil, et sans limitation de risque (événements, pandémie, terrorisme, etc.), avec de surcroît une gestion simplifiée du traité car les décès dus à la pandémie n'ont pas à faire l'objet d'un traitement séparé pour prétendre au remboursement.

Le tableau ci-dessous résume les principaux avantages et limites des différents traités envisageables ; la question de l'adéquation à la couverture du risque de surmortalité est abordée de manière très synthétique.

Traité	Avantages	Inconvénients	Couverture du risque de mortalité extrême ?
Quote Part	- partage du sort - soutien de la croissance - réduction du besoin en marge de solvabilité	- inadéquation « Prix / Risque couvert » si le portefeuille est développé - risque de contrepartie	Oui, peut importe la raison des décès au sein du portefeuille
XL par tête	- protection du résultat : lissage des pertes	- risque de contrepartie	Oui, mais le nombre de décès pris en charge est limité par la « AAL »
XL par événement	- idéal en terme de « Prix / Risque couvert » si le portefeuille est développé		Non (<i>cf.</i> suivant)
Stop Loss	protection du résultat : lissage des pertes	- le risque décès est un risque simple et bien maîtrisé : inadéquation « Prix / Risque couvert » - risque de contrepartie	Oui, peut importe la raison des décès au sein du portefeuille

Tableau II - 10 : Avantages / inconvénients de la réassurance traditionnelle (point de vue du cédant)

Nous renvoyons en **Annexe B** pour une illustration concrète de ces principes de réduction de variance qu'autorise la réassurance traditionnelle. Nous examinons maintenant les limites pratiques de l'offre de réassurance relative au risque de mortalité pour mieux apprécier l'intérêt d'une solution de marché.

3.2 Limites du marché de la réassurance vie

i. Positionnement des réassureurs

Comme le souligne **SWISS RE [2004b]**, la branche décès demeure encore aujourd'hui le cœur de métier de la plupart des réassureurs. Parallèlement à l'offre produit, les grands réassureurs promeuvent un modèle économique totalement intégré, basé sur la spécialisation des rôles, où l'expertise technique revient au réassureur, et le réseau de distribution et la plateforme de traitement des sinistres à l'assureur. C'est pour cette raison que le cœur de cible des réassureurs est avant tout les compagnies concentrées sur les activités distribution / gestion qui sont prêtes à partager les risques.

L'objectif de ce positionnement est de permettre d'obtenir des traités proportionnels (à l'instar de Scor en 2005, où 94,1% des primes provenaient de traités proportionnels). L'assureur peut être ainsi confronté au risque de placement pour son besoin de couverture des risques de pointe (catastrophe, pandémie), car les réassureurs vie ne s'engagent dans des traités non proportionnels que par logique commerciale à titre de 'service' offert au cédant, en marge et en considération des autres traités qu'il a pu nouer avec lui.

ii. *Panorama du marché de la réassurance vie*

Le marché de la réassurance vie est en forte croissance du fait de la très forte croissance du marché de l'assurance vie directe (SWISS RE [2007a]) :

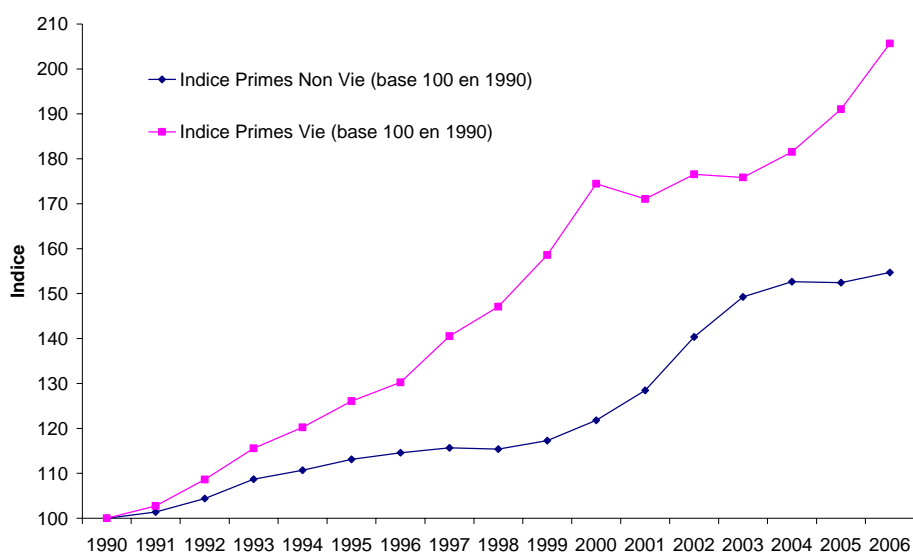


Figure II - 12 : Evolution des primes d'assurance vie / non vie depuis 1990

La croissance des volumes en réassurance est tout aussi spectaculaire (SCOTTISH RE [2005]) :

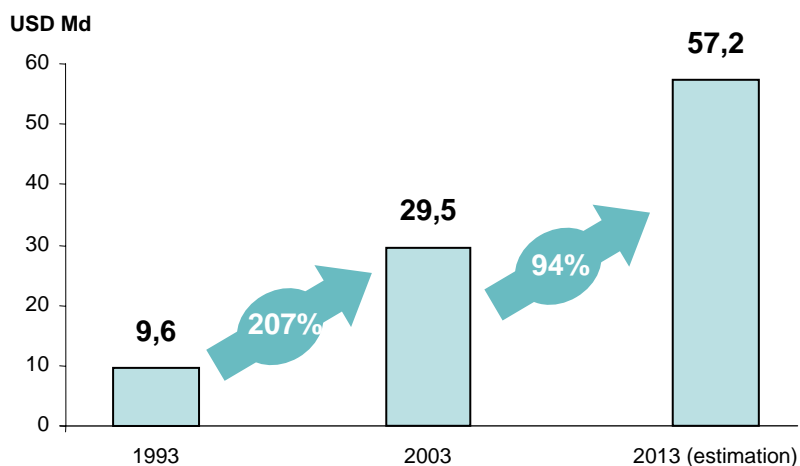


Figure II - 13 : évolution des primes de réassurance vie (USD Md) depuis 1993 – 2013e

Le marché est extrêmement concentré : les Etats Unis et l'Europe concentrent 90% des primes de réassurance pour un taux de cession global de seulement 1,8% (SWISS RE [2004a]). Si une pandémie devait toucher les deux grands marchés de réassurance vie (Etats-Unis, Europe), aucune diversification géographique ne pourrait alors s'opérer au sein des portefeuilles des réassureurs, ce qui révèle la nature systémique du risque de pandémie.

Marché	Part des primes d'assurance vie	Part des primes de réassurance vie
Amérique du Nord	30%	66%
Europe	35%	25%
Asie	31%	3%
Amérique Latine	1%	1%
Reste du monde	3%	4%
TOTAL	USD 1.672 Milliards	USD 30 Milliards

Tableau II - 11 : Répartition géographique du marché de la réassurance vie (2003)

Le marché se caractérise aussi par un faible nombre d'acteurs. La tendance actuelle est la course à la taille. Déjà en 2002, les 10 premiers réassureurs vie se partageaient 85% du marché mondial (CAP GEMINI [2007]). Le mouvement de concentration des acteurs se poursuit (absorption de GE Insurance Solutions par Swiss Re en 2005, acquisition de Revios et Converium par la Scor en 2006 et 2007 respectivement).

Compagnie	Pays	Primes Vie Emises Brutes	Part des affaires Vie dans les primes totales émises (Vie + Non Vie)	Primes Vie Nettes
Munich Re	Allemagne	10 114	34,5%	9 604
Swiss Re	Suisse	10 379	39,8%	8 953
Reinsurance Group of America	USA	4 735	100,0%	4 346
Hannover Re	Allemagne	3 672	30,1%	3 136
General Re	USA	2 476	n/a	2 368
Scottish Re Group	Bermudes	2 177	100,0%	1 842
Scor	France	1 552	40,2%	1 464
ING Re	USA	2 342	n/a	996
Manulife	Canada	n/a	n/a	804
XL Re	Bermudes	597	16,2%	559
TOTAL TOP 10		38 044		34 072

Tableau II - 12 : Top 10 en 2006 des réassureurs vie (classés par primes vie nettes de rétrocessions, en USD Md)

Ainsi en première analyse, le marché de réassurance vie semble vulnérable au risque de mortalité extrême, car il se trouve concentré entre deux ou trois acteurs principaux.

Les tendances d'assurance et de réassurance vie sont largement dépendantes du type de branche et de marché :

- Pour les marchés mûrs, on observe une translation de l'offre de couverture du risque de mortalité vers le risque de longévité : offre de traités proportionnels sur des risques « *long tail* » encore mal connus, comme la longévité, la dépendance, l'invalidité ou les risques aggravés
- Pour les marchés en forte croissance, on assiste :
 - o au passage des produits annuels aux produits pluriannuels (épargne)
 - o à une transition d'un marché d'assurance collective à un marché individuel
 - o à une plus forte proportion de produits d'épargne que celle des marchés mûrs
- Pour les marchés émergents, l'accent est plus marqué sur :
 - o les produits à développement court (décès)
 - o le développement des assurances collectives

Bien que les réassureurs soient très actifs sur tous les segments de ce marché porteur, le risque de mortalité extrême demeure malgré tout un risque que les réassureurs couvrent avec beaucoup de réticence.

iii. *Limites de la réassurance vie*

▪ Pas de couverture du risque de mortalité extrême

Le risque de mortalité extrême est principalement constitué par le risque de pandémie. Le réassureur interprète la pandémie comme un grand nombre de décès indépendants qui ont la même cause, c'est-à-dire un phénomène de masse qui n'est pas de nature à activer une couverture XL par événement. D'autre part, les couvertures XL par tête / par événement classiques excluent systématiquement tous les risques de terrorisme, de guerre et autres risques NRBC (nucléaires, radioactifs, bactériologiques, chimiques) de la garantie.

Le marché de la réassurance traditionnel ne semble pas vouloir s'engager dans la couverture du risque de mortalité extrême. A ce jour, très peu de traités de réassurance sur risque de pandémie existent. Les produits n'ont pas été adaptés, les réassureurs n'étant pas prêts à inclure le risque de pandémie dans les traités XL par événement ; le *Stop Loss* n'offre pas non plus cette garantie.

Le développement du traité XL par événement incluant le risque de pandémie a été fortement freiné par sa rareté, sa faible capacité (de l'ordre de \$90 à \$150 millions) et surtout sa cherté, avec une tarification indicative variant de 4% à 15% de RoL pour les couvertures 2007 (**GUY CARPENTER [2006]**).

En fait, dans le cas du risque pandémie (et terroriste), l'argument du montant extrême des remboursements d'assurance ne suffit pas à lui seul à justifier le refus des réassureurs de couvrir ce type de risque.

Comme l'analyse **MICHEL-KERJAN [2005]**, les raisons semblent en effet plus profondes :

- comme le risque couru par un individu ne dépend pas uniquement de son propre mode de vie mais aussi de celui de son entourage, de sa communauté, de sa ville ou de son pays (il est en effet possible de contracter un virus parce que d'autres n'ont pas pris les mesures nécessaires de protection), des mesures gouvernementales sont requises pour mettre en place des standards nationaux de sécurité.

Malgré cela, le bénéfice retiré par l'effort d'un pays en matière de protection sanitaire peut être réduit à néant par un défaut de vigilance des pays adjacents : il y a donc nécessité d'interventions coordonnées entre états pour unir tous les efforts. Le risque de pandémie n'est pas uniquement l'affaire des (ré)assureurs : la couverture du risque de pandémie est une question de santé publique, qui milite pour une intervention de l'Etat ;

- en outre, en cas de réalisation du risque, les décisions (en situation de crise) prises par les autorités publiques peuvent sévèrement affecter les agents économiques, en leur occasionnant des pertes importantes. Cela pose un problème d'assurabilité car l'assurance ne couvre en théorie que les effets directs d'un événement (et non les conséquences des décisions publiques), ce qui milite une fois encore pour une intervention publique concertée dans la couverture de tous les sinistres (directs ou indirects) liés à une pandémie.

Ces arguments plaident en faveur d'une prise en charge par l'Etat et non par les réassureurs du risque de pandémie (ou terroriste), ou des partenariats privés-publics (à l'instar du GIE GAREAT pour le risque terroriste en France – Gestion de l'Assurance et de la Réassurance des risques Attentats et actes de Terrorisme).

- Risque de contrepartie

Il semble *a priori* légitime de supposer que le risque de mortalité extrême touchera tous les acteurs. Quel est par conséquent, l'intérêt de demander une protection à un réassureur qui sera probablement exposé à une mortalité extrême sur l'ensemble des affaires qu'il aura pu souscrire ? En cas de matérialisation du risque, ce dernier pourrait lui-même venir à manquer de ressources pour réassurer tous les sinistres à charge.

La réassurance repose elle aussi sur le principe de mutualisation. Si les risques devaient se réaliser de manière dépendante et dans de fortes proportions, la mutualisation des risques ne pourrait plus s'opérer : il n'y aurait plus suffisamment de « bons » risques pour compenser l'ensemble des « mauvais » risques.

Tout le système d'assurance pourrait imploser si plus aucun acteur n'avait suffisamment de ressources pour honorer ses engagements. Dès lors, en matière de mortalité extrême, la réassurance n'agit plus comme un transfert mais comme un échange de risque : on substitue un risque de contrepartie à un risque technique.

En cas de pandémie, on peut également s'attendre à une corrélation prononcée des sinistres entre lignes d'assurance d'ordinaire peu corrélées et à une contamination sur les marchés financiers :

- assurance vie : augmentation des risques décès et santé ;
- assurance IARD :
 - o augmentation des annulations d'événements (concerts, rencontres sportives) ;
 - o augmentation du risque crédit – caution, l'isolement forcé des personnes actives provoquant un ralentissement économique (une pandémie sévissant par exemple aux Pays-Bas pourrait conduire à fermer le port international de Rotterdam et engendrer ainsi une cascade de conséquences économiques pour l'ensemble de la chaîne logistique) ;
 - o indemnisation des interruptions d'activité ;
- gestion d'actifs : chute des marchés financiers (valeurs liées au tourisme, aux transports, etc.).

La véritable nature du risque de mortalité extrême ressort ainsi clairement : il s'agit d'un risque systémique, non mutualisable, diversifiable jusqu'à un certain point et surtout qui ne peut faire l'objet d'une couverture bilatérale uniquement avec un tiers preneur de risque comme un réassureur.

3.3 Intérêt d'une solution de marché

i. Définir un programme de couverture des risques

Les techniques de gestion alternative des risques d'assurance se sont développées en réponse à la limite voire l'absence de capacité du marché de la réassurance traditionnelle. Ce développement concourt à faire évoluer le modèle économique de l'assurance d'une mutualisation intra / externe du portefeuille au niveau de l'assureur avec partage de risque avec un nombre limité d'acteurs (les réassureurs), vers une fragmentation du risque transféré vers les marchés de capitaux (CUMMINS [2002]). Jusqu'au début des années 1990, la couverture des risques était intégralement supportée par les réassureurs, mais celle-ci était nécessairement limitée par leur niveau de fonds propres.

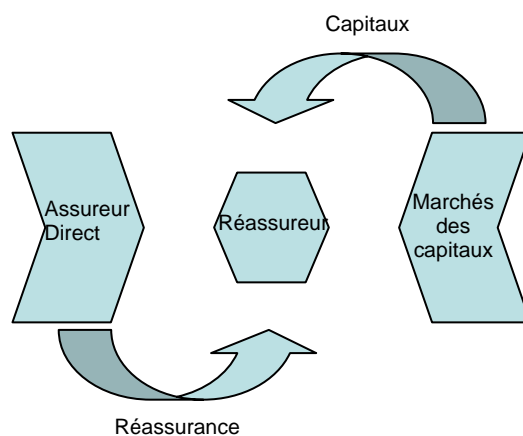


Figure II - 14 : Modèle traditionnel de transfert des risques

Le recours aux techniques de titrisation a permis d'externaliser la protection recherchée en accédant à une nouvelle source de capitaux, plus abondante et plus profonde : les marchés financiers.

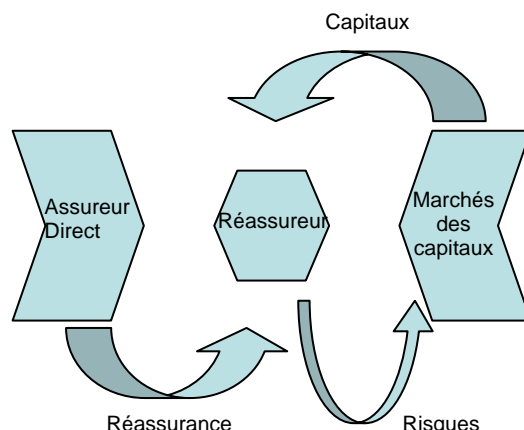


Figure II - 15 : Evolution du modèle - couverture des risques extrêmes par les marchés financiers

Si ce montage présente un intérêt certain pour le cédant, celui des investisseurs est également satisfait (**CHARPENTIER [2002]**). En effet, si les investisseurs peuvent toujours avoir accès aux risques d'assurance à travers des participations au capital des sociétés d'assurance, force est de remarquer que ces investissements n'apportent pas de réelle diversification, car les résultats des compagnies d'assurance sont très fortement dépendants des marchés financiers.

Au contraire, les obligations sur des risques 'purs' d'assurance donnent directement accès au risque de passif en les dissociant complètement des risques d'actifs, ce qui procure aux investisseurs une réelle diversification de leurs investissements et un rendement important en contrepartie d'un risque élevé, mais à priori décorrélé des autres risques financiers (taux, change, action...).

Un des enjeux de la titrisation est de définir la manière dont chaque obligation réplique le risque d'assurance sous-jacent. Au niveau global, la couverture sera de forme non proportionnelle avec seuil (« *attachment* »), c'est-à-dire activée à partir d'un certain niveau de sévérité de l'événement déclencheur (« *event trigger* ») et limitée au montant des fonds disponibles au sein du véhicule de titrisation (reflétant le montant du transfert opéré à l'occasion du placement du risque).

La fonction d'échange peut être l'une des 3 types suivants :

- type indemnitaire : le cédant reçoit une compensation calculée sur la base de son risque propre (par exemple les pertes ultimes nettes de réassurance) ;
- type index : la récupération du cédant est calculée sur la base du risque de l'ensemble des assureurs du marché et non de son risque propre (indice *Property Claims Service* aux USA) ;
- type paramétrique : la récupération du cédant est calculée sur la base d'une fonction prédéfinie qui utilise des paramètres identifiés en amont de la réalisation du risque.

Les investisseurs ont une préférence naturelle pour les couvertures index ou paramétrique dans la mesure où le mécanisme de couverture est plus simple et transparent. Le mécanisme indemnitaire plaît moins car il place les investisseurs en position d'asymétrie d'information par rapport au cédant. A l'inverse, les cédants préfèrent les couvertures indemnitaires qui les dispensent de supporter le risque de base.

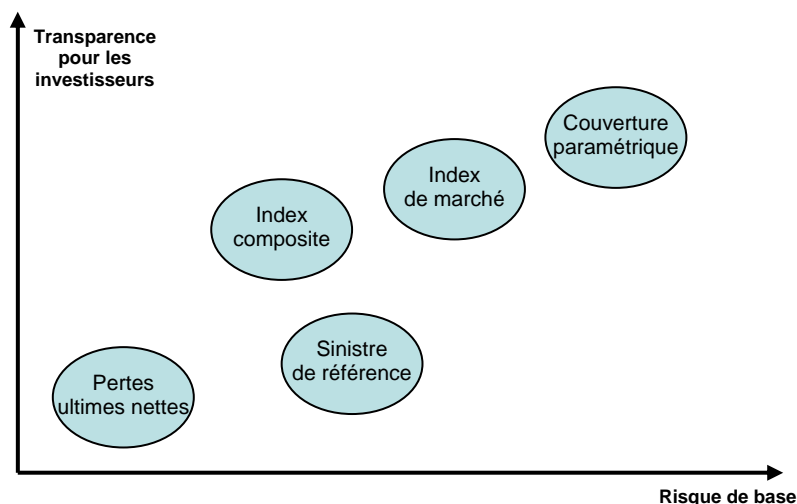


Figure II - 16 : Typologie des formules de transfert de risque

Dans la mesure où le cédant juge le risque de base acceptable, il aura intérêt à mettre en place la couverture index ou paramétrique. Il convient de noter toutefois que le risque de base peut être lissé par un mécanisme de provisionnement dans le bilan du cédant ou éventuellement cédé à un tiers.

La titrisation est une innovation financière qui reste cependant inaccessible aux acteurs de petite ou moyenne taille. En effet, la taille critique indispensable pour intéresser les marchés financiers est une émission d'au moins € 150 millions de nominal. La constitution d'un pool de titrisation permettrait ainsi à certains petits acteurs de partager les coûts élevés d'une telle opération (coûts fixes minimum de € 1 à 2 millions).

Les acteurs du montage pourraient être des réassureurs ou des courtiers, qui réaliseraient l'opération pour le compte de plusieurs acteurs de taille moyenne ; ils pourraient d'ailleurs offrir la couverture du risque de base en mutualisant les risques au sein d'un tel pool de portefeuilles homogènes.

ii. Bénéfices à attendre d'une couverture de marché

Le risque de mortalité extrême est un risque que l'assureur ne peut mutualiser ni intrinsèquement ni en exploitant l'interaction naturelle entre mortalité et longévité. Ne possédant pas de ressources internes illimitées pour faire face au risque de mortalité extrême, l'assureur doit le transférer à des tiers, contre versement d'une prime de réassurance. Mais le marché de la réassurance traditionnelle n'offrant pas de couverture du risque de mortalité extrême, l'appel aux marchés financiers apparaît comme le meilleur moyen de trouver une protection.

La titrisation des risques d'assurance offre de réelles opportunités en matière de *risk management* :

- tous les risques sont *à priori* « assurables » et par là-même transférables aux marchés financiers ;
- le montage exclut tout risque de contrepartie, ce qui est un avantage considérable par rapport à la réassurance où à peine sept réassureurs bénéficient actuellement de ratings de qualité AA (auprès de *Standard & Poor's*), ce qui limite considérablement le choix des réassureurs (et augmente la dépendance à l'égard de certains gros « *price-maker* ») ;
- la profondeur des marchés financiers pour couvrir les risques d'assurance procure une source de protection inépuisée à ce jour ;
- sous *Solvency II*, la reconnaissance du bénéfice de la titrisation est toujours en cours de discussion, mais en théorie le besoin en marge de solvabilité devrait être davantage réduit *via* la titrisation que par la réassurance traditionnelle, du fait de l'absence du risque de contrepartie.

La partie III étudie précisément la mise en place d'une telle solution, des enjeux comptables, juridiques et fiscaux liés au montage initial aux techniques de mesure du risque sous-jacent.

*

* *

PARTIE III – CONSTRUCTION D'UNE OBLIGATION INDEXEE AU RISQUE DE MORTALITE

Une étude menée en 2005 a permis au Groupe AXA de mettre en évidence une exposition latente importante au risque de surmortalité. Dans un contexte de crainte liée au développement de la grippe aviaire et des premiers cas de contamination à l'homme de la souche du virus H5N1 (animal), un scénario de hausse de 50% de la mortalité (comme ce fut le cas au moment de la grippe espagnole en 1918-1920) aurait conduit à une perte nette estimée à environ € 1,4 milliards dans les comptes de la compagnie (perte nette mesurée comme la différence entre les montants à régler nets des réserves).

Ce montant aurait représenté environ un tiers du résultat annuel du Groupe : l'exposition était potentiellement trop importante pour ne pas envisager des pistes pour la réduire. Cette étude menée à travers le Groupe (dans près de 15 pays) a permis d'isoler les sources probables de pertes (pays, âge, sexe, ligne de produits des portefeuilles assurés) et d'amorcer une réflexion conjointe entre le Group Risk Management et la Direction Centrale des Finances du Groupe afin de trouver des solutions pour faire face à cette exposition latente. Le but était donc de couper la queue de distribution du risque de mortalité sur une plage de déviation comprise entre 6% et 50%, les premiers 6% faisant l'objet d'une rétention justifiée par l'impact absorbable des pertes nettes (€ 300 millions) et le principe de couverture naturelle mise en évidence dans la partie précédente.

Après un bref aperçu de la structuration générale du *Mortality bond* (**Section 1**), nous développons de manière détaillée les enjeux, choix et résultats intermédiaires de calibration du modèle retenu (**Section 2**) pour mieux illustrer les simulations numériques effectuées dans le but d'obtenir un ensemble de mesures de risque, à savoir les probabilités théoriques de perte sous-jacente à chaque tranche de risque émise (**Section 3**). Nous nous interrogeons enfin sur les avantages et limites d'une telle approche et discutons d'autres alternatives (**Section 4**)

Section 1 – La structure du *Mortality Bond*

1.1 Schéma & fonction de payoff

i. Schéma général et principes de base

Le schéma de fonctionnement des *Cat bonds* repose sur le même principe que les « *Collateralised Debt Obligations* » (« CDO ») : des risques ou passifs peu ou pas liquides (polices d'assurance, prêts immobiliers, crédits attachés à des cartes de crédit...) sont transformés en actifs liquides, sous forme d'obligations dont le remboursement du principal et la régularité des flux de coupons sont exposés au risque sous-jacent.

Pour les *Cat bonds* en général, le risque sous-jacent est la survenance et l'intensité d'une catastrophe naturelle (tremblement de terre, tempête...). Dans le cas particulier des *Mortality bonds*, le risque sous-jacent est constitué par la déviation de la mortalité suite à des chocs de toute nature et notamment du type pandémie.

Dans le *Mortality bond* d'AXA, c'est la filiale de réassurance du Groupe, AXA Cessions (appelée « *Sponsor* »), qui transfère son exposition au risque de mortalité à un véhicule créé *ad hoc*, baptisé OSIRIS Capital (par référence au dieu égyptien de la mort et de la résurrection). Ce *Special Purpose Vehicle* ou SPV, ne pouvant faire face à ce risque, transfère à son tour le risque de mortalité sous forme d'obligations indexées décrites ci-dessous.

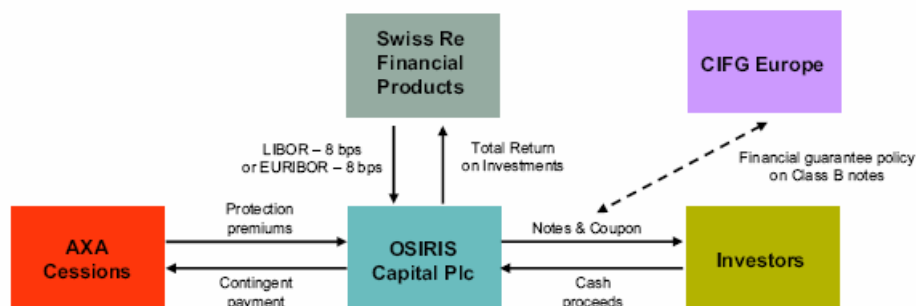


Figure III – 1 : Schéma de fonctionnement du *Mortality Bond*

Les contrats d'assurance décès non liquides souscrits par les entités d'AXA France, Japon et USA (tous trois réassurés par AXA Cessions) sont ainsi devenus des obligations liquides transférables sur un marché financier. Ces actifs sont découpés en fonction de leur profil de risque en différentes tranches d'obligations : ils constituent le support d'investissement pour les investisseurs intéressés par une exposition au risque de surmortalité.

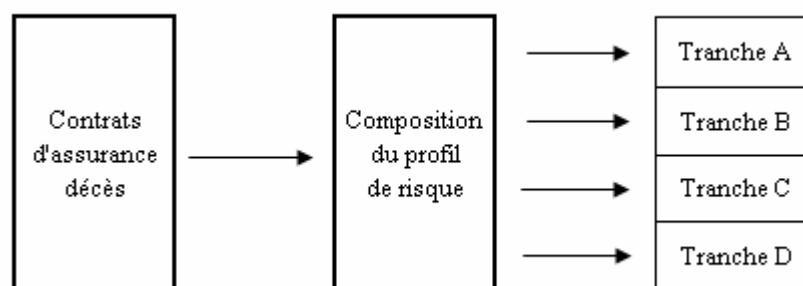


Figure III – 2 : Tranching du risque de mortalité transféré au marché

L'argent investi par les investisseurs est collatéralisé, c'est-à-dire placé sur des actifs sans risque, du type obligations d'Etat ou papier commercial à court terme de bonne qualité (rating P1/ P2) : ainsi la seule exposition prise par les investisseurs réside dans le risque de déviation de mortalité de la tranche souscrite.

Si le risque sous-jacent ne se matérialise pas sur une période de temps clairement établie (appelée 'période de risque'), l'investissement initial sera rendu aux investisseurs, sans perte de capital. En revanche, si le risque se matérialise, alors les investisseurs (ayant mis en jeu le principal de leur investissement) risquent de perdre une partie ou la totalité de leur mise initiale. En contrepartie, les investisseurs sont rémunérés par le coupon ou « *spread* » sur la tranche souscrite. Plus le risque encouru est important (*resp.* faible), plus le *spread* sur la tranche sera élevé (*resp.* faible). Pour chaque tranche d'obligation, le multiple du *spread* par rapport à la valeur du risque sous-jacent traduit le degré d'aversion au risque plus ou moins fort du marché.

La période sous risque sur laquelle porte le risque de déviation de la mortalité est de 4 années (dans le cas d'AXA, courant du 1^{er} janvier 2006 au 31 décembre 2009). Les investisseurs sont en risque à tout moment sur l'intégralité de cette période.

La particularité de l'obligation émise par AXA en novembre 2006 est la faculté pour l'émetteur de pouvoir 'exercer' la protection offerte par le *Mortality bond* si la surmortalité se réalise avant la maturité de l'obligation, contrairement aux obligations émises par Swiss Re et Scottish Re auparavant (option de type « *lookback* » pour ces dernières vs. formule d'incrémentation des sommes perdues pour AXA – qui ressemble plus à une option de type « américaine »).

ii. *La fonction de payoff de la protection*

Les niveaux de déclenchement de la réduction du principal varient d'une structure à l'autre de *Cat bond*. Pour les *Mortality bonds*, il s'agit de la déviation par rapport à un indice de mortalité au début de la période sous risque.

La fonction de *payoff* (vue de l'investisseur) est exprimée en % du principal initialement investi par l'investisseur. Pour un niveau de référence q_0 de mortalité et un niveau q de mortalité réalisée sur chaque année de la période de risque (COX & LIN [2005a]) :

$$Payoff = \begin{cases} 100\% & \text{si } q \leq q_0 \\ 100\% \cdot \frac{q - PtAttach}{PtExhaust - PtAttach} & \text{si } PtAttach < q \leq PtExhaust \\ 0\% & \text{si } q > PtExhaust \end{cases}$$

Soit encore vue de l'émetteur :

$$Payoff = \frac{\text{Min}\{PtExhaust - PtAttach, \text{Max}\{0, q - PtAttach\}\}}{PtExhaust - PtAttach}$$

Cette formule traduit le principe que l'investisseur (*resp.* l'émetteur) recevra 100% du remboursement de l'obligation à terme (*resp.* 0%) si la mortalité réalisée est inférieure à la mortalité de référence, autrement dit s'il n'y a pas eu de déviation de mortalité. En revanche, l'investisseur verra son principal se réduire linéairement jusqu'à 0% (*resp.* sa protection augmenter linéairement jusqu'à 100%) si la mortalité franchit certains seuils définis à l'avance.

La mesure de la mortalité réalisée s'effectue en moyenne sur deux années consécutives de la période sous risque : il y a donc 3 périodes de mesures de la mortalité sur le terme des 4 ans de l'obligation. La mesure de mortalité est exprimée en base 100 : cette base est définie par rapport à un taux de mortalité de référence normalisé pour le portefeuille sous-jacent de risques décès (pays, âges, sexes). L'expression de la mesure de la mortalité en base 100 facilite la lecture des déviations au cours du temps.

Pour l'obligation d'AXA, les niveaux d'attachement (ou « *trigger* ») et d'expiration (ou « *exhaustion* ») des 4 tranches modélisées sont les suivantes (bien que seules les tranches B, C & D aient été finalement émises) :

Tranche / Classe	Pt d'Attachement ou « <i>Trigger</i> »	Pt d'Expiration ou « <i>Exhaustion</i> »	1 point déviation de mortalité en % réduction tranche
A	119	124	20%
B	114	119	20%
C	110	114	25%
D	106	110	25%

Tableau III – 1 : Structure de risque transféré

Entre les deux points d'attachement et d'expiration de la tranche D, le *payoff* est linéaire par rapport aux bornes de la tranche. Tout point de pourcentage excédentaire de mortalité sur cette tranche reflète une perte de 25% sur le principal des investisseurs.

La structure de *payoff* d'un *Cat bond* est donc analogue à un *Call spread* pour le marché des options :

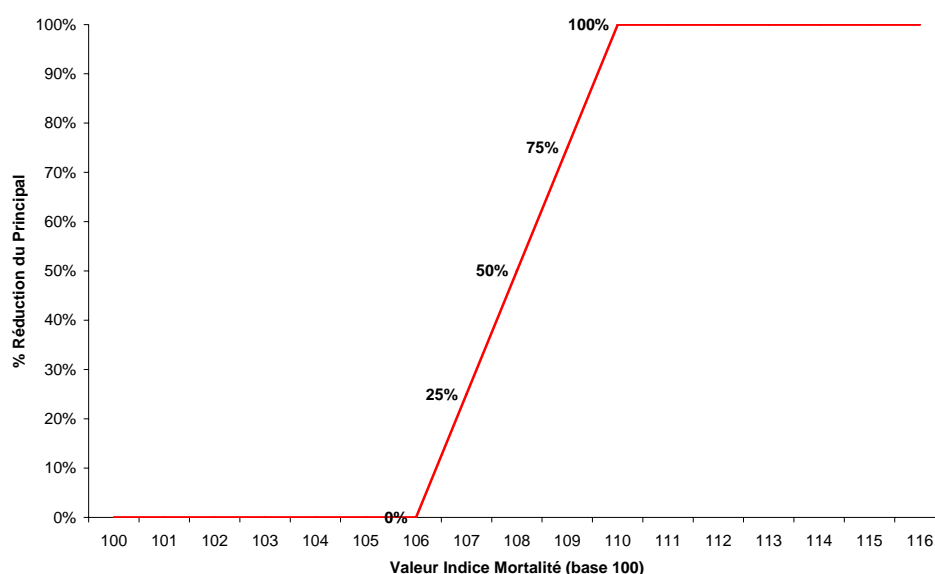


Figure III – 3 : Illustration de la fonction de *payoff*

Ainsi les investisseurs souscrivant la tranche D de l'émission (la plus « *junior* » pour utiliser la terminologie obligataire), sont exposés dès les premiers 6% de déviation de la mortalité sur deux années consécutives au cours des 4 années de la période sous risque : ils risquent de perdre 100% de leur investissement en principal sur cette tranche si la mortalité dévie jusqu'à 10% par an sur deux années consécutives.

L'expiration de la tranche B à 119% signifie ainsi qu'il faut une déviation de la mortalité jusqu'à 38% sur une année ou 19% sur deux années consécutives au cours de la période sous risque pour que l'investisseur perde sa mise à 100% (s'il a investi sur cette tranche initialement).

Au moment du placement (« *bookbuilding* »), les participants de marché sont libres de choisir la tranche sur laquelle ils désirent mettre leur investissement en jeu : plus la tranche « attache » à un point bas de la « structure de capital » (de la plus *junior* à la plus *senior* en termes de rang de liquidation / subordination), plus le profil de risque est important (une faible déviation de mortalité suffisant à réduire le principal) et plus la rémunération face au risque sera ou devrait en conséquence être élevée (cf. réflexion sur les *spreads* - Partie IV).

Ces définitions et principes sont repris de manière plus formalisée dans la Section 3.2 pour définir les différentes métriques de risque liées à ces tranches : probabilité d'occurrence et espérance de perte moyenne estimée à partir du modèle présenté à la Section 2.

1.2 Choix de la juridiction pour le SPV : enjeu comptable / réglementaire / fiscal

Le choix de juridiction pour implanter le SPV est essentiellement dicté par des contraintes réglementaires, fiscales et de marché. Traditionnellement, les îles Caymans, Bermudes ou anglaises (Jersey, Guernesey, Isle of Man), l'Irlande ou le Luxembourg étaient et demeurent les implantations privilégiées pour localiser des SPV.

Sur le plan réglementaire, la faible capitalisation requise pour installer un SPV, la rapidité des droits d'enregistrement et le degré d'intervention limité du régulateur local dans les affaires du SPV sont des critères importants aussi bien pour les émetteurs que pour les investisseurs. Ainsi l'Irlande et les îles Caymans sont devenues au fil du temps des places de référence pour les émissions de *Cat bonds*.

Sur le plan juridique, la protection du placement des investisseurs au sein du collatéral est un paramètre clé : il faut que le droit local protège de manière très claire le principe d'étanchéité des tranches d'obligations émises (notion de « *cell protection* » en droit anglo-saxon). Ceci permet d'éviter qu'un investisseur ayant perdu son principal sur une des tranches / séries d'obligations puisse réclamer son principal sur les compartiments d'autres souches non touchées par l'évènement de risque sous-jacent.

Outre les aspects de gestion back-office (ségrégation des comptes, gestion séparée des flux de paiement), c'est bien la solidité juridique du montage du SPV qui est en jeu et qui conditionne la confiance des émetteurs et des investisseurs pour telle ou telle localisation du véhicule de titrisation.

Par ailleurs, ces pays jouissent généralement d'un environnement fiscal favorable : ce sont des paradis fiscaux dans lesquels la taxation des revenus et des plus-values est extrêmement concurrentielle. Ainsi les investisseurs ou les émetteurs ne courent pas le risque de se voir prélever une partie des sommes payées ou reçues.

Toutefois, pour les émetteurs français, il y a un risque marginal à implanter un SPV dans des îles trop exotiques : le fisc français risquerait en effet de taxer les primes payées par le *Sponsor* du SPV, ce qui constituerait un surcoût dommageable à un montage déjà onéreux en termes de frais de montage.

L'Irlande constitue à ce titre un compromis acceptable entre : d'une part, la faible capitalisation requise (€ 40,000 pour un SPV simple *vs.* \$1,000 aux Caymans) et d'autre part, la sécurité juridique sur la protection des avoirs des investisseurs et la relative clémence du fisc français.

La qualification juridique du montage sur le transfert du *Sponsor* vers le SPV peut revêtir différentes formes :

- Si le risque transféré est paramétrique, c'est-à-dire repose sur une formule d'évaluation calibrée au mieux mais qui laisse subsister un risque de base non nul pour le *Sponsor*, alors une qualification juridique et comptable sous format 'dérivés' (régé par les conventions ISDA) peut être envisagée et autorise une capitalisation réduite du SPV (en Irlande notamment)
- Si en revanche, le risque transféré s'apparente davantage à un risque indemnitaire, reflétant au plus près l'exposition du *Sponsor*, alors le montage s'apparente davantage à de la réassurance traditionnelle et devra en conséquence être documenté juridiquement comme un contrat de réassurance. La capitalisation du SPV devra en tenir compte et l'Irlande distingue ainsi les SPRV « *Special Purpose Reinsurance Vehicle* » qui sont davantage régulés par le FSA (autorité locale de contrôle de l'industrie financière) et soumis à une contrainte de capitalisation de l'ordre de € 700,000.

Cette règle juridique conditionne ensuite le traitement comptable sous IFRS.

Pour assurer une reconnaissance du transfert effectif de risque sur un plan comptable, il faut impérativement que le SPV soit déconsolidé de l'émetteur en dernier ressort. Ceci se matérialise notamment par une indépendance totale de la gestion opérationnelle du SPV (qui n'est qu'un véhicule de transfert).

Cela signifie aussi qu'à la liquidation du SPV, aucun *boni* résiduel de liquidation ne peut revenir au *Sponsor* : tout profit éventuellement dégagé par le SPV (du fait d'une dotation initiale en moyens mal calibrée par exemple) part aux charités du pays hôte. Enfin, si le SPV est lié par un contrat dérivé au *Sponsor*, alors une estimation régulière en « *Marked-to-Market* » devra être enregistrée à chaque arrêté comptable pour satisfaire aux exigences de la norme IAS 32 (valorisation d'instruments dérivés, *cash-settled* notamment).

La phase II des IFRS pourrait enfin utiliser le marché des *Cat bonds* comme source de valorisation indicative de la valeur des passifs d'assurance, au moins pour ceux ayant fait l'objet d'un transfert aux marchés financiers.

Force est de constater que la France reste en retard sur le terrain de l'innovation financière et de l'implémentation des SPV. A l'occasion du Congrès annuel des Actuaire tenus en juin 2007, l'ACAM (dans sa présentation **Titrisation de risque d'assurances – Projet de FCT [2007]**) n'a toutefois pas manqué de souligner la volonté de l'Etat de « *favoriser la réalisation de telles opérations de transfert de risque en France* » et pour cela de doter la France de véhicules dédiés baptisés « Fonds Commun de Titrisation » (FCT) à l'image des « Fonds Communs de Créances » (FCC).

En fixant le cadre juridique de manière harmonisée en Europe, la transposition de la Directive « Réassurance » (2005/68/CE) du 16 novembre 2005 devrait favoriser l'émergence de telles structures.

L'ACAM souligne toutefois dans sa présentation que ces véhicules devront être intégralement financés (pas de levier). Par ailleurs, le transfert de risque effectué à travers ce type de véhicule ne devrait pas faire l'objet d'arbitrage réglementaire au sens où ces opérations bénéficieraient d'un crédit en termes de solvabilité plus favorable que la réassurance traditionnelle (au moins dans une approche Solvency I). Une lecture plus économique pourrait toutefois être envisagée dans une approche Solvency II.

Section 2 – Calibration du modèle paramétrique

La calibration du modèle paramétrique permettant de mesurer les déviations de mortalité a requis un travail très important de recherches, sélection et reformatages de données publiques. Outre le recensement, la sélection et l'analyse d'une littérature très abondante sur le sujet de la mortalité, nous avons également dû opérer des choix méthodologiques tout au long de la réflexion qu'il serait trop long d'exposer dans le cadre de ce mémoire.

Ce travail de recherche approfondie a privilégié les approches les plus conservatrices de projection de la mortalité afin de ne pas se voir reprocher par les investisseurs une sous-estimation du risque transféré *via* le *Mortality bond*.

Par ailleurs, à travers l'étude menée en 2005 par le Groupe AXA, le choix d'un portefeuille synthétique reflétant au mieux le profil d'exposition du Groupe a pu être progressivement constitué, permettant de minimiser le risque de base, c'est-à-dire l'écart entre l'exposition réelle du portefeuille et l'exposition synthétique transférée au marché. La présentation détaillée du portefeuille retenu permet de comprendre la construction de l'indice de mesure de la mortalité transféré au marché et par là même la démarche analytique sous-jacente à la modélisation du risque de déviation de la mortalité.

2.1 Présentation du portefeuille

Trois pays ont été retenus pour approcher l'exposition globale du Groupe : la France, le Japon et les USA. Les pourcentages reflètent la distribution des sommes assurées par têtes d'assurés, c'est-à-dire la part relative des sommes en jeu en termes d'exposition pour AXA, nette des provisions mathématiques inscrites au bilan.

i. Portefeuille France

Du fait de son poids dans le résultat du Groupe AXA et sa part de marché sur les assurances collectives de personnes, la France est l'un des pays les plus vulnérables à un scénario de pandémie (type grippe aviaire ou grippe espagnole).

Les polices d'assurance décès vendues par AXA France concernent une population dans la force de l'âge, représentative du marché du travail. Une approche simplifiée de décomposition uniforme a été retenue pour la France (en l'absence d'une décomposition exacte du portefeuille) :

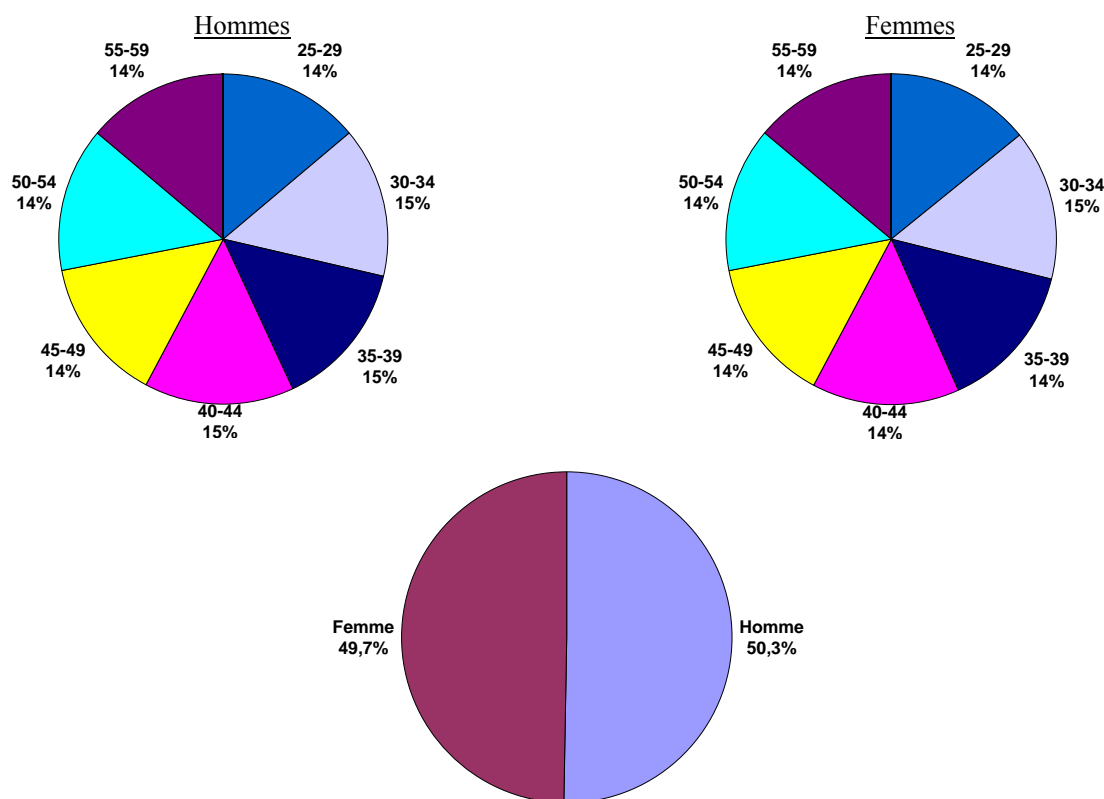


Figure III - 4 : Composition du portefeuille sur la France

Sur € 93 milliards de réserves statutaires (source : Rapport Annuel 2005 du Groupe AXA), € 600 millions de capitaux sont sous risque en cas de hausse de 50% de la mortalité : c'est surtout en assurance collective que l'exposition est la plus marquée avec près de € 490 millions de capitaux sous risque en cas de pandémie.

L'exposition au risque de décès sur les assurances crédit (prêt immobilier) s'élève à environ € 80 millions. Enfin, le risque sur les polices individuelles se monte à près de € 30 millions : il est essentiellement constitué de rentes viagères structurées, assorties d'un retour de prime en cas de décès (« *Guaranteed Minimum Death Benefit* » ou « *GMDB* »). Le chiffre élevé des risques sur les assurances collectives est à mettre en rapport avec le faible montant des réserves statutaires (€ 21 milliards) : les primes collectées sont utilisées pour régler les sinistres de l'année en cours.

Par ailleurs, tout « gain » sur les rentes viagères ne pourrait pas être utilisé pour les assurances décès collectives dans la mesure où ces « gains » doivent être redistribués aux têtes survivantes (principe de la clause de PB), même si les réserves sur ces produits d'épargne viagers sont les plus élevées : € 70 milliards.

Sur le portefeuille France, le sinistre moyen annuel pour les assurances collectives s'élève à € 680 millions et porte sur environ 5,000 décès par an (en 2005). En vie individuelle, le montant des sinistres est de € 100 millions pour 3,000 décès.

ii. Portefeuille Japon

Le portefeuille japonais reflète un mixte de polices plus variées qu'en France. L'exposition touche aussi bien des temporaires décès que des assurances crédit emprunteur ou d'autres formes de garanties en cas de décès sur certains contrats en unité de comptes vendus par la filiale AXA Life Japan. La présence de jeunes âges dans le portefeuille traduit la souscription pour le bénéfice de jeunes bénéficiaires et non une souscription directe par cette tranche d'âge.

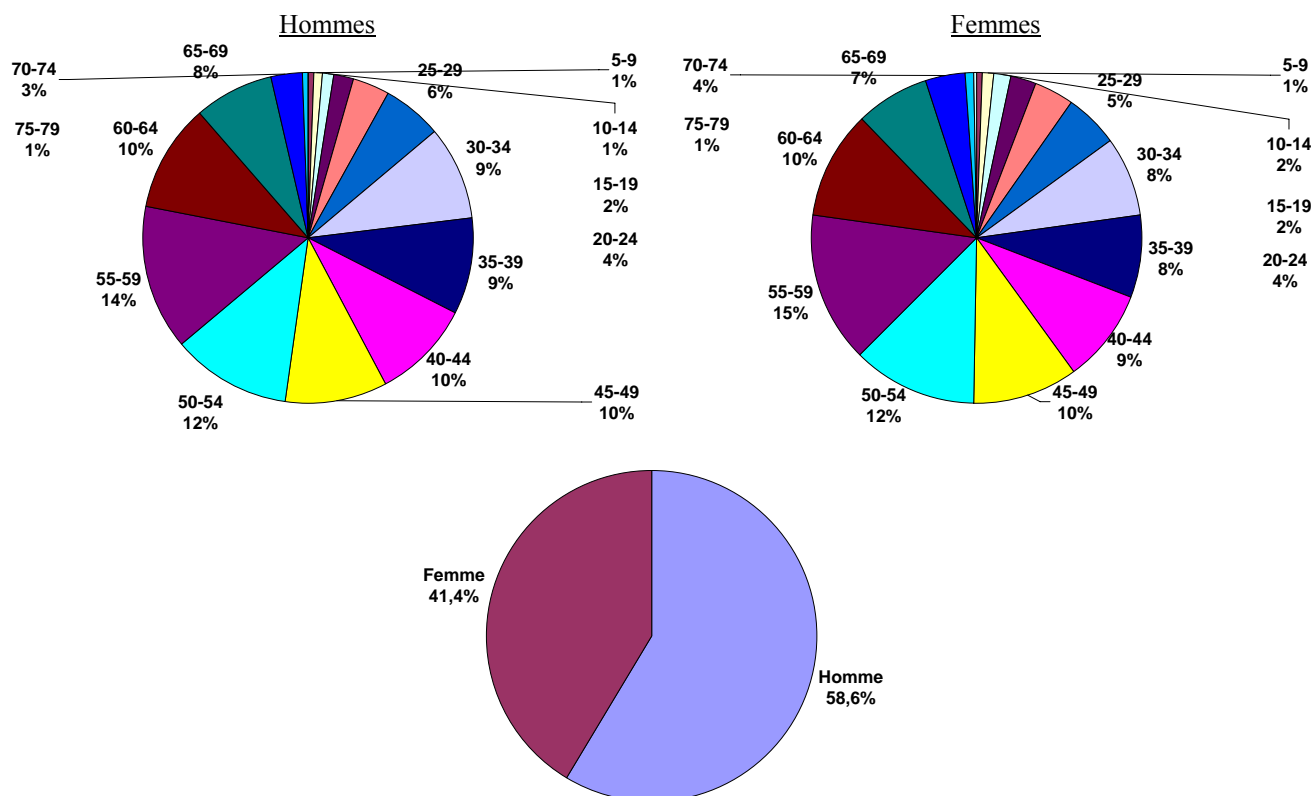


Figure III - 5 : Composition du portefeuille sur le Japon

L'exposition au scénario de grippe aviaire (déviations de 50% de la mortalité par rapport à la normale) s'élève à environ € 240 millions pour le Japon. Deux lignes de produits sont particulièrement affectées :

- Vie entière (21% des réserves de la filiale en vie, soit € 5,6 milliards), particulièrement sensible à une hausse brutale de la mortalité étant donné les capitaux fixes garantis par l'assureur
- Santé (8% des réserves, soit € 2,1 milliards) : les produits d'assurance santé et incapacité vendus au Japon intègrent une protection en cas d'aggravation de la morbidité des assurés, d'où une sensibilité particulière en cas de scénario du type grippe aviaire

Au cours des 3 dernières années, € 585 millions ont été réglés au titre des sinistres individuels et € 183 millions pour les couvertures de groupe. Sur la seule année 2005, environ 12,250 décès ont fait l'objet d'un règlement de sinistre individuel. Les données brutes pour les couvertures collectives ne sont pas accessibles facilement dans la mesure où ce type de police est souscrite par plusieurs assureurs à la fois sous un format analogue à du *quota-share* en réassurance (chaque assureur possédant ainsi son propre registre de sommes assurés et de sinistres subis et informant les autres en cas de paiements).

iii. Portefeuille US

Le portefeuille américain est traditionnellement plus exposé au risque de longévité (portefeuille de rentes) qu'au risque de mortalité.

Toutefois, certains contrats emprunteurs ou d'autres formes de garanties décès sur des contrats en unité de comptes (GMDB) justifient la présence des USA dans le portefeuille synthétique transféré au marché.

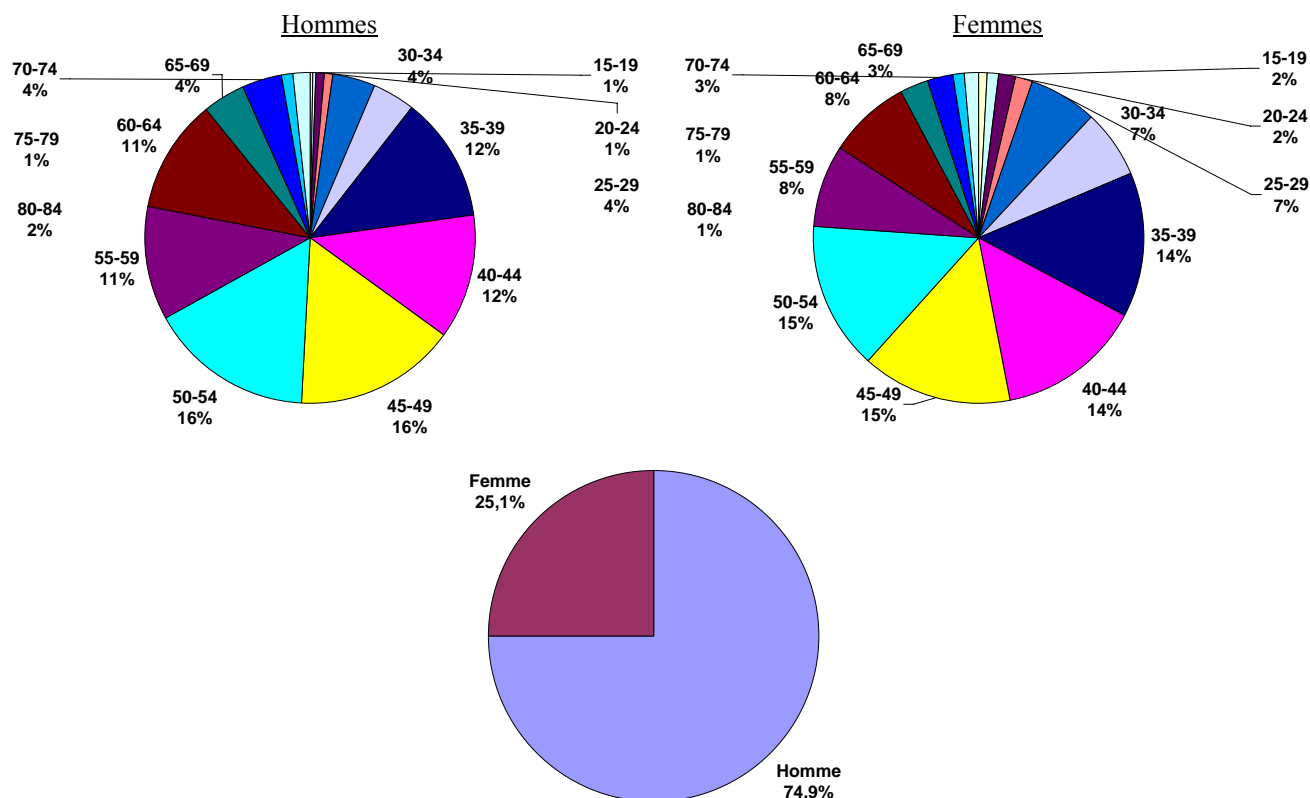


Figure III - 6 : Composition du portefeuille sur les USA

Bien que représentant une part réduite des réserves totales en vie de la filiale AXA Financial & MONY (€ 1,2 milliards sur un total de € 93 milliards en 2005), le « protection business » (vie entière et temporaire décès) est particulièrement sensible aux chocs de mortalité.

Ainsi, le portefeuille américain traditionnel est exposé à hauteur de € 180 millions en cas de choc. Les couvertures offertes à travers les GMDB (contrats en unité de compte) exposent également le Groupe au risque de pandémie. En 2005, environ 41,000 polices ont fait l'objet d'un règlement pour cause de décès représentant un montant brut de capitaux réglés de \$1,3 milliards (net de réassurance, mais avant relâchement de réserves).

Le solde de l'exposition nette (€ 380 millions) porte essentiellement sur les pays d'Asie-Pacifique : Australie et Hong-Kong notamment. Etant donnée la forte proximité de ces pays avec le Japon, le choix a été fait de couvrir ces pays à travers une couverture « macro » sur le Japon (où les données de mortalité de la population sont plus facilement disponibles).

2.2 Construction de l'indice synthétique de mortalité

La pondération apportée au portefeuille synthétique globale a ainsi été déterminée afin de refléter au mieux l'exposition notionnelle du Groupe AXA :

- France : 60% (proxy pour l'Europe de l'Ouest)
- Japon : 25% (proxy pour l'Asie du Sud-Est en général)
- USA : 15%

Sur la base des données disponibles en 2003⁵, on obtient les références suivantes de mortalité « naturelle » normalisée sur le profil de la population assurée (par âge et par sexe) des trois portefeuilles sélectionnés :

	<u>France</u>	<u>Japon</u>	<u>USA</u>	<u>Total</u>
Population (2003)	60,200,000	126,000,000	289,400,000	475,600,000
q_x normalisé portefeuille (%)	2.78	4.53	8.53	6.74
Mortalité "naturelle" attendue	167,500	570,400	2,469,000	3,206,900

L'indice de mortalité pour chaque pays 'c' est construit à partir de la formule suivante :

$$q_t^c = \sum_x \alpha_{m,x}^c \cdot q_{m,x,t}^c + \alpha_{f,x}^c \cdot q_{f,x,t}^c$$

Avec les notations :

$\alpha_{m,x}^c$ est le poids pour les hommes d'âge 'x' du pays 'c'

$\alpha_{f,x}^c$ est le poids pour les femmes d'âge 'x' du pays 'c'

$q_{m,x,t}^c$ est le taux de mortalité « officielle » pour les hommes d'âge 'x' du pays 'c'

$q_{f,x,t}^c$ est le taux de mortalité « officielle » pour les femmes d'âge 'x' du pays 'c'

Les poids sont fournis par la ventilation des paragraphes (i), (ii) et (iii) précédents.

La mortalité est calculée en moyenne sur deux années consécutives :

$$\bar{q}_t^c = \frac{1}{2} \cdot (q_t^c + q_{t-1}^c)$$

⁵ Bien qu'émis en 2006, le *Mortality bond* ne disposait que des données de mortalité jusqu'à 2003 (on observe un décalage de 18 à 24 mois entre la fin d'une année de référence et la publication des données de mortalité)

L'indice base 100 pour un pays donné est donc défini par :

$$IM_t^c = \frac{\bar{q}_t^c}{\bar{q}_{2003}^c}$$

Enfin, en tenant compte des pondérations retenues, l'indice combiné de mortalité est donc construit ainsi :

$$ICM_t = \sum_c \alpha_c \cdot IM_t^c \quad \text{où } \alpha_c \text{ est le poids du pays 'c' dans l'indice composite}$$

2.3 Tendances ; Fréquence / Sévérité

La mortalité est un phénomène naturel mais revêt des causes multiples au-delà des facteurs âge / sexe. Il présente des difficultés à être modélisé simplement sans entrer dans des considérations médicales qui dépassent le cadre de ce mémoire (*cf.* modèles de RMS ou Swiss Re publiés respectivement en juin 2006 et avril 2007).

Par soucis de simplicité, deux facteurs ont été isolés pour modéliser la mortalité à court terme (horizon 4 ans) :

- Mise en évidence d'une tendance de fond d'accroissement ou d'infléchissement de la mortalité due à la structure d'âge de la population ou à des modifications des styles de vie (sédentarisation, obésité ou au contraire exercice physique, meilleur suivi médical, développement des antibiotiques...): cette tendance est obtenue en mesurant sur longue période (30 ans) l'évolution des séries temporelles de taux de mortalité historiques du portefeuille retenu pour l'analyse
- Au-delà de la tendance « naturelle » que l'on peut prolonger à court terme sans avoir à discuter des conditions terminales de la durée de vie humaine (comme dans un modèle Lee-Carter), des chocs de mortalité peuvent provenir de différentes causes et notamment de pandémies : la calibration d'un modèle d'écart de la mortalité par rapport à la tendance naturelle réside dans l'étude des pandémies passées, leur fréquence et leur sévérité – des choix méthodologiques s'imposent ici pour caler au plus près de la réalité historique / statistique connue à ce jour
- Une autre source de choc de mortalité a également été envisagée : le risque terroriste. Toutefois, celui-ci est délicat à modéliser car il repose sur des données historiques qui ne sont pas facilement exploitables. Par ailleurs, la pluralité des causes de surmortalité liées à un acte terroriste sont multiples et n'ont pas toutes les mêmes conséquences à court, moyen et long terme : aussi tragique soit-il, l'évènement du 11 septembre n'a pas les mêmes retombées en terme de mortalité qu'une attaque nucléaire ou bactériologique / chimique dans une grande ville par exemple. Par ailleurs, la nature digitale du risque terroriste est difficile à exploiter pour inférer des probabilités de survenance et de perte même si celles-ci peuvent être estimées (*cf.* **Annexe C**).

Nous avons donc pris le parti d'écarter cette source de surmortalité pour concentrer l'analyse sur des causes ayant un déroulement dans le temps et non des 'singularités' instantanées comme les actes terroristes.

i. Calibration de la tendance de base de la mortalité

L'analyse des séries temporelles des niveaux de mortalité historique permet de dégager une tendance de fond qui reflète un constat devenu classique : la baisse pour une tranche d'âge donnée des taux de mortalité et par là-même un rallongement de la durée de vie humaine.

La source des données est entièrement publique. Les sources utilisées sont les données démographiques recensées par les agences gouvernementales / ministères des trois pays composant l'indice :

- France : Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques (INSEE) ; www.insee.fr
- Japon : Ministère de la Santé, du Travail et de la Sécurité Sociale ; www.mhlw.go.jp/english
- USA : Center for Disease Control & Prevention (CDC) ; www.cdc.gov

Les données utilisées dans le cadre du *Mortality bond* sont publiées sur une base annuelle par ces trois agences avec un décalage dans le temps compris entre 18 et 24 mois en moyenne (bien que des données intermédiaires incomplètes soient disponibles). Cette publication officielle et régulière assure un suivi en temps quasi réel des niveaux projetés initialement. Ces données brutes sont disponibles sur un historique d'au moins 40 ans (ce n'est pas nécessairement le cas pour des pays où l'outil statistique publique est moins développé ou plus récent).

Les données retenues sont celles correspondant au découpage par sexe et tranche d'âge du portefeuille (pondérations fournies à la section précédente). Là où les données brutes de mortalité n'étaient pas directement disponibles car pas assez détaillées, nous avons dû effectuer des regroupements par tranche d'âge : ceci réduit quelque peu la qualité de l'information mais permet une approximation acceptable (vrai pour les USA).

On cherche ainsi le modèle AR(p) sur les taux d'évolution de mortalité qui représente le mieux, au sens de la régression, la tendance historique des données de mortalité du portefeuille. L'analyse détaillée des séries temporelles est fournie en **Annexe E**.

Sur chaque modèle, un jeu de 1 à 10 paramètres (y compris la constante) a été testé pour ajuster au mieux les données de la régression à la tendance historique, appelée 'tendance de base' ci-après. Le choix a été fait de ne retenir qu'un seul type de modèle pour les trois pays, même si le nombre de paramètres requis pour minimiser les erreurs peut varier d'un pays à l'autre.

Il ressort de cette analyse que le modèle AR(p) le plus approprié pour ajuster les données est celui avec :

- $p = 6$ pour la France
- $p = 1$ pour le Japon et les USA

On travaille sur les séries différenciées à l'ordre 1 pour chaque pays c pris individuellement :

$$x_t^c = a_0 + a_1 \cdot x_{t-1}^c + a_2 \cdot x_{t-2}^c + \dots + a_p \cdot x_{t-p}^c + \varepsilon_t$$

avec $x_t^c = 1 - \frac{q_t^{c,base}}{q_{t-1}^{c,base}}$ et ε_t le terme d'erreur tel que $\varepsilon_t \propto N(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu \cong 0$

Les paramètres du modèle qui maximisent le coefficient de détermination, sont significatifs au regard du test de Student et minimisent la distribution moyenne des résidus sont donc les suivants :

Pays	\underline{a}_0	\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3	\underline{a}_4	\underline{a}_5	\underline{a}_6
France	0,0333	-0,0584	-0,1839	0,1111	-0,2859	-0,2834	-0,4260
Japon	0,0270	-0,1219					
USA	0,0159	-0,0337					

Distribution des résidus :

Pays	Moyenne	Ecart-type
France	-0,00014%	0,00289%
Japon	-0,00117%	0,01059%
USA	-0,00099%	0,01191%
Combiné	-0,0005%	0,0046%

On peut noter ainsi pour la France un caractère cyclique prononcé de la distribution des taux de mortalité au cours du temps. Nous n'avons pas d'explication particulière pour cette situation.

- Indice combiné

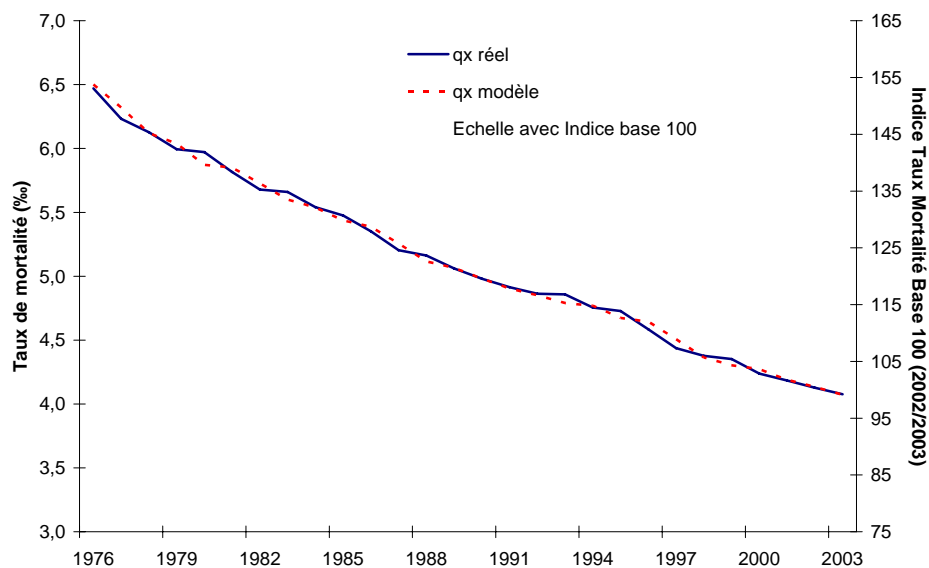


Figure III - 7 : Modélisation de la tendance de l'indice combiné

- France

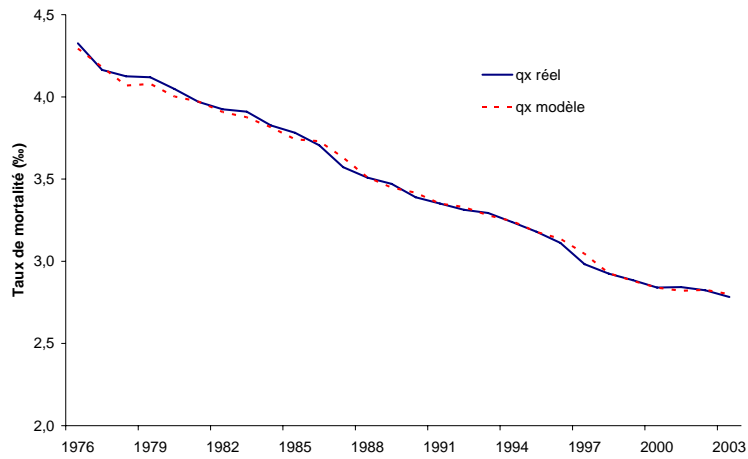


Figure III – 8 : Modélisation de la tendance de l'indice France

- Japon

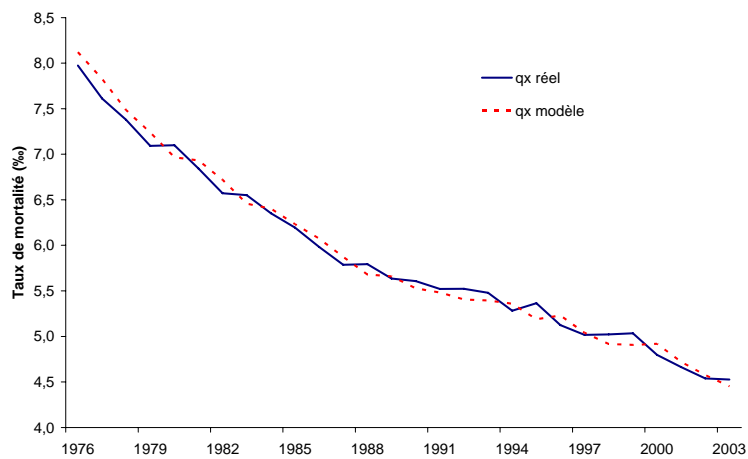


Figure III – 9 : Modélisation de la tendance de l'indice Japon

- USA

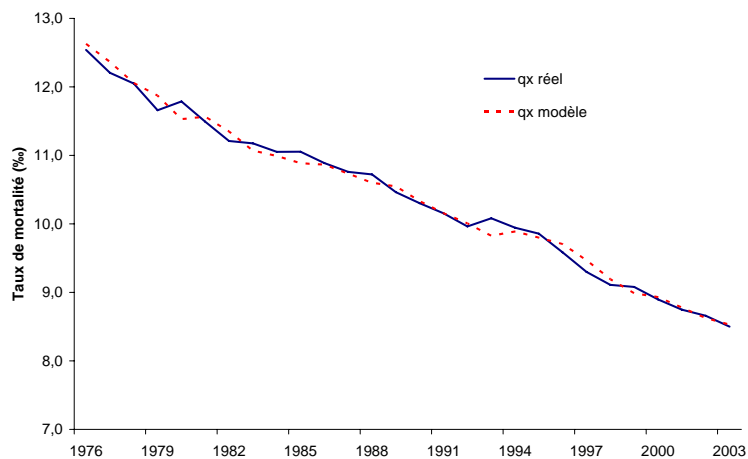


Figure III – 10 : Modélisation de la tendance de l'indice USA

Ces régressions permettent de projeter la tendance de base sur les 4 années de la période sous risque : l'écart à cette tendance de base est obtenu d'une part, par simulation numérique à travers les perturbations dues aux résidus de la régression (*cf.* Section 3 ci-après) et d'autre part, *via* les chocs de mortalité résultant d'un modèle de sévérité calibré indépendamment.

ii. Fréquence et sévérité des chocs de mortalité / pandémies

L'analyse de la mortalité sur longue période n'est pas chose aisée. La pénurie de données statistiques fiables rend toute estimation de fréquence et encore plus d'impact pour le moins sujet à précaution.

En effet, l'arsenal statistique des pays n'a pas toujours envisagé de classer les décès par leurs causes si bien qu'il est difficile d'isoler dans les données historiques la part de mortalité due à une pandémie 'pure' par rapport à une surmortalité qui serait due à une soudaine fragilité de santé de nos ancêtres ou à un environnement particulier résultant en une morbidité accrue (mauvaise récolte, guerre...).

Pour autant, l'Organisation Mondiale de la Santé (OMS) a publié en 2004 une étude épidémiologique (**LAZARRI & STOHR [2004]**) proposant une analyse historique des pandémies. Cette étude montre notamment que seule un scénario du type grippe espagnole ou grippe aviaire transmissible entre humains (mutation du gène H5N1) serait susceptible de causer un nombre de décès très significatif. Une part importante de hasard intervient dans les modifications éventuelles des souches virales à l'origine de telles pandémies, ce qui rend toute tentative de projection sur des bases purement statistiques pour le moins fragile.

- Calibration de la fréquence

La première pandémie reconnue et identifiée en tant que telle remonte à la fin du XVI^e siècle (bien que des archives témoignent de décès anormalement élevés en 412 avant J.C. - décrite par Hippocrate - ainsi qu'au Moyen-âge au retour des croisades du XII^e siècle ainsi que la peste noire frappant toute l'Europe pendant la Guerre de Cent ans).

Sur les 420 dernières années, 31 pandémies ont ainsi été enregistrées et 'officiellement' qualifiées comme telles selon cette étude. Ceci traduit une fréquence de 7,38%, soit une pandémie tous les 13,5 ans en moyenne.

D'autres études moins conservatrices (recensées dans le document du **HHS Pandemic Influenza Plan [2005]** ou l'étude **SWISS RE [2007b]**) mettent en avant le chiffre de 10 à 13 événements de pandémie au cours des 300 dernières années, reflétant une fréquence sur base annualisée de 3 à 4% seulement.

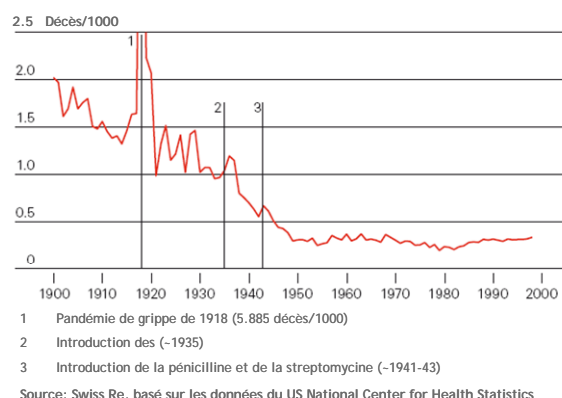
Ces études notent par ailleurs que les pandémies surviennent sur des intervalles de temps irréguliers avec des périodes de répit d'une longueur maximum de 56 ans et aussi courtes que 2 ans seulement.

Dans une perspective de modélisation et de transfert du risque de mortalité au marché, nous privilégions une approche conservatrice et gardons ainsi le chiffre de **7,38%** comme borne haute de la fréquence envisageable pour des risques de pandémie.

- Calibration de la sévérité

La sévérité des événements de type pandémie est encore plus difficile à circonscrire. Toutefois, sur le XXe siècle, il est possible de tracer une distribution du nombre de décès par tranche d'âge et sexe, la grippe dite 'espagnole' de 1918 constituant sur un plan historique le majorant de surmortalité connu à ce jour.

Evolution de la mortalité due à la grippe et à la pneumonie (population américaine, 1900 - 1998)



L'étude précédemment citée (SWISS RE [2007b]) témoigne de quelques événements conséquents de surmortalité au XXe siècle dus à une pandémie de type grippe aviaire / grippe espagnole :

Year(s)	Years since previous pandemic	Place of origin or of first report	Viral type	Estimated global deaths	Estimated number of US deaths	US excess mortality per 1 000
1918-1919 (Spanish flu)	18	France, US	H1N1	40-50 million	500 000-650 000	5.3‰
1957-1958 (Asian flu)	38	China	H2N2	1-2 million	70 000	0.41‰
1968-1969 (Hong Kong flu)	10	China	H3N2	1 million	34 000	0.17‰

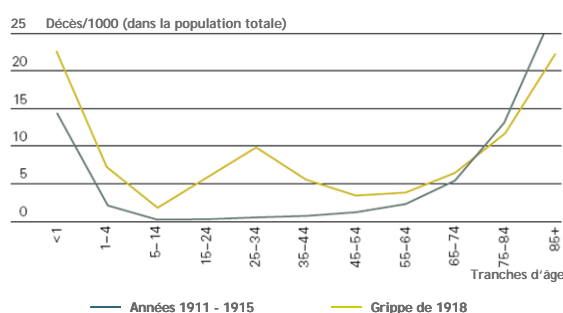
Sources: Estimated number of US deaths: Glezen WP, 1996 (see footnote 51) and World Health Organisation, 2005 (see footnote 3); Simonsen L, Clarke M et al, 1998 (see footnote 39); US population (for excess mortality calculation): *Historical National Population Estimates: 1 July 1900 to 1 July 1999*, Population Estimates Program, Population Division, US Census Bureau, 11 April 2000 (revised 28 June 2000)

1918-1919

The 1918-1919 pandemic was the worst recorded pandemic since the first well described pandemic of 1580. It killed upwards of 40 million people globally in less than a year. As discussed in further detail below⁴⁶, the difference between its three waves seemed to be primarily in the much higher frequency of complicated, severe and fatal cases in the second and third waves⁴⁷. The first wave, which began with outbreaks in Europe and different US states in March 1918, was highly contagious but not especially deadly. The second wave began almost simultaneously in France, Sierra Leone and the United States as schools reopened in September 1918, and was highly fatal⁴⁸. In many nations, a third wave appeared in early 1919. This was also highly fatal (see Figure 3.2 for the UK on page 32).

Uncharacteristically for influenza, nearly half of the influenza-related deaths in the 1918 pandemic were in young adults aged between 20 and 40. In a complete reversal of previous patterns, 99% of deaths occurred in people younger than 65. Death rates in males far exceeded those in females. Many of the deaths in 1918 were from pneumonia caused by secondary bacterial infections, but the 1918 pandemic also caused a form of primary viral pneumonia that could kill apparently healthy young individuals within 48 hours. There is speculation that the elderly may have had partial protection from infection as a result of historical exposure to a related viral strain in the 19th century.

Cette même monographie recense différentes études qui ont analysé plus finement la distribution par tranche d'âge des excédents de décès causés par les scénarios de pandémie en les comparant aux distributions de décès dus aux gripes plus classiques ou « saisonnières » (du type gripes hivernales).



The graph shows average general population mortality for the inter-pandemic years 1911–1915 and during the 1918 pandemic year.

Source: based on, and derived from, data used in Taubenberger JK, 2006 (see footnote 54)

54 Taubenberger JK. The origin and virulence of the 1918 "Spanish" influenza virus. *Proceedings of the American Philosophical Society*, 2006, 150 (1).

Il apparaît clairement que la distribution 'normale' des décès a une forme en 'U' : les plus jeunes et les plus âgés sont les plus exposés au risque de grippe classique. En revanche, dès que la sévérité de la grippe augmente, celle-ci frappe fortement les tranches d'âges intermédiaires et notamment les 25-34 ans, prenant ainsi une forme en 'W'. Les explications pour la grippe de 1918 sont multiples : hiver 1918 particulièrement rude, fatigue des organismes des hommes de retour du front, surréaction du système immunitaire des populations jeunes, relative immunisation des personnes âgées étant données les défenses développées par leurs organismes au cours des pandémies moins sévères du XIXe siècle...

Bien qu'inquiétant, le nombre de décès dû au SRAS en 2003 à Hong-Kong ou à la grippe aviaire en 2005/2006 en Asie du Sud-Est n'excède pas 500 et apparaît ainsi sans commune mesure avec l'excédent de mortalité causé par la grippe espagnole de 1918, qui demeure ainsi la 'référence' en matière de pandémie.

The first recorded instance of human infection with H5N1 was in Hong Kong in 1997. 18 people were infected, six of whom died. Since the virus re-emerged in birds in South-East Asia in 2003, more than 250 confirmed human cases have been reported to the World Health Organisation (WHO), as shown in Table 1.2.

Table 1.2
Cumulative number of confirmed human cases of avian influenza A/(H5N1) reported to the WHO

Country	2003		2004		2005		2006		2007		Total	
	cases	deaths	cases	deaths	cases	deaths	cases	deaths	cases	deaths	cases	deaths
Azerbaijan	0	0	0	0	0	0	8	5	0	0	8	5
Cambodia	0	0	0	0	4	4	2	2	1	1	7	7
China	1	1	0	0	8	5	13	8	2	1	24	15
Djibouti	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
Egypt	0	0	0	0	0	0	18	10	16	4	34	14
Indonesia	0	0	0	0	20	13	55	45	6	5	81	63
Iraq	0	0	0	0	0	0	3	2	0	0	3	2
Lao PDR	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2
Nigeria	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
Thailand	0	0	17	12	5	2	3	3	0	0	25	17
Turkey	0	0	0	0	0	0	12	4	0	0	12	4
Vietnam	3	3	29	20	61	19	0	0	0	0	93	42
Total	4	4	46	32	98	43	115	79	28	14	291	172

The total number of cases includes the number of deaths. WHO reports only laboratory-confirmed cases. All dates refer to onset of illness.

Source: World Health Organisation, 11 April 2007 (www.who.int)

Au total sur le XXe siècle, cinq épidémies ou pandémies ont été recensés avec une cause clairement identifiée de grippe ou de difficultés respiratoires aiguës (pneumonie, SRAS...) :

- la grippe espagnole de 1918 et son extrapolation possible à aujourd'hui
- une grippe particulièrement violente en 1957 (affectant principalement l'Asie)
- deux épisodes de grippe virulente en 1968 et 1977-1978 (données américaines)
- le SRAS en 2003, affectant une population jeune dans un tissu urbain moderne

Pour chaque pandémie, nous construisons des taux de surmortalité à partir des données publiques disponibles (de source uniquement américaine – cf. **Annexe D** pour le détail) : nous adaptons ces données à la constitution de notre portefeuille par tranche d'âge et par sexe en faisant l'hypothèse implicite que la distribution des décès dans un pays - qui ne fait pas nécessairement partie du portefeuille aujourd'hui - pourrait l'affecter de la même manière (hypothèse fortement conservatrice qui ne tient pas compte du degré de préparation et de réaction des gouvernements de la France, des USA ou du Japon pour faire face à ce type de crise de santé publique).

Ces taux de surmortalité permettent de déduire des taux de déviation par rapport à la mortalité « naturelle » et de calibrer ainsi une courbe de sévérité reflétant les percentiles de distribution de ces chocs de mortalité. Dans un deuxième temps, une analyse complémentaire sur la queue extrême de distribution en-deçà du 0,5 percentile est menée pour autoriser dans le modèle une déviation non bornée de la surmortalité.

- *Taux de surmortalité dû à la grippe espagnole de 1918*

Au total 540,000 décès excédentaires ont été recensés aux USA à cause de la grippe espagnole de 1918. L'analyse des données de la CDC aux USA (**MELTZER, COX & FUKUDA [1999]**) montre qu'il n'y a pas eu de surmortalité particulière sur la période 1918-1920, autre que celle spécifiquement due à la pandémie de grippe (identifiée en tant que telle par le corps médical) : 100% de l'excédent de mortalité sur toute cette période est donc considérée comme causée uniquement par la grippe espagnole.

Si la distribution de la population américaine de l'époque (103,2 millions d'habitants) était celle du portefeuille d'AXA (cf. section précédente), alors le nombre de décès se serait élevé à 517,000, soit un accroissement global moyen de +32,29% de la mortalité sur les trois ans couvrant la période 1918-1920 par rapport au taux de mortalité de référence sur 1917 (15.54‰).

Les calculs ci-dessous détaillent le cheminement pour aboutir à cette calibration du premier facteur de la courbe de sévérité :

<u>Année</u>	<u>q_x officiel (rebasé ; ‰)</u>	<u>Référence</u>
1917	15.54	[a]
1918	19.23	[b]
1919	14.12	[c]
1920	14.04	[d]

<u>Année</u>	<u>Part de mortalité due à grippe espagnole (rebasée : ‰)</u>	<u>Référence</u>
1917	1.65	[e]
1918	5.80	[f]
1919	2.12	[g]
1920	2.04	[h]

<u>Période</u>	<u>Mesure de surmortalité (‰)</u>	<u>Calculs</u>
1918 – 1920	5.02	[i] = [f] + [g] + [h] – 3 x [e]
Déviation =	+32,29%	[j] = [i] / [a]

- *Taux de surmortalité dû à la grippe espagnole vu d'aujourd'hui*

Au cours des 90 dernières années, l'amélioration des conditions de vie a permis de réduire les taux de mortalité sur le portefeuille synthétique de 67%, d'un niveau de 15.54‰ en 1917 à 5.05‰ en 2003 (dernières données disponibles à la date d'émission du *Mortality bond*).

Il nous est apparu utile de prolonger le scénario de grippe espagnole de 1918 sur des données contemporaines en prenant une hypothèse conservatrice sur l'impact de la médecine actuelle pour faire face à un tel scénario.

<u>Année</u>	<u>q_x officiel (rebasé : ‰)</u>	<u>Référence</u>
2003	5.05	[k]
Ratio 2003 / 1917	32,52%	[l] = [k] / [a]

<u>Période</u>	<u>Part de mortalité due à grippe espagnole (rebasée : ‰)</u>	<u>Référence</u>
1918 – 1920 ajustée pour 2003	1.63	[m] = [l] x [i]

Nous faisons l'hypothèse que le progrès médical entre 1918 et 2003 est pris en compte à hauteur de 60% seulement, soit la formule pondérée suivante pour déterminer le taux de surmortalité qui serait celui de la grippe espagnole sévissant dans un contexte actuel (*cf.* justification au paragraphe suivant) :

$$60\% \times 1.63 [m] + (1 - 60\%) \times 5.02 [i] = 2.9866$$

D'où un deuxième point de référence pour la courbe de sévérité :

<u>Période</u>	<u>Mesure de surmortalité (‰)</u>	<u>Calculs</u>
actuelle	2.99	[n]
Déviation =	+59,10%	[o] = [n] / [k]

Le taux de 2.99‰ de surmortalité semble cohérent avec un certain nombre d'études menées pour estimer l'impact d'un scénario de type grippe espagnole dans le contexte et l'état actuel des connaissances médicales.

Le rapport de la CDC aux USA (cité plus haut) évoque le chiffre de 285.000 décès répartis sur tous les âges, soit un taux de surmortalité de 1‰. Des résultats analogues ont également été évoqués pour la Suisse par **PIERCY & MILES [2003]**.

Plus récemment encore, le département américain Health & Human Services a publié une étude en 2005 (**HHS Pandemic Influenza Plan [2005]**) évoquant un scénario pessimiste d'environ 2 millions de morts supplémentaires causés par un tel virus, soit un surcroît du taux de mortalité de 6.3‰).

L'étude de l'**Institut de Veille Sanitaire en France [2005]** a également mis en évidence des taux de surmortalité dans le contexte actuel reprise dans une présentation faite par **ALERIEFF & LE GOFF [2007]** à l'occasion d'un colloque du CHEA en mai dernier :

- Pour un taux d'infection de 25%, les taux de surmortalité se situeraient entre +0.926‰ à 6.25‰ (soit de 55,000 à 381,000 décès supplémentaires)
- Sur une mortalité annuelle moyenne de 9‰, cela représente une déviation de mortalité de 10% à 70%

Ces chiffres sont très sensibles aux hypothèses de taux de contagion envisagée – ce qui est très difficile à restituer simplement et induit trop de variabilité dans une transaction de marché, d'où à nouveau notre choix méthodologique de ne pas recourir à un modèle épidémiologique trop sophistiqué.

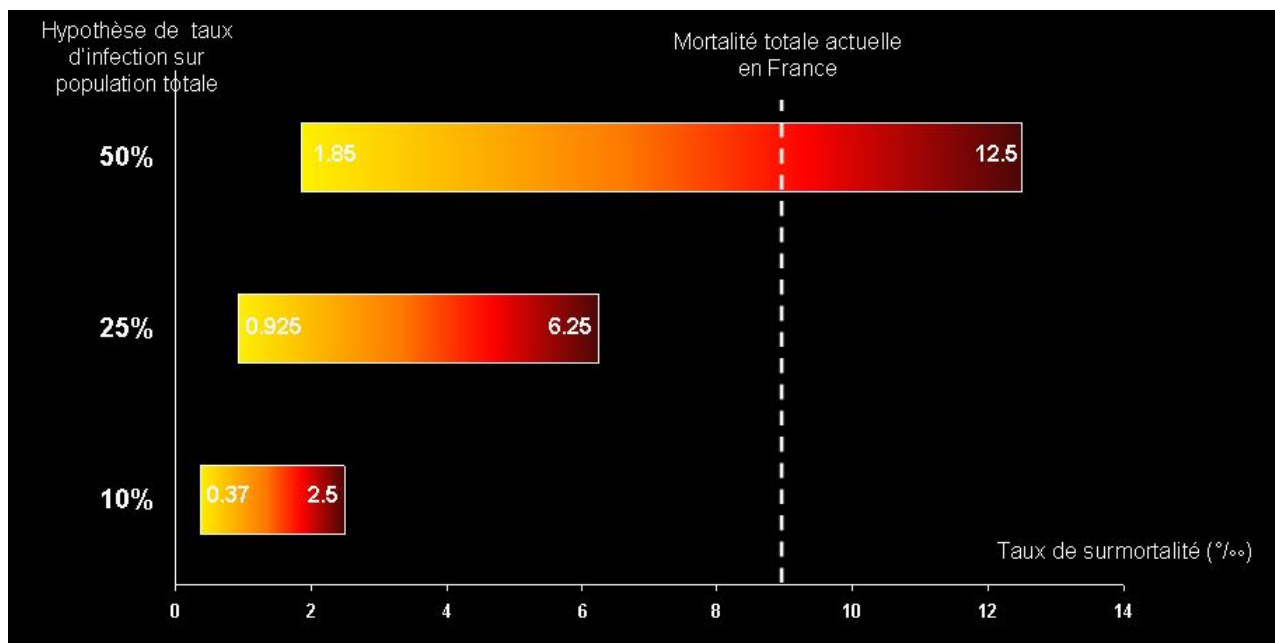


Figure III – 11 : Sensibilité du taux de surmortalité au scénario d'infection de la population

Le chiffre de déviation de 58% estimé d'après la démarche proposée apparaît donc raisonnable et en ligne avec la plupart des estimations hautes réalisées à ce jour à notre connaissance.

- *Taux de surmortalité dû à la grippe virulente de 1957 & 1968*

De la même façon, à partir des données publiques du CDC, nous pouvons estimer les taux de déviation pour la grippe de 1957-1958 en rebasant ceux-ci sur la composition de notre portefeuille :

<u>Année</u>	<u>q_x officiel (rebasé ; ‰)</u>	
1957	8.72	
1968	8.84	

<u>Année</u>	<u>Part due à grippe (rebasée ; ‰)</u>	<u>Déviaton</u>
1957	0.0967	+1,1093%
1968	0.0623	+0,7247%

- *Taux de surmortalité dû à la grippe virulente de 1977-1978 & du SRAS de 2003*

La même démarche est utilisée. A Hong-Kong, l'épisode du SRAS en 2003 a tué 299 personnes, sur une population globale de 6.9 millions d'habitants. Pour le taux de mortalité rebasé sur la distribution du portefeuille retenu, cela aurait représenté une déviation de + 0,8575%.

La grippe de 1977-1978 a provoqué le décès de 10,000 personnes aux USA, qui comptait alors 221,4 millions d'habitants, soit un taux de surmortalité de 0.0452‰ par rapport au taux de mortalité de 7.28‰ de 1977, soit une déviation de 0,62%.

Ce travail de recensement des pandémies du XXe siècle pour lesquelles des bases de données statistiques relativement fiables sont disponibles permet ainsi d'établir une courbe de distribution des déviations de mortalité :

<u>Evènement</u>	<u>Déviaton des q_x</u>	<u>Percentile</u>
1918 ajusté à aujourd'hui	59,1007%	0,00
1918	32,2938%	3,23
1957	1,1093%	27,42
2003	0,8575%	51,61
1968	0,7247%	75,81
1977	0,6200%	100,00

La grippe espagnole de 1918 est considérée comme la pire des 31 évènements recensés à ce jour au cours des 420 années de données historiques disponibles sur les pandémies. On la considère donc comme bien représentée au 3,2^{ème} percentile de distribution de « perte » (= 1 / 31). Nous avons ensuite supposé que la grippe de 1977 était le plus faible évènement recensé à ce jour et l'avons donc placé au 100^{ème} percentile.

Entre ces deux percentiles extrêmes, nous avons positionné les trois autres événements (1957, 2003 et 1968) de manière homogène : soit respectivement au 27,4^{ème}, 51,6^{ème} et 75,8^{ème} percentiles.

Une régression simple sous Excel (minimisant les erreurs quadratiques) permet d'identifier une formule de lissage entre les points de la distribution (plusieurs essais de lissage ont été envisagés – cf. **Annexe D**).

Les paramètres du modèle à identifier sont :

$$\text{Déviation} = \frac{a \cdot \text{Exp}(b \cdot \sqrt{\text{Percentile}})}{c}$$

où c est le taux de mortalité de référence pour l'indice normalisé base 100 du portefeuille de référence (taux de mortalité de 2003 à 5.05% adaptée aux données USA – seules disponibles pour cette calibration historique). On cherche a et b en appliquant une pondération deux fois plus élevés sur les résidus des deux événements les plus extrêmes : a = 0,003056 et b = - 4,30885. L'ajustement aux données est la suivante :

Evènement	Déviation historique des q_x	Déviation estimée des q_x
1918 ajusté	59,10%	60,48%
1918	32,29%	27,89%
1957	1,11%	6,33%
2003	0,86%	2,74%
1968	0,72%	1,42%
1977	0,62%	0,81%

La distribution continue peut donc être représentée pour tous les percentiles :

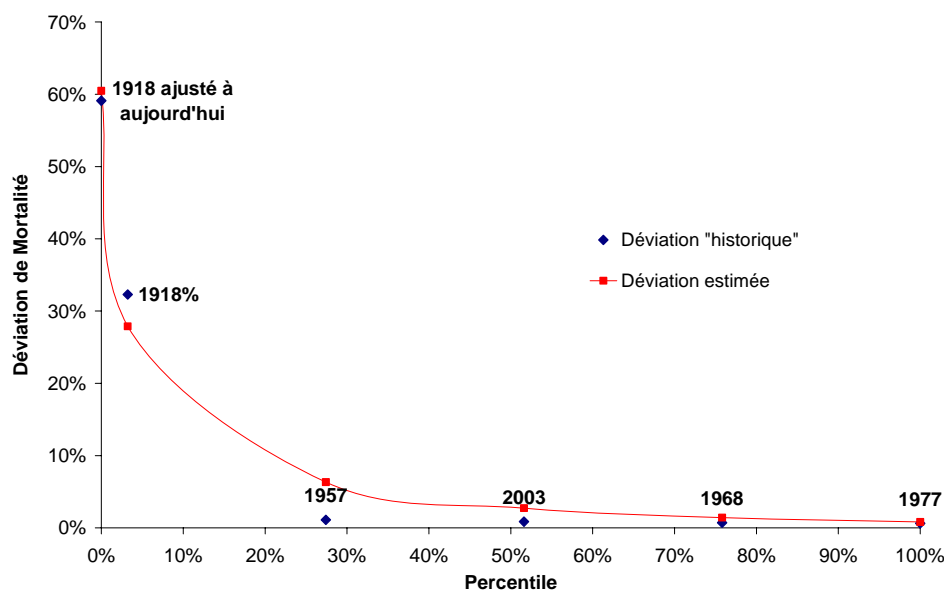


Figure III – 12 : Courbe de sévérité calibrée sur les pandémies du XXe siècle

La limite de cette approche est qu'elle borne la déviation à 60%. Or rien n'autorise à penser que cette déviation ne serait pas plus grande (forte mobilité géographique et concentration urbaine de nos sociétés modernes). Le modèle autorise donc un degré de conservatisme supplémentaire en calant une déviation infinie au-delà du 0,5^{ème} percentile. Ceci permet de capturer de manière asymptotique la queue extrême des chocs de mortalité. Le choix du 0,5^{ème} percentile résulte de différentes itérations (notamment au regard des points d'attachement finaux et donc des discussions avec les agences de rating pour la notation des tranches transférées au marché). La formule d'ajustement asymptotique est déterminée de la manière suivante :

$$\text{Déviation} = \text{TAN}\left(\left(90 - \text{Percentile} \cdot d\right) \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$

Avec d choisi de telle sorte que les deux courbes de lissage exponentielle et de tangente se raccordent au 0,5^{ème} percentile : $d = 13,193.64$. Un zoom sur les percentiles inférieurs à 1% permet de visualiser le comportement asymptotique de la déviation de mortalité dans les scénarios extrêmes de chocs :

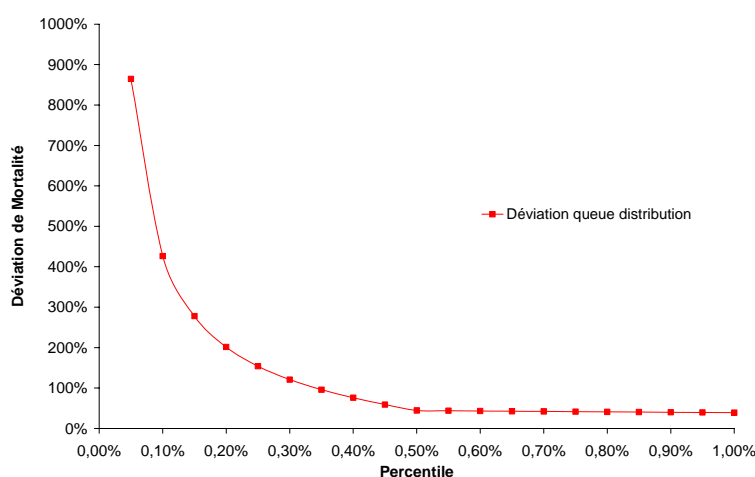


Figure III – 13 : Courbe de sévérité au-delà du 0,50% percentile

On obtient ainsi la calibration complète de la courbe de sévérité et les taux de surmortalité associée dans les différents percentiles de la distribution :

<u>Période de retour (ans)</u>	<u>Percentile</u>	<u>Déviation "historique"</u>	<u>Déviation estimée</u>	<u>Déviation asymptotique</u>	<u>Taux de surmortalité</u>
27 096,8	0,05%			864,69%	43,6967%
13 548,4	0,10%			426,57%	21,5561%
6 774,2	0,20%			201,56%	10,1857%
4 516,1	0,30%			120,96%	6,1127%
3 387,1	0,40%			75,97%	3,8393%
3 010,8	0,45%		60,48%	59,21%	2,9920%
2 709,7	0,50%		44,59%	44,59%	2,2533%
420,0	3,23%	32,29%	27,89%		1,4096%
49,4	27,42%	1,11%	6,33%		0,3201%
26,3	51,61%	0,86%	2,74%		0,1383%
17,9	75,81%	0,72%	1,42%		0,0718%
13,5	100,00%	0,62%	0,81%		0,0411%

Section 3 – Projections & simulations numériques

Une fois les différentes composantes du modèle calibrées, le but de la simulation présentée ci-après consiste à simuler l'impact d'une pandémie sur les taux de mortalité de base de notre portefeuille.

Cette démarche permet de déterminer les probabilités d'occurrence et de perte moyenne (« *Expected Loss* ») pour chaque niveau de déviation de mortalité par rapport à un référentiel donné en base 100 reflétant le taux moyen de mortalité sur 2002-2003 construit à partir du portefeuille présenté en Section 1. On mesure donc la probabilité de déviation des taux de mortalité par rapport à cette base 100 initiale.

Deux hypothèses de base régissent l'ensemble des calculs effectués dans notre modèle :

- la déviation de mortalité par rapport au référentiel base 100 est mesurée sur deux années glissantes afin de tenir compte du fait que la pandémie ne s'arrête pas le 31 décembre mais peut chevaucher deux années adjacentes
- toute pandémie frappe simultanément (corrélation de 100%), de manière uniforme et proportionnellement à leur contribution à l'indice (par âge et par sexe) les trois pays qui constituent l'indice de référence de mortalité. En revanche, chaque année de la période sous risque sur laquelle les projections sont menées sont indépendantes les unes des autres : un choc ne conditionne pas le suivant.

Les paragraphes suivants présentent succinctement les principales étapes de la simulation numérique, détaillent les calculs effectués et font ressortir les principaux résultats obtenus qui serviront ensuite pour la Partie IV.

3.1 Les étapes de calcul

Le modèle est composé de deux modules principaux :

- le module de la mortalité envisagée en tendance de base : celle-ci est obtenue par l'analyse des séries temporelles effectuée au paragraphe (i) de la Section 1.1
- le module fréquence / sévérité qui permet d'effectuer des chocs de mortalité et de mesurer en conséquence l'écart à la tendance de base de la mortalité observée au cours des 30 dernières années. La calibration de ce module a fait l'objet de l'analyse au paragraphe (ii) de la Section 1.1

L'objectif de la simulation numérique consiste à déterminer le q_x moyen sur deux années consécutives (exprimé en base 100 par rapport au taux de mortalité moyen combiné du portefeuille sur 2002/2003) résultant d'une part de l'amélioration tendancielle de la mortalité et tenant compte d'autre part à chaque période de la déviation éventuelle de mortalité résultant d'un choc de pandémie.

i. Méthode de simulation de la tendance de la mortalité de base

La tendance moyenne de la mortalité de base est prolongée sur les 4 années suivantes par tirage aléatoire en utilisant les écart-types des résidus propres à chaque pays.

Pour autoriser le champ des possibles le plus large possible et stabiliser les résultats de la simulation (écart de valeur $< 10^{-3}$), nous effectuons 350,000 tirages aléatoires sur une loi normale $N(0,1)$ en réinjectant les améliorations aléatoires de mortalité ainsi obtenues sur les taux de la période précédente :

$$q_t^{c,base} = q_{t-1}^{c,base} \cdot (1 - x_t^c)$$

D'où la tendance combinée des taux de mortalité construite à partir de l'agrégation des trois pays composant notre portefeuille avec les pondérations retenues :

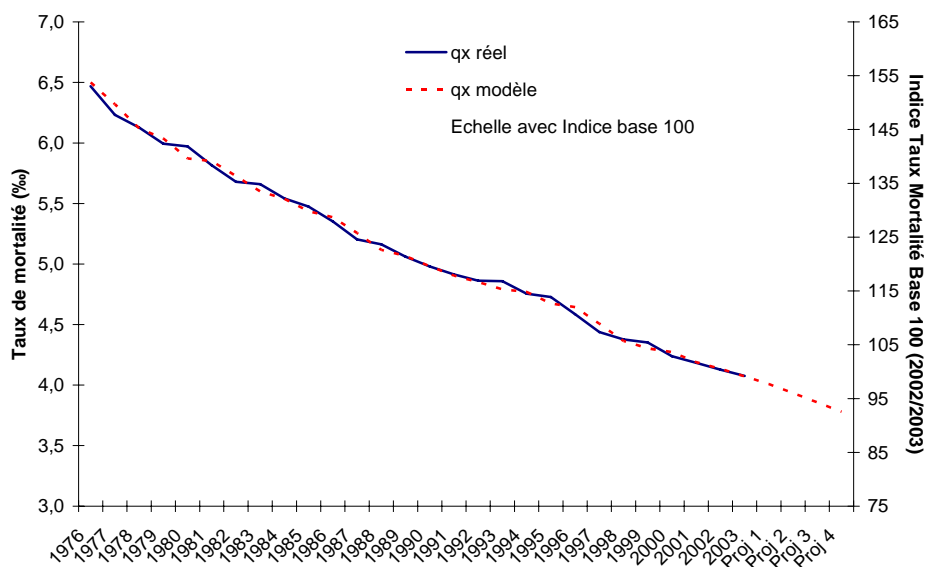


Figure III – 14 : Projection de la tendance de l'indice combiné sur 4 ans

L'analyse des simulations obtenues permet de mettre en évidence différents percentiles de la distribution de l'indice combiné sur un horizon 1, 2, 3 et 4 ans :

<u>Percentile</u>	<u>Année 1</u>	<u>Année 2</u>	<u>Année 3</u>	<u>Année 4</u>
10%	98.03	95.54	93.16	90.81
25%	98.29	96.13	93.94	91.75
50%	98.59	96.79	94.82	92.79
75%	98.89	97.45	95.69	93.83
90%	99.16	98.04	96.48	94.77
95%	99.31	98.40	96.95	95.33
99%	99.62	99.07	97.85	96.37
99.95%	99.73	99.31	98.19	96.79
99.99%	100.26	100.41	99.73	98.61
<u>99.999%</u>	<u>100.45</u>	<u>101.00</u>	<u>100.28</u>	<u>99.47</u>

<u>Mesure</u>	<u>Année 1</u>	<u>Année 2</u>	<u>Année 3</u>	<u>Année 4</u>
Moyenne	98.59	96.79	94.82	92.79
Ecart-Type	0.44	0.98	1.30	1.54
Minimum	96.65	92.37	88.47	85.60
Maximum	100.57	101.32	101.05	100.72

Tableau III – 2 : Résultats de la simulation

Il apparaît ainsi que la mortalité s'améliore de 2% environ par an sur l'ensemble des trois pays :

<u>Pays</u>	<u>Amélioration de la mortalité</u>
France	1.9350%
Japon	2.1994%
<u>USA</u>	<u>1.5682%</u>
Combiné	1.8642%

Les chocs ne résultent pour le moment que de la variance des résidus alors que l'effet du temps prolonge la tendance de base mise en évidence (qui rend chaque point d'attachement toujours plus « en-dehors » de la monnaie au fur et à mesure que le temps passe) : une source de chocs 'exogènes' doit donc être envisagée pour étudier les déviations par rapport à cette tendance.

ii. Méthode de simulation en fréquence / sévérité de la mortalité

La calibration du module de sévérité permet de simuler la déviation de mortalité théorique par tirage aléatoire sur une loi uniforme [0,1] pour chaque année de la période sous risque.

La distribution empirique de la déviation est ensuite appliquée aux simulations de la tendance pour analyser au final les écarts globaux et déterminer ainsi les probabilités de survenance des chocs de mortalité.

La déviation de mortalité doit être envisagée en fréquence et en sévérité :

- simulation sur la fréquence : sachant que la fréquence est estimée à 7,38% en base annualisée, on considère qu'une pandémie a lieu si l'aléa est inférieur à ce chiffre, sinon non.
- simulation sur la sévérité : sachant que la pandémie a eu lieu à la première étape de la simulation, on considère ensuite son degré de sévérité en fonction là encore d'un tirage aléatoire sur une loi uniforme. La loi qui régit la sévérité dépend du percentile de distribution tiré de manière aléatoire. Le facteur de sévérité s_t est obtenu de la manière suivante :

$$s_t = \begin{cases} \frac{0,003056 \cdot \exp(-4,30885 \cdot \sqrt{r})}{0,00505} & \text{si } r > 0,005 \\ \text{TAN}(90 - 13,193.64 \cdot r) \cdot \frac{\pi}{180} & \text{si } r \leq 0,005 \end{cases}$$

Les simulations effectuées sous Excel (350,000 simulations) conduisent à la distribution de déviation de mortalité suivante :

<u>Déviaton Mortalité (%)</u>		<u>% distribution</u>
0	10	98.53%
10	20	0.91
20	30	0.33
30	40	0.15
40	50	0.04
50	75	0.01
75	100	0.01
> 100		0.02

Le but de toute l'analyse étant toutefois de déterminer un écart à la tendance d'amélioration des niveaux de mortalité observée, l'analyse de la déviation en soi ne présente guère d'intérêt si ce n'est pour tester la contribution relative des deux éléments, tendance d'une part et chocs d'autre part, aux probabilités de déviation ou d'occurrence d'un choc de mortalité (*cf.* paragraphe 3.3).

iii. Combinaison des modules

Les chocs de mortalité sont appliqués à l'analyse en tendance de la mortalité, de telle sorte que pour chaque année t projetée, la valeur 'finale' de l'indice est calculée comme suit :

$$q_t^c = q_t^{c,base} \cdot (1 + s_t)$$

Comme il a été indiqué précédemment, les chocs de mortalité sont envisagés sur deux années consécutives par un calcul en moyenne de la déviation à partir d'un indice référentiel exprimé en base 100. Ainsi, l'indice moyen de mortalité retenu pour l'analyse qui suit est :

$$\bar{q}_t^c = \frac{1}{2} \cdot (q_t^c + q_{t-1}^c)$$

A titre de rappel, un indice calculé à 106 traduit soit une hausse de +12% de la mortalité sur une année seulement (si bien que la hausse moyenne sur deux années est de 6% en moyenne), soit une hausse de +6% sur deux années de suite.

La répartition de cette hausse de mortalité peut être uniforme et proportionnelle sur l'ensemble du portefeuille ou ne concerner qu'un pays en particulier et pas les autres, auquel cas il faudra un nombre disproportionné de décès pour ce pays, telle tranche d'âge ou tel sexe si ces différentes 'supports' de mortalité contribuent faiblement à l'indice global retenu initialement.

L'indice combiné de mortalité est donc construit à partir de la formule suivante :

$$ICM_t = \sum_c \alpha_c \cdot \frac{\bar{q}_t^c}{\bar{q}_{2003}^c} \quad \text{où } \alpha_c \text{ est le poids du pays } c \text{ dans l'indice}$$

La combinaison des deux modules permet ainsi d'obtenir la distribution finale de l'indice combiné de mortalité.

On présente ci-dessous la distribution pour quelques percentiles clés :

<u>Percentile</u>	<u>Année 1</u>	<u>Année 2</u>	<u>Année 3</u>	<u>Année 4</u>
10%	98.12	95.63	93.24	90.89
25%	98.38	96.22	94.02	91.83
50%	98.68	96.88	94.91	92.87
75%	98.98	97.54	95.78	93.91
90%	99.25	98.13	96.57	94.86
95%	99.93	100.81	99.34	97.69
99%	105.95	109.16	107.79	106.16
99.95%	120.73	162.75	154.91	148.10
99.99%	279.91	546.11	412.93	348.63
<u>99.999%</u>	<u>3,558.51</u>	<u>4,960.72</u>	<u>3,035.96</u>	<u>1,323.83</u>
Moyenne	98.68	97.06	95.05	93.05
Ecart-Type	0.26	0.60	1.03	1.45
Minimum	96.65	92.37	88.47	85.60
Maximum	33,124.58	33,371.63	46,391.60	46,242.91

Tableau III – 3 : Résultats de la simulation

La déviation devient exponentielle dans les percentiles extrêmes du fait de la calibration à l'infini de la courbe de sévérité qui autorise de larges déviations (ce qui nécessite un grand nombre de tirages aléatoires). Pour autant, la tendance globale de baisse de la mortalité est préservée.

3.2 Définition des probabilités d'occurrence et Expected Loss

Le mécanisme de protection du *Mortality bond* (fonction de *payoff*) a fait l'objet du développement de la Section 1. Pour mémoire, le facteur de réduction qui s'applique sur le principal de l'obligation entre les deux bornes de déviation fixe de mortalité (prédéfinies par le tranching de l'obligation) est la suivante :

$$R_{t,n} = \frac{ICM_t - T_n}{E_n - T_n}$$

où T et E sont respectivement les points d'Attachement (« *Trigger* ») et d'Expiration (« *Exhaustion* ») de la classe 'n' de l'obligation ; t reflète la période de mesure de l'indice de mortalité. La réduction de principal s'opère au sein d'une même classe et ne peut, par définition, être supérieure à 100%.

Comme la période de risque s'étend sur 4 années, mais que la mesure de la mortalité effective s'effectue sur deux années consécutives, il y a donc 3 périodes de mesure disponibles de la mortalité concourant au calcul du facteur de réduction sur l'ensemble de la période à risque des 4 ans (donc $t \in [1 ; 3]$).

Pour permettre une protection 'à tout moment' de l'obligation (comme pour une option américaine) et non au terme de la période de risque (principe d'une option *lookback*), il a été décidé de modifier à la marge la fonction de *payoff* pour rendre compte d'un paiement en cumul des réductions de principal de l'obligation émise par AXA, d'où le facteur effectif de réduction calculé à la fin de l'année t pour la classe n suivant la formule récurrente ci-dessous :

$$C_{t,n} = \begin{cases} R_{t,n} & \text{si } t = 1 \\ \text{Max}(R_{t,n} - C_{t-1,n}) & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Pour mémoire, les différentes tranches ou classes 'n' de l'obligation émise par AXA sont les suivantes (exprimées en indice base 100 de la mortalité de référence) :

Tranche / Classe n	Pt d'Attachement (« Trigger » T_n)	Pt d'Expiration (« Exhaustion » E_n)	1 point déviation mortalité en % réduction tranche
A	119	124	20%
B	114	119	20%
C	110	114	25%
D	106	110	25%

Nous illustrons le mécanisme du facteur de réduction cumulatif avec la série d'exemples suivants sur la base de la classe D de l'obligation :

Mesure de l'indice de mortalité réalisée sur chaque période de mesure			% de réduction du principal sur chaque période de mesure			Réduction cumulée
1	2	3	1	2	3	
100	107	100	0%	25%	0%	25%
107	109	100	25%	50%	0%	75%
107	107	100	25%	0%	0%	25%
109	107	100	75%	0%	0%	75%
107	100	110	25%	0%	75%	100%
109	100	108	75%	0%	25%	100%
107	109	108	25%	50%	0%	75%
107	108	108	25%	25%	25%	75%

Tableau III – 4 : Exemple de calcul de *payoff*

A partir de ces facteurs de réduction, on peut définir les probabilités de survie des différentes déviations de mortalité pour toutes les tranches de l'obligation.

A chaque point de déviation de la mortalité correspond une probabilité de perte et une espérance de perte moyenne. On définit ainsi les probabilités suivantes obtenues par simulation numérique au paragraphe 3.1 :

- probabilité d'attachement ou de trigger de la tranche 'n', notée $P(T)_n$: c'est la probabilité de faire jouer la réduction de principal dès le premier % de déviation sur cette tranche

$$P(T)_n = \frac{\sum_x \delta_{\{C_{t,n}>0\}}}{X}$$

où X est le nombre total de simulations numériques 'x' effectuées (350,000) et δ est une fonction indicatrice de comptage sur chaque scénario 'x' telle que :

$$\delta_{\{C_{t,n}>0\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } C_{t,n} > 0 \\ 0 & \text{si } C_{t,n} = 0 \end{cases}$$

- probabilité d'expiration ou d'exhaustion de la tranche 'n', notée $P(E)_n$: c'est la probabilité de perdre 100% du principal sur cette tranche

$$P(E)_n = \frac{\sum_x \zeta_{\{C_{t,n}=1\}}}{X}$$

où X est le nombre total de simulations numériques 'x' effectuées (350,000) et ζ est une fonction indicatrice de comptage sur chaque scénario 'x' telle que :

$$\zeta_{\{C_{t,n}=1\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } C_{t,n} = 1 \\ 0 & \text{si } C_{t,n} = 0 \end{cases}$$

Il apparaît assez intuitif de poser la formule de récurrence suivante, qui traduit la continuité des probabilités d'occurrence sur deux tranches contigües (la formulation avec indice n traduit une classification « ordinale » du type tranche 'juste au-dessus' ou juste 'en-dessous', mais ne reflète pas la hiérarchie alphabétique retenue ici) :

$$P(T)_n = P(E)_{n-1}$$

Ainsi, la probabilité d'attachement de la tranche C est la probabilité d'expiration de la tranche D.

- espérance de perte moyenne de la tranche 'n', notée EL_n : l'*Expected loss* traduit la probabilité de perdre au moins 50% du principal sur cette tranche

$$EL_n = \frac{\sum_x \sum_t C_{x,t,n}}{X}$$

où $C_{x,t,n}$ représente le facteur effectif de réduction pour le scénario 'x' calculé à la fin de la période t, que l'on somme donc sur $t \in [1 ; 3]$ pour chaque scénario afin de définir la perte moyenne subie.

Ces métriques de risque constituent autant d'indicateurs privilégiés sur lesquelles les intervenants spécialisés s'appuient pour décider de leur investissement sur les différentes tranches offertes par l'émetteur. La question de la fiabilité de cette mesure du risque fait l'objet de la section 4. L'analyse des *spreads* requis par le marché pour s'exposer à ces différents profils de risque fait l'objet de la Partie 4.

3.3 Résultats obtenus et commentaires

i. Mortalité excédentaire requise pour attacher les tranches

Une manière simple de représenter l'ampleur du choc de mortalité requis pour attacher les tranches et faire jouer la protection pour l'émetteur est de traduire la déviation de mortalité en nombre minimum de décès requis par tranche et par pays contributeur à l'indice. L'hypothèse sous-jacente est que la déviation de mortalité s'applique uniformément à l'ensemble des trois pays constitutifs de l'indice de référence et surtout que les morts soient « distribués » selon la répartition par âge et par sexe du portefeuille sous-jacent.

	<u>France</u>	<u>Japon</u>	<u>USA</u>	<u>Total</u>	
Population (2003)	60,200,000	126,000,000	289,400,000	475,600,000	
q_x normalisé portefeuille (‰)	2.78	4.53	8.53	6.74	
Mortalité "naturelle" attendue	167,500	570,400	2,469,000	3,206,900	
<u>Tranche</u>					<u>Déviation</u>
A	63,700	216,800	938,200	1,218,700	+38%
B	46,900	159,800	691,400	898,100	+28%
C	33,500	114,100	493,900	641,500	+20%
D	20,100	68,500	296,300	384,900	+12%

Tableau III – 5 : Nombre de décès supplémentaires requis par tranche pour l'indice composite

Si en revanche le choc de mortalité était concentré dans un seul pays, il faudrait un nombre de décès excédentaires disproportionnés par rapport à la contribution du pays dans l'indice – par exemple, les USA : ne contribuant à l'indice combiné de mortalité qu'à hauteur de 15%, devraient 'fournir' un nombre de décès très importants pour provoquer la réduction du principal sur l'obligation toute entière.

	<u>France</u>	<u>Japon</u>	<u>USA</u>
Poids dans indice	60%	25%	15%
Poids relatif de la population	12,7%	26,5%	60,8%

Tranche

A	257,100	1,291,400	4,943,600
B	189,400	951,900	3,643,000
C	135,300	679,900	2,602,000
D	81,200	408,000	1,561,300

Tableau III – 6 : Nombre de décès supplémentaires requis par tranche pour chaque pays

La condition de distribution des décès selon le profil du portefeuille est indispensable pour « réaliser » la protection : ainsi, la vague de chaleur de 2003 qui a causé plus de 10,000 décès en France, essentiellement parmi une population de plus de 60 ans, n'aurait pas été une source de déviation pour l'indice de mortalité retenu ici dans la mesure même où cette tranche de la population ne fait pas partie de celle sélectionnée pour la construction de l'indice.

De la même façon qu'un pays à faible contribution dans l'indice mais à forte proportion de population dans le panier de pays retenus devra contribuer plus que disproportionnellement à la mortalité de l'indice pour le faire dévier, on peut étendre le raisonnement à la distribution de la mortalité par tranche d'âge et de sexe pour chaque pays du portefeuille. Pour résumer, si la part relative d'une composante du portefeuille (âge, sexe, pays) tend vers 0, sa contribution à la déviation de mortalité devra croître de manière exponentielle, ce qui justifie également une calibration non bornée de la sévérité du module de pandémie.

Enfin, le nombre de décès supplémentaires requis pour activer la protection sur chaque tranche de l'obligation peut être exprimé en multiple du nombre de décès survenus sur certains événements du XXe siècle (après normalisation des décès sur la composition du portefeuille retenu – construit à partir d'une base interne AXA) :

<u>Evènement</u>	<u>Tranche D</u>	<u>Tranche C</u>	<u>Tranche B</u>	<u>Tranche A</u>
1ère guerre mondiale (1914-1918)	0.43x	0.71x	1.00x	1.35x
Grippe espagnole (1918)	0.39x	0.64x	0.90x	1.22x
2ème guerre mondiale (1939-1945)	0.44x	0.73x	1.02x	1.38x
SIDA (1988 - 1995)	20x	33x	47x	64x
Attaques du 11 septembre 2001	498x	830x	1,162x	1,578x
Ouragan Katrina (août 2005)	430x	717x	1,004x	1,363x

Tableau III – 7 : Multiple du nombre de décès requis par événements pour attacher chaque tranche

Ainsi, il aurait fallu que l'évènement du 11 septembre cause près de 500 fois le nombre réel pour que la tranche D de l'obligation soit activée et que les investisseurs commencent à perdre une part de leur principal.

En revanche, le nombre de décès normalisé causé par la 1^{ère} guerre mondiale aurait activé la tranche D même en ne considérant que 43% des décès liés à cet évènement historique.

L'ordre de grandeur de ces multiples offre ainsi un aperçu de l'ampleur des évènements requis pour faire dévier la mortalité naturelle du portefeuille et déclencher ainsi la protection *via* l'obligation émise.

Compte tenu des hypothèses retenues pour calibrer la tendance naturelle et les chocs de mortalité du modèle, on peut assigner une mesure de risque probabilisée sur ces évènements qui sont autant de réalisations passées de déviation de la mortalité.

ii. Mesures de risque obtenues

Les simulations effectuées et l'agrégation des scénarios conduisent à la série de résultats suivants pour chaque tranche modélisée (valeurs exprimées en points de base, selon la convention 1bp = 0,01%) :

- mesures de risque sur toute la période de risque (cumul sur 4 ans)

Mesures de Risque (bps)	Tranche A	Tranche B	Tranche C	Tranche D
P(T)	18.3	46.9	101.9	210.5
P(E)	15.0	18.3	46.9	101.9
EL	16.1	29.2	71.2	149.7

Tableau III – 8 : Mesure de risques pour l'indice composite

- mesures de risque exprimées en base annualisée (qui constitue la référence pour le marché)

Mesures de Risque (bps)	Tranche A	Tranche B	Tranche C	Tranche D
P(T)	4.6	11.7	25.5	52.6
P(E)	3.8	4.6	11.7	25.5
EL	4.0	7.3	17.8	37.4

Tableau III – 9 : Mesure de risques pour l'indice composite

- détail de la constitution de la probabilité d'attachement par sous-périodes :

Sous-période	Tranche A	Tranche B	Tranche C	Tranche D
1	0.0	0.0	0.0	0.0
2	10.4	30.0	63.5	129.4
3	14.5	40.1	85.7	176.2
4	18.3	46.9	101.9	210.5

Tableau III – 10 : Mesure de risques pour l'indice composite

La modélisation du risque de surmortalité à travers une approche fréquence / coût a ainsi le mérite de proposer une mesure de probabilité à des événements par nature extrêmement rares.

Section 4 – Discussion autour des limites du modèle

Il ressort assez clairement de l'analyse que le risque de choc lié à une pandémie a un impact primordial sur la probabilité de déviation de la mortalité : le *Mortality bond* vise justement à absorber un tel impact. Malgré ce bénéfice, il convient également de souligner les limites d'une telle modélisation.

En premier lieu, la calibration du modèle est un exercice délicat qui repose sur un certain nombre d'hypothèses discutables. Par ailleurs, l'assimilation du risque de pandémie à un risque de type catastrophe est sans doute un raccourci utile pour réutiliser intelligemment les techniques de transfert de risque des *Cat bonds*, mais cela n'est pas nécessairement pertinent quand on examine de plus près la véritable nature de ce risque et notamment sous l'angle du suivi très vigilant exercé par les autorités de contrôle de santé.

4.1 Une calibration délicate dans la perspective de Solvency II

L'analyse menée dans le document **SWISS RE [2007b]** conclut aux résultats suivants après une présentation fournie de leur modèle propriétaire pour tarifier le risque de mortalité :

- Un « bon » modèle visant à mesurer le risque de surmortalité doit nécessairement incorporer une part de réflexion sur la pandémie elle-même du point de vue épidémiologique, en tenant compte du potentiel pathogène d'un virus à affecter différentes tranches d'âges de la population et le cas échéant à muter pour devenir encore plus pathogène – le modèle de Swiss Re et celui développé par RMS en juin 2006 offrent de telles innovations, avec l'aide notamment du Professeur Neil Ferguson du Imperial College de Londres

- Les simulations effectuées par Swiss Re montrent qu'un évènement ayant une période de retour de 200 ans causerait un surcroît de mortalité compris entre 1 et 1.5% d'une population assurée (dans les pays développés) et entre 1.5 et 4% dans les pays en développement
- Dans le monde actuel, un scénario de pandémie du type grippe espagnole de 1918 ne pourrait se produire qu'avec un virus hautement pathogène (insensible aux progrès médicaux) ayant la capacité de se propager rapidement (ce qui est possible avec les moyens de transport moderne). La probabilité d'occurrence d'un tel scénario est de 1 pour 3 000, soit un évènement d'une rareté extrême.

La limite essentielle de la démarche simplifiée retenue dans notre approche tient à deux composantes :

- D'une part, nous n'avons pas adjoint de modèle épidémiologique au modèle de fréquence / sévérité : la principale raison tient à la complexité de mise en œuvre et la nécessité de faire appel à des compétences médicales que nous n'avons pas et n'avons pu mobiliser
- La sévérité est mesurée par quelques points de données historiques disponibles : il est clair que 7 points de données historiques n'autorise pas à une calibration suffisamment robuste pour faire des projections fiables sur le plan épidémiologique.

Le palliatif consiste alors, d'un point de vue statistique, à autoriser d'une part une queue de distribution infinie et à tirer d'autre part un nombre de simulations suffisamment importantes pour assurer que des scénarios extrêmes seront bien pris en compte pour la détermination finale des probabilités d'occurrence de tels chocs.

Le souci de simplicité est aussi un souci de transparence vis-à-vis des marchés financiers : à défaut de construire le modèle le plus complet et le plus robuste d'un point de vue scientifique, nous proposons un modèle qui soit auditable, facile à comprendre et dont la calibration avec les données passées disponibles ne peut être contestée.

Les métriques de risque en sortie sont ensuite laissées à l'appréciation de chaque investisseur ; la sensibilité de chaque mesure de risque ainsi fournie repose sur un nombre réduit d'hypothèses, ce qui facilite là aussi le travail de réflexion sur les données en sortie.

Ces débats sur la calibration du modèle de choc de mortalité renvoient à une question directement posée dans le cadre des exigences en capital sous *Solvency II*.

En effet, la future directive *Solvency II* prévoit que chaque (ré)assureur dispose d'une base minimum et d'une base de confort en capital (la *Solvency Capital Requirement* ou SCR) permettant de faire face à un scénario à 200 ans.

En matière de risques d'assurance, plus encore que pour des risques purement financiers, la rareté des évènements extrêmes rend difficile l'exercice de calibration pour refléter des scénarios aussi lointains.

La consultation effectuée durant l'été 2007 (*Quantitative Impact Studies* ou QIS 3) a conduit le CEIOPS (*Committee of European Insurance and Occupations Pension Schemes Supervisors*) à proposer de retenir une charge en capital égal à 1,5‰ des capitaux sous risque pour un évènement à 200 ans.

Différents pays plus avancés proposent déjà des stress scénarios :

- Le FOPI (*Swiss Federal Office of Private Insurance*) prévoit depuis 2003 des mesures de risque à partir d'une Value at Risk à 99% sur un horizon d'un an : l'assureur / réassureur doit avoir suffisamment de capital pour faire face à un risque ayant une probabilité d'occurrence d'une fois tous les 100 ans (tant côté actif que passif – hypothèses fournies par **PIERCY & MILES [2003]**)
- Le FSA (*Financial Services Authority*) au Royaume-Uni prévoit lui aussi, à travers les ICA (*Individual Capital Assessment*), une exigence minimale en capital pour faire face à une VaR à 99,5% c'est-à-dire un évènement arrivant une fois tous les 200 ans

Ces deux normes mesurent ainsi le niveau de perte minimum possible sur un horizon annuel pour des scénarios extrêmes. On peut noter que des mesures de Tail VaR sont également envisagées pour refléter la perte annuelle moyenne envisageable avec une fréquence de 100 ou 200 ans. Les agences de rating demandent également aux (ré)assureurs de mesurer la robustesse de leurs bilans face aux chocs de mortalité. Ainsi Standard & Poor's propose dans son nouveau modèle européen des charges de capital minimales comprises entre 0,83‰ et 3,31‰ pour une compagnie notée AA ayant un portefeuille de risques de mortalité étoffés et diversifiés. Le modèle que nous proposons permet de répondre en partie à ce type d'exigences.

4.2 Le risque de pandémie : un risque « Cat » ?

Il convient enfin de réfléchir à la nature réelle des chocs de mortalité envisagés jusqu'ici. En effet, la conclusion de l'analyse menée dans les sections précédentes de ce mémoire tend à prouver qu'une modification de la tendance naturelle de baisse de la mortalité observée (type scénario 'à la russe' des années 80-90 où l'espérance de vie a diminué) pourrait avoir un impact significatif sur la dérive de la mortalité.

Le risque de pandémie demeure le principal facteur qui influence significativement la dérive de mortalité : la sévérité maximum constatée dans le passé ne peut toutefois pas préjuger de la sévérité d'une nouvelle pandémie de grippe espagnole. C'est pourquoi le modèle autorise potentiellement un choc infini même si la probabilité associée est quasi nulle.

Nous avons vu enfin que le risque terroriste pouvait sans doute également influencer la tendance naturelle de la mortalité, mais d'une part l'ampleur du choc requis pour exercer la déviation et d'autre part la difficulté à modéliser correctement le risque terroriste, nous ont conduit à écarter de notre analyse cette cause de surmortalité dans le modèle principal exposé dans ce mémoire.

Si le risque de surmortalité provient ainsi de deux risques principaux, une dérive affectant la tendance « naturelle » de mortalité d'une part et une dérive « exogène » due à un choc de pandémie d'autre part, peut-on véritablement parler d'un risque catastrophe pour la mortalité ?

Notre analyse est que le risque de mortalité n'est pas un risque « *Cat* » comme peuvent l'être les tempêtes ou autres évènements naturels dans la mesure où les individus, la société et les Etats peuvent avoir une influence sur sa survenance et sa sévérité. En effet, dans les sociétés de l'OCDE, différents éléments contribuent largement à minimiser le risque de survenance de chocs de mortalité :

- la prévention joue un rôle essentiel dans la diffusion d'information sur l'alimentation et l'hygiène de vie ou le dépistage précoce de maladies létales (cancer, accidents vasculaire-cérébraux, diabètes...)
- en cas de survenance de pandémie, la préparation à ce type d'évènements est (ou paraît) largement sous contrôle (*cf.* les articles de presse début 2006 sur les mesures prises par différents gouvernements pour accumuler des masques de protection en cas de grippe aviaire) ; des mesures d'isolement ou d'accompagnement de toute pandémie sont dorénavant et déjà prévues. Des expériences *in vivo* ont été réalisées à Hong-Kong et en Chine lors de la dernière épizootie du 1^{er} trimestre 2006.
- La coordination des différents acteurs de la santé publique tant à l'échelle nationale qu'internationale a conduit à mettre en place au niveau de l'OMS un système de mesure du risque de pandémie que le tableau ci-dessous résume :

Phase	Severity	Description
1	Low risk of human cases	Inter-pandemic phase
2	Higher risk of human cases	New virus in wildlife but no human cases
3 <i>Present situation</i>	No or very limited human to human transmission	Pandemic alert New virus causes human cases
4	Evidence of increased human to human transmission	
5	Evidence of significant human to human transmission	
6	Efficient and sustained human to human transmission	Pandemic

Tableau III – 11 : Système d'alerte de l'OMS

A la lumière de toutes ces mesures de prévention, de systèmes d'alerte, voire d'expériences de gestion de crise, il apparaît que le risque de mortalité ne peut être assimilé à un « *Act of God* » comme peut l'être un risque naturel. Le caractère digital de perte sur une obligation indexée à un tel risque n'apparaît donc pas fondé et ne justifie pas en soi une prime de risque que nous estimons trop grande par rapport au risque 'réellement' pris. La dernière partie de ce mémoire discute de ce dernier point.

*

* *

PARTIE IV – ESTIMATION DE LA VALEUR DU RISQUE SUR LES MARCHES DE CAPITAUX

Le marché des *Cat bonds* s'est fortement développé au cours des 15 dernières années pour les périls « naturels » (tempête Europe, ouragan Floride, tremblement de terre Californie / Japon...), plutôt que dans le domaine viager (mortalité, longévité, dépendance, santé...).

Une des causes possibles pour ce 'retard au démarrage' des *Cat bonds* avec un sous-jacent viager tient sans doute à la difficulté de modéliser ce type de sinistre, comme a pu le mettre en évidence la partie III. De plus, les outils de simulation des périls naturels existent depuis longtemps (EQECat, RMS et AIR). Ces 'boîtes noires' reposent sur des historiques de données météorologiques ou sismiques régulièrement mises à jour qui permettent une modélisation fine des probabilités de perte. Heureusement, les événements qui déclencheraient une déviation soudaine et brutale de la mortalité sont rares, mais sont par là-même plus incertains, donc difficiles à modéliser⁶.

Pour autant, de grands acteurs (Swiss Re, Scottish Re et AXA) ont eu recours à ce type d'instruments pour transférer aux marchés financiers leur exposition au risque de déviation de mortalité. En face, des investisseurs ont accepté de porter ce risque de déviation là où la réassurance ou la rétrocession traditionnelle faisaient défaut (cf. Section 3.2 de la Partie II).

Selon la théorie de l'efficience des marchés, un prix reflète à tout moment l'ensemble des informations à disposition des investisseurs : ce prix de marché reflète notamment une certaine appréhension du risque, qui conditionne la décision d'investissement. Ce risque est considéré par l'investisseur sur une base absolue (rémunération pour porter le risque vs. espérance de perte liée à ce risque) et sur une base relative (apport de ce nouveau risque dans l'analyse rendement / variance et diversification du portefeuille global). En théorie, si le bénéfice de la diversification (hausse de la frontière efficiente) est supérieur à l'espérance de perte liée à ce risque, alors l'investisseur devrait accepter de porter ce risque à son « coût marginal », c'est-à-dire à un prix égal à son *Expected Loss* sans prime de risque (**GOLDMAN SACHS [1998]**).

L'analyse exposée dans cette partie met en évidence une autre vision de l'efficience des marchés et du bénéfice supposé de la diversification dans l'approche du CAPM : celle où l'incertitude fondamentale autour de la surmortalité incite les investisseurs à exiger un surcroît de protection, à travers des primes de risque très supérieures à sa mesure théorique (**BANTWAL & KUNREUTHER [1999]**). Trois questions se posent naturellement :

- Si l'on suppose la mesure du risque de déviation de mortalité correctement estimée, quelle prime de risque permet d'équilibrer le marché des *Mortality bonds* ? Ce chargement de sécurité est-il justifié ?
- A l'inverse, une autre méthode statistique permet-elle d'estimer de manière plus 'conservatrice' les probabilités de perte associées au risque de déviation de mortalité ? que devient alors la prime de risque implicite du marché ?
- La prime de risque est-elle justifiée dans une approche CAPM ? Le bénéfice de diversification ne devrait-il pas l'emporter sur l'incertitude de la mesure du risque ?

⁶ F. Knight et à sa suite J.M. Keynes distinguaient le risque et l'incertain ou encore incertitude probabilisable et incertitude radicale, en ce que l'on peut assigner une mesure de probabilité à un événement risqué mais pas à un événement incertain

Le rappel des principales caractéristiques techniques des *Mortality bonds* émis à ce jour permet de mettre en évidence une relation significative entre le rendement exigé par les investisseurs (« *Spread* »), la Probabilité de première perte (point d'attachement) et l'*Expected Loss* des différents profils de risque transférés (**Section 1**).

Au-delà de ce constat, une analyse économétrique du couple *spread* / mesures de risque est mise en œuvre afin d'estimer une équation structurelle de rémunération du risque autour de laquelle le marché semble avoir trouvé un équilibre. Une autre vision ('instantanée') de la structure / perception du risque est proposée à travers l'utilisation des opérateurs de distorsion et des « *Proportional Hazard transform* » : les résultats trouvés sont riches d'enseignements et autorisent des comparaisons au sein d'une même classe d'actifs, voire avec d'autres (**Section 2**).

Une modélisation alternative du risque de déviation de mortalité peut également être envisagée à travers une approche inspirée de la théorie des valeurs extrêmes : malgré les difficultés techniques de mise en œuvre, cette approche nous paraît une source féconde pour des recherches futures (**Section 3**). Enfin, nous proposons d'illustrer en quoi la prime de risque des *Mortality bonds* ne paraît pas justifiée au regard du bénéfice de la diversification apporté par ces instruments tel qu'une approche du type CAPM permet d'en rendre compte (**Section 4**).

Section 1 – Les *Mortality bonds* émis à ce jour

Trois acteurs ont à ce jour émis sur le marché des *Mortality bonds* :

- Swiss Re : programme 'VITA' (3 émissions à ce jour entre décembre 2003 et janvier 2007)
- Scottish Re : programme 'TARTAN' (1 émission à ce jour en avril 2006)
- AXA : programme 'OSIRIS' (1 émission à ce jour en novembre 2006)

La principale motivation de ces trois acteurs étaient de couvrir un scénario de pandémie (type grippe aviaire). L'effet de mutualisation des marchés financiers a permis de pallier l'absence de réassurance ou la limite de profondeur du marché de la rétrocession sur ce risque spécifique.

Toutefois, le lancement de l'opération VITA I en plein épisode du SRAS à Hong-Kong en décembre 2003 a quelque peu altéré l'accueil de la transaction par les investisseurs, même si la nouveauté de la couverture émise et le notional finalement souscrit (\$400 millions) furent salués par les analystes (cf. **MORGAN STANLEY [2003]**).

1.1 Caractéristiques techniques des opérations Swiss Re, Scottish Re & AXA

Bien que les portefeuilles sous-jacents soient différents (en termes d'exposition géographique, tranches d'âges et répartition par sexes⁷), les métriques qui ressortent de l'analyse du risque de ces portefeuilles sont comparables (standardisation sur une échelle de déviation homogène et probabilités de perte annualisées analogues).

⁷ Swiss Re : 60% USA, 20% UK, 10% Suisse & Allemagne, 10% autres. Scottish Re : 100% US. AXA : 60% France, 25% Japon, 15% USA

Le tableau ci-dessous fournit une synthèse exhaustive des données relatives à l'ensemble des opérations de marché (extraites des prospectus officiels d'offre encore appelés « *Offering Circular* »). Quelques rappels de définition pour aider à déchiffrer les données du tableau :

- *Index-Attachment / Exhaustion* : définit la déviation par rapport à un indice de référence base 100
- La probabilité d'Attachement (« *Probability of First Loss* » ou PFL) est la fréquence moyenne de perte (base annualisée). La probabilité d'Exhaustion (PE) est la probabilité de perte associée au dernier niveau de la tranche visée. Pour des tranches immédiatement adjacentes, ces probabilités coïncident
- L'« *Expected Loss* » (EL) est la perte moyenne subie sur une tranche
- La perte moyenne conditionnelle (CEL) est le quotient entre EL et PFL : elle représente donc la sévérité moyenne de la perte rapportée au principal 'en jeu' sur une tranche, conditionnellement à la survenance de perte (cf section 2.1 pour une utilisation pratique de cette variable).

Éléments techniques	Rating	Index - Attachment	Index - Exhaustion	Proba Attachment (PFL)	Proba Exhaustion (PE)	Expected Loss (EL)	Conditional EL (CEL)	Spread émission (réel)
Osiris A	A / A1	118%	124%	0,0460%	0,0380%	0,0430%	93,478%	N/A
Osiris B2	A - / A3	114%	118%	0,1170%	0,0460%	0,0730%	62,383%	1,200%
Osiris C	BBB / Baa2	110%	114%	0,2550%	0,1170%	0,1780%	68,804%	2,850%
Osiris D	BB+ / Ba1	108%	110%	0,5260%	0,2550%	0,3740%	71,103%	5,000%
Tartan	A / A2	115%	120%	0,0870%	0,0200%	0,0530%	54,639%	0,900%
Tartan	BBB / Baa3	110%	115%	0,2830%	0,0970%	0,1800%	61,433%	3,000%
Vita I	A / A1	130%	150%	0,0770%	0,0030%	0,0158%	20,519%	1,350%
Vita II	A+ / A2	125%	145%	0,0015%	0,0001%	0,0003%	20,000%	0,300%
Vita II	A / Aa3	120%	125%	0,0185%	0,0015%	0,0073%	44,242%	0,900%
Vita II	A - / A2	115%	120%	0,0755%	0,0165%	0,0411%	54,437%	1,400%
Vita II	BBB / Baa2	110%	115%	0,2344%	0,0755%	0,1458%	62,201%	1,900%
Vita III (4-yr)	AA- / Aa2	125%	145%	0,037%	0,028%	0,032%	66,488%	0,80%
Vita III (4-yr)	AA1	120%	125%	0,042%	0,037%	0,039%	92,857%	1,10%
Vita III (5-yr)	AA- / Aa2	125%	145%	0,036%	0,027%	0,031%	66,111%	0,80%
Vita III (5-yr)	AA1	120%	125%	0,039%	0,036%	0,037%	94,872%	1,12%

Tableau IV - 1 : Aperçu des caractéristiques techniques des *Mortality bonds* émis à ce jour

Comme la Partie III l'a exposé, l'analyse de déviation de la mortalité s'effectue par rapport à un indice base 100 pour les deux années de référence de taux de mortalité du portefeuille (q_x). L'écart par rapport à cette base (hausse du taux moyen de mortalité du portefeuille) est calculé en % sur deux années de risque consécutives : ce sont ces niveaux de déviation qui constituent le « *tranching* » du risque transféré au marché.

Le *tranching* constitue ainsi le découpage de risque sur lequel les investisseurs pourront se positionner au moment du placement en fonction de leur appétit au risque. L'émetteur de son côté peut décider de ne pas émettre certaines tranches basses (rétention) ou juger que d'autres sont trop hautes pour constituer un scénario de couverture adéquat. Le programme OSIRIS d'AXA s'étale ainsi d'un indice 106% à 124% (la dernière tranche 119 – 124% n'a pas été placée pour des considérations de *risk management* – scénario jugé trop peu probable).

La largeur de chaque tranche est un élément crucial dans les discussions avec les agences de rating. En effet, l'agence Standard & Poor's note en fonction de la probabilité de première perte, c'est-à-dire en fonction de la probabilité d'attachement (PFL).

Plus celle-ci est faible, plus le rating sera élevé et plus le rendement exigé par l'investisseur devrait être faible. En revanche, Moody's note sur la base de la perte moyenne, c'est-à-dire l'*Expected Loss* (EL) : plus la tranche est large, plus l'EL diminue et donc plus le rating sera favorable. La décision sur la largeur de chaque tranche constitue donc un exercice d'équilibre pour concilier deux forces contraires et optimiser ainsi le rating négocié auprès des agences (qui sont toutes deux requises par les investisseurs pour assurer un placement efficace).

1.2 Dynamique du marché des *Mortality bonds*

Le marché des *Mortality bonds* (et des *Cat bonds* en général) reflète la même exigence de rémunération du risque que n'importe quelle autre classe d'actif : plus le risque pris est élevé (tel que mesuré par l'EL), plus la rémunération exigée pour porter ce risque est importante. Malgré le nombre limité de points disponibles, il est possible de tracer une droite de marché qui sépare les opérations onéreuses ou économiques du point de vue de l'émetteur.

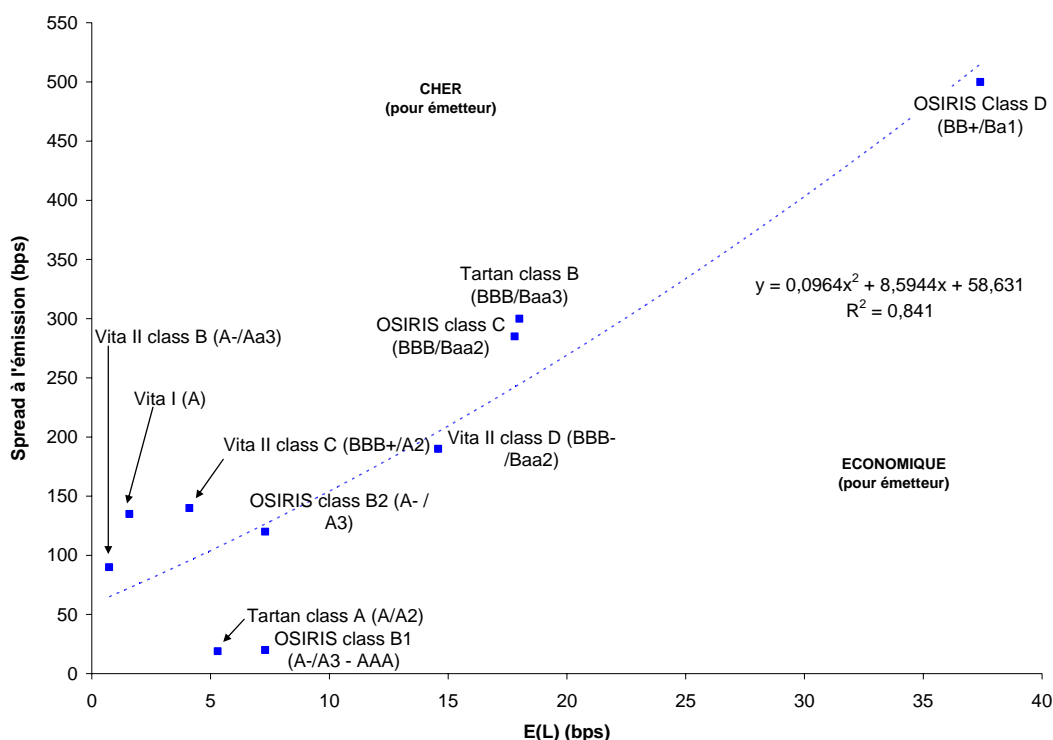


Figure IV - 1 : Représentation de la frontière efficiente de marché des *Mortality bonds* émis à ce jour

Une analyse intéressante consiste à étudier l'impact d'une nouvelle émission sur les spreads des tranches existantes. Après l'émission par AXA de son obligation OSIRIS en novembre 2006, Swiss Re a émis la 3^{ème} tranche de son programme VITA début janvier 2007, déplaçant ainsi la frontière d'efficience du marché.

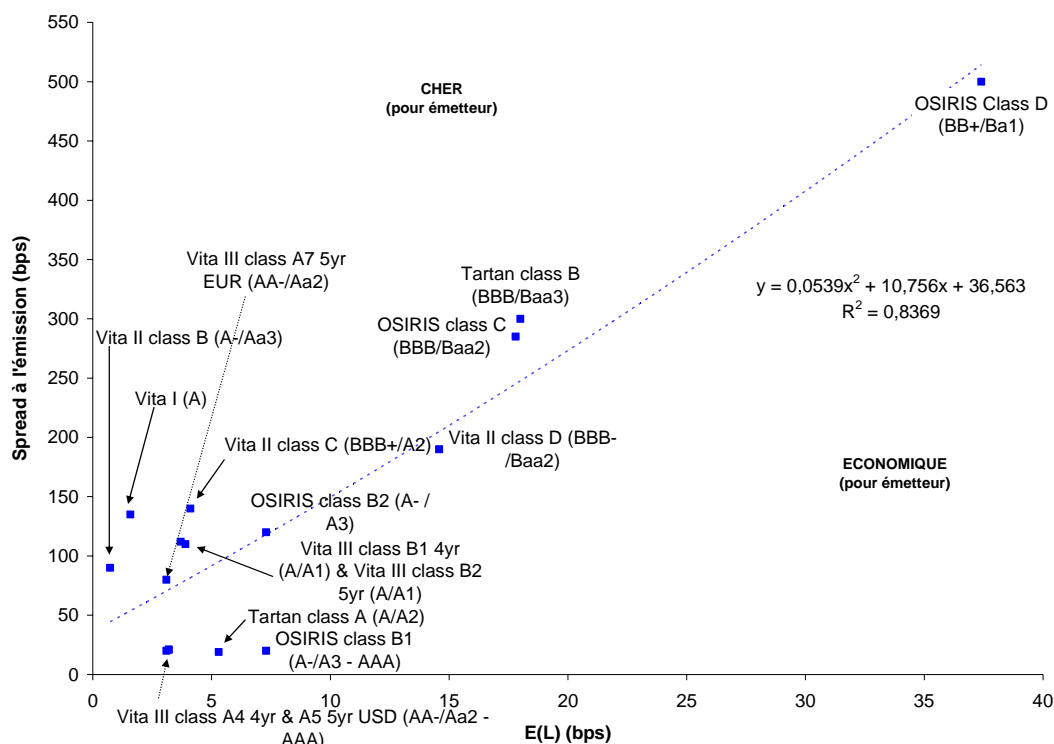


Figure IV - 2 : Représentation de la frontière efficiente de marché des *Mortality bonds* émis à ce jour

L'impact de cette opération est intéressante car elle met en lumière une dynamique particulière du marché des *Mortality bonds*, à savoir le caractère compartimenté des tranches d'opérations en fonction du degré de risque qu'elles comportent :

- point d'attachement bas ou élevé
- EL faible ou importante
- intervalle de la tranche large ou réduit de nature le cas échéant à accélérer ou au contraire lisser la réduction du principal en jeu en cas de perte.

Ainsi les *spreads* des tranches émises avant Vita III ont évolué de la manière suivante :

Tranche d'émissions	Spread à l'émission	Spread au 19/01/07
Vita II class B (A-/Aa3)	90,0	97,5
Vita II class C (BBB+/A2)	140,0	125,5
Vita II class D (BBB-/Baa2)	190,0	249,0
Tartan class A (A/A2 - AAA)	19,0	23,5
Tartan class B (BBB/Baa3)	300,0	319,5
OSIRIS class B1 (A-/A3 - AAA)	20,0	20,0
OSIRIS class B2 (A-/A3)	120,0	117,5
OSIRIS class C (BBB/Baa2)	285,0	277,0
OSIRIS class D (BB+/Ba1)	500,0	481,5
Vita III class B1 4-YR (A/A1)	110,0	109,5
Vita III class B2 5-YR (A/A1)	112,0	111,5
Vita III class A4 4-YR (AA-/Aa2 - AAA) USD	21,0	20,5
Vita III class A5 5-YR (AA-/Aa2 - AAA)	20,0	19,5
Vita III class A6 4-YR (AA-/Aa2 - AAA) EUR	21,0	20,5
Vita III class A7 5-YR (AA-/Aa2) EUR	80,0	79,5

Graphiquement, l'évolution paraît limitée et quasi anodine :

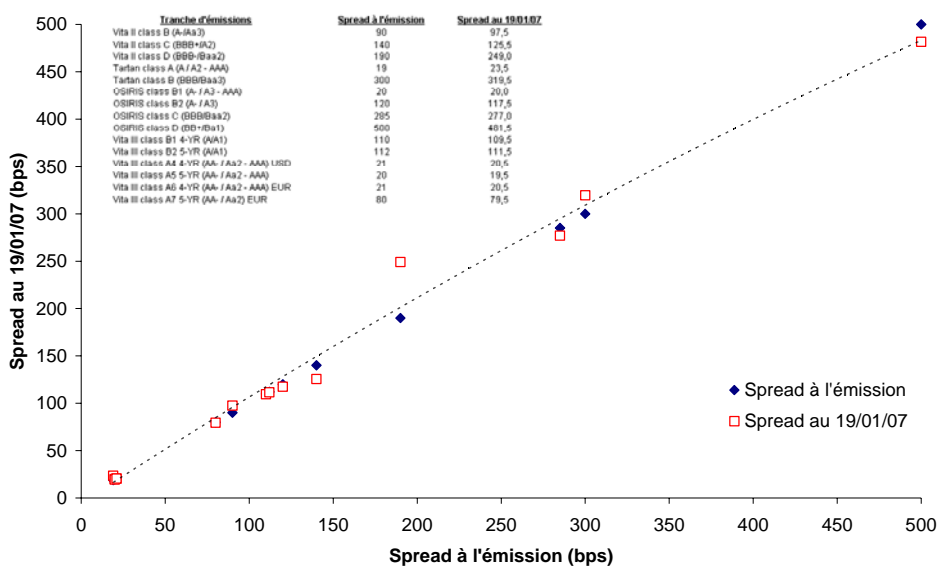


Figure IV - 3 : Dynamique du marché des *Mortality bonds* émis à ce jour

Une analyse plus précise du différentiel de *spreads* théoriques (mesurés à l'appui de régressions simples sous Excel) fait ressortir un état du marché avant et après l'opération VITA III très net. On peut en effet noter un renchérissement ou écartement relatif des *spreads* en fonction des *Expected Loss* par tranche, comme le met en lumière cette parabole :

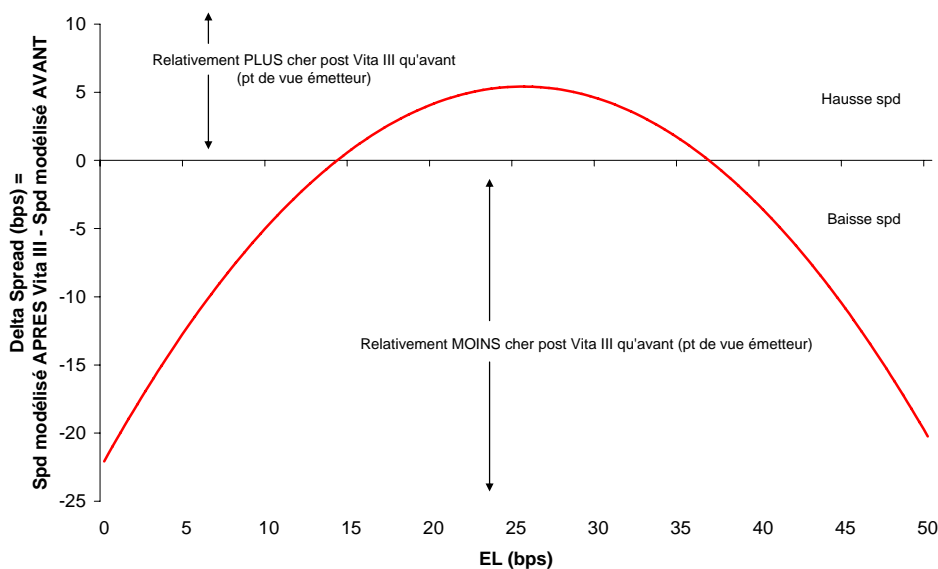


Figure IV - 4 : Dynamique du marché des *Mortality bonds* émis à ce jour

Cela traduit le fait qu'entre la fin du placement d'OSIRIS (19 nov. 2006) et celle de VITA III (19 janv. 2007), les *spreads* se sont davantage resserrés pour les tranches hautes (à point d'attachement élevés et EL faible) que pour les tranches basses (EL plus élevée).

Ceci est particulièrement frappant lorsque le couple *Delta Spread* et EL est représenté sur le même graphique : des sous-compartiments de marché sont clairement identifiables, chacun ayant sa dynamique d'évolution propre en fonction des éléments nouveaux qui viennent ou non modifier leur environnement.

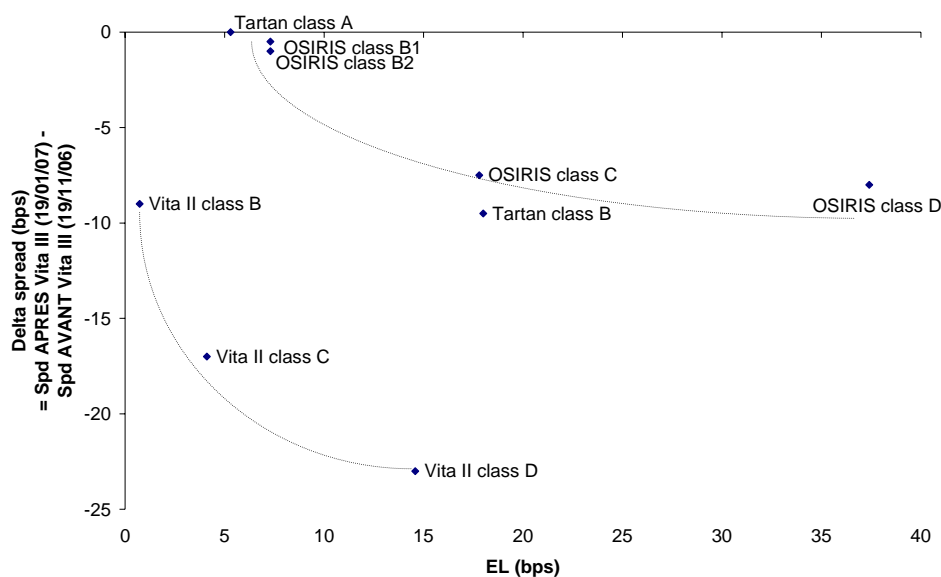


Figure IV - 5 : Dynamique du marché des *Mortality bonds* émis à ce jour

Un tel équilibre tendrait à prouver qu'une marge de manœuvre de resserrement est implicitement prévue dans les *spreads* à l'émission afin de permettre aux investisseurs de bonifier la valeur de leurs actifs au cours du temps. Une telle évolution (favorable) du *Mark-to-Market* des positions permet de mieux faire absorber une nouvelle tranche d'émission dans la même zone de risque que celle déjà investie par les investisseurs : le principe des vases communicant entre marchés secondaire et primaire permet ainsi d'écouler une transaction plus difficile à placer. Pour autant, cette dynamique de resserrement n'affecte pas toutes les tranches de risque présentes sur le marché mais uniquement celles directement voisines des caractéristiques du placement, ce qui tend à prouver l'étanchéité relative des classes de risque sur cette toute nouvelle classe d'actifs.

Section 2 – Evaluation *à priori* du risque et prix *à posteriori* de marché

La section qui suit propose d'analyser le risque sous l'angle d'un équilibre de marché instantané permettant d'inférer une mesure du risque *à priori*, sans préjuger du niveau de risque qui sera finalement apporté au marché par un émetteur souhaitant recourir au marché des *Mortality bonds* pour transférer une partie de son exposition.

Nous proposons ensuite d'extraire à partir des *spreads* de marché des facteurs d'aversion au risque permettant de mesurer, et même prévoir *ex ante* ce que devrait être un niveau 'juste' de rémunération du risque. Au regard des différents résultats obtenus, il apparaît que le marché s'équilibre à un niveau de prix permettant d'absorber plusieurs fois l'espérance de perte. Ceci tendrait à prouver que le marché des *Mortality bonds* n'est pas (encore) un marché efficient sur lequel les investisseurs apprécient le risque à sa « juste valeur ».

2.1 Approche économétrique – le modèle Cobb-Douglas de M. Lane (2000)

LANE [2000] propose une relation économétrique (classique en économie) pour établir un lien entre le chargement de sécurité implicite du risque à travers le *spread* exigé par les investisseurs et deux facteurs permettant de caractériser intégralement le risque porté : la PFL et la CEL.

La relation économétrique repose sur l'équation structurelle de Cobb-Douglas. Le *spread* retenu se décompose en la somme de l'EL et du EER (« *Expected Excess Return* »), ce dernier élément reflétant la prime de risque attendue.

L'équation structurelle à évaluer est la suivante :

$$EER = \gamma \cdot (PFL)^\alpha \cdot (CEL)^\beta$$

- Cas particulier : $\gamma = \alpha = \beta = 1$

$$\text{on obtient le résultat attendu à savoir : } EER = PFL \times CEL = EL$$

ce résultat renvoie à un principe de tarification classique en assurance, à savoir que la prime est égale à

$$\text{deux fois la perte moyenne attendue : } Spread = EER + EL = 2 \times EL.$$

Plusieurs modèles ont été testés afin d'obtenir la relation la plus significative au sens des critères classiques d'une régression à plusieurs variables explicatives (estimation des paramètres et tests usuels – cf. TASSI [2004]⁸) :

- Modèle 1 – « linéaire » :

$$EER = \gamma + \alpha \cdot PFL + \beta \cdot CEL$$

- Modèle 2 – « log-linéaire » :

$$EER = \gamma \cdot (PFL)^\alpha \cdot (CEL)^\beta$$

- Modèle 3 – « quadratique » :

$$EER = \gamma_1 + \alpha_1 \cdot PFL + \beta_1 \cdot CEL + \alpha_2 \cdot (PFL)^2 + \beta_2 \cdot (CEL)^2$$

⁸ test de Fisher sur l'ensemble des paramètres, test de Student pour analyser la significativité des variables explicatives, avec / sans constante

L'estimation de ces relations appliquées aux données du tableau de la section 1.2 offre les résultats suivants :

Variables	Linéaire		Log-linéaire		Quadratique	
	Modèle 1a avec cste	Modèle 1b sans cste	Modèle 2a avec cste	Modèle 2b sans cste	Modèle 3a avec cste	Modèle 3b sans cste
Constante	0,0042	N/A	-1,2462	N/A	0,0078	N/A
<i>Ectyp</i>	0,00236		0,41437		0,00504	
(t-stat)	0,1014		0,0119		0,1553	
PFL	7,4916	7,7095			6,7921	5,6660
<i>Ectyp</i>	0,55579	0,58979			2,26166	2,28756
(t-stat)	3,4927E-08	1,8543E-08			0,0149	0,0327
CEL	0,0019	0,0074			-0,0120	0,0192
<i>Ectyp</i>	0,00345	0,00170			0,02207	0,00970
(t-stat)	0,5914	0,0010			0,5999	0,0759
PFL ^ 2					197,5836	342,8756
<i>Ectyp</i>					409,86534	426,14443
(t-stat)					0,6413	0,4398
CEL ^ 2					0,0119	-0,0128
<i>Ectyp</i>					0,01872	0,01048
(t-stat)					0,5409	0,2485
ln(PFL)			0,5415	0,8404		
<i>Ectyp</i>			0,21300	0,24348		
(t-stat)			0,0274	0,0048		
ln(CEL)			-0,1034	-0,2283		
<i>Ectyp</i>			0,17928	0,22541		
(t-stat)			0,5757	0,3311		
R^2	0,9440	0,9755	0,8480	0,9941	0,9505	0,9787
F-stat	92,6598	238,7414	30,6893	1006,3528	43,2152	115,0694
p-value	1,3073E-07	2,1710E-10	3,1609E-05	4,3343E-14	7,0417E-06	2,5622E-08

variable significative

Tableau IV - 2 : Résultat de la régression Cobb-Douglas

Le modèle d'équilibre des *spreads* du marché des *Mortality bonds* qui remplit l'ensemble des critères de significativité statistique et qui présente le R² le plus élevé est le modèle 1b. Ce résultat est intéressant car il est assez éloigné de l'équilibre structurel du couple rendement / risque mesuré par LANE [2000] sur les *Cat bonds* émis en 1999⁹. L'interprétation des niveaux absolus des coefficients nous paraît toutefois délicate à traduire. Une manière d'illustrer la qualité de cette représentation du risque est de comparer pour chaque transaction l'écart entre *spread* théorique anticipé par le modèle et *spread* réel résultant du placement des obligations indexées à la mortalité.

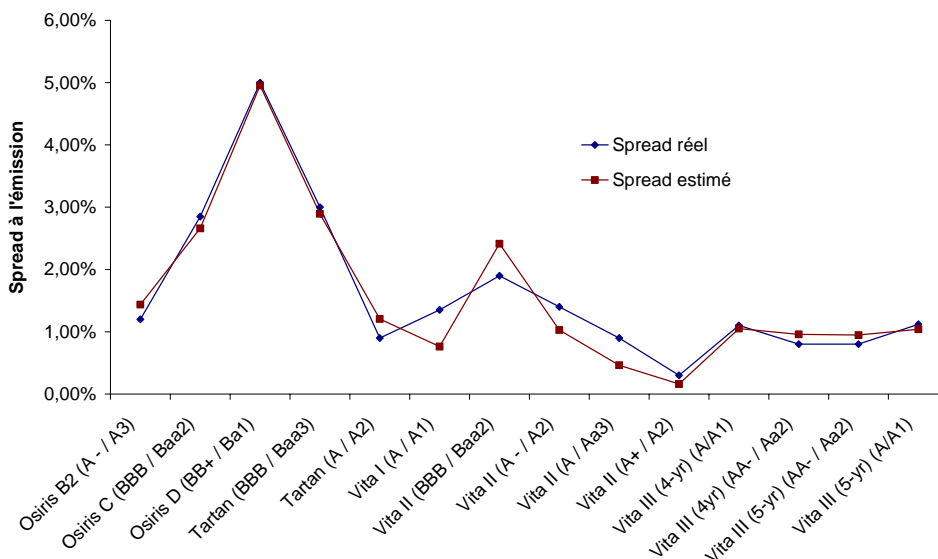


Figure IV - 6 : Illustration de l'adéquation de la régression Cobb-Douglas aux données réelles

⁹ Modèle log-linéaire avec $\gamma = 0,55$; $\alpha = 49\%$ et $\beta = 57\%$. Nous n'avons pas connaissance d'une actualisation plus récente

En moyenne, la modélisation économétrique est relativement satisfaisante, mais fait tout de même ressortir un certain nombre d'écarts, notamment sur les tranches hautes des placements (programmes VITA en particulier) : cet outil ne peut donc être retenu pour des analyses de prévision pour des placements futurs ou même pour effectuer des arbitrages entre souches émises, tant la mesure théorique de rémunération du risque semble s'écarter quelque peu de sa 'juste valeur' de marché. Cette démarche n'en constitue pas moins un indicateur à intégrer dans un faisceau de mesures plus complètes et plus robustes.

2.2 Approche par les opérateurs de distorsion

L'analyse du risque et sa tarification sont au cœur des métiers des (ré)assureurs. Ce sont aussi des exigences auxquelles font face les investisseurs lorsqu'ils doivent choisir entre plusieurs actifs et définir le 'juste' prix au regard des profils de risque de ces actifs.

La technique de tarification traditionnellement utilisée en assurance repose sur la méthode des écart-types : $\text{Prix} = \text{Perte moyenne anticipée} + \lambda * \text{Ecart-type}$, où λ est un chargement de sécurité. Comme le souligne **WANG [2000]**, malgré sa popularité, ce principe de tarification ne couvre pas deux conditions indispensables pour refléter la véritable distribution du risque :

- (i) une réalité : la *skewness* de la distribution des pertes (souvent observée en pratique)
- (ii) une contrainte liée à la théorie de la mesure du risque : la non-additivité de ce principe de tarification lorsqu'un risque large est démembré en plusieurs sous-tranches.

Une des contributions majeures de l'analyse du risque sous l'angle des opérateurs de distorsion a été de revisiter la théorie traditionnelle de la mesure du risque pour ouvrir la porte à des familles de distribution des primes de risque qui respectent un certain nombre de critères théoriques fondés sur l'absence d'opportunité d'arbitrage dans l'élaboration du prix de ce risque¹⁰.

2.2.1 La transformée de Wang

i. Présentation théorique

La segmentation du risque en différentes tranches est une pratique très courante en réassurance XS. Cette subdivision du risque présente une fonction de « *payoff* » analogue à un *Call spread* pour les options, c'est-à-dire un profil de gain / perte 'cappé' et 'flooré' (cf. Section 1 – Partie III).

¹⁰ Nous renvoyons en **Annexe F** pour une revue plus détaillée de quelques uns des résultats théoriques de cette axiomatique

Soit X une variable aléatoire (positive). Sa fonction de distribution cumulative est $F(x) = P[X \leq x] = 1 - P[X > x]$. Si l'on note $G(x) = P[X > x]$ la fonction de perte associée à l'évènement X , alors $F(x) = 1 - G(x)$. $G(x)$ est encore appelée la fonction de distribution « décumulative » ou « *exceedance curve* ».

L'analyse traditionnelle du risque nous enseigne que l'espérance de perte associée à X est la surface sous $G(x)$:

$$E[X] = \int_0^{\infty} G(x) \cdot dx$$

Si ce risque est segmenté en plusieurs strates avec par exemple un point d'attachement (notée a) et un point de limite haute (la priorité notée h), alors la tranche $X_{(a, a+h]}$ aura le profil de perte suivant :

$$X_{(a, a+h]} = \begin{cases} 0 & \text{si } X < a \\ X - a & \text{si } a \leq X < a + h \\ h & \text{si } a + h \leq X \end{cases} \quad \text{et} \quad E[X_{(a, a+h)}] = \int_a^{a+h} G(x) \cdot dx$$

La perte estimée X contenue dans l'intervalle $(a, a + h]$ est donc égale à la surface sous la courbe définie par $G(x)$ sur cet intervalle. Pour h suffisamment petit, on a : $E[X_{(a, a+h)}] \approx h * G(a)$.

On suppose de pouvoir observer un prix de marché pour une tranche $(a, a + h]$ suffisamment fine, noté $E^*[X_{(a, a+h)}]$. Il apparaît bien souvent en pratique que $E^*[X_{(a, a+h)}] > E[X_{(a, a+h)}]$ par la simple présence d'un chargement de sécurité (« *risk load* »). De ce prix observé pour la tranche $(a, a + h]$, on peut déduire une probabilité implicite de perte (« *price-implied loss exceedance probability* ») :

$$G^*(a) = \frac{1}{h} \cdot E^*[X_{(a, a+h)}] \quad \text{avec notamment} \quad G^*(a) > G(a)$$

WANG [1996] & [2001] démontre cette proposition et postule notamment que les prix de marché – pour différentes tranches de risque en couverture XS – impliquent nécessairement une transformation directe de la « *loss exceedance curve* » de $G(x)$ à $G^*(x)$. Le principe d'absence d'opportunité d'arbitrage pour les différentes fonctions de distribution de perte présentées dans l'**Annexe F** repose directement sur cette « distorsion » de la distribution empirique à *posteriori* par rapport à la distribution théorique à *priori*.

Il existe différentes classes de mesures de distorsion qui respectent les propriétés classiques souhaitées pour un 'bon' principe de tarification, notamment au regard du principe d'invariance au changement d'échelle.

Propriétés mathématiques souhaitables pour une mesure de distorsion g telle que $G^*(x) = g[G(x)]$:

- g continue et $g[0,1] \rightarrow [0,1]$ avec notamment $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$
- $\int_0^{\infty} g[G(x)] \cdot dx = 1$

Une classe de mesure de distorsion utile en pratique est celle fournie par la « *Proportional Hazard* » ou « *PH-transform* » (cette mesure de distorsion fait l'objet d'une étude détaillée au paragraphe suivant). **WANG [2000]** propose toutefois une classe plus large de mesures de distorsion (appelée « transformée de Wang ») :

$$G^*(x) = \Phi \cdot (\Phi^{-1}(G(x)) + \lambda)$$

où Φ et Φ^{-1} représentent respectivement la fonction de distribution cumulative de la loi normale et son inverse.

Dans cette mesure de distorsion, l'élément clé est λ : cette variable est le prix du risque tel qu'évalué par le marché (« *market price of risk* »). Cette variable peut être assimilée au *Sharpe ratio* de la théorie du CAPM ou à la transformation d'une probabilité historique vers une probabilité risque-neutre dans une approche APT : c'est une mesure du rendement attendu ajusté de la valeur du risque pour l'investisseur ou encore le surcroît de rendement attendu par unité de risque (mesuré par la volatilité de l'actif sous-jacent) :

$$\lambda = \frac{E[R] - r}{\sigma(R)}$$

où R est une variable aléatoire réelle reflétant le rendement de l'actif, r le taux sans risque et σ l'écart-type de R . Le λ constitue une métrique très utile pour comparer différents actifs ou passifs entre eux, puisque cet indicateur est insensible à l'échelle numérique ou au numéraire du risque sous-jacent¹¹.

Toutefois, même cette mesure de distorsion (pourtant très générale) ne suffit pas toujours à caractériser correctement la réalité complexe de l'environnement financier / actuariel : l'incertitude fondamentale portant sur l'estimation fiable des paramètres de la distribution à priori G conduit **WANG [2000] & [2001]** à proposer une transformée à deux facteurs en passant par une loi de Student à k degrés de liberté dont la densité s'écrit :

$$f(x; k) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot c_k \cdot \left[1 + \frac{x^2}{k} \right]^{-\frac{k+1}{2}} \text{ avec } x \in]-\infty; \infty[\text{ et } c_k = \sqrt{\frac{2}{k}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$$

où Γ est la loi Gamma

WANG [2000] & [2001] propose ainsi un modèle de mesure de distorsion à deux facteurs (λ, k) :

$$G^*(x) = \Omega \cdot (\Phi^{-1}(G(x)) + \lambda) \text{ où } \Omega \propto f(x, k)$$

L'analyse empirique de ces mesures de distorsion nous a conduits à tester sur données réelles la pertinence de cette approche : la démarche analytique proposée par S. Wang permet de mettre en évidence le couple de changement de mesure pour les transactions de *Mortality bonds*¹².

¹¹ Si X représente la v.a.r. d'un passif : alors $X < 0 \rightarrow$ il faut appliquer $-\lambda$ à $Y = -X$ pour respecter les propriétés de g

¹² Une approche similaire est proposée par **WANG [2000]** sur le marché des *Cat bonds* aux USA

ii. Application pratique aux Mortality bonds

Un programme de minimisation des erreurs quadratiques a été mis en œuvre pour calibrer les paramètres du modèle à un et deux facteurs. On cherche ainsi, pour l'ensemble des obligations émises, les paramètres λ^* pour la transformée de Wang à 1-facteur ou le couple (λ^*, k^*) pour la transformée à 2-facteurs tels que :

$$\lambda^* = \underset{\text{obligations}}{\text{ArgMin}} \sum \{Spd^* - Spd_{réel}\}^2 \quad (\lambda^*, k^*) = \underset{\text{obligations}}{\text{ArgMin}} \sum \{Spd^* - Spd_{réel}\}^2$$

Le programme (sous Excel) consiste à identifier le facteur λ^* ou le couple (λ^*, k^*) qui constitue un minimum local, puis global sur le convexe formé par les différentes alternatives (λ, k) possibles pour l'opérateur de distorsion $G^*(x)$ présenté plus haut :

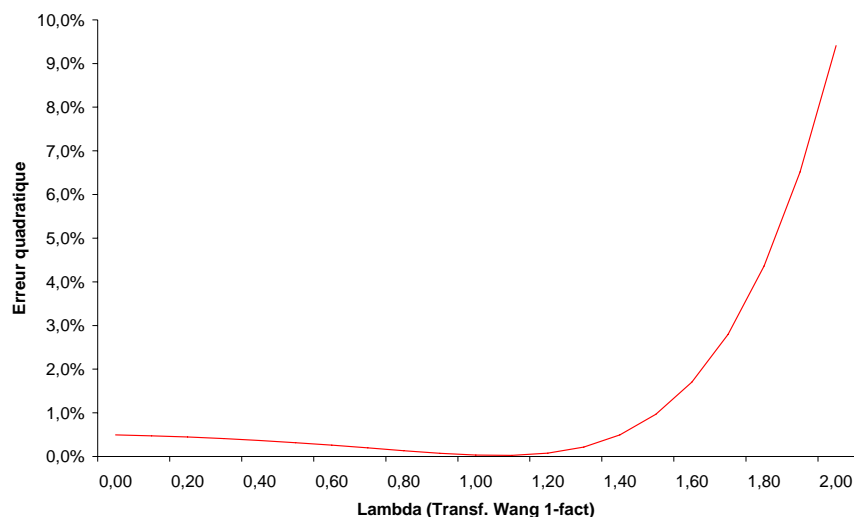


Figure IV – 7 : Résultat du programme d'optimisation – Transformée de Wang 1-facteur

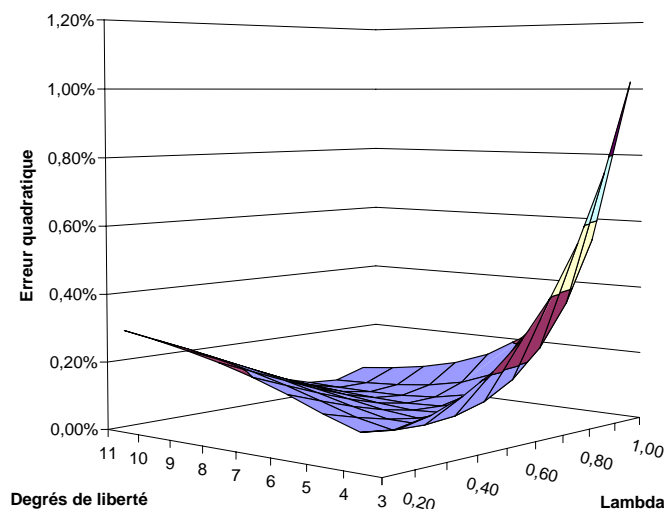


Figure IV – 8 : Résultat du programme d'optimisation – Transformée de Wang 2-facteurs

L'optimisation est ensuite décomposée entre le degré de liberté et le paramètre λ du couple.

Cette approche permet d'isoler des minimums locaux et d'interpoler plus finement entre les incréments de λ au regard du critère de minimisation retenu. Un calcul par différentiation pour étudier les différentes pentes locales du convexe est ainsi effectué pour sélectionner les minimums 'stables' :

ddl	lambda	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
4		0,0927342%								
5			0,0807928%							
6				0,0769070%						
7					0,0634585%					
8						0,0544546%				
9							0,0447962%			
10								0,0358424%		

Tableau IV - 3 : Recherche des minimums locaux – Transformée de Wang 2-facteurs

Enfin, nous effectuons – toujours par approche numérique – un zoom sur le paramètre λ qui ressort comme la solution minimisant l'erreur quadratique (pour un degré de liberté fixé).

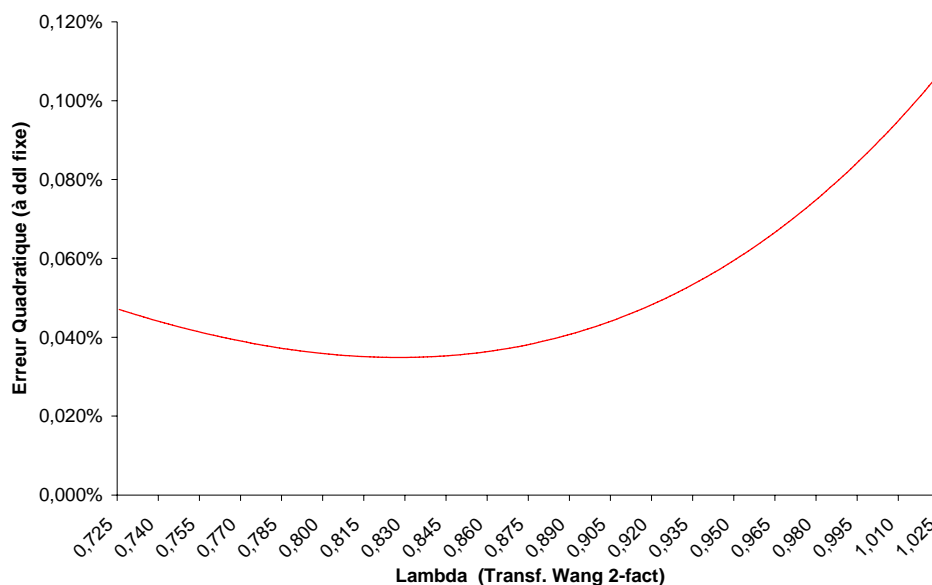


Figure IV - 9 : Résultat du programme d'optimisation – transformée de Wang

Sur la base des *Mortality bonds* émis à ce jour, nous obtenons les solutions du programme d'optimisation :

Transformée de Wang 1-facteur

$$\lambda = 1,07475$$

Transformée de Wang 2-facteurs

$$k = 9 \quad \lambda = 0,8270$$

L'approximation théorique par rapport aux *spreads* observés à l'émission des différents *Mortality bonds* est représentée sur le graphique suivant :

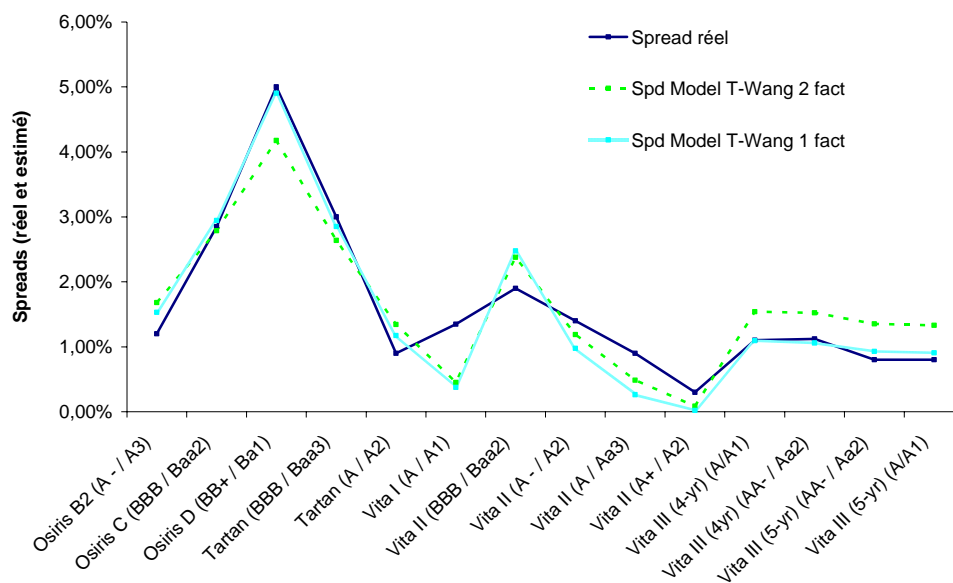


Figure IV - 10 : Illustration de l'adéquation de la transformée de Wang aux données réelles

L'analyse des résultats obtenus ne nous permet pas de conclure comme **WANG [2000]**, que le modèle à 1 facteur est moins puissant que celui à 2 facteurs pour calibrer au plus près les *spreads* théoriques aux *spreads* réels attachés à des risques extrêmes. L'adéquation avec la réalité apparaît relativement satisfaisante aussi bien pour la transformée à 1 facteur que pour le modèle à 2 facteurs.

Pour autant, le fait de trouver $\lambda > 1$ dans le modèle à 1 facteur nous a surpris et montre sans doute la limite de l'interprétabilité des résultats du modèle sur des situations de risque extrêmes. Le niveau absolu élevé des facteurs obtenus reflète sans doute le caractère plus incertain du risque de mortalité comparé à l'estimation des facteurs obtenus par Wang sur les *Cat Bonds* (0,45).

Nous proposons une discussion de ces résultats empiriques au paragraphe 2.3 suivant.

2.2.2 la PH-transform de Christofides

L'approche proposée par **CHRISTOFIDES [2001]** se présente comme une synthèse du modèle de **WANG [1996] & [2000]** et **LANE [2000]** : elle nous paraît une piste pertinente dans le cadre d'une utilisation pratique simple et efficace.

i. *Présentation théorique*

L'analyse de S. Christofides part du principe que toute la mesure d'aversion au risque du marché peut se résumer à travers la relation suivante :

$$\text{Spread} \equiv [EL]^{1/\rho}$$

où EL est l'Expected Loss et $\rho \geq 1$ constitue un coefficient d'aversion au risque que nous explicitons ci-après.

Cas particulier : lorsque $\rho = 1$, le *spread* est strictement égal à la perte moyenne attendue ; il s'agit donc de la prime pure (le principe de tarification élémentaire est respecté).

En pratique, **CHRISTOFIDES [2001]** établit que plus 90% des émissions de *Cat bonds* émis en 2001 ont des coefficients d'aversion au risque compris dans un range $1,65 \pm 0,15$.

CHRISTOFIDES [2001] établit une relation directe entre le coefficient d'aversion au risque ρ et le coefficient de distorsion λ de **WANG [1996]** :

$$\lambda = 1 - \frac{1}{\rho}$$

Ainsi lorsque $\rho = 1,65 \pm 0,15$, alors $\lambda \in [0,34 - 0,45]$. **CHRISTOFIDES [2001]** postule que le « ρ » de sa démarche est une généralisation et une simplification de la transformée de **WANG [1996]**. Comme nous l'illustrons par la suite, nous ne vérifions pas cette relation pour les *Mortality bonds* émis à ce jour.

Le raisonnement reprend l'approche décrite au paragraphe précédent.

Pour une variable aléatoire X mesurant la perte probable d'un risque « *Cat* », la « *Proportional Hazard transform* » ou « *PH-transform* » est donnée par :

$$\Pi_{\rho}(X) = E[\Pi_{\rho}(X)] = \int_0^{\infty} [S(x)]^{1/\rho} dx$$

en notant $S(x) = \text{Prob}[X > x]$ la fonction de survie de la variable X et $\Pi_{\rho}(X)$ la prime pure ajustée du risque par le coefficient d'aversion au risque ρ . La fonction de survie suffit à caractériser l'espérance de perte théorique X .

Comme le notait **LANE [2000]**, la surface entre la courbe de la fonction de survie et sa « *PH-transform* » représente le rendement excédentaire requis par le marché pour accepter de prendre un tel niveau de risque (noté « *EER* » pour « *Excess Expected Return* »).

L'aire supplémentaire comprise entre les deux courbes $S(x)$ et $S(x)^{1/\rho}$ correspond ainsi au chargement appliqué si bien que la somme des deux aires vaut la prime chargée ou prime ajustée du risque.

En rebasant de 0 à 1 le pourcentage de perte attendue sur une tranche d'émission, **CHRISTOFIDES [2001]** propose une représentation formelle de cette translation :

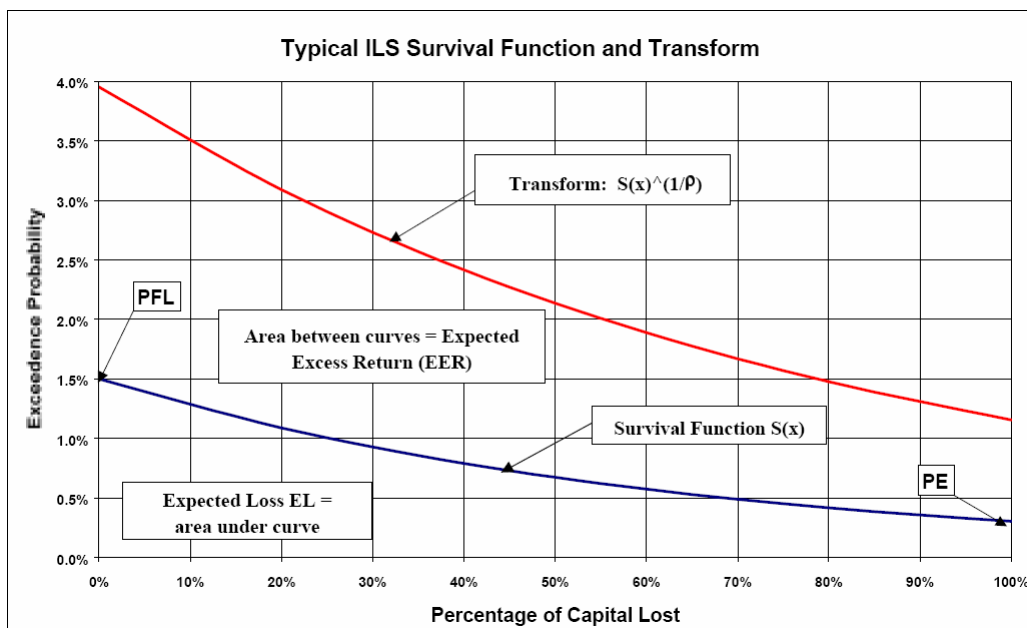


Figure IV - 11 : Illustration de la PH-transform sur une fonction de survie

La fonction de survie $S(X)$ est par conséquent entièrement caractérisée par les probabilités d'attachement (PFL), d'expiration de la tranche (PE) et le niveau de perte moyenne attendue (EL).

On peut caractériser $S(x)$ par une fonction de survie exponentielle de la forme :

$$S(x) = \alpha \cdot \exp(-\beta \cdot x) \quad \text{avec} \quad S(0) = \alpha = PFL \quad \text{et} \quad S(1) = \beta = PE$$

$$\text{On a par ailleurs que : } EL = \int_0^1 S(x) dx = \int_0^1 \alpha \cdot \exp(-\beta \cdot x) dx = \frac{\alpha}{\beta} \cdot [1 - \exp(-\beta)]$$

En posant que le *spread* d'un *Cat bond* s'apparente à la translation de la courbe $S(x)$ vers $S(x)^{1/\rho}$, alors :

$$\begin{aligned} \text{Spread} &= \int_0^1 [S(x)]^{1/\rho} dx = \int_0^1 [\alpha \cdot \exp(-\beta \cdot x)]^{1/\rho} dx = \alpha^{1/\rho} \cdot \frac{\rho}{\beta} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{\beta}{\rho}\right) \right] \\ &\Rightarrow \text{Spread} \approx \alpha^{1/\rho} \cdot \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\beta}{\rho}\right)}{\beta} \right]^{1/\rho} \end{aligned}$$

D'où la formulation simple :

$$\text{Spread} \equiv [EL]^{1/\rho}$$

En reprenant la décomposition proposée par **LANE [2000]**, **CHRISTOFIDES [2001]** établit ainsi que le *spread* de marché est une fonction de la fréquence et de la sévérité :

$$Spread = [EL]^{1/\rho} = (PFL)^{1/\rho} \cdot (CEL)^{1/\rho}$$

ii. *Application pratique aux Mortality bonds*

La mise en œuvre pratique de cette analyse des *spreads* de *Cat bonds* est détaillée dans **CHRISTOFIDES [1998]**. La relative simplicité de mise en œuvre de la démarche rend cette analyse très utile sur un plan pratique. On reprend les obligations émises à ce jour tranche par tranche :

SPV	Attachment	Exhaustion	PFL	PE	EL
Osiris B2 (A - / A3)	114%	119%	0,1170%	0,0460%	0,0730%
Osiris C (BBB / Baa2)	110%	114%	0,2550%	0,1170%	0,1780%
Osiris D (BB+ / Ba1)	106%	110%	0,5260%	0,2550%	0,3740%
Tartan (BBB / Baa3)	110%	115%	0,2930%	0,0970%	0,1800%
Tartan (A / A2)	115%	120%	0,0970%	0,0200%	0,0530%
Vita I (A / A1)	130%	150%	0,0770%	0,0030%	0,0158%
Vita II (BBB / Baa2)	110%	115%	0,2344%	0,0755%	0,1458%
Vita II (A - / A2)	115%	120%	0,0755%	0,0165%	0,0411%
Vita II (A / Aa3)	120%	125%	0,0165%	0,0015%	0,0073%
Vita II (A+ / A2)	125%	145%	0,0015%	0,0001%	0,0003%
Vita III (AA1)	120%	125%	0,0420%	0,0370%	0,0390%
Vita III (AA1)	120%	125%	0,0390%	0,0360%	0,0370%
Vita III (AA- / Aa2)	125%	145%	0,0370%	0,0280%	0,0320%
Vita III (AA- / Aa2)	125%	145%	0,0360%	0,0270%	0,0310%

Tableau IV - 4 : Rappel des caractéristiques techniques des *Mortality bonds* émis à ce jour

Il est aisé de représenter $S(x)$ et d'estimer des courbes approximant la distribution générale du marché :

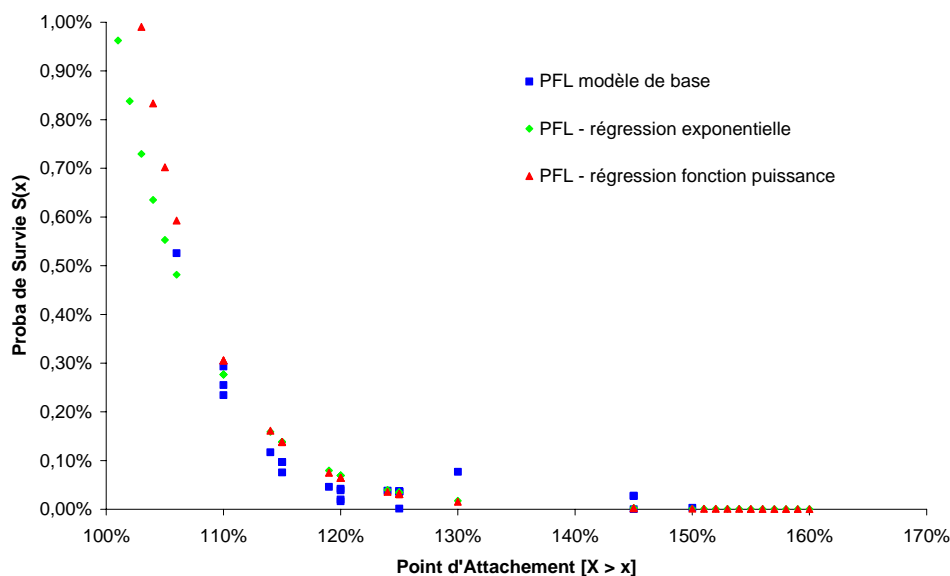


Figure IV - 12 : Représentation de la fonction de survie des *Mortality bonds* émis à ce jour

L'analyse proposée par **CHRISTOFIDES [1998]** est une approche plus 'microéconomique' que celle de Wang car elle vise à estimer le coefficient ρ applicable à chaque tranche [i] d'obligation émise (noté $\rho[i]$ ci-après).

Le calcul d'estimation des coefficients d'aversion au risque s'effectue en deux temps.

1^{ère} étape – résolution de l'intégrale par intégration numérique :

$$EER_{tranche[i]} = \frac{1}{longueur\ tranche[i]} \cdot \int_{Pt(attachement)}^{Pt(expiration)} (PFL)^{1/\rho[i]} \cdot \exp(-c \cdot x)^{1/\rho[i]} dx$$

Avec $c = \frac{\ln(PFL/PE)}{T} = \frac{\ln(CEL)}{T}$ en notant $T = \{\text{Point d'expiration} - \text{Point d'attachement}\}$ de la tranche [i] afin de rebaser de 0 à 100% le support de l'intégrale sur la longueur de la tranche observée.

On a ainsi :

$$EER_{tranche[i]} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^1 (PFL)^{1/\rho[i]} \cdot \exp(-c \cdot x)^{1/\rho[i]} dx = \frac{1}{T} \cdot (PFL)^{1/\rho[i]} \cdot \frac{\rho[i]}{c} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{c \cdot T}{\rho[i]}\right) \right]$$

2^{ème} étape – résolution du programme de minimisation pour l'ensemble des tranches [i] d'obligations :

$$\rho[i] = \rho_{tranche[i]} = \text{ArgMin} \left\{ EL_{tranche[i]} + EER_{tranche[i]} - Spread_{réel[i]} \right\}^2$$

Le coefficient ρ implicite « attendu » pour chaque tranche peut être directement extrait de la relation précédente :

$$\rho = \frac{\ln(EL)}{\ln(Spread)}$$

L'optimisation s'effectue au moyen du Solver sous Excel en calant ligne à ligne la contrainte de minimisation. Les résultats de l'analyse sont les suivants :

SPV	Attachment	Exhaustion	Rho théorique	Rho attendu	EL	EER	EL pour rho = 1	Spread réel	Spd théorique	Erreur quadratique
Osiris B2 (A - / A3)	114%	119%	1,6019	1,6330	0,0730%	1,1204%	0,0761%	1,200%	1,197%	0,0000004%
Osiris C (BBB / Baa2)	110%	114%	1,7400	1,7795	0,1780%	2,6055%	0,1771%	2,850%	2,783%	0,0000442%
Osiris D (BB+ / Ba1)	106%	110%	1,8205	1,8655	0,3740%	4,6197%	0,3743%	5,000%	4,994%	0,0000004%
Tartan (BBB / Baa3)	110%	115%	1,7859	1,8023	0,1800%	2,8449%	0,1773%	3,000%	3,022%	0,0000062%
Tartan (A / A2)	115%	120%	1,6035	1,6012	0,0530%	0,8402%	0,0488%	0,900%	0,889%	0,0000005%
Vita I (A / A1)	130%	150%	2,0034	2,0332	0,0158%	1,3822%	0,0228%	1,350%	1,405%	0,0000231%
Vita II (BBB / Baa2)	110%	115%	1,6327	1,6478	0,1458%	1,7667%	0,1403%	1,900%	1,907%	0,0000016%
Vita II (A - / A2)	115%	120%	1,8291	1,8265	0,0411%	1,3335%	0,0388%	1,400%	1,372%	0,0000065%
Vita II (A / Aa3)	120%	125%	2,0472	2,0221	0,0073%	0,8368%	0,0063%	0,900%	0,843%	0,0000313%
Vita II (A+ / A2)	125%	145%	2,0525	2,1891	0,0003%	0,2479%	0,0005%	0,300%	0,248%	0,0000268%
Vita III (AA1)	120%	125%	1,7235	1,7405	0,0390%	1,0590%	0,0394%	1,100%	1,098%	0,0000000%
Vita III (AA1)	120%	125%	1,7410	1,7592	0,0370%	1,0764%	0,0375%	1,120%	1,114%	0,0000004%
Vita III (AA- / Aa2)	125%	145%	1,6740	1,6667	0,0320%	0,8209%	0,0323%	0,800%	0,853%	0,0000280%
Vita III (AA- / Aa2)	125%	145%	1,6569	1,6732	0,0310%	0,7664%	0,0313%	0,800%	0,798%	0,0000001%
			1,77943	1,80285						0,0001694%

Tableau IV - 5: Etapes de calcul pour estimer les coefficients d'aversion au risque Rho théoriques

De manière plus synthétique, en exprimant le *spread* théorique à partir du Rho théorique calculé :

SPV	EL	Spread réel	Spd sur EL
Osiris B2 (A - / A3)	0,0730%	1,200%	1,101%
Osiris C (BBB / Baa2)	0,1780%	2,850%	2,629%
Osiris D (BB+ / Ba1)	0,3740%	5,000%	4,643%
Tartan (BBB / Baa3)	0,1800%	3,000%	2,905%
Tartan (A / A2)	0,0530%	0,900%	0,906%
Vita I (A / A1)	0,0158%	1,350%	1,266%
Vita II (BBB / Baa2)	0,1458%	1,900%	1,832%
Vita II (A - / A2)	0,0411%	1,400%	1,408%
Vita II (A / Aa3)	0,0073%	0,900%	0,954%
Vita II (A+ / A2)	0,0003%	0,300%	0,204%
Vita III (AA1)	0,0390%	1,100%	1,052%
Vita III (AA1)	0,0370%	1,120%	1,069%
Vita III (AA- / Aa2)	0,0320%	0,800%	0,817%
Vita III (AA- / Aa2)	0,0310%	0,800%	0,763%

Tableau IV - 6 : Spreads sur EL estimés à partir des Rho théoriques

Graphiquement, les résultats de l'estimation des *spreads* théoriques sont alignés sur les *spreads* réels de marché de manière globalement satisfaisante, ce qui n'est pas surprenant car l'optimisation consiste justement à extraire le coefficient d'aversion au risque qui permet la meilleure calibration aux *spreads* réels.

Cette démarche vise ainsi à extraire les coefficients d'aversion au risque implicites dans les *spreads* exigés par les investisseurs et les *spreads* implicites sur EL qui devraient refléter la « *fair value* » du risque transféré.

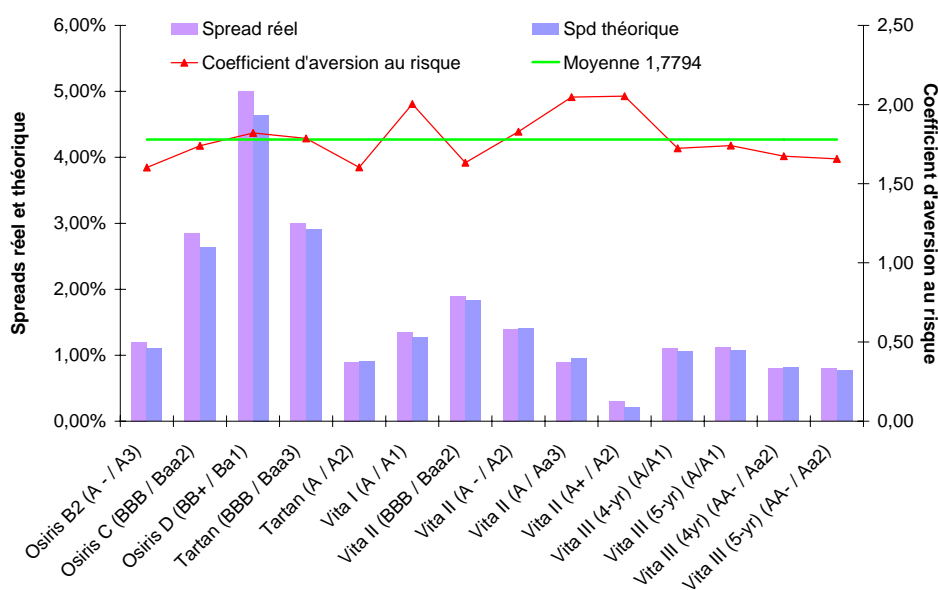


Figure IV - 13 : Illustration de l'adéquation du calcul des spreads par Rho aux données réelles

L'approche proposée par **CHRISTOFIDES [1998] & [2001]** est une autre manière d'appréhender la cherté relative ou l'opportunité d'investissement des *Mortality bonds* au regard du niveau d'aversion au risque implicite du marché au moment de leur émission : le différentiel entre *spread* réel à l'émission et *spread* sur EL (de chaque tranche) peut ainsi offrir une indication de l'évolution probable du niveau auquel l'obligation devrait traiter dans le marché secondaire.

iii. Analyses complémentaires

Une modélisation alternative du Rho de Christofides a été envisagée à titre de comparaison : l'analyse part de la distribution des Rhos implicites des obligations en circulation et considère une tarification à la moyenne du marché + multiple d'écart-type.

La démarche constitue donc une approche différente de la précédemment décrite puisqu'elle repose sur l'hypothèse d'un équilibre 'macroéconomique' du marché et non une extraction 'microéconomique' du coefficient d'aversion au risque propre à chaque souche en circulation.

L'analyse consiste à déterminer un coefficient d'aversion au risque moyen du marché pour inférer des niveaux théoriques attendus de *spreads* sur chaque tranche d'obligation.

Cette approche du risque suppose donc une distribution uniforme de la prime de risque du marché quelque soit le niveau de risque porté par les investisseurs.

Deux méthodes sont proposées pour extraire le Rho moyen du marché :

1^{ère} méthode – analyse par moyenne / variance et optimisation des erreurs quadratiques

2^{ème} méthode – analyse directe par optimisation des erreurs quadratiques

On s'attend à ce que les deux résultats soient très proches puisque, au risque de convergence près, la méthode est strictement identique ; la première vise à isoler le multiple d'écart-type requis pour trouver le Rho optimal alors que la deuxième boucle directement l'indicateur du Rho optimal.

1^{ère} méthode – analyse moyenne / variance et optimisation :

La distribution empirique des différents paramètres Rho d'aversion au risque peut être représentée dans le graphique ci-dessous :

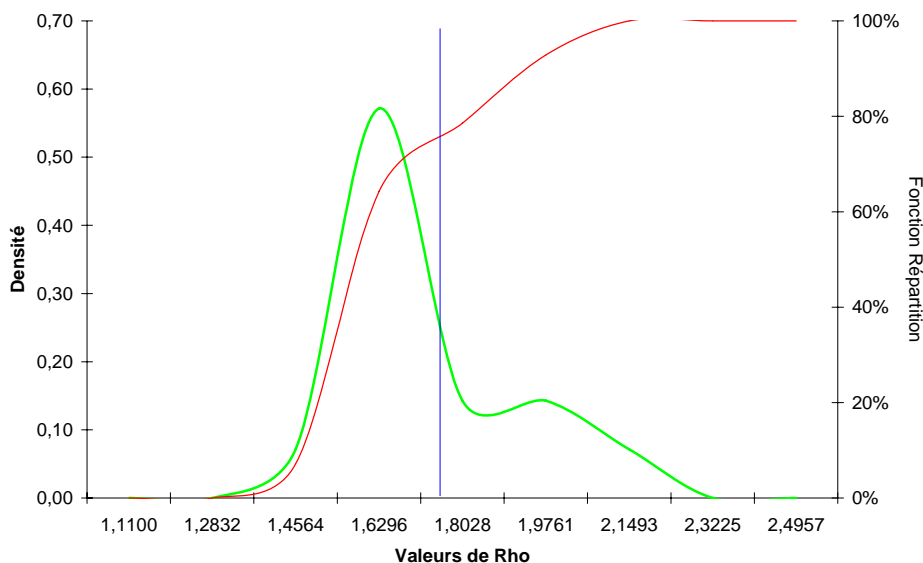


Figure IV - 14 : Distribution des Rhos sur les *Mortality bonds* émis à ce jour

La moyenne $\bar{\rho}$ s'établit à 1.8028 et l'écart-type $\sigma(\rho)$ à 0.1732 ; la médiane se situant à 1.7693. On cherche le multiple d'écart-type θ tel que :

$$\rho^* = \bar{\rho} + \theta_{opt} \cdot \sigma(\rho)$$

où ρ^* est le coefficient d'équilibre d'aversion au risque du marché et θ_{opt} le multiple d'écart-type qui assure cet équilibre à travers le programme d'optimisation suivant pour chaque tranche [i] d'obligations émises à ce jour :

$$\exists \theta_{opt} \text{ tel que } \rho^* = \text{ArgMin} \sum_i \left\{ (EL_i)^{1/\rho} - Spread_i^{réel} \right\}^2$$

Le résultat ressort à : **1.77472**, soit un multiple d'écart-type $\theta_{opt} = - 0.1624$. Le tableau ci-dessous résume les résultats de l'optimisation :

Transaction	Spread réel	Rho marché (1.77472)	Erreur quadratique
Osiris B2 (A- / A3)	1,200%	1,7083%	0,002584%
Osiris C (BBB / Baa2)	2,850%	2,8229%	0,000007%
Osiris D (BB+ / Ba1)	5,000%	4,2893%	0,005051%
Tartan (BBB / Baa3)	3,000%	2,8407%	0,000254%
Tartan (A / A2)	0,900%	1,4264%	0,002770%
Vita I (A / A1)	1,350%	0,7212%	0,003954%
Vita II (BBB / Baa2)	1,900%	2,5227%	0,003877%
Vita II (A- / A2)	1,400%	1,2359%	0,000269%
Vita II (A / Aa3)	0,900%	0,4668%	0,001877%
Vita II (A+ / A2)	0,300%	0,0773%	0,000496%
Vita III (4-yr) (AA1)	1,100%	1,2000%	0,000100%
Vita III (5-yr) (AA1)	1,120%	1,1649%	0,000020%
Vita III (4yr) (AA- / Aa2)	0,800%	1,0734%	0,000747%
Vita III (5-yr) (AA- / Aa2)	0,800%	1,0544%	0,000647%
			0,022654%

Tableau IV - 7 : Estimation du Rho moyen de marché

2^{ème} méthode – optimisation directe :

Le calcul d'optimisation directe consiste à déterminer le coefficient d'aversion au risque d'équilibre du marché ρ^* qui minimise le programme précédent. Graphiquement, l'optimisation fait ressortir un minimum global :

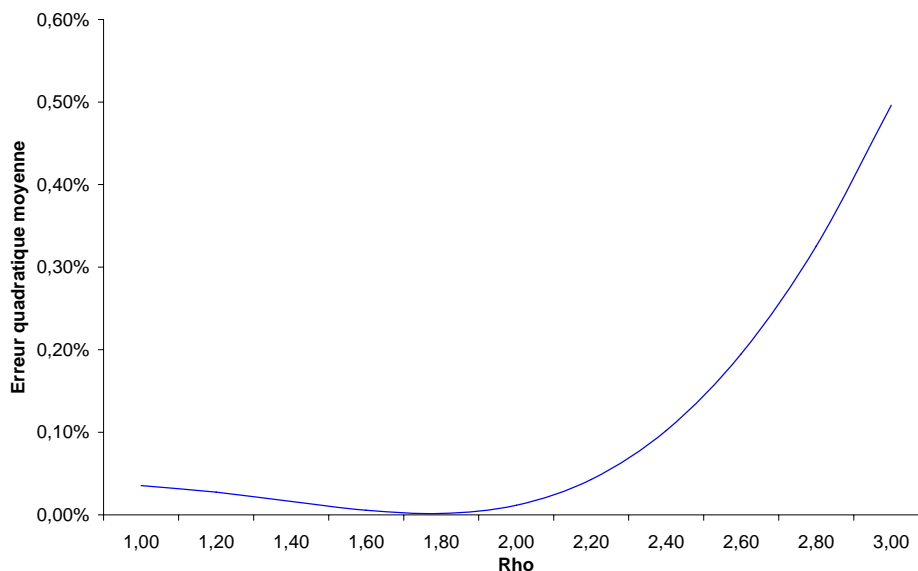


Figure IV - 15 : Résultat du programme d'optimisation – Rho de marché de Christofides

En effectuant un « zoom » sur la zone autour de 1.80 :

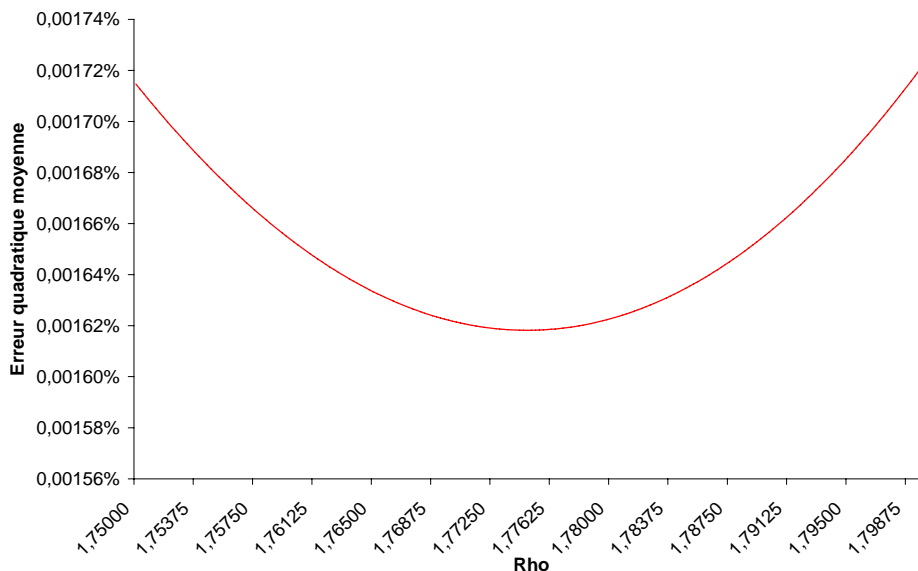


Figure IV - 16 : Résultat du programme d'optimisation – Rho de marché de Christofides

Le résultat de l'optimisation ressort à **1.77475** ; comme attendu, ce résultat est très proche du précédent et permet de déduire le multiple d'écart-type permettant d'égaliser l'équation précédente. Les *spreads* théoriques résultant sont également très semblables.

La combinaison d'une analyse du risque micro des *spreads* d'obligations et du risque 'macro' d'équilibre du marché permet ainsi de formuler quelques jugements sur le degré d'aversion au risque du marché.

2.3 Analyse du degré d'aversion au risque du marché des *Mortality bonds*

La description d'une relation structurelle entre facteurs de risque, telle que proposée par **LANE [2000]**, l'analyse des *spreads* par les opérateurs de distorsion développés dans **WANG [2000]** ou encore l'extraction d'un coefficient d'aversion au risque idiosyncratique ou plus systématique telle que proposée par **CHRISTOFIDES [1998] & [2001]** autorisent à porter des jugements – du point de vue de l'émetteur (et réciproquement pour l'investisseur) – sur la cherté absolue et relative des différentes souches émises.

Une démarche conjointe de l'ensemble de ces faisceaux d'analyses permet de formuler des jugements de « valeur relative » utiles en vue d'une décision d'émission ou d'investissement.

2.3.1 Considérations générales sur le risque

Le marché n'est pas averse au risque en soi, mais à l'incertitude qui entoure ce risque :

- incertitude sur la loi de distribution qui caractérise ce risque
- incertitude sur la stabilité des paramètres structurels de cette distribution
- incertitude sur le déroulement de ce risque (expérience historique limitée)
- incertitude sur le réel degré d'indépendance du risque de mortalité avec d'autres classes d'actifs

Comme le note **WANG [2002]**, son modèle à 1 facteur n'est pas suffisant pour ajuster la distribution au risque, notamment pour les queues extrêmes de distribution. En revanche, le modèle à 2 facteurs semble mieux refléter les deux forces qui modifient en profondeur le comportement rationnel des investisseurs par rapport au risque qu'ils acceptent de porter : l'appât du gain et la peur du risque (« *greed* » and « *fear* »).

En effet, même si les investisseurs peuvent subir de lourdes pertes en s'exposant à de telles obligations, ils n'en désirent pas moins s'exposer à une source de rendement extrêmement profitable.

Comme l'illustre une note de la banque d'affaires **GOLDMAN SACHS [1998]** :

Table 4. Return Distribution for a Hypothetical (Binary) CAT Bond

Probability	Return
99%	10%
1%	-90%

On peut noter que l'amplitude de la distorsion s'accroît fortement dans les queues de distribution, là où l'incertitude est à son maximum et où l'exigence de protection pour toute prise de risque incertain impliquent un rendement au-delà de l'espérance de perte liée au risque 'réel'.

Un tel ajustement accroît la *kurtosis* de la distribution et autorise une marge de sécurité très protectrice pour l'investisseur, celui-ci devant faire face au risque lié à l'incertitude fondamentale de la 'vraie' distribution en plus de l'incertitude sur les paramètres supposés de celle-ci.

A de tels niveaux de chargement de sécurité, **CHRISTOFIDES [1998] & [2001]** estime que les *spreads* de *Cat bonds* en général reflètent une estimation de perte portant sur le 1^{er} ou 2^{ème} percentile de la distribution de perte estimée initialement par le modèle de base.

C'est donc une protection extrême au point que l'auteur apporte un éclairage complémentaire particulièrement intéressant : si la tarification des *Cat bonds* se situait au 10^{ème} percentile (correspondant à un facteur d'aversion au risque $\rho = 1,3$), alors les *spreads* seraient réduits de 50%. Un tel niveau de *spreads* constituerait encore une source attractive de rendement pour les investisseurs mais créerait également un environnement de prix plus raisonnable pour les émetteurs.

A l'aune des résultats trouvés dans les sections précédentes, il est apparu que cette aversion au risque était toutefois assez différente d'une tranche d'obligation à l'autre.

2.3.2 Illustration de profils de risque

Afin d'illustrer ces points de discussion théoriques, nous proposons une segmentation des obligations qui reflète une appréhension du risque différente selon le niveau absolu d'exposition au risque de mortalité.

Nous postulons le principe d'aversion au risque suivant : plus la tranche d'obligation émise 'attache' à un point bas (profil très risqué car exposé dès la première hausse de mortalité), plus l'aversion au risque est élevée. Pour autant, ce profil de risque apparaît moins élevé en moyenne qu'une tranche haute et large (20 points de longeurs par exemple sur un point d'attachement supérieur à 120%) là où finalement le risque paraît tellement lointain qu'il en devient incertain, donc difficile à estimer.

Ceci apparaît en contradiction avec le principe de tarification par les opérateurs de distorsion : en effet, du fait du profil de la fonction de distorsion g (croissante, concave et $g'(0) = +\infty$), la prime de risque par tranche devrait décroître quand la hauteur de la tranche augmente. Or ce n'est pas ce que nous trouvons en pratique. Si l'opérateur de distorsion permet un décalage global et cohérent de l'ensemble des paramètres du tarif (espérance, variance, écart-type, sinistre maximum probable...), son poids relatif dépend du niveau absolu de la tranche où le risque est positionné. Une analyse qualitative de ce paradoxe est proposée ci-après.

Bien qu'effectué sur un échantillon de données réduit (14 points), un test d'hypothèse visant à étudier l'homogénéité des moyennes des coefficients d'aversion au risque a été construit sur la base d'une segmentation des profils de risque en deux sous-groupes.

Nous avons classé par ordre croissant les tranches d'obligations émises à ce jour par leur point d'attachement et largeur de tranche. La segmentation est résumée dans le tableau suivant :

	Tranche obligation	Rating	Largeur Tranche	Pt.Attachement	Rho implicite	Rho estimé
Gpe 1 (n1)	Osiris D (BB+ / Ba1)	BB+	4%	106%	1,8655	1,8205
	Osiris C (BBB / Baa2)	BBB	4%	110%	1,7795	1,7400
	Tartan (BBB / Baa3)	BBB	5%	110%	1,8023	1,7859
	Vita II (BBB / Baa2)	BBB	5%	110%	1,6478	1,6327
	Osiris B2 (A- / A3)	A-	5%	114%	1,6330	1,6019
	Tartan (A / A2)	A	5%	115%	1,6012	1,6035
	Vita II (A- / A2)	A-	5%	115%	1,8265	1,8291
	Vita II (A / Aa3)	A	5%	120%	2,0221	2,0472
	Vita III (4-yr) (AA1)	A	5%	120%	1,7405	1,7235
Gpe 2 (n2)	Vita III (5-yr) (AA1)	A	5%	120%	1,7592	1,7410
	Vita II (A+ / A2)	A+	20%	125%	2,1891	2,0525
	Vita III (4yr) (AA- / Aa2)	AA-	20%	125%	1,6667	1,6740
	Vita III (5-yr) (AA- / Aa2)	AA-	20%	125%	1,6732	1,6569
	Vita I (A / A1)	A	20%	130%	2,0332	2,0034

Tableau IV - 8 : Synthèse et tri des résultats obtenus sur Rho

Nous avons cherché à tester l'hypothèse d'égalité des moyennes, en notant n_1 et n_2 respectivement les deux populations des deux sous-ensembles distingués plus haut et m_1 et m_2 leurs moyennes théoriques associées (écart-types différents).

Comme TASSI [2004] le souligne, « si n_1 et n_2 sont petits (l'un des deux effectifs inférieur à 20), on recommande la plus grande prudence ; on a coutume cependant, quelques soient les lois, de considérer la statistique U ci-dessous et de prendre la décision d'accepter (H_0) : $m_1 = m_2$ » si :

$$U = \frac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{où } t_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ est le fractile d'ordre } 1-\frac{\alpha}{2} \text{ de la loi de Student T}(df)$$

\bar{X}_1 et \bar{X}_2 , S_1^2 et S_2^2 sont respectivement la moyenne et la variance empiriques attachées à chaque sous-population n_1 et n_2 respectivement.

Le nombre de degrés de liberté (df) est approximé par le nombre entier le plus proche tel que :

$$df = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$$

Pour $\alpha = 0,05$, on obtient les résultats de test suivants (effectués avec le module « Data analysis » d'Excel) :

- Rho implicite

t-Test: Paired Two Sample for Means		
	Variable 1	Variable 2
Mean	1,736555928	1,869135686
Variance	0,011303779	0,043448509
Observations	7	7
Pearson Correlation	0,306882997	
Hypothesized Mean Difference	0	
df	6	
t Stat	-1,72917794	
P(T<=t) one-tail	0,067253819	
t Critical one-tail	1,943180274	
P(T<=t) two-tail	0,134507639	
t Critical two-tail	2,446911846	

- Rho estimé

t-Test: Paired Two Sample for Means		
	Variable 1	Variable 2
Mean	1,716211424	1,842647203
Variance	0,010294678	0,033201096
Observations	7	7
Pearson Correlation	0,470932104	
Hypothesized Mean Difference	0	
df	6	
t Stat	-2,071291468	
P(T<=t) one-tail	0,041868833	
t Critical one-tail	1,943180274	
P(T<=t) two-tail	0,083737667	
t Critical two-tail	2,446911846	

Le fractile d'ordre 97,5% de $T(6)$ est égal à 1,73 pour Rho implicite et 2,07 pour Rho estimé. La statistique U calculée prend la valeur 2,45 dans les deux cas.

Comme cette statistique est supérieure au fractile choisi, on refuse donc l'hypothèse (H_0) : $m_1 = m_2$.

Bien que disposant de peu de données, une interprétation possible de ce résultat est la suivante :

- (i) les tranches basses avec un range étroit revête un caractère « digital » de perte. Les investisseurs sont prêts à porter ce risque sous condition d'être fortement rémunérés en échange. Les coefficients d'aversion au risque sont toutefois décroissants au fur et à mesure que le risque transféré est plus haut en termes de points d'attachement (110%-115%)
- (ii) en revanche, les tranches plus élevées correspondent à des scénarios de mortalité extrême : plus la bande est large, plus l'aversion au risque semble prononcée. On peut noter que ce sous-groupe intègre les premières opérations apportées au marché (VITA I et VITA II) : il y a peut-être un biais de l'échantillon dû à la nouveauté de ces opérations. L'émetteur a sans doute souhaité sécuriser le placement en offrant des *spreads* très attractifs au regard du risque théorique faible (mesuré par l'*Expected Loss* des tranches).
- (iii) on peut également noter que la maturité des transactions est en moyenne de 3 ans pour le 1^{er} groupe et compris entre 3 et 5 ans pour le 2^{ème} groupe : la durée de l'exposition au risque de surmortalité pourrait également expliquer une partie de cette hétérogénéité des coefficients d'aversion au risque entre les deux groupes – les investisseurs se sentant plus à l'aise avec une exposition plutôt courte que longue

- (iv) enfin, il convient de souligner que les types d'investisseurs ne sont les mêmes entre les tranches hautes et les tranches basses de risque : les tranches basses sont plutôt souscrites par des *hedge funds*, qui par nature sont « *risk-taker* » (donc peu averses au risque), alors que les tranches hautes, considérées les moins risquées, sont souscrites plutôt par des « *money managers* » (banques privées, OPCVM, réassureurs...), qui sont plus « *risk adverse* » et exigeraient en conséquence une surprime de risque pour rentrer sur ce nouveau marché.

Il apparaît donc qu'à chaque profil de risque transféré correspond une classe d'investisseurs bien identifiés. Ces investisseurs auront des aversions au risque différentes qui se traduiront par des exigences de rendement hétérogènes, cette exigence de rendement n'étant pas nécessairement proportionnelle au risque souscrit.

2.3.3 Quel pouvoir prédictif pour ces modèles ?

Le graphique ci-dessous résume l'ensemble des résultats obtenus jusqu'à présent. Il apparaît assez nettement que la plupart des modèles permettent de calibrer de manière globalement satisfaisante les *spreads* réels des souches émises à ce jour sur le marché des *Mortality bonds*.

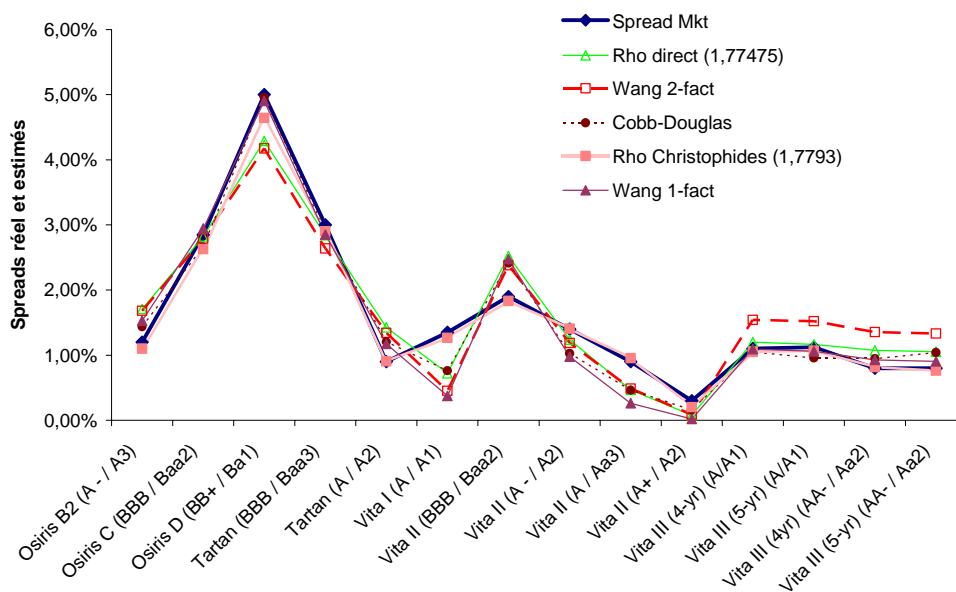


Figure IV - 17 : Illustration de l'adéquation du calcul des *spreads* par différentes techniques d'estimation

Bien qu'il soit tentant de penser avoir trouvé une forme structurelle permettant de refléter tous les états du monde, il nous est apparu utile de confronter ces résultats au principe de 'retour à la moyenne' des prix pour mesurer la force prédictive des résultats obtenus.

Nous proposons donc de comparer les *spreads* de marché au 1^{er} juin 2007 aux *spreads* 'anticipés' par les Rhos 'macros' et 'micros' de **CHRISTOFIDES** ainsi que l'équation structurelle de la transformée de **WANG**.

Notre intuition est la suivante :

- le Rho 'micro' de **CHRISTOFIDES** donne une indication du niveau théorique auquel l'obligation aurait dû être offerte initialement au marché.
- le Rho 'macro' et la transformée de **WANG** offrent quant à eux une perspective sur l'évolution des *spreads* dans le temps si l'on postule le principe de tarification à la moyenne du marché.

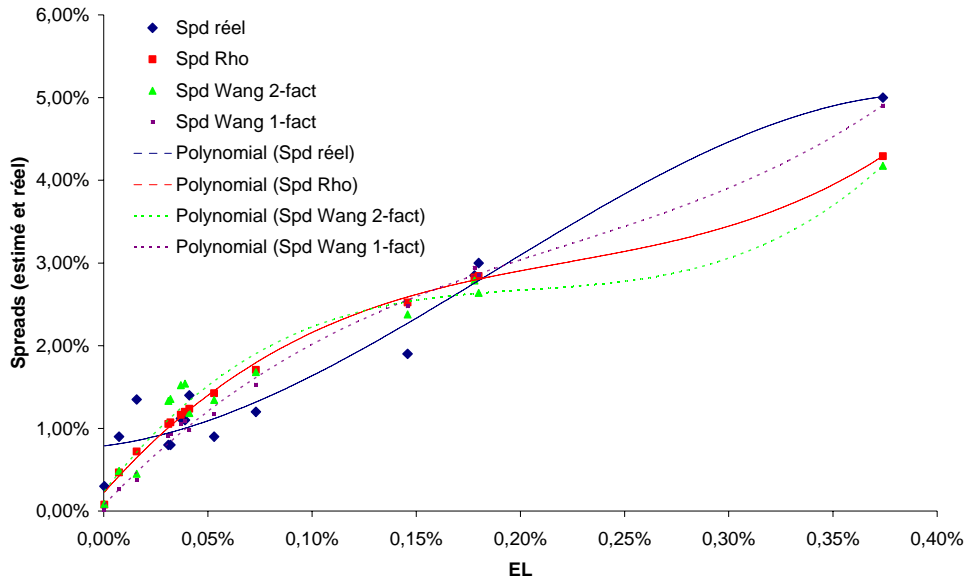


Figure IV - 18 : Représentation des estimations dans le plan *Expected Loss / Spreads*

<u>Approximation</u>	<u>Equation</u>
Spread réel	$y = -1E+06x^3 + 6550,5x^2 + 3,093x + 0,0079$
Spread Rho	$y = 2E+06x^3 - 10897x^2 + 28,646x + 0,0022$
Spread Wang-2 facteurs	$y = 2E+06x^3 - 15197x^2 + 32,658x + 0,0023$
Spread Wang-1 facteur	$y = 1E+06x^3 - 6628,3x^2 + 21,985x + 0,0005$

Les spreads au 1^{er} juin 2007 des émissions de Mortality Bond sont les suivants (*Source* : Swiss Re Capital Markets – niveaux de prix en fourchette pour les transactions du marché secondaire) :

June 1, 2007													
Life													
Issuer	Bloomberg Ticker	Rating	Expected Maturity	Bid	Offer	Offer AMT	Bid Spd	Offer Spd	Stated Cpn	Expected Loss ^(%)	Coverage	CUSIP	
OSIRIS Capital B1	OSIRIS	AAA/Aaa	1/15/2010	100.00	100.02	-	0.20	0.19	E + 20	7.3 bps	Extreme Mortality	XS0274567311	
OSIRIS Capital B2	OSIRIS	A-/A3	1/15/2010	100.06	100.14	-	1.17	1.14	E + 120	7.3 bps	Extreme Mortality	XS0274567154	
OSIRIS Capital C	OSIRIS	BBB/Baa2	1/15/2010	100.23	100.58	-	2.75	2.60	L + 285	17.8 bps	Extreme Mortality	68827PAA0	
OSIRIS Capital D	OSIRIS	BB+/Ba1	1/15/2010	100.79	101.14	-	4.65	4.50	L + 500	37.4 bps	Extreme Mortality	68827PAB8	
Tartan Capital Class A	TARTAN	AAA/Aaa	1/7/2009	99.94	99.98	-	0.22	0.21	L + 19	5.0 bps	Extreme Mortality	876494AA3	
Tartan Capital Class B	TARTAN	BBB/Baa3	1/7/2009	99.98	100.11	-	3.02	2.92	L + 300	18.0 bps	Extreme Mortality	878494AB1	
Vita Capital III Class B	VITA	A/Aa2	1/1/2010	99.76	99.97	-	0.99	0.91	L + 90	0.7 bps	Extreme Mortality	928457AA8	
Vita Capital II Class C	VITA	A-/A2	1/1/2010	100.38	100.43	-	1.24	1.22	L + 140	4.0 bps	Extreme Mortality	928457AB6	
Vita Capital II Class D	VITA	BBB/Baa2	1/1/2010	98.85	98.93	-	2.47	2.35	L + 190	14.0 bps	Extreme Mortality	928457AC4	
Vita Capital III Class B-I	VITA	A/A1	1/1/2011	100.09	100.18	-	1.07	1.05	L + 110	3.9 bps	Extreme Mortality	928457AC0	
Vita Capital III Class B-II	VITA	A/A1	1/1/2012	100.11	100.15	-	1.09	1.08	L + 112	3.7 bps	Extreme Mortality	928457AF7	
Vita Capital III Class B-III	VITA	A/A1	1/1/2011	100.03	100.06	-	1.09	1.08	E + 110	3.9 bps	Extreme Mortality	XS0280927455	
Vita Capital III Class A-IV	VITA	AAA/Aaa	1/1/2011	100.00	100.03	-	0.21	0.20	L + 21	3.2 bps	Extreme Mortality ⁽⁹⁾	928457AJ9	
Vita Capital III Class A-V	VITA	AAA/Aaa	1/1/2012	100.00	100.04	-	0.20	0.19	L + 20	3.1 bps	Extreme Mortality ⁽⁹⁾	928457AK6	
Vita Capital III Class A-VI	VITA	AAA/Aaa	1/1/2011	100.00	100.03	-	0.21	0.20	E + 21	3.2 bps	Extreme Mortality ⁽⁹⁾	XS0280928993	
Vita Capital III Class A-VII	VITA	AA-/Aa2	1/1/2012	100.06	100.12	-	0.78	0.77	E + 80	3.1 bps	Extreme Mortality	XS0282157204	
Vita Capital III Class B-V	VITA	AAA/Aaa	1/1/2012	100.00	100.04	-	0.21	0.20	L + 21	3.7 bs	Extreme Mortality ⁽⁹⁾	928457AL4	
Vita Capital III Class B-VI	VITA	AAA/Aaa	1/1/2011	100.00	100.03	-	0.22	0.21	E + 22	3.9 bps	Extreme Mortality ⁽⁹⁾	XS0280930160	

Nous considérons les prix « *mid-price* » de la fourchette *bid-ask* du tableau précédent.

Nous établissons la règle suivante, vue de la perspective de l'émetteur :

- Si le *spread* d'émission réel de la tranche est inférieur au Rho 'macro' ou au *spread* de la transformée de Wang, alors la tranche a été placée à un prix agressif (favorable) pour l'émetteur
- Si le *spread* d'émission réel de la tranche est supérieur au Rho 'macro' ou au *spread* de la transformée de Wang, alors la tranche a été placée à un prix conservateur (défavorable) pour l'émetteur

Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus :

Tranche Obligation	Spread Mkt	Rho Christophides (1.7793)		Rho direct (1.77475)	Wang 2-fact	Wang 1-fact	Mid price	Perspective émetteur
Osiris B2 (A - / A3)	1,20%	1,20%	1,10%	1,71%	1,68%	1,53%	1,1550%	CHEAP
Osiris C (BBB / Baa2)	2,85%	2,78%	2,63%	2,82%	2,79%	2,94%	2,6750%	EXPENSIVE
Osiris D (BB+ / Ba1)	5,00%	4,99%	4,64%	4,29%	4,18%	4,90%	4,5750%	EXPENSIVE
Tartan (BBB / Baa3)	3,00%	3,02%	2,90%	2,84%	2,64%	2,85%	2,9750%	EXPENSIVE
Tartan (A / A2)	0,90%	0,89%	0,91%	1,43%	1,34%	1,17%	0,9150%	CHEAP
Vita I (A / A1)	1,35%	1,41%	1,27%	0,72%	0,45%	0,37%	0,7250%	EXPENSIVE
Vita II (BBB / Baa2)	1,90%	1,91%	1,83%	2,52%	2,38%	2,48%	2,4100%	CHEAP
Vita II (A - / A2)	1,40%	1,37%	1,41%	1,24%	1,19%	0,98%	1,2300%	EXPENSIVE
Vita II (A / Aa3)	0,90%	0,84%	0,95%	0,47%	0,49%	0,26%	0,9500%	EXPENSIVE
Vita II (A+ / A2)	0,30%	0,25%	0,20%	0,08%	0,09%	0,02%	?	EXPENSIVE
Vita III (4-yr) (A/A1)	1,10%	1,10%	1,05%	1,20%	1,54%	1,09%	1,0600%	CHEAP
Vita III (5-yr) (A/A1)	1,12%	1,11%	1,07%	1,16%	1,52%	1,06%	1,0850%	CHEAP
Vita III (4yr) (AA- / Aa2)	0,80%	0,85%	0,82%	1,07%	1,35%	0,93%	0,7750%	CHEAP
Vita III (5-yr) (AA- / Aa2)	0,80%	0,80%	0,76%	1,05%	1,33%	0,91%	0,7750%	CHEAP

Tableau IV - 9 : Analyse de valeur relative par différentes méthodes d'estimation

A titre d'illustration : la transaction OSIRIS – tranche D apparaît chère pour l'émetteur (500bps) par rapport au *spread* théorique moyen du marché (464bps attendus à court terme et entre 420 et 429bps si l'on s'attend à un retour à la tarification moyenne des risques). Au 1^{er} juin, le *spread mid-market* se situait à 458bps environ.

Dans l'ensemble, il apparaît assez nettement que le Rho micro de Christophides (1,7793) offre un pouvoir prédictif de l'évolution des *spreads* à court terme satisfaisant : c'est en effet à ces niveaux là que le marché semble s'être stabilisé après quelques mois d'existence.

Quelques exceptions demeurent toutefois : la transaction TARTAN, notamment la tranche BBB (non *wrappée*) reflète le risque de crédit portant sur Scottish Re après les différents *downgrades* de son rating au cours du 2^{ème} semestre 2006. Par ailleurs, l'opération VITA I est arrivée à maturité en Décembre 2006 : le *spread* de marché indiqué reflète le niveau de valorisation quelques semaines avant l'échéance. Il semble que le *spread* se soit ainsi parfaitement aligné sur le niveau anticipé par le Rho 'direct' de Christophides.

En revanche, les résultats de la transformée de Wang sont assez hétérogènes et apparaissent conservateurs pour les tranches qui portent sur des profils de risque extrêmes : c'est le cas pour toutes les tranches de VITA III.

L'intérêt tant théorique que pratique des méthodes mises en œuvre dans les sections précédentes réside en ceci qu'elles ne cherchent pas à estimer une distribution de probabilité théorique complète, mais reflètent la distorsion ou le facteur d'aversion au risque implicite qui permet de caler au plus près la distribution théorique de perte au *spread* empirique de marché.

Il est intéressant de noter qu'à titre de comparaison, la mise en œuvre de ces techniques sur les *Cat Bonds* traditionnels – du type tempête Europe – fonctionne de manière assez satisfaisante en termes d'estimation des *spreads* à attendre à l'occasion d'une émission primaire. Ainsi est-il possible de proposer une nouvelle vision de la frontière efficiente du marché, non seulement dans le repère *Expected Loss / Spreads* mais également dans le repère *Expected Loss / Coefficient d'aversion au risque*.

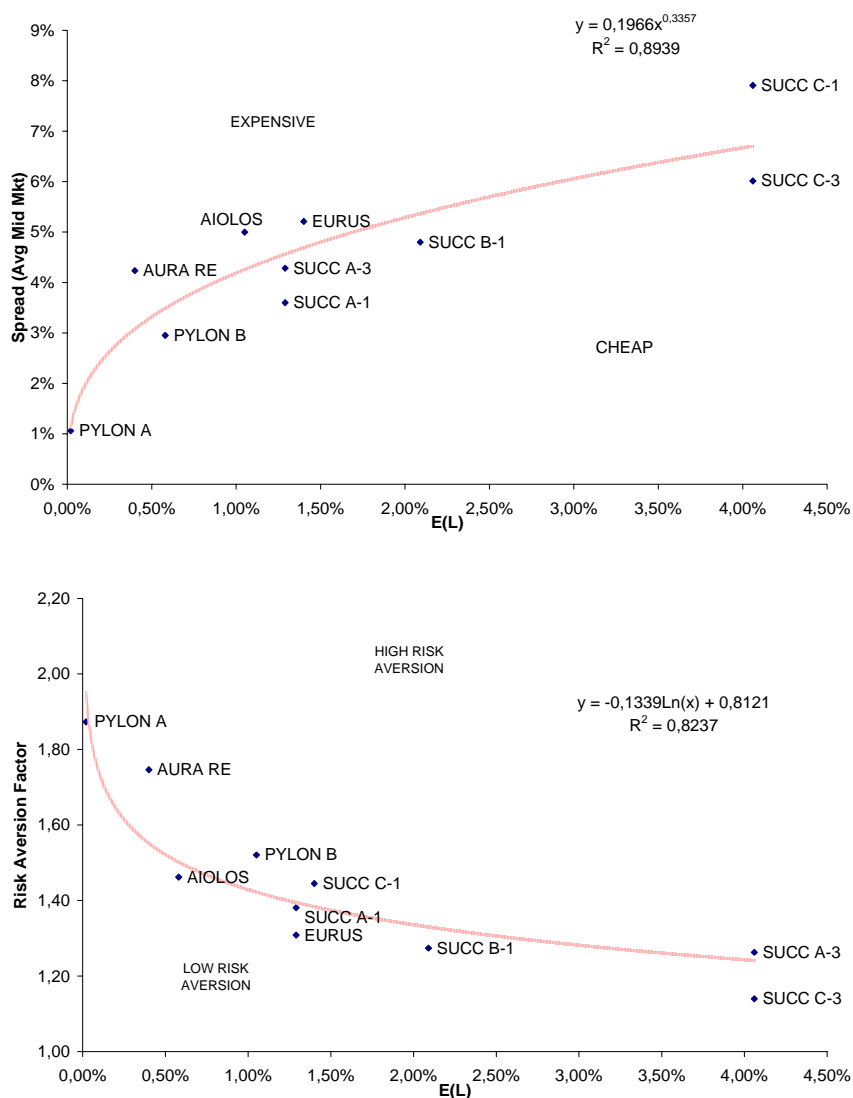


Figure IV - 19 : Application des Rhos de Christofides aux *Cat Bonds* Tempête Europe

Une autre démarche analytique, construite à partir de la théorie des valeurs extrêmes, cherche à déterminer directement la distribution théorique de probabilité qui permettrait de refléter au mieux le 'véritable' profil de risque d'un événement de surmortalité.

Addendum Juin 2008

Une analyse des séries temporelles de *spreads* serait sans doute utile pour s'assurer que les conclusions dégagées précédemment restent d'actualité dans un contexte de marché particulièrement volatile depuis l'extension de la crise du *subprime*.

Section 3 – Méthode alternative de quantification du risque : l'approche EVT

Comme tout évènement rare, la bonne représentation des probabilités de survenance et de perte moyenne du risque sous-jacent constitue un préalable indispensable à toute démarche de tarification.

A notre connaissance, il n'y a pas eu d'autres tentatives de transposition de la théorie des valeurs extrêmes au risque de mortalité que la contribution de **BEELDERS & COLAROSSO [2004]**.

Les deux auteurs (membres d'un groupe de recherche sur les ABS chez Citigroup au moment de la rédaction de leur papier) ont souhaité challenger les métriques de risque présentées par Swiss Re à l'occasion du placement de la première obligation indexée au risque de mortalité (VITA I – décembre 2003).

Partant du constat qu'il n'y a pas d'instruments financiers efficaces (tant par réplication statique que par couverture dynamique) pour faire face aux risques extrêmes, les auteurs notent que les autorités de tutelle demandent aux institutions qui portent ce type de risque à leur bilan (assureurs / réassureurs) de conserver une part de capital suffisant pour faire face le cas échéant à la réalisation de scénarios extrêmes (comme nous l'avons rappelé en Section 4.1 de la Partie III).

Or les méthodes statistiques pour estimer les risques extrêmes supposent de pouvoir calibrer correctement la *tail-distribution*.

La théorie des valeurs extrêmes (dont nous proposons un rapide aperçu théorique) constitue un outil intéressant pour modéliser correctement l'échantillon (forcément réduit) de données historiques présentes dans la queue de distribution d'un risque : cette approche permet également d'extrapoler sur des probabilités encore plus éloignées et de circonscrire ainsi un profil de risque sur une densité plus étendue.

3.1 La théorie des valeurs extrêmes : quelques résultats utiles

i. Loi du Maximum

Soient X_1, X_2, \dots, X_n une suite de variables aléatoires i.i.d. distribuées selon une fonction de répartition F inconnue. On note $M_n = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. On dit que F appartient au Domaine d'Attraction Maximum de H , soit $F \in \text{DMA}(H)$ si l'on peut trouver $a_n > 0$ et b_n tel que :

$$\Pr\left(\frac{M_n - b_n}{a_n}\right) = F^n(a_n \cdot x + b_n) \rightarrow H(x) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

On peut montrer que si $F \in \text{DMA}(H)$, alors H est de la forme H_ξ :

$$H_\xi = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \xi \cdot x\right)^{-1/\xi}\right) & \text{si } \xi \neq 0 \\ \exp\left(-e^{-x}\right) & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad \text{avec } x \text{ tel que } 1 + \xi x > 0$$

ξ est un paramètre de forme (*shape*). On retrouve alors des distributions de probabilité classiques en notant α le paramètre de forme de la distribution fonction de ξ :

$$\begin{aligned} \xi > 0 & \text{ alors } H_\xi \propto \text{Frechet} & \alpha = 1/\xi \\ \xi < 0 & \text{ alors } H_\xi \propto \text{Weibull} & \alpha = -1/\xi \\ \xi = 0 & \text{ alors } H_\xi \propto \text{Gumbel} \end{aligned}$$

ii. *Loi de l'excédent de perte*

Les assureurs sont moins intéressés par le Max absolu que par un excédent de perte. Un résultat classique est que la fonction de répartition de la perte au-delà d'un niveau u qui peut s'exprimer sous la forme :

$$F_u(x) = \Pr(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

converge vers une loi de Pareto généralisée (LPG) définie ainsi par sa fonction de répartition :

$$G_{\xi,\sigma} = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi \cdot x}{\sigma}\right)^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

où ξ est le paramètre de forme (*shape*) et σ le paramètre d'échelle (*scale*).

Les valeurs de x qui constituent le support de cette fonction de répartition présentent les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \xi > 0 & \text{ et } x \geq 0, \text{ alors } G_{\xi,\sigma} \propto \text{Pareto I} \\ \xi < 0 & \text{ et } 0 \leq x < -\frac{\sigma}{\xi}, \text{ alors } G_{\xi,\sigma} \propto \text{Pareto II} \\ \xi = 0, & \text{ alors } G_{\xi,\sigma} \propto \text{Exponentielle} \end{aligned}$$

iii. Estimation paramétrique

Pour les observations dans la queue de distribution au-delà du niveau u , pour tout $x \geq u$, on obtient :

$$F(x) = \Pr(X \leq x) = (1 - \Pr(X \leq u)) \cdot F_u(x - u) + \Pr(X \leq u)$$

Cette fonction peut être approximée par une LPG de la manière suivante :

$$\hat{F}(x) = (1 - \hat{F}_n(u)) \cdot G_{\xi, \sigma}(x) + \hat{F}_n(u) \quad \text{où} \quad \hat{F}_n(u) \text{ est la fonction de répartition empirique}$$

L'estimation des densités s'effectue par maximum de vraisemblance après différenciation sur x de G :

$$g_{\xi, \sigma}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \cdot \left(1 + \frac{\xi \cdot x}{\sigma}\right)^{-(1+1/\xi)} & \text{si } \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

Pour une valeur prédéfinie de u et pour l'échantillon x_1, x_2, \dots, x_n de la queue de distribution tels que $x_i \geq u$, alors si l'on définit la variable $y_i = x_i - u$, la fonction de vraisemblance L s'écrit :

$$L = -n \cdot \ln \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \cdot \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{\xi \cdot y_i}{\sigma}\right)$$

Pour $n \rightarrow \infty$ et $\xi > -0,5$, l'estimateur tend asymptotiquement vers :

$$\sqrt{n} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\xi}_n \\ \hat{\sigma}_n \end{pmatrix} \rightarrow N \left[\begin{pmatrix} \xi \\ \sigma \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} (1 + \xi)^2 & \sigma \cdot (1 + \xi) \\ \sigma \cdot (1 + \sigma) & 2 \cdot \sigma^2 \cdot (1 + \xi) \end{pmatrix} \right]$$

3.2 Application au Mortality bond de Swiss Re (2003)

BEELDERS & COLAROSSO [2004] appliquent cette démarche aux paramètres historiques recensés dans l'opération VITA I de Swiss Re.

Une simulation numérique (50,000 tirages) est effectuée à partir d'une fonction de répartition combinée entre $\hat{F}(x)$ et $\hat{G}_{\xi, \sigma}(x)$ dont les paramètres sont estimés par maximum de vraisemblance.

Comme dans la simulation mise en œuvre dans la Partie III, un tirage est effectué sur la loi uniforme $U[0,1]$. Si la variable tirée est inférieure à $1 - \hat{F}(u)$, alors la variable est extraite de la distribution extrême de la queue de distribution, sinon la variable est extraite de la fonction de densité générale de $\hat{F}(x)$. La variable extraite de la fonction de répartition est obtenue par inversion de la fonction LPG :

$$y = \begin{cases} -\frac{\sigma}{\xi} \cdot (\varpi^{-\xi} - 1) & \text{si } \xi \neq 0 \\ -\sigma \cdot \ln(\varpi) & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad \text{avec } \varpi \propto U[0,1]$$

Pour obtenir la variable x simulée, il suffit alors d'ajouter le niveau u tel que : $x = y + u$.

Pour mémoire, la fonction de *payoff* de VITA I était la suivante (vue côté investisseur) :

$$\text{Payoff} = \begin{cases} 100\% & \text{si } q \leq q_0 \\ 100\% \cdot \frac{q - 130\%}{150\% - 130\%} & \text{si } 130\% < q \leq 150\% \\ 0\% & \text{si } q > 150\% \end{cases}$$

L'indice de mortalité base 100 de référence (65% hommes, 35% femmes) reposait sur une moyenne pondérée des niveaux officiels de mortalité sur 2002 dans 5 pays différents (USA – 70%, Royaume-Uni – 15%, France – 7,5%, Italie – 5%, Suisse – 2,5%). L'obligation avait une maturité de 4 ans (du 1^{er} janvier 2003 au 1^{er} janvier 2007). L'historique des séries de mortalité rebasée est la suivante :

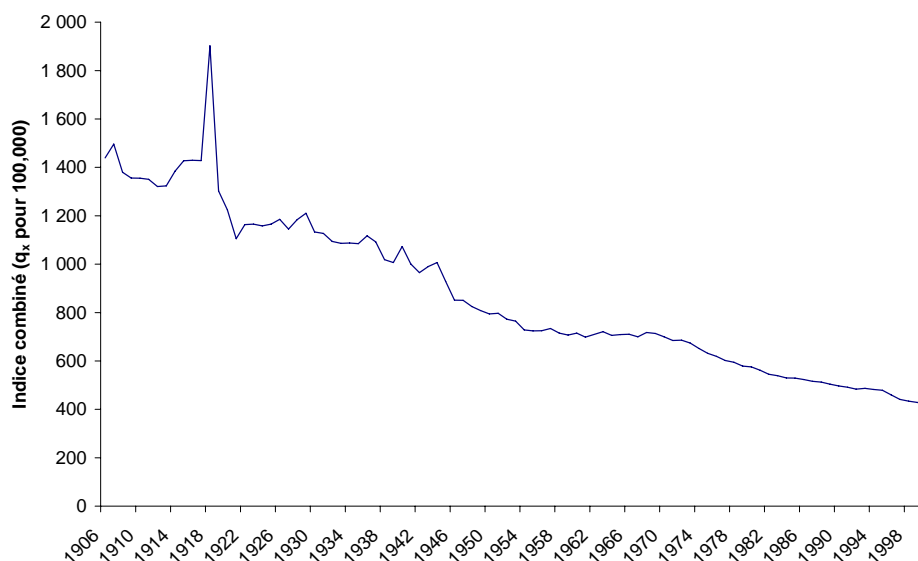


Figure IV - 20 : Tendence de la mortalité de l'indice composite VITA I

La grippe espagnole de 1918 fait clairement ressortir le risque de saut de la mortalité : -33,2% de déviation par rapport à une tendance par ailleurs baissière sur 100 ans (le signe + indique une amélioration de mortalité).

Intuitivement, on s'attendrait à ce que la probabilité théorique d'attachement soit d'environ 1,075% (soit 1/93). Or le prospectus d'offre reflète 0,077%. Une rapide étude des évolutions fait ressortir que :

<u>Moyenne</u>	<u>Ecart-type</u>	<u>1^{er} Quartile</u>	<u>3^{ème} Quartile</u>	<u>Max < 0</u>	<u>Max > 0</u>
+1,13%	5,56%	-0,20%	+2,40%	-33,22%	+31,60%

La simulation retenue par Swiss Re pour quantifier les métriques de risque de son obligation en 2003 reposait sur une technique sophistiquée de chaîne de Markov pour rendre compte des corrélations dans l'amélioration des taux de mortalité au cours du temps.

La formule générique retenue était la suivante :

$$I(t) = I(t-1) \cdot \left(1 + \frac{i(t)}{100}\right) \quad \text{avec } I(0) = \text{base } 100 \text{ (2002) et } i(t) \propto U[0,1]$$

Le tirage aléatoire de la variable $i(t)$ est conditionné par le tirage préalable d'un niveau d'amélioration de la mortalité constatée sur 100 ans de données historiques. Les taux d'évolution sont répartis en 5 tranches :

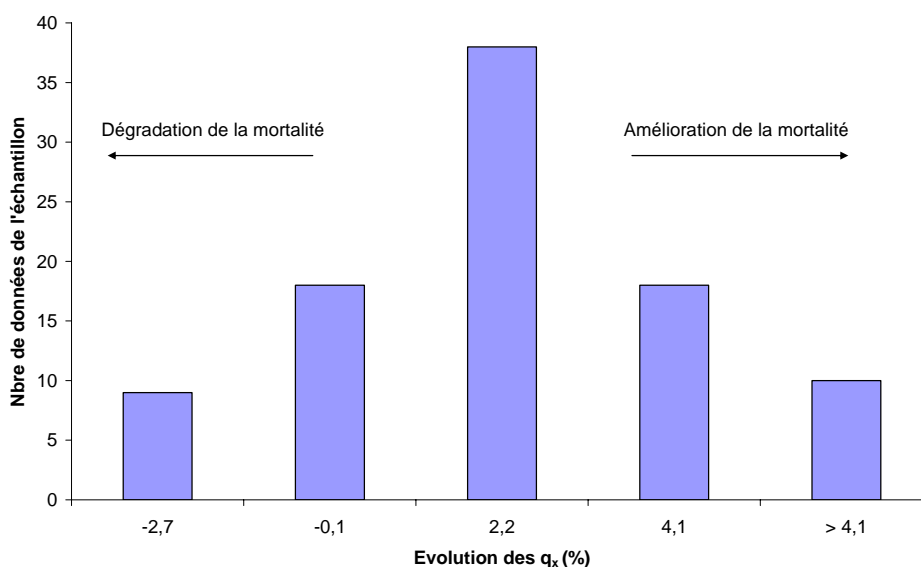


Figure IV - 21 : Distribution des taux de mortalité de l'échantillon historique

	<u>Tranche 1</u>	<u>Tranche 2</u>	<u>Tranche 3</u>	<u>Tranche 4</u>	<u>Tranche 5</u>
	[-33,2 ; -2,7]	[-2,5 ; -0,1]	[-0,1 ; 2,2]	[2,2 ; 4,1]	[4,7 ; 31,6]
Effectifs	9	18	38	18	10
Proba tirage	9,677%	19,355%	40,860%	19,355%	10,753%

Du fait des chevauchements des taux d'évolution de la mortalité d'une année sur l'autre entre différentes tranches, une méthode de *bootstrapping* a été utilisée permettant d'interpoler entre le 1^{er} et 2^{ème} point successif de la simulation.

Or la principale limite d'une telle approche est qu'elle ne permet guère à l'évènement extrême d'une hausse de plus de 30% de la mortalité de se réaliser, minimisant ainsi grandement la probabilité que l'index dépasse 130%. De surcroît, la détérioration de la mortalité est bornée à 33,2%, ce qui rend nulle la probabilité de toucher 150%.

BEELDERS & COLAROSSO [2004] estiment alors par maximum de vraisemblance les paramètres d'une distribution de type LGP sur la 1^{ère} tranche pour permettre à des scénarios de risques extrêmes de se réaliser même au-delà de ce que les données historiques permettent d'inférer.

Les résultats de l'estimation que nous avons pu mettre en œuvre à partir des données publiques et en suivant la méthode proposée par les auteurs sont :

<u>Paramètres</u>	<u>$\xi \neq 0$</u>	<u>$\xi = 0$</u>
ξ	1,90	0
<i>EcTyp</i>	0,967	-
σ	0,545	7,000
<i>EcTyp</i>	0,438	2,333
Log – MV	-11,570	-14,701

La recherche des EMV est obtenue par itération sur différentes valeurs de ξ et σ (ou σ uniquement pour $\xi = 0$) :

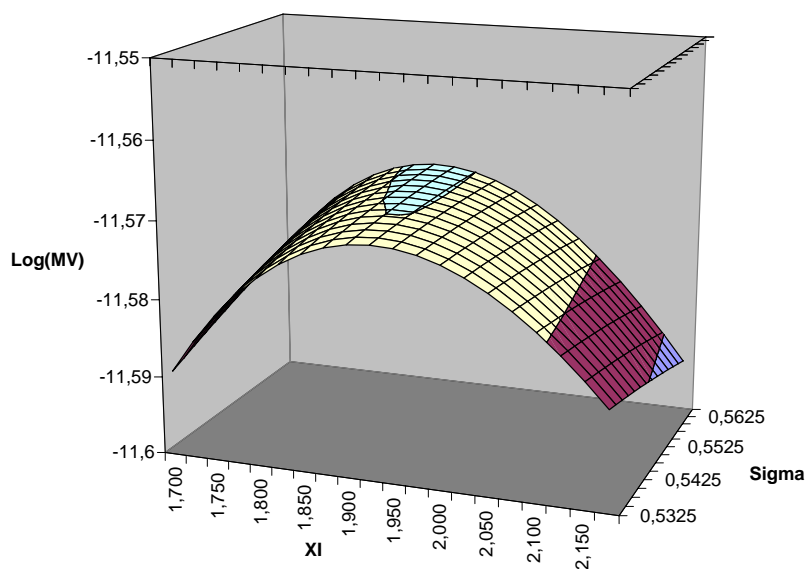


Figure IV - 22 : Illustration du programme d'optimisation pour l'EMV des coefficients ξ et σ

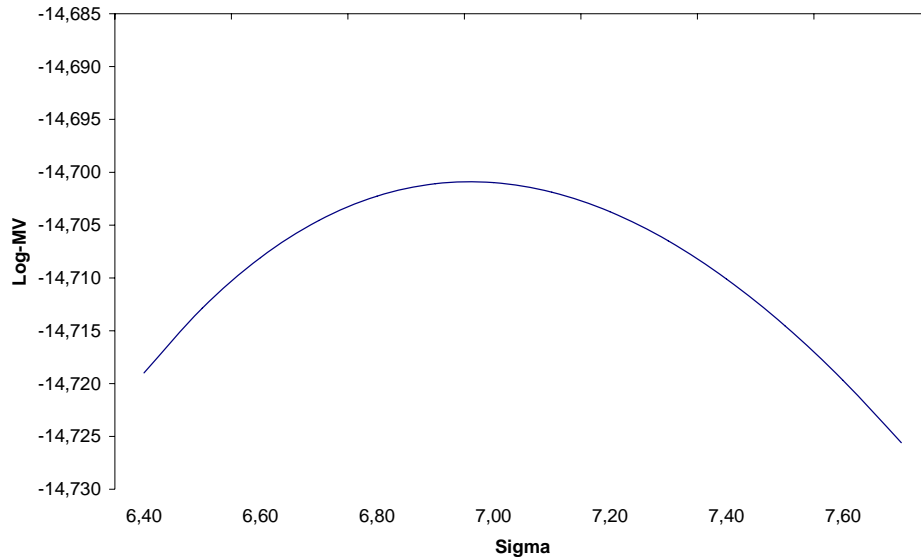


Figure IV - 23 : Illustration du programme d'optimisation pour l'EMV du coefficient σ ($\xi = 0$)

La représentation de la densité pour les deux méthodes d'évaluation de la queue de distribution est fournie par :

$$g_{\xi,\sigma}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \cdot \left(1 + \frac{\xi \cdot x}{\sigma}\right)^{-(1+1/\xi)} & \text{si } \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

On peut représenter graphiquement ces deux masses de probabilité :

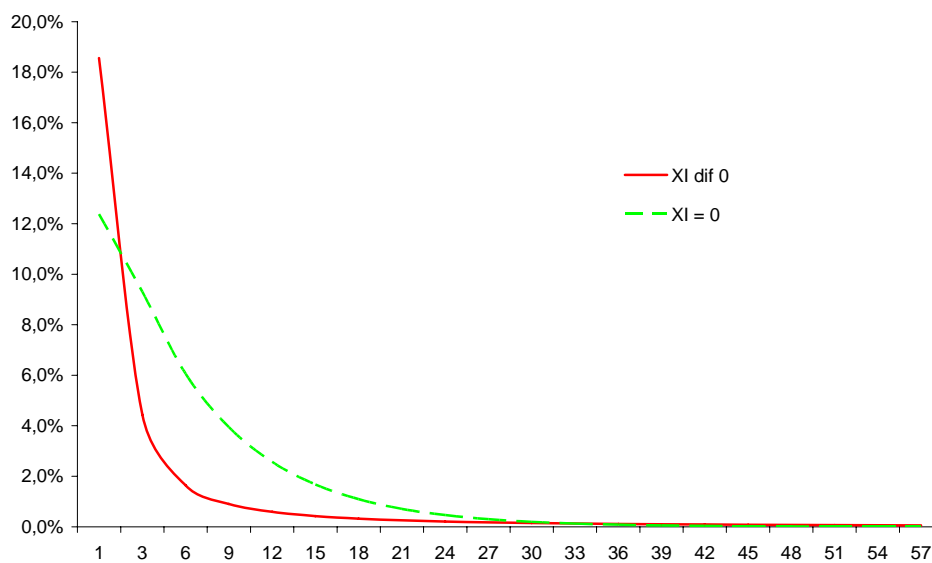


Figure IV - 24 : Illustration de la densité de probabilité pour différents points d'attachement de l'obligation

En effectuant un zoom sur la zone en excès de perte intéressante pour l'indice de VITA I (zone 130 – 150%) :

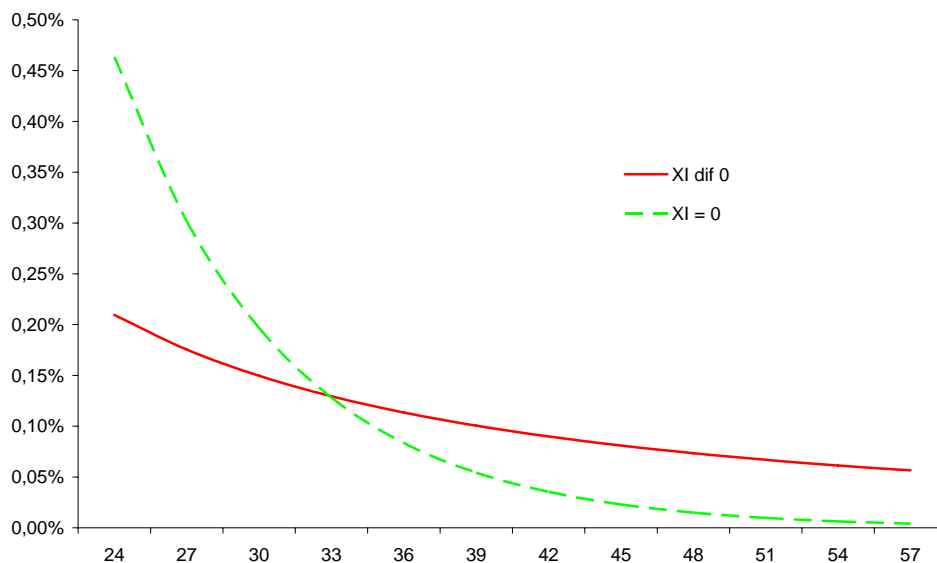


Figure IV - 25 : Illustration de la densité de probabilité pour la zone de risque transférée dans VITA I

Il ressort clairement que la fonction de type Pareto tend asymptotiquement vers 0 beaucoup plus lentement que la fonction de type exponentiel.

Pour un calcul prudent des valeurs extrêmes, la densité de Pareto est préférable.

Les estimations des probabilités d'attachement et d'expiration sur la tranche 130 – 150% sont largement supérieures à la probabilité fournie par Swiss Re. Elles sont obtenues par application directe de la formule :

$$F(x) = \Pr(X \leq x) = (1 - \Pr(X \leq u)) \cdot F_u(x - u) + \Pr(X \leq u)$$

$$\text{avec } F(u) = G_{\xi, \sigma} = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi \cdot u}{\sigma}\right)^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{u}{\sigma}\right) & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} \Pr(X \leq u) = 89/93 \\ 1 - \Pr(X \leq u) = 9/93 \end{cases}$$

Modèle	$\Pr [X > u] = 1 - F(u)$	
	Attachement	Expiration
$\xi \neq 0$	0,833%	0,631%
$\xi = 0$	0,133%	0,007%

Une représentation graphique de la fonction $1 - F(u)$ pour les deux modèles reflète cette probabilité de survie :

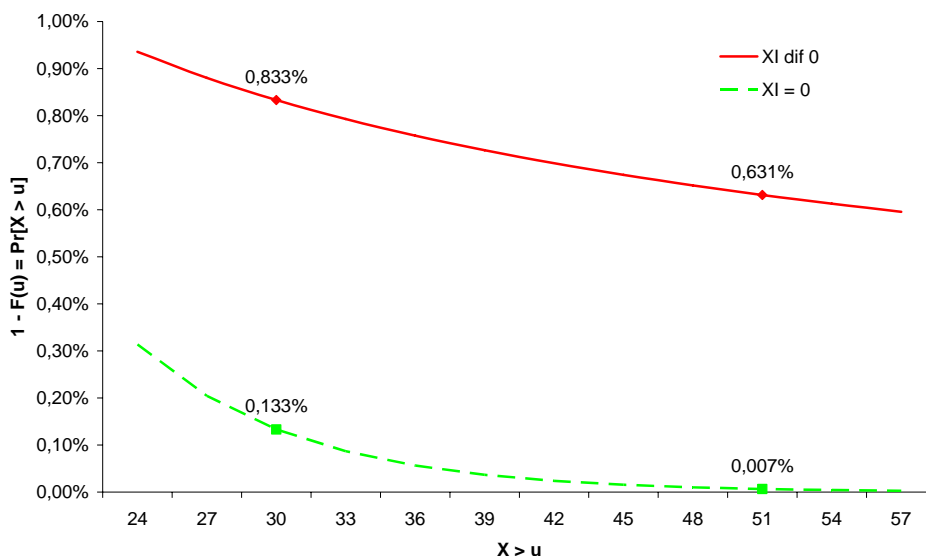


Figure IV - 26 : Illustration de la densité de probabilité pour les deux bornes d'attachement de l'obligation

La simulation numérique tient alors compte de la distribution extrême possible des valeurs de $i(t)$ pour des évolutions de mortalité inférieures à -2,7% et les probabilités finales estimées deviennent donc :

Modèle	Proba Attachement	Proba Expiration	Expected Loss	ρ (risk-aversion)
Swiss Re	0,077%	0,003%	0,016%	2,03
Pareto	0,326%	0,146%	0,215%	1,43
Exponentiel	0,369%	0,041%	0,143%	1,52

L'analyse du coefficient d'aversion au risque ρ permet une lecture sur base homogène des *Expected Loss* et du *spread* de 135bps servi finalement sur cette obligation par Swiss Re. Par rapport à ce qu'est devenu par la suite l'équilibre du marché des *Mortality bonds* (ρ 'macro' autour de 1,77), le *spread* mesuré à partir des EL d'une distribution de Pareto ou exponentielle n'apparaît pas assez rémunérateur du risque pris par les investisseurs.

L'aporie finale sur laquelle nous butons est la suivante : quelle est la bonne représentation du risque associé à cette tranche et où devrait dans une telle approche se situer l'équilibre du risque du marché ? On peut également noter que comme l'approche en tangente mise en œuvre par AXA dans son programme OSIRIS, les probabilités mises en évidence ne correspondent à aucune expérience historique connue à ce jour (période de retour de plus de 300 ans) – l'estimation de risques aussi éloignés reste-t-elle pertinente ?

3.3 Les limites de l'approche par EVT

Les auteurs de la démarche proposée ci-dessus soulignent eux-mêmes à quel point la calibration d'une loi de probabilité permettant de refléter les valeurs extrêmes d'une distribution est un exercice délicat, surtout lorsque les données historiques devant permettre de calibrer au mieux le modèle statistique utilisé se font elles-mêmes très rares.

En effet, dans la mesure où la théorie des valeurs extrêmes repose sur un principe asymptotique et que les échantillons dans ces espaces de probabilités sont de taille réduite (expérience historique limitée), le cadre d'analyse et les calculs effectués font nécessairement l'objet d'une assez grande part de jugement subjectif, notamment dans la délimitation du seuil critique 'u' au-delà duquel la distribution doit commencer à pouvoir rentrer dans des valeurs extrêmes.

Certains auteurs, comme le probabiliste de l'Ecole des Ponts & Chaussées Nicolas Bouleau, critiquent assez fortement la recherche absolue d'une calibration des extrêmes fondée sur une démarche scientifique.

En effet, il paraît extrêmement difficile d'assigner une probabilité objective à un événement qui n'a jamais eu lieu : *« les affirmations ainsi produites portent sur des événements, certes graves, mais aussi rares et sont par ce fait même peu réfutables de sorte que les fabricants de conclusions douteuses ne prennent aucun risque au sens épistémologique que Popper a donné à ce terme ».*

La surmortalité est un exemple assez éloquent du type même du risque d'assurance qui ne trouve pas de réalisation historique pour des périodes de retour très éloignées (par exemple 200 ans).

Comme le note à nouveau N. Bouleau : *« les phénomènes rares de la nature ou de la vie économique ont des lois de probabilité nécessairement mal connues. A la limite, les événements intrinsèquement uniques peuvent être dans le domaine de l'incertain sans être probabilisables ».*

C'est pourquoi, nous pensons que l'approche retenue dans la modélisation d'AXA qui consiste à caler une fonction tangente à un percentile extrême de la distribution de perte (0,5% percentile en l'occurrence) est un moyen plus élégant et plus efficace de laisser la possibilité à des valeurs extrêmes de déviation de mortalité de se réaliser. L'enjeu devient alors une question de simulation numérique classique : combien de tirages aléatoires faut-il mettre en œuvre pour assurer une convergence des métriques de risque vers un niveau stable et surtout permettre à la gamme la plus large des scénarios possibles de se 'réaliser' ?

Pour autant, doit-on repousser les tentatives menées pour objectiver autant que possible la réalité d'événements, qui pour aussi rares qu'ils soient, peuvent ne pas moins se réaliser ?

N. Bouleau conclut de manière constructive : *« Un principe épistémologique se dégage : toute démarche attribuant une valeur numérique précise pour la probabilité d'un phénomène rare est suspecte, sauf si les lois physiques régissant ce phénomène sont explicitement et exhaustivement connues ».*

Or il n'est pas certain que le risque de mortalité, comme de nombreux risques d'assurance voyageurs / dépendance où le contrôle exercé par l'homme est prépondérant, puisse être réductible à des lois physiques invariantes, contrairement (peut-être) aux risques de catastrophes naturelles. Le champ de la réflexion reste donc ouvert.

Section 4 – La prime de risque des *Cat bonds* dans une approche CAPM

L'intérêt pour les investisseurs de souscrire à des obligations indexées aux risques d'assurance en général et aux risques catastrophes en particulier peut être illustré à travers une modélisation simple proposée dans le cadre du Modèle d'Evaluation des Actifs Financiers (MEDAF) ou « *Capital Asset Pricing Model* » (CAPM). Cette analyse, initialement développée par Markowitz (1956) autour du critère moyenne – variance puis reprise par Black (1972), Lintner (1969) et Sharpe (1964 & 1970), repose sur la mise en rapport du couple rendement / risque pour optimiser la répartition des actifs au sein d'un portefeuille dit « efficient »¹³.

Notre objectif est de démontrer que la prime de risque demandé aujourd'hui par le marché pour acheter des *Mortality bonds* n'est pas justifiée au regard du bénéfice de la diversification à laquelle contribue cette nouvelle classe d'actifs. A l'aide du ratio de Sharpe, nous proposons une lecture par seuils critiques en-deçà et au-delà duquel la diversification compense ou justifie la prime de rendement exigé par les investisseurs.

4.1 Rappels – théorie de gestion de portefeuille

Pour formaliser la démarche, notons les termes suivants :

$$R_t^i = \frac{P_t^i - P_{t-1}^i + D_t^i}{P_{t-1}^i} \quad \text{le rendement associé à un actif } i \text{ sur l'intervalle de temps } [t-1 ; t]$$

$$E[R^i] = \bar{R}^i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t^i \quad \text{l'espérance de rendement associée à un actif } i \text{ sur un horizon de temps } T$$

Par linéarité de l'espérance, l'espérance de rendement d'un portefeuille d'actifs i est la moyenne pondérée des rentabilités espérées sur les différents actifs le composant.

Le risque d'un actif est représenté par sa variance :

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_t^i - \bar{R}^i)^2$$

Le risque d'un portefeuille tient compte de la covariance entre les actifs qui le composent :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_t^i - \bar{R}^i) \cdot (R_t^j - \bar{R}^j)$$

¹³ cf. Cours de Finance et de Gestion de Portefeuille (CEA 2^{ème} année)

Pour un portefeuille composé de deux actifs en proportion x_1 et x_2 (avec $x_1 + x_2 = 1$), il vient que la rentabilité du portefeuille et son risque s'écrivent ainsi :

$$E[R_p] = x_1 \cdot E[R_1] + x_2 \cdot E[R_2]$$

$$\sigma_p^2 = x_1^2 \cdot \sigma_1^2 + x_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \sigma_{12}$$

Les portefeuilles efficients sont ceux qui minimisent le risque pour une rentabilité espérée donnée (ou de manière duale, maximisent la rentabilité à risque donné). L'ensemble des portefeuilles efficients de rentabilité E est donc la solution du programme d'optimisation quadratique suivant :

$$\forall x_i \geq 0, \quad \underset{x}{\text{Min}} \quad \sum_i \sum_j x_i \cdot x_j \cdot \sigma_{ij} \quad \text{sous contraintes} \quad \sum_i x_i \cdot E[R_i] \geq E \quad \text{et} \quad \sum_i x_i = 1$$

S'il y a 'n' actifs différents, il y aura par construction 'n' valeurs différentes de la proportion x_i et la fonction objectif contiendra 'n(n+1)/2' termes. Pour $n = 100$ actifs, cela ne fait pas moins de 5050 termes permettant de définir la frontière efficiente du portefeuille.

Le *run-time* est très important et a conduit Sharpe (1970) à simplifier la démarche à travers un modèle de marché plus général.

Le modèle de marché stipule qu'il doit exister une relation entre la rentabilité espérée sur chaque action ou chaque portefeuille et sa covariance avec le marché. Une droite croissante relie la rentabilité espérée et le risque de tout actif sur le marché : le risque doit être rémunéré par une prime de rendement.

En posant X le vecteur colonne de dimension $(n+1)$ actifs, dont l'actif sans risque (indiqué 0 et son rendement par f pour « *risk-free* ») et les n autres actifs x_i faisant référence aux actifs risqués du portefeuille. Un portefeuille particulier aura donc le profil rendement / risque suivant :

$$E[R_p] = x_0 \cdot E[R_f] + \sum_i x_i \cdot E[R_i] \quad \forall i \in [1, n]$$

$$\sigma_p^2 = \sum_i x_i \cdot x_j \cdot \sigma_{ij} \quad \forall i, j \in [1, n]$$

L'optimisation est décrite par le programme :

$$\underset{x}{\text{Min}} \quad \sum_i \sum_j x_i \cdot x_j \cdot \sigma_{ij}$$

sous contraintes $x_0 \cdot R_f + \sum_i x_i \cdot E[R_i] = E[R]$ et $x_0 + \sum_i x_i = 1$

Cette contrainte peut être formulée d'un bloc par :

$$\sum_i x_i \cdot E[R_i - R_f] = E[R] - R_f$$

Soit encore sous forme matricielle, en notant t pour la transposée, V la matrice de variance-covariance et E le vecteur colonne $[E(R_1) - R_f, \dots, E(R_n) - R_f]$:

$$\begin{aligned} \text{Min}_X \quad & {}^t X \cdot V \cdot X \\ \text{sous contrainte} \quad & {}^t X \cdot E = E[R] - R_f \end{aligned}$$

Les conditions du 1^{er} ordre avec un multiplicateur de Lagrange λ sont :

$$2 \cdot V \cdot X - \lambda \cdot E = 0 \Rightarrow X = \frac{\lambda}{2} \cdot V^{-1} \cdot E$$

La somme de tous les portefeuilles détenus par l'ensemble des investisseurs doit être le portefeuille de marché M puisque par définition c'est l'offre globale de titres en circulation.

En sommant cette dernière équation à travers tous les investisseurs et puisque $V^{-1} \cdot E$ est le même pour tous les investisseurs :

$$M = \lambda_M \cdot V^{-1} \cdot E \Rightarrow E = \frac{1}{\lambda_M} \cdot V \cdot M$$

Soit pour un titre i particulier :

$$E[R_i] - R_f = \frac{1}{\lambda_M} \cdot \sigma_{iM}$$

On peut déterminer le lagrangien en prémultipliant les deux membres de l'équation précédente par le vecteur ${}^t M$, c'est-à-dire la transposée de M :

$${}^t M \cdot E = \frac{1}{\lambda_M} \cdot {}^t M \cdot V \cdot M \Rightarrow E[R_M] - R_f = \frac{1}{\lambda_M} \cdot \sigma_M^2$$

D'où l'on tire que :

$$\lambda_M = \frac{\sigma_M^2}{E[R_M] - R_f}$$

En remplaçant cette expression du Lagrangien dans l'espérance de rendement pour un actif i :

$$E[R_i] - R_f = (E[R_M] - R_f) \cdot \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} = (E[R_M] - R_f) \cdot \beta_i \quad \text{avec} \quad \beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

Le bêta d'un actif est donc la représentation de son risque systématique exprimé en unités de risque de marché.

Ainsi les rentabilités espérées sur chaque actif du portefeuille sont proportionnelles à leur degré de risque par rapport au marché en général tel que mesuré par le bêta. Le coefficient de proportionnalité est égal à la rentabilité espérée sur le marché en excès du taux sans risque, c'est-à-dire la prime de risque du marché.

Une autre représentation synthétique de cette approche par le modèle de marché consiste à dire que :

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i \cdot R_{Mt} + \varepsilon_{it}$$

avec

$$\forall i \neq j, \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$$

$$E[\alpha] = R_f \cdot (1 - \beta)$$

$$\forall i \neq j, \sigma_{ij} = \beta_i \cdot \beta_j \cdot \sigma_M^2$$

$$\sigma_i^2 = \sigma_{ii} = \beta_i^2 \cdot \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2$$

Outre l'aspect plus pratique d'une telle représentation pour le calcul de la frontière efficiente ('2n+1' termes pour calculer la matrice de variance covariance directement *via* les bêtas), les principales conclusions de cette démarche sont les suivantes :

- Aucun portefeuille ne devrait avoir de façon systématique un taux de rentabilité (en excès du taux sans risque) durablement supérieur ou inférieur à bêta fois le taux de rentabilité du marché (en excès du taux sans risque)
- Seuls les risques non diversifiables méritent une rémunération α en excédant du taux sans risque
- Le risque idiosyncratique de chaque actif est rémunéré à hauteur de son bêta
- Tout risque qui permet une réduction du risque global du portefeuille par l'effet de la diversification ne mérite pas un rendement excédentaire
- Tout résidu de rémunération est un bruit blanc (supposé gaussien)

4.2 Contribution théorique d'un Cat Bond à un portefeuille

Un *Cat bond* présente un attrait différent d'un investisseur à l'autre pour deux raisons au moins.

D'une part l'aversion au risque peut être plus ou moins forte et par ailleurs, la contribution marginale que le *Cat bond* apporte à un portefeuille dépend de la structure initiale de celui-ci.

Pour autant, les développements théoriques de la section précédente rappellent que la diversification d'un portefeuille permet une rémunération du risque « plus optimale » si un nouvel actif contribue à diminuer le risque global du portefeuille.

Outre la composante intrinsèque de l'alpha (plus ou moins forte), la contribution marginale d'un actif ayant un faible bêta permet, par l'effet de la diversification, de déplacer la frontière des portefeuilles efficaces vers la direction nord / ouest du plan risque / rendement, c'est-à-dire vers un meilleur équilibre rendement / risque.

De par leur très faible corrélation aux autres actifs financiers en temps normal, la classe d'actifs que constituent les *ILS* et les *Cat Bonds* en particulier remplissent un tel objectif.

Une formalisation simple de **GOLDMAN SACHS [1997]** permet d'illustrer une telle proposition :

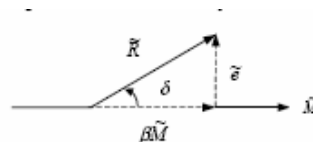
The Market Model

Because insurance-linked securities are uncorrelated with other financial markets, their market risk is zero. Let us consider the Market Model below:

$$\tilde{R} = \alpha + \beta\tilde{M} + \tilde{\epsilon}$$

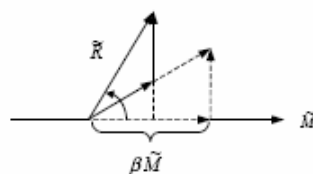
Here \tilde{R} denotes the stochastic return of a portfolio, \tilde{M} is the stochastic return of the market, α denotes the "abnormal" excess return, and $\tilde{\epsilon}$ is the idiosyncratic risk. The market component of the risk, $\beta\tilde{M}$, cannot be diversified away, while the idiosyncratic risk can be diversified away and thus does not command excess return.

This relation is displayed graphically in Figure 11. $\cos(\delta)$ is the correlation between the return of the portfolio and the market return. If the angle is zero, the cosine is one and the correlation is one. If the angle is 90° , then the cosine — i.e., the correlation — is zero.



Now, if we can find assets that

- contain excess return, and
- are orthogonal to the market,
- and we add those assets to the portfolio, then
- the market component of the total risk of the portfolio decreases, and
- the α of the portfolio increases.



Appendix

Insurance-Linked Securities in a Diversified Portfolio: Analytics

Suppose we start with a portfolio Π . We assume the expected return and its standard deviation over some fixed time period are:

$$E\{\Pi\} = M$$

$$SD\{\Pi\} = S$$

and its higher central moments are:

$$M_{N-N}^{(moment)} = E\{[\Pi - M]^N\}$$

Now assume that there is another asset V , into which we move part of the portfolio. This new asset might be a CAT bond or some other insurance-linked security. Its mean and standard deviation are denoted by:

$$E\{V\} = \mu$$

$$SD\{V\} = \sigma$$

and we are interested in the case where the correlation ρ

$$\rho = \frac{E\{[\Pi - M][V - \mu]\}}{S\sigma}$$

between the original portfolio and the new asset is small.

We sell a small amount λ of the portfolio and invest it in the new asset V :

$$\Pi' = (1 - \lambda)\Pi + \lambda V$$

A little algebra then shows that:

$$E\{\Pi'\} = (1 - \lambda)M + \lambda\mu$$

$$\begin{aligned} SD\{\Pi'\} &= \sqrt{(1 - \lambda)^2 S^2 + 2(1 - \lambda)\lambda\rho S\sigma + \lambda^2 \sigma^2} \\ &= (1 - \lambda)S + O(\lambda^2) + O(\rho\lambda) \end{aligned}$$

where $O(\lambda^2)$ denotes terms that are of the order of λ^2 and $O(\rho\lambda)$ denotes terms that are proportional to ρ times λ . Now if both ρ and λ are small, such

as 1% or even 5%, and if σ is not huge compared with S , then these additional terms are negligibly small, and

$$SD\{\Pi'\} \approx (1 - \lambda)S$$

The Sharpe ratio of the new portfolio is

$$\begin{aligned} R_{\text{Sharpe}}\{\Pi'\} &= \frac{(1 - \lambda)M + \lambda\mu - r_f}{(1 - \lambda)S} + O(\lambda^2) + O(\rho\lambda) \\ &= \frac{M - r_f}{S} + \lambda \frac{\mu - r_f}{S} + O(\lambda^2) + O(\rho\lambda) \end{aligned}$$

where r_f denotes the risk-free rate. The new Sharpe ratio is larger than that of the original one if and only if $\mu > r_f$.

We can generalize the above analysis to the case of new assets V_1, \dots, V_n that are independent from (and thus uncorrelated with) both the original portfolio Π and among one another. We denote their means and standard deviations by:

$$E\{V_j\} = \mu_j$$

$$SD\{V_j\} = \sigma_j$$

We move amounts λ_j into the new assets V_j :

$$\Pi' = (1 - \sum_{j=1}^n \lambda_j)\Pi + \sum_{j=1}^n \lambda_j V_j$$

Then we have:

$$E\{\Pi'\} = (1 - \sum_{j=1}^n \lambda_j)M + \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_j$$

$$\begin{aligned} SD\{\Pi'\} &= \sqrt{(1 - \sum_{j=1}^n \lambda_j)^2 S^2 + \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \sigma_j^2} \\ &= (1 - \sum_{j=1}^n \lambda_j)S + O(\lambda_j^2) \end{aligned}$$

4.3 Application pratique – estimation des primes de risques minimales

Nous proposons dans cette dernière section de refléter l'intérêt d'ajouter une part de *Cat Bonds* à un portefeuille de marché standard. La méthode retenue pour effectuer cette analyse s'appuie sur les formules fermées de calcul algébrique proposées dans Huang & Litzenberger (1988).

L'avantage de cette démarche est la rapidité de mise en œuvre sous Excel en faisant appel aux fonctions de calcul matriciel que propose ce logiciel. Par itération successive, cette méthode permet de déterminer la frontière efficiente d'un portefeuille composé de plus de trois actifs.

Les notations suivantes sont utilisées pour simplifier les écritures matricielles :

e	vecteur colonne des rendements des actifs du portefeuille (dimension = nombre d'actifs)
w	vecteur colonne du poids des actifs dans le portefeuille ; w peut être négatif, c'est-à-dire qu'on autorise la vente à découvert d'actifs (dimension = nombre d'actifs)
u	vecteur colonne unité (dimension = nombre d'actifs)
V	matrice de variance-covariance (dimension = nombre d'actifs x nombre d'actifs)
V ⁻¹	inverse de la matrice variance-covariance (dimension = nombre d'actifs x nombre d'actifs)
^t w V w	variance du portefeuille (dimension = nombre d'actifs x nombre d'actifs)

La première étape consiste à calculer les vecteurs et scalaires suivants :

$$L = V^{-1} e \qquad M = V^{-1} u$$

$$A = {}^t u L \qquad B = {}^t e L \qquad C = {}^t u M \qquad D = B C - A^2$$

On représente deux points extrêmes du portefeuille par les formules suivantes :

$$G = \frac{B \cdot M - A \cdot L}{D} \qquad H = \frac{C \cdot L - A \cdot M}{D}$$

G correspond à un portefeuille à rendement nul et H le portefeuille avec une rentabilité attendue de 100%. G et H sont des vecteurs colonne (la dimension de ce vecteur reflétant là aussi le nombre d'actifs dans le portefeuille).

La deuxième étape du calcul consiste à procéder par combinaison linéaire entre G et H, du type :

$$G + H \cdot E[r]$$

pour déterminer par itérations successives sur différents niveaux de rentabilité attendus $E[R]$ la composition optimale du portefeuille se situant sur la frontière d'efficacité. Les poids optimaux de la contribution de chaque actif au portefeuille sont ainsi obtenus et de manière immédiate, on trouve aussi la rentabilité moyenne du portefeuille et sa variance.

On se propose de retenir le portefeuille de marché suivant (qui n'a qu'un but d'illustration et ne reflète en aucun cas des ordres de grandeur réelle) :

- OAT : actifs peu risqué offrant une espérance de rendement (au-delà du taux sans risque) de 20bps et un écart-type de 5%
- *Corporate Bonds* (de *rating* AA) : ces obligations émises par des corporates ont une espérance de rendement de l'ordre de 3% et un risque de 10%
- Actions : la prime de risque est de 8% en moyenne et la volatilité de l'ordre de 20%

Nous prenons comme hypothèses très simplificatrices les ordres de grandeur suivants pour les corrélations :

Correlation Matrix	OAT	Bonds	Actions
OAT	1,00	0,60	0,05
Bonds	0,60	1,00	0,30
Actions	0,05	0,30	1,00

La matrice de variance – covariance s'écrit ainsi :

VCV Matrix	OAT	Bonds	Actions
OAT	0,0025	0,0030	0,0005
Bonds	0,0030	0,0100	0,0060
Actions	0,0005	0,0060	0,0400

L'inverse de cette matrice devient :

VCV Inverse			
	643,6782	-206,8966	22,9885
	-206,8966	176,3926	-23,8727
	22,9885	-23,8727	28,2935

L'utilisation de la fonction Solver sous Excel (optimisation de l'espérance de rendement sous contrainte de risque) ou le calcul direct sous forme matriciel permet de définir la composition de portefeuille optimale suivante pour une **espérance de rendement global de 5%** au-dessus du taux sans risque :

<u>Calcul itératif via Solver</u>				<u>Calcul matriciel direct</u>			
OAT	1,051%	Exp Ret	4,9999%	OAT	0,637%	Exp Ret	5,0000%
Bonds	58,362%			Bonds	59,006%		
Actions	40,587%	Std Dev	11,3487%	Actions	40,357%	Std Dev	11,3486%

Le portefeuille 1 correspondant à l'objectif de rendement de 5% peut être représenté dans l'ensemble des couples efficients de rendement / risque de la manière suivante :

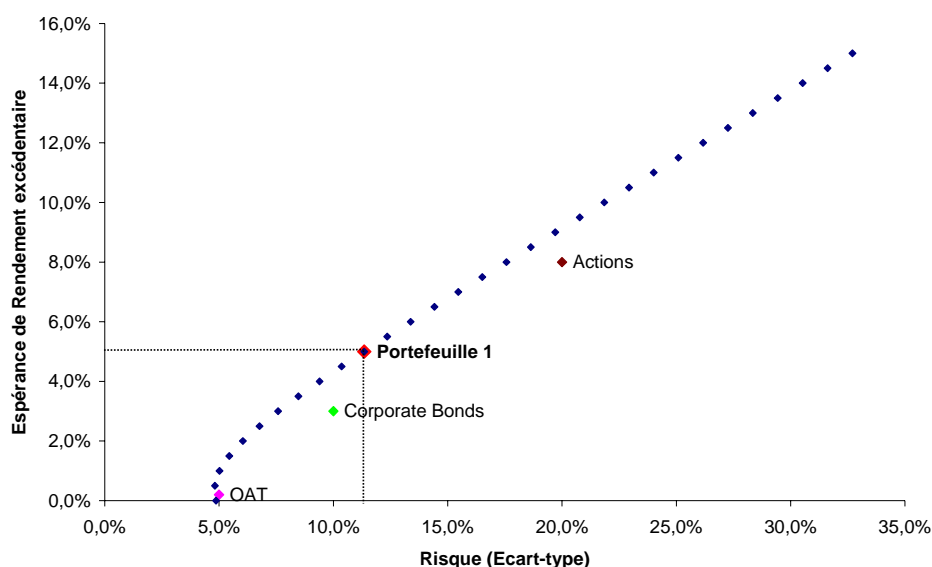


Figure IV - 27 : Illustration de la frontière efficiente du portefeuille 1

Il apparaît clairement que toute recherche de rendement supplémentaire ne peut s'opérer qu'avec une prise de risque supplémentaire, sauf à rechercher un actif diversifiant permettant de rendre plus concave à gauche de l'échelle des risques le profil de la frontière efficiente du portefeuille.

En supposant qu'un *Cat Bond* soit parfaitement décorrélé des autres actifs du marché, on cherche à déterminer la quantité optimale de *Cat Bond* nécessaire pour maintenir l'objectif de rendement de 5% du portefeuille en diminuant la part de risque globale prise (translation vers la gauche) :

Actifs ds portef	<u>Exp Ret</u>	<u>Std Dev</u>	<u>Ratio Sharpe</u>	Correlation Matrix	OAT	Bonds	Actions	Cat Bond
OAT	0,2%	5,0%	0,04	OAT	1,00	0,60	0,05	0,00
Bonds	3,0%	10,0%	0,30	Bonds	0,60	1,00	0,30	0,00
Actions	8,0%	20,0%	0,40	Actions	0,05	0,30	1,00	0,00
Cat Bond	4,0%	5,0%	0,80	Cat Bond	0,00	0,00	0,00	1,00

Ces hypothèses conduisent aux résultats intermédiaires suivants :

	<u>Matrice de variance-covariance</u>				<u>Inverse cette matrice</u>				
VCV Matrix	OAT	Bonds	Actions	Cat Bond	VCV Inverse				
OAT	0,0025	0,0030	0,0005	0,0000	643,6782	-206,8966	22,9885	0,0000	
Bonds	0,0030	0,0100	0,0060	0,0000	-206,8966	176,3926	-23,8727	0,0000	
Actions	0,0005	0,0060	0,0400	0,0000	22,9885	-23,8727	28,2935	0,0000	
Cat Bond	0,0000	0,0000	0,0000	0,0025	0,0000	0,0000	0,0000	400,0000	

Un calcul par itération sur Solver en contraignant le portefeuille à produire un rendement de 5% mais sans contrainte sur le risque donne évidemment un nombre de combinaisons infinies du quadruplet d'actifs retenu. Nous ne présentons qu'un seul de ces portefeuilles :

Calcul itératif via Solver

OAT	10,5%	Exp Ret	5,0000%
Bonds	21,2%	Std Dev	9,1422%
Actions	40,3%		
Cat Bond	28,1%		

Il est directement visible sur le graphique ci-dessous que cette répartition des actifs au sein du portefeuille est sous-optimal : le portefeuille 2a ne se situe pas sur la frontière efficiente qu'autorise l'inclusion des *Cat Bonds* dans le portefeuille. L'opportunité de plus grande diversification créée par les *Cat Bonds* est donc sous-utilisée par le portefeuille 2a.

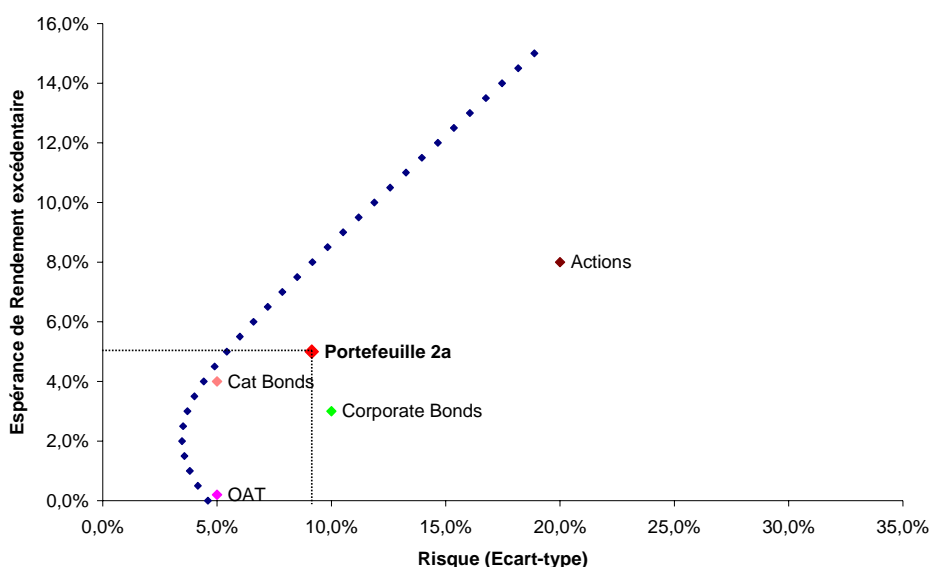


Figure IV - 28 : Illustration de la frontière efficiente du portefeuille 2a avant optimisation de la composition

La répartition optimale d'actifs permettant de minimiser le risque pour une espérance de rendement fixée à 5% est la suivante (en l'absence de contrainte sur la possibilité de vendre des actifs à découvert) :

Calcul itératif via Solver		Calcul matriciel direct					
OAT	-21,2%	Exp Ret	5,0000%	OAT	-21,2%	Exp Ret	5,0000%
Bonds	18,1%			Bonds	18,1%		
Actions	9,4%	Std Dev	5,4237%	Actions	9,4%	Std Dev	5,4237%
Cat Bond	93,7%			Cat Bond	93,7%		

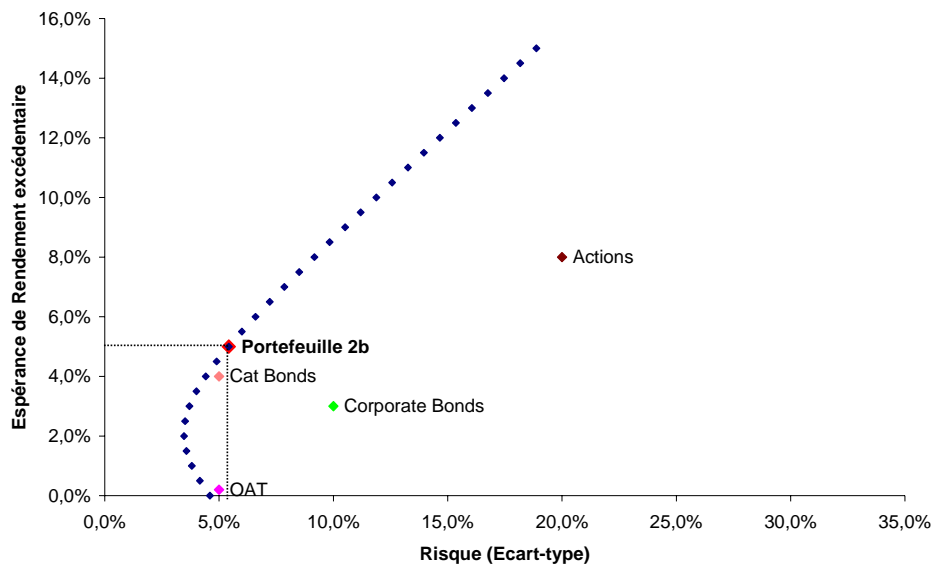


Figure IV - 29 : Illustration de la frontière efficiente du portefeuille 2b après optimisation de la composition

Le portefeuille est nettement sur-pondéré en *Cat Bond* (ce qui en fait un fond *quasi* dédié). On peut également noter que la part des actions est fortement réduite au profit des *Cat Bonds* – ce qui est un résultat intéressant, au moins conceptuellement, en termes d'allocation de risques dans un portefeuille. Le graphique ci-dessous compare les deux portefeuilles efficients possibles avec et sans *Cat Bonds*.

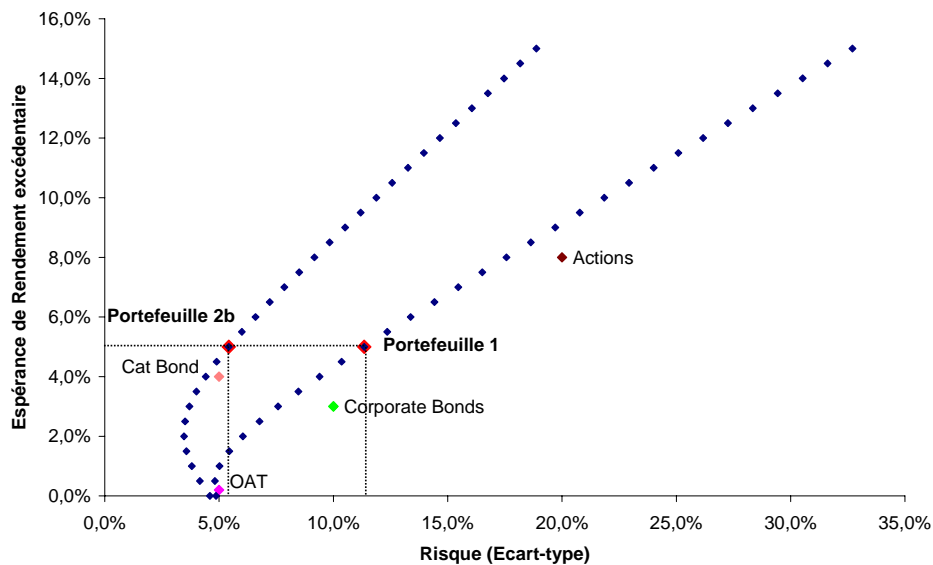


Figure IV - 30 : Comparaison de la frontière efficiente des portefeuille 1 et 2b optimisés

Pour une même espérance de rendement, le risque est ainsi réduit de près de 52%, ce qui est très important, mais pas réaliste, compte tenu de la souplesse permettant de surpondérer certains actifs et de vendre à découvert.

Si l'on contraint les actifs de la manière suivante :

- Pas de vente à découvert (poids de l'actif $i \geq 0$)
- Quote-part action limitée à 20%
- Part des OAT et *Corporate Bonds* d'au moins 60% (sans contrainte de répartition entre les deux)

On cherche le portefeuille permettant d'obtenir le taux de rendement maximum. Compte tenu des contraintes, la meilleure allocation possible offre une espérance de rendement à 4% pour une prise de risque de 9,96% :

Calcul itératif via Solver (sous contraintes)

OAT	0,000%	Exp Ret	4,0000%	
Bonds	80,000%			<u>Sharpe</u>
Actions	20,000%	Std Dev	9,9599%	0,402

Pour simplifier, nous avons supposé *à priori* que le *Cat Bond* avait la même rentabilité que ce portefeuille ainsi constitué (« portefeuille 80/20 »).

La contribution du *Cat Bond* à un tel portefeuille en terme de rendement est donc nulle : la prise en compte du *Cat Bond* ne déplace pas l'espérance de rendement moyenne du portefeuille.

En revanche, l'apport du *Cat Bond* permet de déplacer le portefeuille global dans le plan horizontal en réduisant le profil de risque de celui-ci.

La question posée est alors la suivante : en supposant le portefeuille 80/20 précédent comme un tout non modifiable, quelle est la part du portefeuille global à allouer au *Cat Bond* sous contrainte de richesse égale à 1, répartie en λ part de *Cat Bond* et $(1 - \lambda)$ part du portefeuille 80/20 ?

La réponse à cette question permet de mettre en évidence la contribution essentielle de la corrélation au marché et du risque intrinsèque de la classe d'actifs constituée par les *Cat Bonds*.

Le graphique ci-dessous illustre que pour un risque évalué à 5%, la part optimale du portefeuille à allouer au *Cat Bond* est une fonction convexe qui offre un optimum unique d'autant plus faible que la corrélation au risque global du marché est faible, voire nulle.

A risque donné (par exemple 5%), le profil du risque global de portefeuille varie en fonction de la corrélation du *Cat Bond* aux autres classes d'actif du marché (supposée égale à 0% dans le scénario de base).

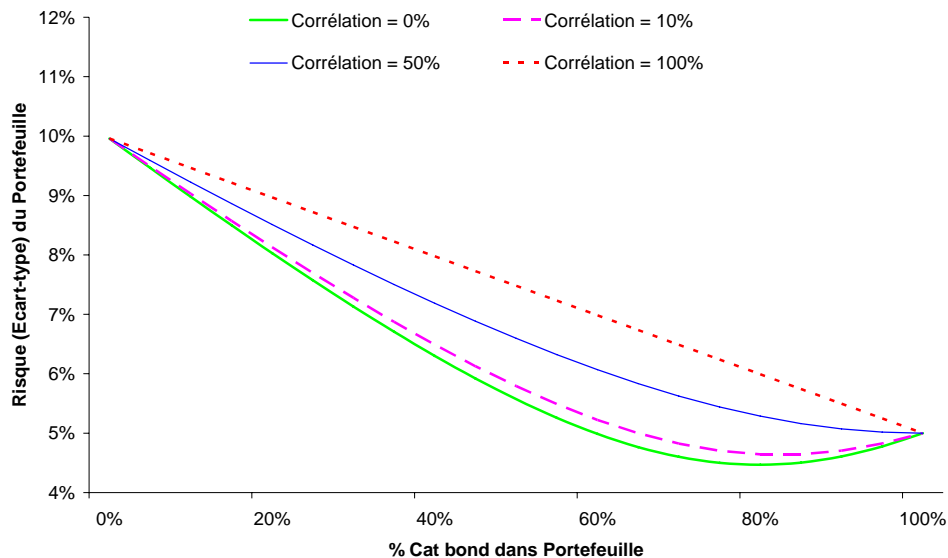


Figure IV - 31 : Evolution du risque de portefeuille en fonction de la corrélation du *Cat bond*

De la même manière, à corrélation fixe (0%), la contribution du *Cat Bond* à la variance du portefeuille global dépend directement du risque intrinsèque du *Cat Bond* :

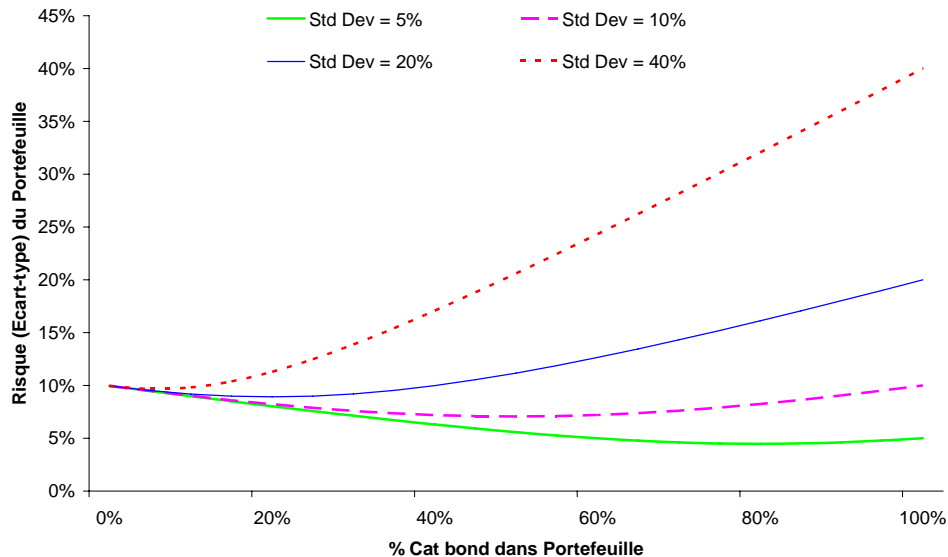


Figure IV - 32 : Evolution du risque de portefeuille en fonction du risque intrinsèque du *Cat bond*

Ainsi sous ces contraintes d'optimisation et pour les hypothèses retenues jusqu'à présent sur le *Cat Bond*, il convient de saturer la poche autorisée de *Cat Bond* pour minimiser le risque global du portefeuille.

Une allocation de 25% du portefeuille en *Cat Bond* permet de réduire le risque global de 24% et d'améliorer le ratio Sharpe de 0,402 à 0,528, c'est-à-dire d'accroître le rendement par unité de risque pris.

OAT	0,0%	Exp Ret	4,0000%	Sharpe
Bonds	60,0%	Std Dev	7,5738%	
Actions	15,0%			
Cat Bond	25,0%			

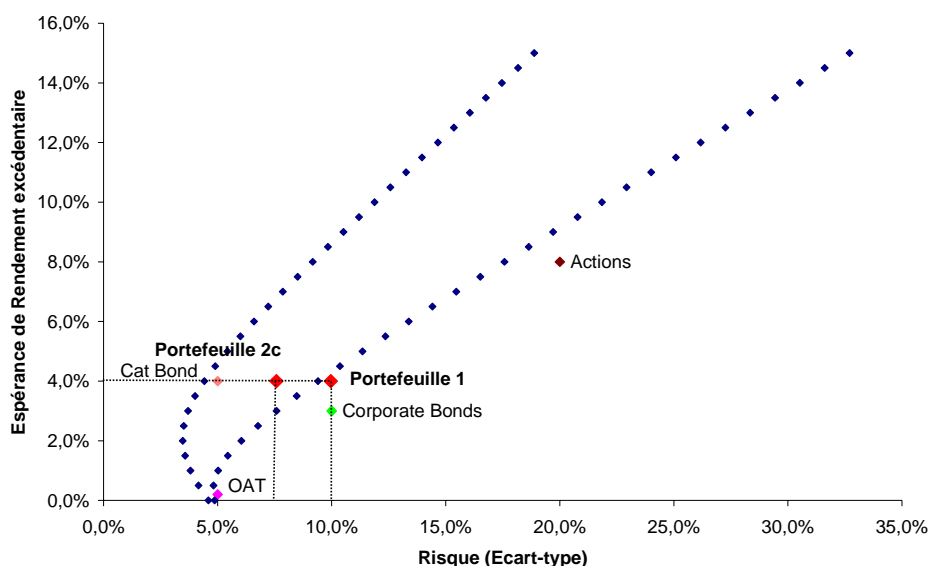


Figure IV - 33 : Comparaison de la frontière efficiente des portefeuilles 1 et 2c optimisés

Une analyse plus fine des sensibilités du risque global du portefeuille tenant compte du *Cat Bond* permet de mettre en évidence la contribution relative de la diversification et du risque intrinsèque du *Cat Bond* au profil de risque global du portefeuille. Dans l'analyse qui suit, nous avons essayé de mettre en évidence les points optimaux en terme de couple diversification (synthétisée par la corrélation) / risque intrinsèque (synthétisée par l'écart-type) en fonction de la part relative du *Cat Bond* dans le portefeuille global pour un rendement fixe donné (4%) :

		Corrélation			
		0%	10%	50%	100%
σ = 5%	0%	9,9599%	9,9599%	9,9599%	9,9599%
	5%	9,4652%	9,4953%	9,6146%	9,7617%
	10%	8,9779%	9,0378%	9,2737%	9,5604%
	15%	8,4991%	8,5886%	8,9378%	9,3560%
	20%	8,0304%	8,1491%	8,6074%	9,1481%
	25%	7,5738%	7,7209%	8,2833%	8,9366%
σ = 10%	0%	9,9599%	9,9599%	9,9599%	9,9599%
	5%	9,4751%	9,5351%	9,7713%	10,0587%
	10%	9,0195%	9,1385%	9,5996%	10,1465%
	15%	8,5978%	8,7739%	9,4457%	10,2238%
	20%	8,2151%	8,4456%	9,3106%	10,2902%
	25%	7,8772%	8,1578%	9,1951%	10,3465%
σ = 20%	0%	9,9599%	9,9599%	9,9599%	9,9599%
	5%	9,5146%	9,6337%	10,0959%	10,6456%
	10%	9,1843%	9,4166%	10,2933%	11,2939%
	15%	8,9818%	9,3162%	10,5486%	11,9110%
	20%	8,9156%	9,3364%	10,8576%	12,5015%
	25%	8,9889%	9,4763%	11,2161%	13,0690%
σ = 40%	0%	9,9599%	9,9599%	9,9599%	9,9599%
	5%	9,6710%	9,9039%	10,7855%	11,7953%
	10%	9,8159%	10,2466%	10,7855%	11,7953%
	15%	10,3765%	10,9504%	12,9951%	15,1681%
	20%	11,2911%	11,9519%	14,2929%	16,7657%
	25%	12,4820%	13,1833%	15,6780%	18,3248%

La clé de lecture de ce tableau de résultats est la suivante :

- Pour une volatilité supérieure ou égale à la classe d'actif la plus risquée du portefeuille global (20% dans notre exemple pour les actions), un *Cat bond* n'a d'intérêt que s'il diversifie le risque (corrélation inférieure à un seuil maximum de 12%)
- Pour une volatilité intrinsèque inférieure à celle de l'actif le plus risqué du portefeuille (dans notre exemple les actions à 20%), le bénéfice de la diversification apportée par le *Cat bond* justifie, jusqu'à certains seuils de corrélation, un investissement jusqu'au limite de l'enveloppe autorisée par les contraintes de gestion propre à l'investisseur
- La prime de risque identifiée sur les *Cat bonds* n'est pas justifiée au regard de l'approche CAPM tant le bénéfice apportée par la diversification du portefeuille permet de maintenir ou d'améliorer le rendement global du portefeuille par unité de risque pris (ratio Sharpe)

Nous proposons deux approches possibles pour illustrer cette dernière affirmation :

- d'une part, nous étudions pour différents rendements fixes du *Cat bond* l'évolution du ratio Sharpe en fonction de la volatilité intrinsèque du *Cat Bond*, de sa corrélation aux autres actifs du portefeuille et enfin de la part relative du *Cat bond* dans le portefeuille global (sous les contraintes énoncées plus haut)
- d'autre part, nous inversons le problème en recherchant le taux de rendement minimum (« *break-even* ») permettant d'égaliser le ratio Sharpe du portefeuille avant *Cat bond* (valeur cible de 0,402). Ces points permettent de montrer que la prime de risque exigée par le marché est injustifiée.

Ces résultats sont intéressants et renvoient à une 'règle' fixée par Kreps cité dans **LANE [2000]** selon laquelle :

In a pioneering work for actuarial literature, Rodney Kreps (Kreps (8) and (9)) tried to relate reinsurance pricing to capital markets. (This was largely before the ILS market existed.) His rationale was that the deployment of risk-capital in underwriting should be related to the deployment of risk-capital in investments. Indeed, it should. The ILS market gives us the first opportunity to see whether it actually does.

Kreps' analysis led (in general terms) to the conclusion that the "excess spread" should be a fraction of the standard deviation of the outcomes of the cover being reviewed. Furthermore, for a wide range of parameter choices, that fraction would likely be in the order of 20% to 40% of the standard deviation. This is the equivalent of saying that cat bonds should have Sharpe Ratios¹ around 0.3. But, in a remarkable example of the "dog that didn't bark" theory,

¹ Care must be taken in defining the exact interpretation of the Sharpe Ratio that particular analysts use. Here it is the ratio of excess spread to standard deviation arising from credit events. It does not include returns on volatility from interest rate risk.

Résultats de la 1^{ère} approche – évolution du ratio Sharpe en fonction du rendement d'un *Cat Bond* pour différents niveaux de corrélation (axe horizontal) et de part relative du portefeuille (axe vertical) :

Rendement Cat Bond = 0%

$\sigma = 5\%$	0%	10%	50%	100%
0%	0,402	0,402	0,402	0,402
5%	0,401	0,400	0,395	0,389
10%	0,401	0,398	0,388	0,377
15%	0,400	0,396	0,380	0,363
20%	0,398	0,393	0,372	0,350
25%	0,396	0,389	0,362	0,336

$\sigma = 10\%$	0%	10%	50%	100%
0%	0,402	0,402	0,402	0,402
5%	0,401	0,399	0,389	0,378
10%	0,399	0,394	0,375	0,355
15%	0,395	0,388	0,360	0,333
20%	0,390	0,379	0,344	0,311
25%	0,381	0,368	0,326	0,290

$\sigma = 20\%$	0%	10%	50%	100%
0%	0,402	0,402	0,402	0,402
5%	0,399	0,394	0,376	0,357
10%	0,392	0,382	0,350	0,319
15%	0,379	0,365	0,322	0,285
20%	0,359	0,343	0,295	0,256
25%	0,334	0,317	0,267	0,230

$\sigma = 40\%$	0%	10%	50%	100%
0%	0,402	0,402	0,402	0,402
5%	0,393	0,384	0,352	0,322
10%	0,367	0,351	0,305	0,266
15%	0,328	0,310	0,262	0,224
20%	0,283	0,268	0,224	0,191
25%	0,240	0,228	0,191	0,164

Rendement Cat Bond = 2%

$\sigma = 5\%$	0%	10%	50%	100%
0%	0,402	0,402	0,402	0,402
5%	0,412	0,411	0,406	0,400
10%	0,423	0,420	0,410	0,397
15%	0,435	0,431	0,414	0,395
20%	0,448	0,442	0,418	0,394
25%	0,462	0,453	0,423	0,392

$\sigma = 10\%$	0%	10%	50%	100%
0%	0,402	0,402	0,402	0,402
5%	0,412	0,409	0,399	0,388
10%	0,421	0,416	0,396	0,375
15%	0,430	0,422	0,392	0,362
20%	0,438	0,426	0,387	0,350
25%	0,444	0,429	0,381	0,338

$\sigma = 20\%$	0%	10%	50%	100%
0%	0,402	0,402	0,402	0,402
5%	0,410	0,405	0,386	0,366
10%	0,414	0,404	0,369	0,336
15%	0,412	0,397	0,351	0,311
20%	0,404	0,386	0,332	0,288
25%	0,389	0,369	0,312	0,268

$\sigma = 40\%$	0%	10%	50%	100%
0%	0,402	0,402	0,402	0,402
5%	0,403	0,394	0,362	0,331
10%	0,387	0,371	0,322	0,281
15%	0,357	0,338	0,285	0,244
20%	0,319	0,301	0,252	0,215
25%	0,280	0,265	0,223	0,191

Rendement Cat Bond = 4%

$\sigma = 5\%$	0%	10%	50%	100%
0%	0,402	0,402	0,402	0,402
5%	0,423	0,421	0,416	0,410
10%	0,446	0,443	0,431	0,418
15%	0,471	0,466	0,448	0,428
20%	0,498	0,491	0,465	0,437
25%	0,528	0,518	0,483	0,448

$\sigma = 10\%$	0%	10%	50%	100%
0%	0,402	0,402	0,402	0,402
5%	0,422	0,420	0,409	0,398
10%	0,443	0,438	0,417	0,394
15%	0,465	0,456	0,423	0,391
20%	0,487	0,474	0,430	0,389
25%	0,508	0,490	0,435	0,387

$\sigma = 20\%$	0%	10%	50%	100%
0%	0,402	0,402	0,402	0,402
5%	0,420	0,415	0,396	0,376
10%	0,436	0,425	0,389	0,354
15%	0,445	0,429	0,379	0,336
20%	0,449	0,428	0,368	0,320
25%	0,445	0,422	0,357	0,306

$\sigma = 40\%$	0%	10%	50%	100%
0%	0,402	0,402	0,402	0,402
5%	0,414	0,404	0,371	0,339
10%	0,408	0,390	0,371	0,339
15%	0,385	0,365	0,308	0,264
20%	0,354	0,335	0,280	0,239
25%	0,320	0,303	0,255	0,218

Résultats de la 2^{ème} approche – rendements minimums requis pour atteindre un ratio Sharpe de **0,402** :

$\sigma = 5\%$	0%	10%	50%	100%
5%	0,027%	0,268%	1,226%	2,408%
10%	0,056%	0,297%	1,239%	2,396%
15%	0,089%	0,329%	1,263%	2,383%
20%	0,126%	0,364%	1,284%	2,370%
25%	0,164%	0,403%	1,307%	2,356%

$\sigma = 10\%$	0%	10%	50%	100%
5%	0,106%	0,588%	2,485%	4,801%
10%	0,223%	0,701%	2,553%	4,753%
15%	0,353%	0,825%	2,623%	4,706%
20%	0,496%	0,959%	2,696%	4,667%
25%	0,654%	1,105%	2,771%	4,621%

$\sigma = 20\%$	0%	10%	50%	100%
5%	0,423%	1,380%	5,093%	9,507%
10%	0,885%	1,818%	5,339%	9,357%
15%	1,381%	2,277%	5,576%	9,224%
20%	1,903%	2,748%	5,803%	9,104%
25%	2,440%	3,223%	6,018%	8,995%

$\sigma = 40\%$	0%	10%	50%	100%
5%	1,679%	3,554%	10,632%	18,742%
10%	3,422%	5,151%	11,443%	18,292%
15%	5,115%	6,652%	12,126%	17,944%
20%	6,673%	8,000%	12,701%	17,666%
25%	8,052%	9,178%	13,186%	17,438%

Il ressort de cette analyse que le rendement (en excès du taux sans risque) demandé aujourd'hui par le marché pour investir dans la classe d'actifs des *Cat bonds* n'est pas justifié au regard de l'approche du CAPM.

Même pour des rendements très faibles et pour autant que ceux-ci soient décorrélés du marché jusqu'à un certain seuil pour un risque intrinsèque donné, les *Cat Bonds* constituent un moyen puissant de diversifier un portefeuille de marché traditionnel et d'améliorer son ratio Sharpe.

La question finale pourrait alors être : le risque de mortalité est-il vraiment un risque diversifiant ? Les investisseurs semblent répondre par la négative : si un tel risque se réalisait, il est fort probable que l'ensemble des classes d'actifs en subiraient le contrecoup plongeant toute l'économie d'un pays dans une situation de paralysie *quasi* généralisée.

Pour autant, les actifs vus d'aujourd'hui (en situation 'normale' – niveau 3 de l'échelle OMS) intègrent-ils une prime de risque spécifique au risque de mortalité ? La réponse là aussi semble être négative : en attendant qu'un tel risque se manifeste, porter ce risque en tant que tel contribue à améliorer le couple rendement / risque d'un portefeuille et devrait par là même attirer de nouveaux investisseurs et à terme réduire les primes de risque observées actuellement.

*

* *

CONCLUSION

A travers ce projet d'étude, nous avons mis en œuvre un certain nombre de techniques calculatoires dont le point commun est de proposer une mesure du risque de surmortalité. Nous mesurons l'intérêt et les limites de chacune des pistes envisagées (du principe de tarification élémentaire à l'estimation des queues extrêmes de distribution de la probabilité de perte en passant par des techniques de simulation numérique reposant sur un modèle de base en fréquence / sévérité calibré sur un nombre très réduit de points d'expérience).

Des réflexions originales ont été menées pour envisager des couvertures naturelles du risque de mortalité ; nous avons essayé d'ouvrir des pistes de réflexions pour faire converger une approche micro-économique de la rationalité relative aux risques avec une démarche macro de gestion de portefeuille où l'équilibre du risque replacé dans un contexte plus global ne justifie sans doute pas autant d'aversion et donc de prime de risque.

Au final, notre réflexion nous a conduits aux cinq conclusions suivantes :

- (i) le risque décès de masse, en apparence très simple, est un risque finalement difficile à mutualiser étant donné le caractère de choc que revêt tout événement de pandémie ; la réassurance traditionnelle ne prend d'ailleurs pas le risque de réassurer le risque de pandémie
- (ii) toute solution de couverture naturelle ne peut être qu'imparfaite et au mieux temporaire du fait de l'asymétrie du bénéfice de celle-ci : le décalage dans le temps d'une couverture du risque de mortalité par un portefeuille de rente ne permet guère de faire face à une dégradation brutale du résultat opérationnel (voire financier) à court terme
- (iii) le transfert du risque de déviation de mortalité aux marchés financiers apparaît ainsi comme la seule solution viable à ce jour pour réduire une partie de l'exposition de l'assureur. Quand bien même la capacité des marchés permettrait d'absorber des tailles significatives de risque décès, la tarification des primes exigées par les investisseurs peut apparaître déraisonnable voire rétrograde
- (iv) l'analyse des mécanismes de tarification de marché permet de mettre en lumière la distorsion de probabilité implicitement opérée par les investisseurs pour accepter de porter un tel risque de mortalité : or cette distorsion que l'on pourrait assimiler à un « *pricing* » en univers 'risque-neutre' apparaît (très) supérieure à la pratique sur d'autres risques *Cat* d'assurance (*Cat Nat*)
- (v) les primes de risque exigées aujourd'hui dans les titrisations de risque de mortalité apparaissent exagérées au regard du bénéfice de diversification apportée aux investisseurs. L'évolution récente des marchés a démontré la résilience de la classe des *ILS* face aux soubresauts des marchés du crédit et actions. Seule une meilleure compréhension des risques sous-jacents et la manière dont ceux-ci sont pris en compte dans les modèles devrait permettre de réduire à terme ces primes de risque, ce qui permettra à terme d'attirer de nouveaux émetteurs et de développer ce marché.

Addendum Juin 2008

La crise actuelle relève d'une crise quasi-systémique par l'ampleur de sa portée et la durée de ses impacts.

La classe d'actifs des *ILS* a jusqu'à présent plutôt bien résisté à la défiance croissante des investisseurs.

Si les *spreads* de certaines tranches se sont élargies, ce sont davantage pour des raisons externes au marché des *ILS* (dégradation de la qualité de *rating* des *monolines* et *downgrade* de certaines tranches par les agences de notation pour des motivations souvent assez opaques...) que pour des motifs propres à l'aversion des acteurs vis-à-vis du risque d'assurance qu'ils portent.

Pour autant, les tranches de risque les mieux notées (souvent portées en majorité par des investisseurs « classiques ») ont pu faire l'objet de ventes plus massives afin de permettre à ces acteurs de monétiser leurs actifs dans un contexte d'appels de marge sur d'autres placements plus traditionnels.

A l'inverse, sur les tranches de risque plus basses (davantage souscrites par des *hedge funds*), on a pu observer un maintien des *spreads*, voire un léger resserrement tant ces risques étaient recherchés pour leur rendement et le bénéfice de leur diversification – les dernières opérations primaires ayant été placées à des conditions très honorables dans le contexte actuel.

Notre activité professionnelle nous offre le privilège d'assister et de contribuer à la mutation que semble amorcer le secteur de l'assurance : celui-ci semble en effet rentrer dans une ère de financiarisation et de segmentation des risques plus prononcées qu'il y a encore 5 ans.

Les *Insurance-Linked Securities* offrent de ce point de vue un formidable laboratoire pour explorer la théorie du risque et l'évaluation de risques *à priori* non diversifiables et non répliquables que constituent les risques d'assurance (marchés incomplets).

Nous espérons avoir contribué à la réflexion en participant à la mise en œuvre d'outils relativement classiques de la finance moderne : pour autant, une question de recherche plus fondamentale reste ouverte, à savoir la réconciliation de la probabilité historique sous laquelle l'assurance tarifie habituellement ses risques avec la probabilité risque-neutre qui est le filtre privilégié des acteurs du marché (**MOLLER [2002]**).

*

* *

BIBLIOGRAPHIE**Ouvrages de référence réassurance, statistiques, théorie du risque, transfert de risque alternatif**

- **BLONDEAU & PARTRAT [2003]** - La Réassurance – approche technique, sous la direction de J. BLONDEAU & C. PARTRAT, *Economica, coll. AAA* (2003)
 - Chapitre 20 : « *Les Opérateurs de Distorsion : une réponse pertinente aux questions du chargement de sécurité* », C. M. COSTE
 - Chapitre 26 : « *La titrisation des risques de catastrophe naturelle* », A. SCHERER
- **Cours de CEA** d'Assurance 1^{ère} et 2^{ème} années ; Finance 2^{ème} année ; Gestion de portefeuille 2^{ème} année
- **DEELSTRA & PLANTIN [1999]** - Théorie du Risque et de la Réassurance, G. DEELSTRA & G. PLANTIN, *Economica, coll. ESA* (1997)
- **DICKSON [2005]** - Insurance Risk and Ruin, D. C. M. DICKSON, *Cambridge University Press, coll. International Series on Actuarial Science* (1995)
- **HENRIET & ROCHET [1991]** - Microéconomie de l'assurance, D. HENRIET & J.C. ROCHET, *Economica, coll. ESA* (1991)
- **LANE [2003]** - Alternative Risk Strategies, sous la direction de M. LANE, *Risk Books* (reprint 2003)
- **PETAUTON [2004]** – Théorie & Pratique de l'Assurance Vie, P. PETAUTON, *Dunod* (2004)
- **SAPORTA [1991]** – Probabilités, Analyse des Données et Statistiques, G. SAPORTA, *Technip* (1991)
- **TASSI [2004]** - Méthodes Statistiques, P. TASSI, *Economica, coll. ESA* (2004)
- **TOSSETI & al. [2002]** – Assurance : Comptabilité, Réglementation, Actuariat, sous la direction d'A. TOSSETI, *Economica, coll. Gestion* (2002)

Généralités sur les ILS et la Réassurance

- « AXA séduit les investisseurs avec sa titrisation du risque mortalité », *Les Echos* (14 nov. 2006)
- « Is Longevity a One-Way Market », Pensions Institute, *Cass Business School* (Feb 2005)
www.pensions-institute.org
- **ANDERSEN [2002]** - « Risk Transfer Mechanisms – converging insurance, credit and financial markets », J. V. ANDERSEN, *Presentation at the OECD / CIRC Technical Expert Meeting on Reinsurance* (June 2002)

- **BANTWAL & KUNREUTHER [1999]** - « A Cat Bond Premium Puzzle ? », V.J. BANTWAL & H.C. KUNREUTHER, the Wharton School, *University of Pennsylvania Working Paper 99-26* (1999)
- **BENFIELD [2007]** – « Renouvellement des Programmes de Réassurance Catastrophe Décès Invalidité en France », Etude du 3 mai 2007 (Mai 2007)
- **CAP GEMINI [2007]** – « World Insurance Report 2006 », en collaboration avec l'EFMA (Association Européenne de Management & Marketing Financiers) (Août 2007)
- **CHARPENTIER [2002]** - « Titrisation des risques catastrophes : les Cat Bonds », A. CHARPENTIER, *FFSA – Direction Etudes, Statistiques & Systèmes d'information* (Sept 2002)
- **CITIGROUP [2006]** - « The Securitization Solution – Emerging Options for Life Insurers », C. DEVINE, *Citigroup – Equity Research US Insurance – Life* (July 2006)
- **COURTOIS & ROMANO [1996]** - « Panorama des techniques alternatives de gestion des risques », F. de COURTOIS & M. ROMANO, *mémoire d'actuariat IAF – CEA* (1996)
- **FITCH [2006]** - « Bird Flu – Will It Ruffle The Industry's Feathers? », Europe/US Special Report, www.fitchratings.com, *Fitch* (Mars 2006)
- **FSA [2002]** - « Financing the future: mind the gap! The implications of an ageing population for the FSA » *Financial Services Authority*, www.fsa.gov.uk/ageing/ (Mai 2002)
- **GOLDMAN SACHS [1998]** - « Analyzing Insurance-Linked Securities », E. CANABARRO, M. FINKEMEIER (Goldman Sachs) & R. ANDERSON, F. BENDIMERAD (Risk Management Solutions), Goldman Sachs, *Fixed-Income Quantitative Research* (Oct 1998)
- **GRINDA & NGUYEN [2000]** - « Modèle du Risque de Contrepartie des Réassureurs d'une Compagnie d'Assurance », F. GRINDA & P. NGUYEN, *mémoire d'actuariat IAF – CEA* (2000)
- **GUY CARPENTER [2006]** – « Emerging Issues : Global Pandemic (Accident & Health Specialty Briefing) », http://www.guycarp.com/portal/extranet/pdf/GCBriefings/Pandemic_Briefing032106.pdf (Mars 2006)
- **LANE [2007]** - « Of Sidecars and Such », M. LANE (Jan 2007), <http://www.lanefinancialllc.com>
- **LANE & BECKWITH [2007]** - « The 2007 Review of the Insurance Securitization Market », M. LANE & R.G. BECKWITH (April 2007), <http://www.lanefinancialllc.com>
- **MICHEL KERJAN [2005]** - « Protection Financière des Infrastructures Critiques: Incertitude, Assurabilité et Risque Terroriste », E. MICHEL KERJAN, *Chaire de Développement Durable EDF – Ecole Polytechnique Cahier n°2005-004* (Mars 2005)
<http://ceco.polytechnique.fr/CDD/PDF/2005-004.pdf>
- **MOODYS [2007]** - « Bird Flu Risk for US Life Insurers », S. ROBINSON, J. LEVINE & R. RIEGEL, *Special Comment – Global Credit Research, Moody's* (Avril 2007)

- **MORGAN STANLEY [2003]** - « Innovative Mortality-based Security », Morgan Stanley Research Europe, *Quick Comment Insurance* (Dec 2003)
- **MORGAN STANLEY [2007]** - « Winners in Reinsurance will be those that embrace Insurance Linked Securities », A. BROADFIELD, Morgan Stanley Research Europe, *Industry view* (Nov 2007)
- **SCHERER [2000]** - « La titrisation des risques d'assurance : le marché des 'Insurance-Linked Securities' (ILS) », A. SCHERER, p. 1 – 9, *La Revue d'Economie Financière* (Avril 2000)
- **SCOTTISH RE [2005]** – KBW Reinsurance Conference (May 2005)
http://www.scottishre.com/pdf/KBW_Conference_Sept2005.pdf
- **STANDARD & POOR'S [2006]** - « Life Reinsurance Sector Appears Most Exposed to Risk of Pandemic », A. HUGHES & D. HARRISON, RatingsDirect Research, *Standard & Poor's* (Mai 2006)
- **SWISS RE [2001a]** - « Capital Markets Innovation in the Insurance Industry », *Sigma Report 3* (2001)
- **SWISS RE [2001b]** - « The Economics of Insurance – How insurers create value for shareholders », *Technical Publications* (2001)
- **SWISS RE [2003]** - « Understanding reinsurance: how reinsurers create value and manage risk », *Technical Publications* (2003)
- **SWISS RE [2004a]** - « World insurance in 2003: Insurance industry on the road to recovery »
Sigma Report 3/2003 (Mars 2004) ;
http://www.swissre.com/resources/afa7a180455c6a0286e7be80a45d76a0-sigma3_2004_e.pdf
- **SWISS RE [2004b]** - « Mortality Protection : the Core of Life », *Sigma Report 4/2004* (April 2004) ;
http://www.swissre.com/resources/9e6a8f00455c6a1a872fbf80a45d76a0-sigma4_2004_e_rev.pdf
- **SWISS RE [2006]** - « Securitization – new opportunities for insurers », *Sigma Report 7* (2006)
- **SWISS RE [2007a]** - « World insurance in 2006: Premiums came back to 'life' » *Sigma Report 4/2007* (Avril 2007) ; http://www.swissre.com/resources/e643d8804660892eba91ff276a9800c6-EJAI-75L9FJ_World%202006.pdf
- **TITRISATION DE RISQUE D'ASSURANCES – PROJET DE FCT [2007]**, Présentation de l'ACAM au Congrès annuel des Actuaires, Paris (21 juin 2007)

Recherche académique sur les ILS

- **BLAKE, CAIRNS & DOWD [2006]** - « Living with Mortality: Longevity Bonds and Other Mortality-linked Securities », D. BLAKE, A. J. G CAIRNS & K. DOWD, p. 1 – 45, *Institute of Actuaries 27 Feb 2006* (2006)

- **CAIRNS** - « Longevity Bonds and Mortality-linked Securities », A. CAIRNS, *Heriot-Watt University, Edinburgh* www.ma.hw.ac.uk/~andrewc
- **COX & LIN [2005a]** - « Natural hedging of Life and Annuity Mortality Risks », S. COX & Y. LIN, p. 1 – 24, *Working Paper Georgia State University* (July 2005) ; http://rmictr.gsu.edu/Papers/WP04_8.pdf
- **COX & LIN [2005b]** - « Securitization of Mortality Risks in Life Annuities », S. COX & Y. LIN, p. 227 – 252, *Journal of Risk and Insurance* 72 – 2 (2005)
- **CUMMINS [2002]** – « Catastrophic Events, Parameter Uncertainty and the Breakdown of Implicit Long-term Contracting in the Insurance Market: the Case of Terrorism Insurance », J.D. CUMMINS & C. M. LEWIS, *WP 02 - 40* (2002) <http://fic.wharton.upenn.edu/fic/papers/02/0240.pdf>
- **FRIEDBERG & WEBB [2005]** - « Life is Cheap : Using Mortality Bonds to Hedge Aggregate Mortality Risk », L. FRIEDBERG & A. WEBB, p. 1 – 32, *CRR WP 2005-13* (Oct 2005) www.bc.edu/crr
- **LIN [2005]** - « Securitization of Mortality Risks in Life Annuities », Y. LIN, *Presentation to the Institute of Actuaries of Australia* (July 2005)
- **MACMINN & RICHTER [2004]** - « Hedging Brevity and Longevity Risk with Mortality-based Securities », R. MACMINN & A. RICHTER, p. 1 – 15, *Geneva Papers* 27 (2004)
- **NELL & RICHTER [2004]** - « Improving Risk Allocation through CAT Bonds », M. NELL & A. RICHTER, p. 183 – 204, *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory* 29 - 2 (2004)

Opérateurs de distorsion et PH-transforms

- **CHRISTOFIDES [1998]** - « Pricing for risk in financial transactions », S. CHRISTOFIDES, p. 63-109, *Proceedings of the GISG/ASTIN Joint Meeting in Glasgow, Scotland* – 2 (Oct. 1998)
- **CHRISTOFIDES [2000]** – « Pricing of Catastrophe-Linked Securities », S. CHRISTOFIDES (2000)
- **LANE [2000]** - « Pricing Risk Transfer Transactions », M. LANE, *ASTIN Bulletin* 30 – 2 (2000) <http://www.casact.org/library/astin/vol30no2/259.pdf>
- **LANE [2001]** - « Analyzing the Pricing of the 2001 Risk-Linked Securities Transactions », M. LANE, *Trade Notes* (2001) <http://www.lanefinancialllc.com>
- **MOLLER [2002]** - « On Valuation and Risk Management at the Interface of Insurance and Finance », T. MOLLER, to appear in *British Actuarial Journal* (Nov 2002)
- **WANG [1995]** - « Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms », S. WANG, p. 43 – 54, *Insurance Mathematics & Economics* 17 (1995)

- **WANG [1996]** - « Premium calculation by transforming the layer premium density », S. WANG, p. 71 – 92, *ASTIN Bulletin* 26 – 1 (1996)
- **WANG [1997a]** - « Implementation of PH-Transforms in Ratemaking », S. WANG, p. 291 – 315, *Discussion paper for the 1997 Casualty Actuarial Society Ratemaking Seminar* (1997)
- **WANG [1997b]** – « Axiomatic characterization of insurance prices », S. WANG, V. YOUNG & H. PANJER, p. 173 – 183, *Insurance Mathematics & Economics*, Vol. 21 n°2 (1997).
- **WANG [2000]** - « A Class of Distorsion Operators for Pricing Financial and Insurance Risks », S. WANG, p. 15 – 36, *Journal of Risk and Insurance* 67 – 1 (2000)
- **WANG [2002]** - « Pricing of Catastrophe Bonds » WANG, S.S. p. 221-240 in Alternative Risk Strategies, sous la direction de M. LANE, *Risk Books* (2002, reprint 2003)
- **WANG [2004]** - « Cat Bond Pricing Using Probability Transforms », S. WANG, p. 19 – 29, *Insurance and the State of the Art in Cat Bond Pricing, Geneva Papers* 278 (Jan 2004)
- **YOUNG [1999]** - “Discussion of Christofides’s Conjecture regarding Wang’s Premium Principle”, V. YOUNG, p. 191-195, *ASTIN Bulletin* 29 – 2 (1999)

Analyse des pandémies

- **ALERIEFF & Le GOFF [2007]** - *Titrisation des risques d'assurance*, M. ALERIEFF & A. Le GOFF, Présentation au CHEA (Mai 2007)
- **GORE [2006]** – « Une vérité qui dérange », Documentaire cinématographique réalisé par D. GUGGENHEIM & A. GORE (2006)
- **LAZZARI & STOHR [2004]** - “Avian Influenza and Influenza pandemics (edito)”, S. LAZZARI & K. STOHR, p. 242, *WHO Bulletin* 82 – 4 (April 2004)
<http://www.who.int/bulletin/volumes/82/4/242.pdf>
- **HHS Pandemic Influenza Plan [2005]** - “A Potential Influenza Pandemic: Possible Macroeconomic Effects & Policy Issues”, *Congressional Budget Office* (Dec 2005)
<http://www.cbo.gov/ftpdocs/69xx/doc6946/12-08-BirdFlu.pdf> ;
<http://www.hhs.gov/pandemicflu/plan/part1.html>
- Summary of probable SARS cases with onset of illness from 1 November 2002 to 31 July 2003, WHO http://www.who.int/csr/sars/country/table2004_04_21/en/index.html
- **MELTZER, COX & FUKUDA [1999]** – “The Economic Impact of Pandemic Influenza in the United States: Priorities for Intervention”, M. I. MELTZER, N. J. COX, and K. FUKUDA, Center for Disease Control and Prevention, Atlanta, Georgia, USA, *Emerging Infectious Diseases* 5 – 5 (Sept - Oct 1999)
<http://www.cdc.gov/ncidod/EID/vol5no5/meltzer.htm>
http://www.cdc.gov/ncidod/EID/vol5no5/melt_back.htm

- **PIERCY & MILES [2003]** – “The Economics of Pandemic Influenza in Switzerland”, J. PIERCY and A. MILES, *Swiss Federal Office of Public Health* (March 2003)
- **ETUDE DE L’INSTITUT DE VEILLE SANITAIRE [2005]**
http://www.invs.sante.fr/presse/2005/le_point_sur/grippe_aviaire_101105/index.html ;
http://www.sante.gouv.fr/htm/dossiers/grippe_aviaire/fiches_techniques.htm
<http://www.liste-hygiene.org/arcavicoleinfluenzafrance.htm>
- **SWISS RE [2007b]** - « Pandemic Influenza : A 21st century model for Mortality shocks », *Technical Publications Life & Health* (June 2007)

Théorie des valeurs extrêmes

- **BEELDERS & COLAROSSO [2004]** - « Modelling Mortality Risk with Extreme Value Theory », O. BEELDERS & D. COLAROSSO, p. 26 – 30, *Global Association of Risk Professionals – Issue 19* (July 2004)
- **BOULEAU** - « Splendeurs et misères des lois de valeurs extrêmes », N. BOULEAU, *CMA ENPC*

*

* *

ANNEXES

- A. Approche *Standard & Poor's*

- B. Illustration de la réduction de variance par la réassurance

- C. Modélisation du risque terroriste

- D. Données utilisées et analyse des pandémies passées

- E. Analyse des séries temporelles de mortalité & régressions Cobb-Douglas

- F. Eléments de théorie de la mesure du risque

ANNEXE A – PERSPECTIVES DE STANDARD & POOR'S SUR LE RISQUE DE MORTALITE

How Ready Is The U.S. For A Pandemic?

Publication date: 10-May-2006

The quickening march of avian flu through bird populations in Asia and Europe is prompting an unusually swift and broad response in the U.S. government and health care sectors.

On May 3, the Bush Administration released its second strategy statement in six months for dealing with a possible outbreak of bird flu in this country, should it mutate into a human virus that could sicken or kill millions of people and affect large swaths of the U.S. economy. In the days leading up to the release of that document, titled "National Strategy for Pandemic Influenza," the prospect of a possible health crisis had already ignited an urgency within U.S. corporations and local and state governments, which have begun ramping up contingency planning for a possible pandemic. Governments are focusing on containing the flu, while companies are figuring out how they would continue to operate during the potentially difficult times that would ensue--and that could impair the credit quality of several major industries, depending on an epidemic's extent and duration.

For now, a human strain of the avian flu virus appears no more imminent than when Standard & Poor's Ratings Services published a special report to address the issue last fall ("Pandemic's Specter Poses Economic, Credit Concerns," published Nov. 15, 2005, on RatingsDirect, Standard & Poor's Web-based research and credit analysis system). Back then, however, the avian strain of the flu had been confirmed in only 16 countries, with about 120 humans made ill by contact with infected birds, and only 60 or so people had died. Six months later, bird flu infections have spread to 45 countries on three continents, according to the United Nations. Some 207 people have now been infected, and 115 have died, the World Health Organization (WHO) reports. On March 13, Department of Health and Human Services (HHS) Secretary Michael Leavitt predicted, "It is only a matter of time before we discover H5N1 in birds in America. The migration patterns of the wild fowl that carry the virus make its appearance here almost inevitable.... It does not mean that a pandemic is at our doorstep. It should, however, motivate us ... to renew pandemic preparations on every front at every level."

Thus, the Bush Administration's new 227-page report outlines 300 "critical actions" that federal, state, and local agencies should follow if a human strain of bird flu hits the U.S. These actions include such steps as restricting domestic travel; closing schools; urging people to stay at least three feet away from each other; and suggesting that businesses expand telecommuting (and cut back on face-to-face meetings), enact liberal leave policies, and stagger employee shifts. Among the report's key messages is that the U.S. response to a pandemic would be decentralized, with the federal government defraying large chunks of the cost, but employers and state and local governments would be left with the responsibility for protecting citizens and ensuring economic continuity. "Any community that fails to prepare, with the expectation that the federal government will come to their rescue, will be sadly disappointed," said Secretary Leavitt, according to an April 17 Rocky Mountain News report.

In other words, both business leaders and local government authorities could face a huge challenge. The Administration's report estimates that up to 40% of the U.S. workforce could miss two weeks of work during a wave of infections, and there could be more than one wave. Each such occurrence could result in \$600 billion in lost income nationally. The death toll could be significant as well. The WHO said in October 2005 that a "useful and plausible planning target" would be 2 million to 7.4 million fatalities worldwide, should the pandemic be comparatively mild, such as the one caused by the "Asian influenza" in 1957. Mortality rates would be far higher, the WHO said, if the virus is as deadly as the 1918 pandemic that killed an estimated 40 million to 50 million people worldwide.

State and local governments would be at the front lines in managing any pandemic. Their response, along with that of the federal government, has been flawed in recent disasters, such as last August's Hurricane Katrina response. The terrorist attacks of Sept. 11, 2001, and the active hurricane seasons in 2004 and 2005 have forced state and local governments to focus greater attention on preparing and providing funding for emergencies and disasters. For instance, state and local governments have spent more than \$300 million on the Health Alert Network during the past few years to improve their information and communication infrastructures. This network was established by the Centers for Disease Control and Prevention (CDC) in 1999 and has been expanded to include all 50 states and eight U.S. territories. In addition, the strong economy of the past two years has contributed to healthy revenue growth and greater budget flexibility for most state and local governments. This will help them handle the financial burden of being first responders.

HHS is adding to this by distributing the initial \$100 million of a \$350 million emergency appropriation that Congress has authorized (part of a proposed \$7.1 billion federal bird flu battle plan that includes funding for emergency medical care) to help local governments plan for a pandemic. The four largest beneficiaries of the first round of federal funding are California, New York, Texas, and Florida. But, in its 2005 annual report, "Ready or Not?" the nonprofit, nonpartisan organization Trust for America's Health argued that both federal and state efforts would have to be accelerated to protect the public from health emergencies.

"There is always room for improvement, and we would expect state planning and funding efforts to continue," says Standard & Poor's credit analyst Robin Prunty.

The Hit That Credit Quality Would Take

Estimates of the credit effect vary widely as well. A Dec. 8, 2005, Congressional Budget Office (CBO) report predicts that in a severe pandemic, real U.S. GDP would "be about 5% lower over the subsequent year than it would have been had the pandemic not taken place." In a mild pandemic, the CBO predicts, real GDP would fall by about 1.5%. In either case, says the CBO, "... Business confidence would be dented, the supply of labor would be restricted (owing to illness, deaths, and absenteeism spurred by fear of the disease), supply chains would be strained as transportation systems were disrupted, and arrears and default rates on consumer and business debt would probably rise somewhat."

Most likely, a severe flu outbreak, as the CBO has outlined, "would cause a mild recession in the U.S., on the order of the 1990-1991 downturn," predicts David Wyss, chief economist at Standard & Poor's. "The impact on credit quality would be significant, with default rates on speculative-grade debt likely to be near 10% for two years, and the unemployment rate rising to near 7%." He adds: "The impact of a mild pandemic would be minor for credit quality, but would still cause unemployment to rise by about half a percentage point."

Corporate contingency planning is focused on dealing with two impacts: indirect and direct. Preparations for the former are just starting in most cases, as companies sketch out ways for employees to work remotely, curtail travel, and otherwise lessen their exposure to other people. Becton Dickinson & Co., for instance, has created a taskforce to plan for preserving the health of employees, protecting the company's medical technology facilities, and ensuring uninterrupted supplies of the raw materials it needs to make medical supplies, devices, laboratory equipment, and diagnostic products. The company is also reaching out to state and federal governments to encourage planning for a bird flu pandemic.

The Business Impact Will Vary By Industry

Industries that would be directly affected by avian flu--airlines, lodging, leisure, restaurants, and, of course, poultry producers--would face varying fates. In a severe epidemic, the CBO predicts, demand would plunge by 80% for three months in the entertainment, arts, recreation, lodging, and restaurant industries, which together represented about 4% of GDP in 2004. Retail trade would decline by 10% over a similar period, as would wholesale trade and manufacturing. Demand for medical care, meanwhile, would spike by 15%.

Poultry companies could suffer first once the bird flu arrived in the U.S., although they argue that they have planned well enough to avoid an epidemic within their flocks. They are housing hens under cover to limit exposure to migrating birds, testing flocks before slaughter, and washing processed birds before shipment in a chlorinated mixture that helps kill bacteria--steps that the industry claims leaves it the best-protected in the world.

So far, demand for poultry products has not waned in the U.S. However, Standard & Poor's recently removed Pilgrim's Pride Corp. (BB/Stable/--) and Gold Kist Inc. (B+/Stable/--) from CreditWatch (both with positive implications), as results have weakened due to lower prices. Still, we believe both companies can weather the bird flu scare with limited damage. In addition, we lowered the short-term rating on Tyson Foods Inc. (BBB/Negative/A-3) in late April, reflecting the company's exposure to declining international demand for chicken as a result of the bird flu scare. Credit analyst Jayne Ross predicts that such reduced demand may last for only one or two quarters.

"In the longer term, the industry fundamentals are favorable," she says. She expects a limited effect on these companies' credit quality because people have not contracted the bird flu from eggs or cooked poultry (cooking chicken at 165 degrees to 180 degrees apparently kills the virus).

The upshot for eateries is that "Standard & Poor's doesn't expect an effect, at this time, on the overall credit quality of rated restaurants," says credit analyst Diane Shand. Chains such as those owned by Burger King Corp., Wendy's International Inc., and Yum! Brands Inc. use multiple food suppliers. McDonald's Corp., meanwhile, can trace its U.S. chicken supply back to the hatchery.

Ripple Effects In The Food Chain

There are some caveats to this assessment, however. Smaller restaurant companies could face short-term business disruptions. And all fast-food chains could suffer if media coverage of a flu outbreak makes consumers nervous. Well-heeled companies can afford to heavily advertise the safety of their food, usually successfully.

"Nevertheless, a large outbreak of avian flu that impacted consumers' health would affect all retailers, especially restaurants and supermarkets," says Ms. Shand. "People would stay home and watch television as opposed to going shopping or to a restaurant." The companies that are most at risk because of a poultry-heavy product mix are Yum! Brands (BBB/Stable/--), AFC Enterprises Inc. (B+/Stable/--), El Pollo Loco Inc. (B/Watch Pos/--), and Carrols Corp. (B+/Negative/--).

As demand for chicken goes, so will purchases of additives to chicken feed. Standard & Poor's rates the three largest suppliers of additives: Eli Lilly & Co. (AA/Stable/A-1+), Alpharma Inc. (B/Stable/--), and Phibro Animal Health Corp. (B-/Stable/--).

Animal feed is too small a part of Lilly's business to affect its credit rating. And Alpharma has little debt, plus a specialty pharmaceutical business to fall back on. Phibro, though, is more leveraged and relies more on the poultry market, so a prolonged downturn in poultry demand might affect its credit rating.

Health care and pharmaceutical companies, which might be expected to thrive in a mild epidemic, could actually suffer from too much of a bad thing. Their credit ratings almost certainly would remain in good standing, but they could be overwhelmed by demand for their services. Health care workers would be exposed to bird flu, straining staffing capacity. As a result, says the CBO report, "Care for nonacute health problems would be sharply curtailed."

"I am not hearing a lot of discussion of this at hospital-provider meetings," says credit analyst Martin Arrick. "My concerns center on the health of health care workers. And if they start getting sick, does the entire health care system begin to falter? I suspect the answer to that is yes. Also, I am worried that in a medium-scale pandemic, there would not be enough respirators, which would cause a problem."

The industry needs to do unprecedented contingency planning, starting with quickly gathering as much vaccine as possible, plus huge numbers of masks and gloves. Once patients began to arrive, hospitals would be stressed to their limits, as would medical suppliers: Demand for lab testing, IVs, hypodermics, and other supplies would skyrocket, as would the need for medical transport and home nursing.

"Ambulance, home care, and disease management services may play an important role, clearly more important than in 1918, given the development of those services," says credit analyst Michael Kaplan.

As part of Washington's new pandemic plan, the HHS plans to spend \$162 million in 2006 to buy 6,000 ventilators, 50 million surgical masks, 50 million N95 respirators, and face shields, gloves, and gowns. The numbers sound large but really are not in a country of nearly 300 million people.

Speed And Efficacy Are Challenges In Obtaining Vaccine

A lot will depend, of course, on how quickly vaccine makers can respond once a human strain of bird flu develops. The HHS has already bought more than 14 million courses (one course treats one person) of two FDA-approved antiviral drugs, Tamiflu and Relenza, which brings the national inventory to 20 million. By the end of 2008, the HHS hopes to have 81 million courses stockpiled; it will buy 50 million and subsidize state purchases of 31 million. Although these drugs have helped treat current patients, no one knows how they will work if the avian virus mutates to humans.

Time lag will be the big problem in dealing with that. Traditional methods of developing a flu vaccine require roughly nine months before production can begin—long enough for millions of people to die from a virulent strain. But on May 4, 2006, the HHS awarded \$1 billion over five years to five drug makers to develop technology that will speed production of vaccines: GlaxoSmithKline PLC (\$275 million); MedImmune Inc. (\$170 million); Novartis Vaccines and Diagnostics (\$220 million); DynPort Vaccine Corp. LLC, or DVC (\$41 million); and Solvay Pharmaceuticals Inc. (\$299 million).

"We have the opportunity to be the first generation that prepares for a pandemic," Secretary Leavitt said in announcing the contracts.

U.S.-based Baxter International Inc. is collaborating with DVC to develop seasonal (interpandemic) and pandemic vaccines using Baxter's "vero cell technology," which enables it to produce large quantities of vaccine more quickly than using traditional methods. Baxter is in a unique position because it has one of the largest cell-culture facilities in the world, capable of manufacturing large quantities of vaccine. Consequently, Baxter can quickly ramp up and, using its integrated filling and packaging capabilities, can swiftly manufacture pre-filled syringes. Baxter's developmental work could support the licensure of a seasonal vaccine and pave the way to complete clinical trials for a pandemic vaccine. If ultimately approved by the FDA, Baxter would hold product licenses for both of these vaccines in the U.S. market.

"Baxter's entry into this arena could jump-start the company's influenza vaccine program," said credit analyst Cheryl Richer. "Baxter took a \$197 million charge in 2004 when it suspended European clinical trials for its PreFluCel influenza vaccine program due to a higher-than-expected rate of mild symptoms that would delay the product's launch." Baxter has a contract with the United Kingdom to produce a stockpile of so-called "candidate bird-flu vaccine" and is negotiating with other governments for the same opportunity.

"We don't expect any near-term impact on Baxter's rating, given the scale relative to its large and diverse business portfolio," Ms. Richer explained.

A Catastrophic Scenario For Airlines

Whatever the vaccine-making method of choice, huge numbers of people would have to curtail travel plans to avoid or fight a pandemic. Because airlines would be on the front lines in spreading disease, the CDC has designed a series of precautions for flight crews and other airline employees in the event "that they must interact with a person suspected of having H5N1 avian influenza." The federal government, according to the new Bush Administration strategy, also intends to establish policies for screening travelers for flu symptoms and recommend measures such as quarantines. Should the government decide to limit flights to any significant degree, the financial effect on airlines could be catastrophic.

"Such a scenario," says credit analyst Philip Baggaley, "could trigger bankruptcy filings and even liquidation of carriers that are already bankrupt." Even if the government did not impose formal limits on the number of flights, a bird flu pandemic would likely cause a significant decline in passenger traffic, as the outbreak of SARS in Asia and Canada did in 2003. That would translate into pain for airports as well.

"The critical factor in determining airport revenues is enplaned passengers," says credit analyst Todd Whitestone. "We would expect passenger levels to be off markedly in the event a human-to-human outbreak occurs. However, the airports do have reserve funds and can bring down expenses over short periods, as proven after the Sept. 11 terrorist attacks. This allowed most airports to maintain credit ratings at their approximate pre-Sept. 11 levels, and therefore these facilities could withstand a significant short-term loss and remain solidly investment grade."

At seaports, the Bush plan notes, "the sheer volume of traffic and the difficulty of developing screening protocols to detect an influenza-like illness pose significant challenges. While we will consider all options to limit the spread of a pandemic virus, we recognize complete border closure would be difficult to enforce, present foreign affairs complications, and have significant negative social and economic consequences."

In fact, the report continues, "sustaining critical transportation services during a pandemic will be crucial to keep communities functioning and emergency supplies and resources flowing." Standard & Poor's rates some of the country's largest ports, where traffic could be slowed by a pandemic.

"However, these ports would have to experience a significant decline in activity in order to affect debt ratings in any major fashion," says Mr. Whitestone.

Empty Hotel Rooms, Quiet Roulette Wheels?

If bird flu mutates, whatever happens to transportation will affect the gaming and lodging industries similarly. Companies would cancel business travel, and travel for pleasure would evaporate, too.

"The impact would likely begin slowly, initially affecting the one or two cities where evidence of the disease emerged," says credit analyst Craig Parmelee. "There, hotels would close floors, or even towers, to reduce costs as demand fell. Further pressure could be put on operating performance, as it would become more difficult to entice housekeepers and laborers to report to work."

If the effect of the flu were contained, the credit quality of major lodging companies such as Marriott International Inc. (BBB+/Stable/A-2), Hilton Hotels Corp. (BB/Stable/--), and Starwood Hotels & Resorts Worldwide Inc. (BB+/Positive/--) might be affected only at the margin, given their diverse portfolios. For instance, the devastation of New Orleans, a major convention destination, had no meaningful effect on these companies' credit quality. But if an outbreak occurred in a major city like New York or affected multiple cities, Marriott, Hilton, and Starwood would certainly feel the effect. And if interregional travel ground to a halt for an extended period, major hotel companies would suffer severely, and their ability to meet financial obligations could be called into question.

Gaming companies, which are often less geographically diversified than hotel companies, could be more affected by a regional outbreak than the major lodging companies.

"It is much more common for a gaming company to generate a meaningful portion of its cash flow from one or two properties," Mr. Parmelee explains. The one upside is that it would likely take longer for the disease to spread to gaming markets, as casinos are generally not located in major cities that are exposed to a high degree of international travel.

Las Vegas, of course, is an exception. Given the amount of international travel to Las Vegas, Standard & Poor's would expect it to be among the cities most quickly infected. In a long-lasting pandemic, a few major gaming companies, such as MGM MIRAGE or Station Casinos Inc., that are heavily concentrated in Las Vegas could have trouble meeting their financial obligations, as inveterate gamblers desert casinos to gamble illegally on the Internet.

It seems inevitable that bird flu will reach the U.S., probably sooner rather than later. But the U.S. has had plenty of warning—more, in all likelihood, than any other country. So the only excuse that Washington, state and local governments, and corporations will have for not being prepared is that they did not take the threat seriously enough.

By Ted Gogoll

Global Life Reinsurance Pandemic Exposure

Publication date: 16-May-2006

In recent months, the H5N1 flu virus in birds has spread from Asia to Europe and Africa, and has claimed a small number of human lives. The virus does not currently pass easily to humans, but there are concerns that if it were to mutate it could trigger a pandemic. Standard & Poor's Ratings Services believes that the life reinsurance sector would be most exposed in the event of a severe global flu pandemic. We estimate that the global impact from a pandemic on life reinsurers could be as high as €9 billion (\$11.5 billion).

The Current Situation

A severe form of influenza—the H5N1 virus—has affected wild birds and poultry flocks in several countries (see table 1), including a small number of cases in some European countries. As a result of contact with infected birds, 204 people have caught the disease worldwide, of which 54% have died (see table 2). Although there may be unreported nonfatal cases that distort this

rate, the disease in its current form exhibits a very high mortality rate. While the H5N1 virus remains in the bird population and the number of human cases continues to rise, there are concerns that it may mutate into a form transmitted between humans.

Table 1

H5N1 Outbreaks In Poultry By Country, End Of 2003-April 2006*

Azerbaijan	2
Cambodia	16
China	79
Egypt	15
Indonesia	209
Iraq	3
Thailand	1,078
Turkey	176
Vietnam	2,312

*Only countries with reported human cases shown. Source: World Health Organization, April 21, 2006.

Table 2 Worldwide Human Cases Of And Deaths From H5N1 By Country Since 2003

Country	2003		2004		2005		2006		Total	
	Cases	Deaths	Cases	Deaths	Cases	Deaths	Cases	Deaths	Cases	Deaths
Azerbaijan	0	0	0	0	0	0	8	5	8	5
Cambodia	0	0	0	0	4	4	2	2	6	6
China	0	0	0	0	8	5	10	7	18	12
Djibouti	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
Egypt	0	0	0	0	0	0	13	5	13	5
Indonesia	0	0	0	0	17	11	16	14	33	25
Iraq	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2
Thailand	0	0	17	12	5	2	0	0	22	14
Turkey	0	0	0	0	0	0	12	4	12	4
Vietnam	3	3	29	20	61	19	0	0	93	42
Total	3	3	46	32	95	41	64	39	208	115

Source: World Health Organization, May 12, 2006.

The Historical Perspective

Influenza pandemics can directly affect the insurance industry through a sudden unexpected increase in death rates leading to increased death claims, as well as increased claims on the health insurance business. The impact on the industry depends on the ease of human-to-human transmission, the mortality rate observed, and the age profile of excess mortality. Mitigants include the ability and quality of vaccines and controls to limit the spread of the disease.

Historically, with the notable exception of 1918, influenza pandemics have affected the very young and old members of society rather than the healthier section of the population--that is, mostly people of working age. For insurers, this typically means that the impact of increased mortality on insured claims (typically people of working age) is likely to be less than for the population as a whole. Indeed, for some insurers with large volumes of payout annuities that pay an income for life (typically for older people), such a pandemic may reduce the amount of claims.

The 1918 virus was unusual in both its severity and in the fact that a large proportion of the excess lives it claimed were people of working age. It claimed an estimated 40 million lives worldwide. A repeat of this kind of pandemic would have rating implications. There is always the possibility that a virus infection or death rates could rise above the levels of 1918-1919, but much has changed in detection, prevention, and treatment since then, and the risk of a pandemic on the scale of 1918 is seen as very low. There is much uncertainty regarding these estimates, and one agency, Risk Modelling Solutions, recently estimated that there is a one-in-five chance of the next pandemic being worse than that of 1918. A global pandemic similar to that of 1918 is likely to mostly affect life reinsurers. Pooling of risk is a feature of reinsurance business; in the event of a harsh global pandemic, however, the pooling may be less beneficial than it would be for a localized shock or natural catastrophe. In response, some reinsurers have looked to issue mortality catastrophe notes such as Swiss Reinsurance Co.'s (AA/Watch Neg/A-1+) Vita Capital II securitization (class A notes rated 'A+'). Retrocession (reinsurance to another reinsurer) is also used to offset some of the exposure. In practice, reinsurers historically have responded to extreme events by exercising their financial flexibility (defined by Standard & Poor's as the insurer's ability to source capital and liquidity relative to requirements). Their ability to do this during a mortality shock, however, might be less than during other natural catastrophes. This is due to the possible uncertainty over the development and potential re-emergence of the disease leading to further waves of claims owing to new infections.

Potential Cost to Global Reinsurers

Table 3 estimates the potential impact on reinsurers in two different pandemic scenarios. According to these bases, the total losses of the global reinsurance industry could be as high as €9 billion. The death rates in these scenarios contrast with the current observed rate in the H5N1 virus, which is significantly higher, at about one in two. This highlights the uncertainty in making estimates about the impact of any potential pandemic. This simple measure ignores any offsetting hedging or any losses through increased non-life claims or losses in the asset portfolio that may be expected during a severe pandemic. Table 4 estimates the effect of these scenarios for rated global reinsurers.

Table 3 Estimated Potential Losses For Global Reinsurers In Two Pandemic Scenarios

	Proportion of people who become infected (%)	Death rate for those infected	Simplistic estimate of mortality impact as a percentage of premiums
Basis A	25	1 in 400	12.5
Basis B	15	1 in 100	30

Table 4 Estimated Potential Effects Of Pandemic Scenarios On Rated Global Reinsurers

Group name	Insurer financial strength rating on core life reinsurance operating entity*	Life and health reinsurance premiums (bil. €)	Basis A (mil. €)	Basis B (mil. €)
General Re	AAA/Stable	1.9	238	570
GE Frankona¶§	A/Watch Pos	1.0	125	300
Hannover Re	NR	2.2	275	660
Munich Re	A+/Stable	7.4	925	2,220
Revios	A-/Stable	1.0	125	300
RGA Re	AA-/Negative	3.3	413	990
Scottish Re	A-/Stable	1.6	200	480
Swiss Re*	AA/Watch Neg	6.7	838	2,010
Transamerica Re	AA/Stable	1.2	150	360
XL Re	A+/Stable	1.9	238	570

*At May 15, 2006. ¶Swiss Re is currently in the process of acquiring GE Frankona. §Figures for GE Frankona are from 2004. All others are from 2005. NR--Not rated.

*

* *

ANNEXE B – TARIFICATION ELEMENTAIRE ET ILLUSTRATION DE LA REDUCTION DE VARIANCE PAR LA REASSURANCE

CONTRAT D'ASSURANCE TEMPORAIRE AU DECES ANNUEL

Valeur actuelle probable de l'engagement de l'assureur de payer C euros de capital dans l'année en cas de décès de la tête d'âge x à la souscription :

L'assuré d'âge x paye Π euros de primes à la souscription :

$$\begin{aligned} VAP(\text{Assureur}) &= C \cdot v^{\frac{1}{2}} \cdot q_x \\ &= C \cdot {}_1A_x = C \cdot \frac{M_x - M_{x+1}}{D_x} \end{aligned}$$

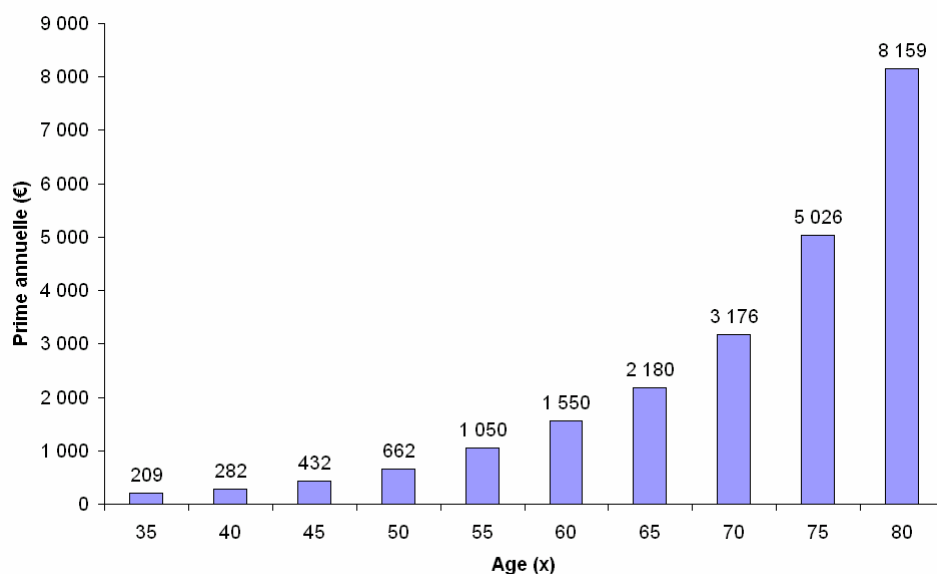
$$\Pi = VAP(\text{Assureur})$$

(Tarif donné avec la table TD 88-90)

La prime annuelle Π est croissante avec le risque, *i.e.* avec l'âge x de l'assuré.

Dans cet exemple : à 50 ans $\Pi = 662 \text{ EUR}$ et à 75 ans, $\Pi = 5\,026 \text{ EUR}$.

La représentation graphique suivante permet d'illustrer ce résultat :



Prime annuelle d'un contrat d'assurance temporaire au décès annuel de capital garanti $C = €100,000$

CONTRAT D'ASSURANCE TEMPORAIRE AU DECES DE 10 ANS

Valeur actuelle probable de l'engagement de l'assureur de payer C euros de capital dans les 10 prochaines années en cas de décès de la tête d'âge x à la souscription :

$$\begin{aligned} VAP(\text{Assureur}) &= C \cdot \sum_{k=0}^9 v^{k+\frac{1}{2}} \cdot {}_{k|1}q_x \\ &= C \cdot {}_{10}A_x = C \cdot \frac{M_x - M_{x+10}}{D_x} \end{aligned}$$

Valeur actuelle probable de l'engagement de l'assuré (d'âge x à la souscription) de payer ses primes :

$$\begin{aligned} VAP(\text{Assuré}) &= P \cdot \sum_{k=0}^9 v^k \cdot {}_kP_x \\ &= P \cdot {}_{10}\ddot{a}_x = P \cdot \frac{N_x - N_{x+10}}{D_x} \end{aligned}$$

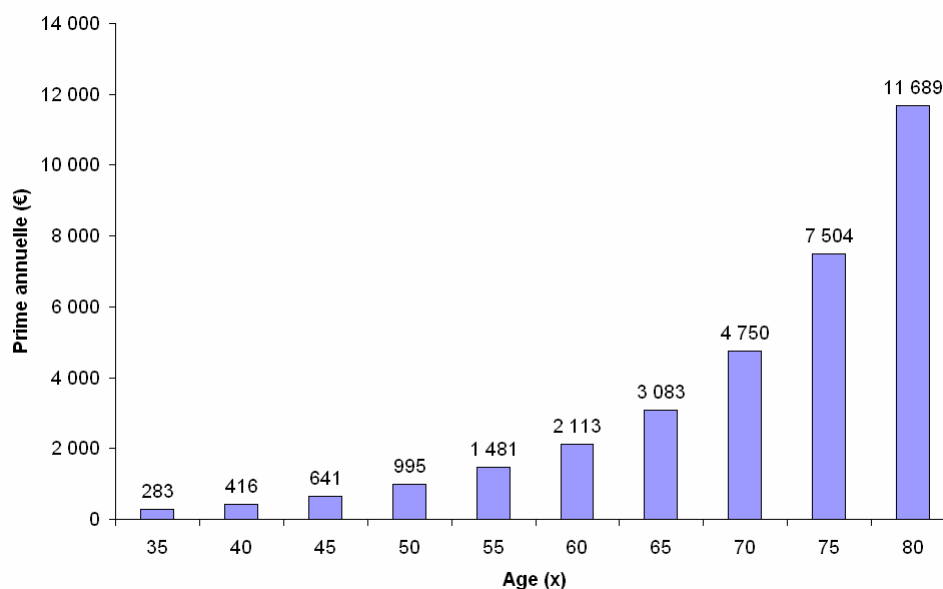
Prime annuelle P

Prime unique Π $\Pi = VAP(\text{Assureur})$

(Tarif donné avec la table TD 88-90)

La prime annuelle est là aussi croissante avec le risque, c'est-à-dire avec l'âge x de l'assuré.

La représentation graphique suivante permet d'illustrer ce résultat :



**Prime annuelle d'un contrat d'assurance temporaire
au décès 10 ans de capital garanti $C = €100,000$**

CONTRAT D'ASSURANCE AU DECES « VIE ENTIERE »

Valeur actuelle probable de l'engagement de l'assureur de payer C euros de capital lors du décès de la tête d'âge x à la souscription est :

$$\begin{aligned} VAP(\text{Assureur}) &= C \cdot \sum_{k=0}^{\omega} v^{k+\frac{1}{2}} \cdot {}_k|q_x \\ &= C \cdot A_x = C \cdot \frac{M_x}{D_x} \end{aligned}$$

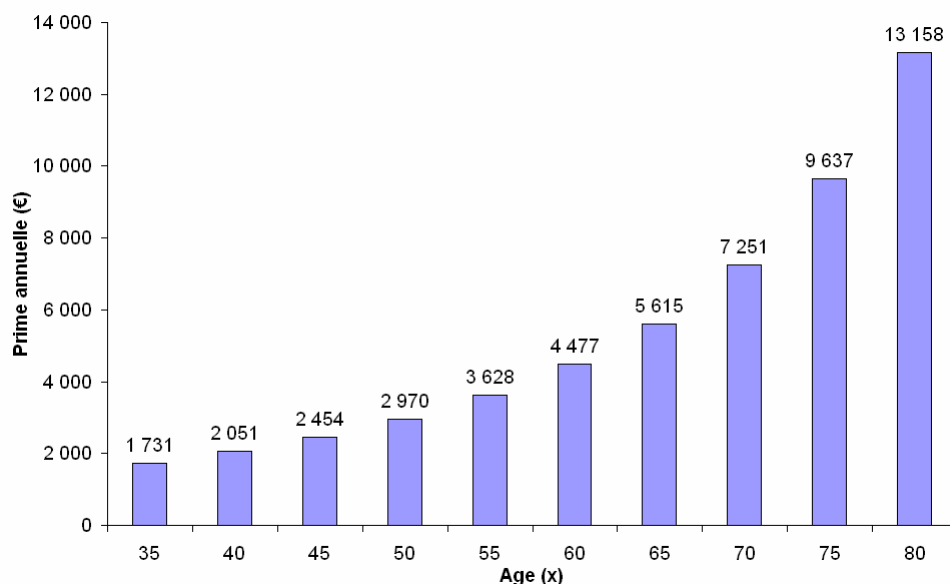
Valeur actuelle probable de l'engagement de l'assuré (d'âge x à la souscription) de payer ses primes :

$$\begin{aligned} \text{Prime viagère} & & VAP(\text{Assuré}) &= P_{\infty} \cdot \sum_{k=0}^{\omega} v^k \cdot {}_kP_x \\ \text{annuelle } P_{\infty} & & &= P_{\infty} \cdot \ddot{a}_x = P_{\infty} \cdot \frac{N_x}{D_x} \\ \text{Prime unique } \Pi & & \Pi &= VAP(\text{Assureur}) \end{aligned}$$

(Tarif donné avec la table TD 88-90)

La prime annuelle est également croissante avec le risque, c'est-à-dire avec l'âge x de l'assuré.

La représentation graphique suivante permet d'illustrer ce résultat :



**Figure II - 3 : Prime annuelle d'un contrat d'assurance « vie entière »
de capital garanti $C = €100,000$**

La prime du contrat temporaire décès 10 ans est lissée sur la période de garantie alors que la prime du contrat temporaire décès annuel croît avec l'âge x de l'assuré.

Ainsi le prix du contrat temporaire décès 10 ans est 'plus cher' que le 'prix réel' du risque sous-jacent sur les 5 premières années et 'moins cher' que le 'prix réel' du risque sur les 5 dernières années.

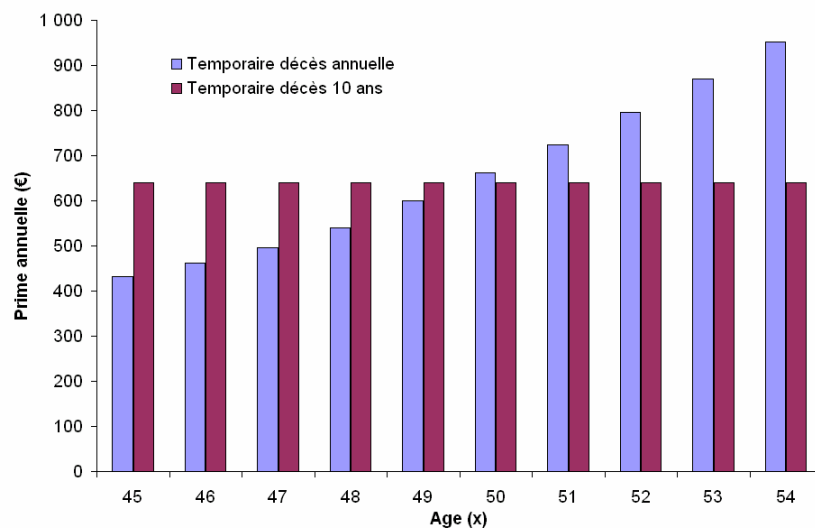


Figure II – 4 : Comparaison de la prime annuelle d'un contrat temporaire au décès 10 ans pour un assuré d'âge 45 ans à la souscription et celle d'un contrat temporaire au décès annuel souscrite pendant la durée équivalente (entre 45 et 54 ans)

De même, la prime annuelle est lissée sur la durée de vie résiduelle de la tête assurée alors que la prime du contrat temporaire décès annuel croît avec l'âge x de l'assuré.

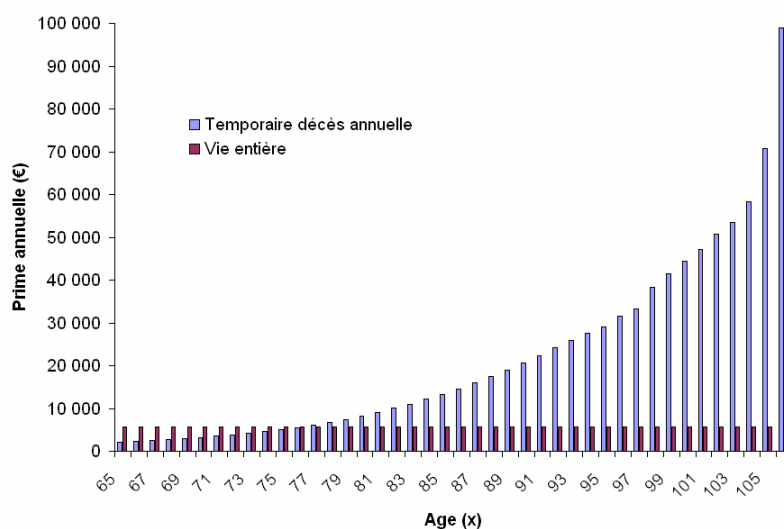
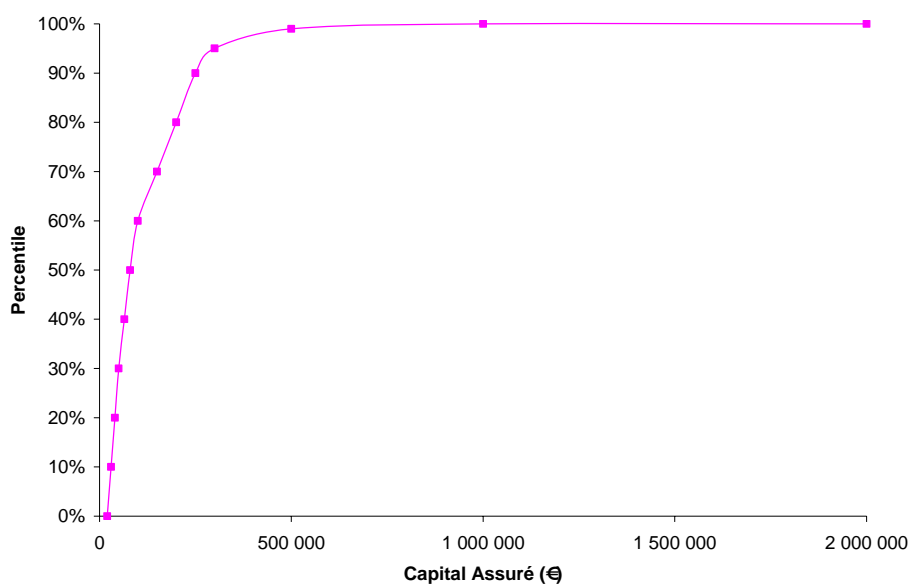


Figure II – 5 : Comparaison de la prime annuelle d'une vie entière souscrite par un assuré d'âge 65 ans à la souscription et celle d'un contrat temporaire au décès annuel souscrite pendant la durée équivalente (jusqu'à l'âge ω donné avec la table TD 88-90)

Nous modélisons l'impact de la réassurance traditionnelle sur un portefeuille composé de 10 000 polices individuelles d'assurance décès (annuelle). Nous supposons que les risques se réalisent indépendamment les uns des autres (*i.e.* risques catastrophe et pandémie non modélisés).

Tous les assurés ont le même âge $x = 40 \text{ ans}$ (population dont le taux annuel de mortalité est q_{40}) et tous les contrats sont souscrits en début d'exercice (1^{er} janvier).

La distribution des capitaux sous risque dans le portefeuille est donnée par la figure suivante.



Le capital moyen garanti est de €122,325 , l'écart type €112,928 .

Après avoir modélisé le portefeuille ci-dessus (primes, sinistres), nous étudierons successivement l'impact sur le résultat d'un traité en quote part puis d'un traité en XS par tête. Nous terminerons par la comparaison de ces 2 programmes de réassurance et par le choix de la structure la plus efficace.

i. Modélisation du portefeuille

▪ Exposition

Le tarif est établi à l'aide de la table TD 88-90. Le taux technique est 2%. Les primes sont chargées conformément au principe de « l'écart type », avec un coefficient $\rho = 0,25\%$.

Ainsi, à la souscription, la prime annuelle chargée Π de chaque risque est :

$$\Pi = \left(C \cdot (1 + 2\%)^{-\frac{1}{2}} \cdot q_{40} \right) + \left(0,25\% \cdot C \cdot (1 + 2\%)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{q_{40} \cdot (1 - q_{40})} \right)$$

pour le capital C garanti en cas de décès (*cf.* Section 1 du mémoire). La tarification s'effectue au capital garanti moyen de la tranche.

Tranche	Proportion du nombre de têtes	Capital moyen assuré de la tranche (€)	Prime annuelle chargée de la tranche (€)
1	10%	25 000	73 840
2	10%	35 000	103 376
3	10%	45 000	132 912
4	10%	57 500	169 832
5	10%	72 500	214 136
6	10%	90 000	265 824
7	10%	125 000	369 200
8	10%	175 000	516 880
9	10%	225 000	664 560
10	5%	275 000	406 120
11	4%	400 000	472 576
12	1%	750 000	219 305
13	0,01%	1 500 000	4 430
		TOTAL =	3 612 993

Le chargement de sécurité permet de couvrir jusqu'à 4,68% des premières pertes de l'ensemble du portefeuille (la prime pure du portefeuille est 3 451 581 *EUR*).

- Générateur de sinistres

La sinistralité brute de ce portefeuille est modélisée par un modèle fréquence-coût :

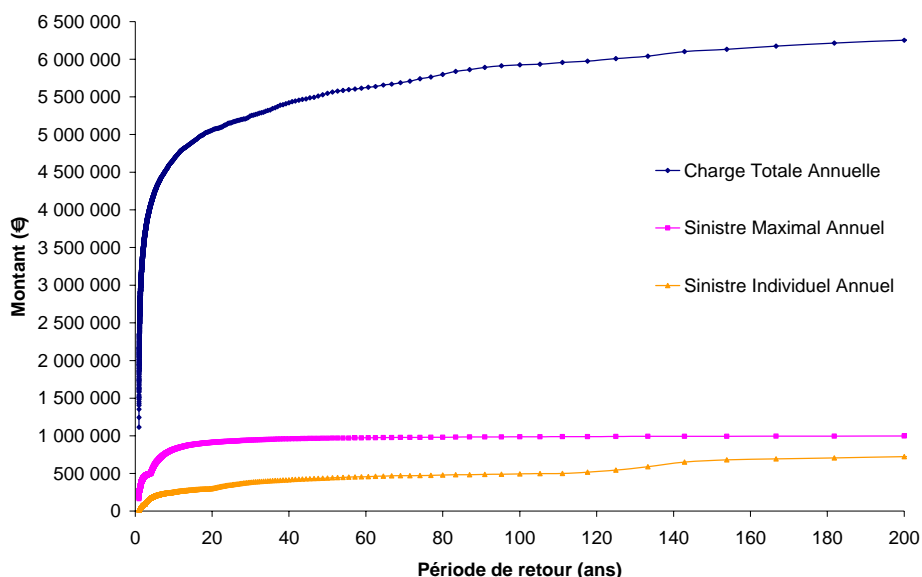
- loi de fréquence : comme chaque risque individuel suit une loi de Bernoulli de paramètre q_{40} (risques indépendants et identiquement distribués), le nombre annuel de décès du portefeuille suivra une loi binômiale $B(10\,000 ; q_{40})$
- loi de sévérité : la sévérité de chaque sinistre sera simulée par tirage uniforme dans la fonction de distribution des capitaux sous risque du portefeuille.

▪ Simulation de la sinistralité brute

Les simulations sont effectuées à l'aide du logiciel DFA ReMetrica.

Statistiques	Sinistre Individuel	Sinistre Maximal	Charge Totale	Nombre Annuel
	Annuel (€)	Annuel (€)	Annuelle (€)	de Sinistres
Moyenne	121 503	469 444	3 486 459	28,50
Ecart type	112 831	204 582	900 294	5,33
Percentile 0,05	20 047	163 355	1 113 808	12,50
Percentile 50	79 662	428 539	3 425 945	28,00
Percentile 90	252 145	818 819	4 669 184	35,00
Percentile 99	494 090	986 711	5 926 991	42,00

Les résultats des simulations sont homogènes avec les hypothèses (dans TD 88-90, $q_{40} = 0,0028497$).



Pour passer du percentile (exprimé en %) à la période de retour (exprimée en années), nous utilisons la relation suivante :

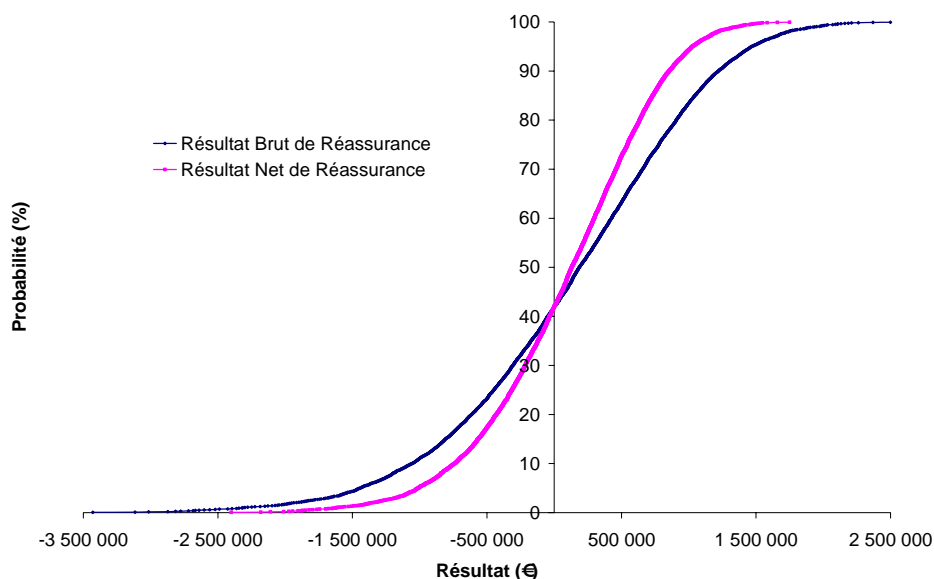
$$\text{Période de retour} = \frac{100}{100 - \text{percentile}}$$

ii. Réassurance proportionnelle en quote part

Un traité de réassurance en *quote part* de taux de cession 30% couvre le portefeuille. Nous supposons que la commission de réassurance reversée par le réassureur couvre les frais de gestion de l'assureur (*i.e.* la marge de gestion est nulle).

Statistiques	Résultat Brut de Réassurance	Résultat Net de Réassurance
	Proportionnelle	Proportionnelle
Moyenne	126 534	88 574
Ecart type	900 294	630 205
Percentile 0,05	-3 430 186	-2 401 130
Percentile 50	187 048	130 934
Percentile 90	1 220 917	854 642
Percentile 99	1 936 087	1 355 261

Le traité en quote part permet ainsi de réduire la variabilité du résultat contre la perte d'une partie de l'espérance de gain (le coefficient de réduction vaut le taux de cession du traité 30%).



La fonction de répartition du résultat net s'obtient par rotation (au sens trigonométrique) autour de la probabilité de résultat nul de la fonction de répartition du résultat brut de réassurance. Cette propriété permet d'écrire que :

- pour une même probabilité, la perte sera moins importante avec réassurance (de même le bénéfice sera moins élevé avec réassurance) ;
- la probabilité d'atteinte d'une même valeur de bénéfice sera plus élevée avec réassurance (résultat plus difficile à obtenir du fait de la cession de prime)
- de même la probabilité d'atteindre une même valeur de perte sera plus faible avec réassurance
- le montant maximal du gain [ou de la perte] sera moins élevé avec réassurance.

iii. Réassurance non proportionnelle XS par tête

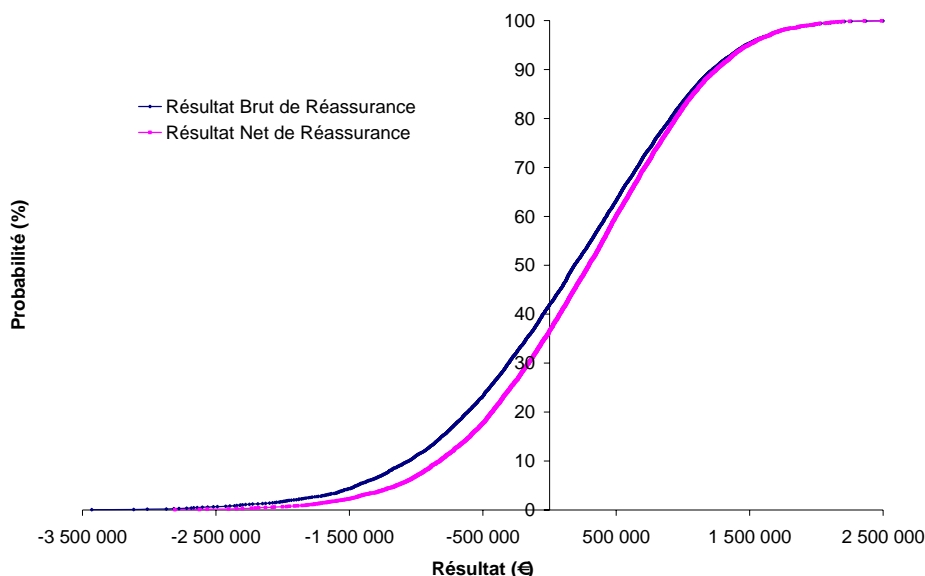
On souhaite protéger le portefeuille contre les sinistres excédant €400,000 jusqu'à €1,000,000 .

Un traité en excédent de sinistre par tête 600 000 XS 400 000 couvre maintenant ce portefeuille (avec 9 reconstitutions de garantie payantes à 100%).

Pour tarifier cette couverture, on applique le Rate On Line (ROL)¹⁴ moyen constaté lors du renouvellement 2007 des traités XS par tête en France, à savoir 0,98% (**BENFIELD [2007]**).

Statistiques	Résultat Brut de Réassurance	Résultat Net de Réassurance
	Non Proportionnelle	Non Proportionnelle
Moyenne	126 534	189 688
Ecart type	900 294	786 850
Percentile 0,05	-3 430 186	-2 806 579
Percentile 50	187 048	295 314
Percentile 90	1 220 917	1 251 066
Percentile 99	1 936 087	1 932 016

Le traité XS par tête permet de réduire la variabilité du résultat de l'assureur ; on constate même que l'assureur a pu augmenter son espérance de gain.



La réassurance non proportionnelle XS par tête décale la fonction de répartition du résultat net de réassurance 'en dessous' de la fonction de répartition du résultat brut de réassurance.

¹⁴ RoL = Prime de Réassurance / Portée de la tranche

Le traité XS par tête permet ainsi de conserver des avantages similaires à ceux procurés par la réassurance proportionnelle en quote part dans le cas d'une perte sans en subir les désavantages en cas de bénéfice :

- pour une même probabilité, la perte sera moins importante avec réassurance ;
- pour une même probabilité, le gain sera plus important avec réassurance ;
- la probabilité d'atteinte d'une même valeur de bénéfice sera plus faible avec réassurance (plus facile à obtenir car peu de primes cédées).

iv. *Comparaison entre quote part et XS par tête*

Compte de résultat (moyennes)	Quote part	XS par tête
<i>Primes reçues</i>	3 612 993	3 612 993
<i>Sinistres</i>	3 486 459	3 486 459
<u>Résultat Brut de Réassurance</u>	126 534	126 534
<i>Primes cédées</i>	1 083 898	11 073
<i>Sinistres réassurés</i>	1 045 938	129 920
<i>Solde Réassurance</i>	-37 960	118 846
<u>Résultat Net de Réassurance</u>	88 574	245 380

Ce tableau montre qu'en termes de résultats nets moyens, le programme XS par tête est plus avantageux qu'un traité en quote-part pour l'assureur.

On constate que le résultat brut de réassurance est essentiellement financé par le chargement des primes.

Le coût d'une couverture sur les résultats décennal (percentile 90%), cinquantenaire (percentile 98%), centenaire (percentile 99%) et deux cent cinquantenaire (percentile 99,6%) permet de déterminer l'efficacité d'un programme de réassurance :

Hautes Périodes de Retour	Quote part	XS par tête
<i>Résultat Brut Décennal</i>	1 220 917	1 220 917
<i>Résultat Net Décennal</i>	854 642	1 251 066
<u>Solde en Capital</u>	-366 275	30 149
<i>Résultat Brut Cinquantenaire</i>	1 739 369	1 739 369
<i>Résultat Net Cinquantenaire</i>	1 217 558	1 739 338
<u>Solde en Capital</u>	-521 811	-31
<i>Résultat Brut Centenaire</i>	1 936 087	1 936 087
<i>Résultat Net Centenaire</i>	1 355 261	1 932 016
<u>Solde en Capital</u>	-580 826	-4 072
<i>Résultat Brut Deux Cent Cinquantenaire</i>	2 109 395	2 109 395
<i>Résultat Net Deux Cent Cinquantenaire</i>	1 476 577	2 109 283
<u>Solde en Capital</u>	-632 819	-112

Le poste 'Solde en Capital' correspond au coût de la réassurance (négatif si c'est une charge).

Un programme de réassurance sera 'efficace' si son coût relatif diminue pour les faibles périodes de retour (hauts niveaux de perte ou percentile extrême de la queue de distribution).

Ces résultats montrent ainsi que le quote part est moins efficace que le traité XS par tête (cession de 30% du résultat au titre du quote part contre même pas 0,5% pour le traité XS par tête).

*

* *

ANNEXE C – MODELISATION DU RISQUE TERRORISTE

Nous proposons de construire un modèle qui quantifie en termes de fréquence / sévérité les pertes humaines liées aux attaques terroristes. Les branches autres que le risque décès ne seront pas modélisées, notamment les lignes dommages, accidents du travail, santé et assurance de personne. L'objectif de ce modèle est d'évaluer la contribution du risque terroriste à l'attachement du *Mortality Bond*.

Le terrorisme étant par nature lié aux politiques intérieures et étrangères d'un pays, les modèles sont spécifiques pour la France, le Japon et les USA.

1 – Typologie du risque terroriste

Les services de sécurité nationale classent les attaques terroristes en fonction des moyens employés :

- Mode 'conventionnel' :
 - Attaque avec arme de poing (automatique ou semi automatique) ;
 - Attaque à la bombe, par exemple de type ANFO (Ammonium Nitrate Fuel-Oil), placée à bord d'un véhicule qui explose à proximité d'un objectif ;
 - Crash d'un avion piraté sur une cible, les réservoirs de carburant encore plein ;
 - Conflagration d'un camion essence dans une galerie commerciale ;
 - Sabotage d'un site industriel provoquant la libération d'un nuage toxique.

- Mode 'non conventionnel' ou NRBC (Nucléaire, Radiologique, Biologique ou Chimique) :
 - Chimique : diffusion de gaz sarin dans la ventilation d'une infrastructure cible (bureau, aéroport, centre commercial, etc.) ;
 - Biologique : diffusion d'un virus ou d'une bactérie dans la ventilation d'une infrastructure cible (bureau, aéroport, centre commercial, etc.) ;
 - Radiologique (« bombe sale ») : bombe conventionnelle entourée de matériaux radioactifs répandus en poussière lors de l'explosion ; contamination par radiation directe puis par ingestion des poussières radioactives ;
 - Nucléaire : explosion d'une bombe nucléaire ;
 - Sabotage d'un site nucléaire civil.

Les attaques terroristes sont de sévérités très inégales. D'un point de vu assurantiel, la classification ci-dessus distingue le risque de concentration (pour le premier mode) du risque de masse (pour le second). Le modèle que nous proposons permet de représenter toutes les formes possibles du risque terroriste.

2 – Données historiques

Toutes les données¹⁵ proviennent de l'organisation non gouvernementale américaine **MIPT** (Memorial Institute for the Prevention of Terrorism). Cette organisation recense les attaques terroristes du monde entier depuis 1968.

Année	Nombre d'attaques terroristes			Nombre d'attaques terroristes avec morts			Nombre de morts		
	France	Japon	USA	France	Japon	USA	France	Japon	USA
1980	28	0	29	9	0	5	16	0	5
1981	37	0	26	4	0	2	5	0	2
1982	55	0	30	8	0	5	18	0	5
1983	27	8	16	6	0	3	13	0	4
1984	25	2	6	8	0	1	11	0	1
1985	19	2	3	6	1	0	10	2	0
1986	26	3	3	8	0	0	14	0	0
1987	14	0	6	2	0	1	2	0	1
1988	10	4	3	3	0	0	3	0	0
1989	9	1	8	1	0	0	1	0	0
1990	7	3	2	1	0	2	1	0	3
1991	14	3	4	3	1	1	3	1	2
1992	7	2	1	1	0	0	1	0	0
1993	15	4	2	1	0	2	1	0	8
1994	3	0	3	1	0	2	1	0	2
1995	15	2	1	3	1	1	10	12	168
1996	15	0	2	5	0	1	12	0	1
1997	4	0	16	0	0	1	0	0	2
1998	38	9	7	1	1	2	1	4	2
1999	108	2	8	0	0	2	0	0	3
2000	44	0	9	4	0	0	5	0	0
2001	72	6	36	5	0	7	6	0	2 987
2002	72	4	16	1	0	1	2	0	3
2003	117	10	18	1	0	0	1	0	0
2004	71	1	7	0	0	0	0	0	0
2005	58	1	13	0	0	0	0	0	0
2006	67	0	1	2	0	1	3	0	1
	<u>977</u>	<u>67</u>	<u>276</u>	<u>84</u>	<u>4</u>	<u>40</u>	<u>140</u>	<u>19</u>	<u>3 200</u>

¹⁵ cf. site « The MITP Terrorism Knowledge Base » : www.tkb.org.

Le MIPT crée une fiche détaillée pour chaque attentat, ce qui permet de faire des regroupements par pays, par type d'attaque, de tactique, de groupe terroriste, ou de bilan (en termes de nombres de morts ou de blessés). Toutes les informations de la banque de données proviennent de sources publiques (comme les journaux) et sont attentivement vérifiées avant d'être publiées. Les données par pays ne recouvrent pas les attaques qui ont eu lieu à l'étranger contre les ressortissants et / ou les intérêts du pays. En particulier, tous les faits de guerre et de terrorisme en Irak et Afghanistan ne sont pas intégrés dans les statistiques. Le tableau suivant résume les faits marquants de la période 1980-2006 en France, au Japon et aux Etats-Unis :

<u>Pays</u>	<u>Date</u>	<u>Evénement</u>	<u>Bilan</u>
France	11 et 25 juillet 1995	Attentats du Groupe Islamique Armé (GIA) dans le métro de Paris	9 morts, 91 blessés
Japon	20 mars 1995	La secte Aum Shinrikyo attaque le métro de Tokyo au gaz sarin	12 morts, 5000 blessés
Etats-Unis	19 avril 1995	Attentat à la bombe contre un immeuble fédéral d'Oklahoma City	168 morts, 500 blessés
Etats-Unis	11 septembre 2001	Détournement d'avions sur les tours World Trade Center à New York	2987 morts, 2337 blessés

3 – Architecture du modèle

Nous utilisons un modèle fréquence / sévérité. Nous supposons l'indépendance :

- des attaques terroristes au cours des années (*i.e.* pas de chaîne de Markov) ;
- des modèles terroristes de la France, du Japon et des Etats-Unis ;
- du modèle terroriste avec tout autre événement impactant potentiellement la mortalité (en particulier le risque de pandémie).

Par ailleurs, nous supposons qu'il n'y a pas de traitement différencié de la mortalité des personnes indigènes et étrangères dans les statistiques nationales des pays où se produisent les attaques terroristes : nous considérons que la mortalité de toutes les victimes (indigènes et étrangères) est intégralement reportée dans la statistique du pays (ce qui n'est pas le cas pour la table du *Ministry of Health, Welfare and Labour* au Japon et la table du *Center for Disease Control* aux Etats-Unis qui excluent la mortalité des étrangers de leur périmètre).

1 – Fréquence

Les fréquences annuelles des attaques terroristes seront modélisées par des lois de Poisson de moyennes données par les observations historiques du tableau suivant :

<u>Pays</u>	<u>Moyenne</u>
France	36,19
Japon	2,48
Etats-Unis	10,22

La moyenne annuelle de la France est plus élevée qu'au Japon / Etats-Unis car les données françaises comprennent les attaques des nationalistes Basques, Bretons et Corses (qui provoquent des dégâts matériels).

2 – Sévérité

Nous décomposons le risque terroriste en 20 niveaux de sévérité croissante (en termes de nombre de morts). La sévérité du niveau i est définie de sorte que le nombre maximal de morts double à chaque niveau (progression géométrique). Il n'y a pas de mort au premier niveau. Le deuxième niveau correspond à des événements provoquant entre 1 et 3 morts, le troisième niveau correspond à des événements provoquant entre 4 et 6 morts ($6 = 2 \times 3$). Le dernier niveau du modèle couvrent les événements terroristes qui provoquent entre 393 217 et 786 432 morts.

<u>Niveau</u>	<u>Nombre de morts</u>	
	Inférieur	Supérieur
1	0	0
2	1	3
3	4	6
4	7	12
5	13	24
6	25	48
7	49	96
8	97	192
9	193	384
10	385	768
11	769	1 536
12	1 537	3 072
13	3 073	6 144
14	6 145	12 288
15	12 289	24 576
16	24 577	49 152
17	49 153	98 304
18	98 305	196 608
19	196 609	393 216
20	393 217	786 432

Ce modèle permet ainsi de représenter tous les modes d'attaque terroriste possibles :

<u>Exemple d'attaque</u>	<u>Nombre inférieur de victimes</u>	<u>Nombre supérieur de victimes</u>	<u>Niveaux correspondants</u>
Attaque à l'arme à feu	1	24	1 – 5
Voiture piégée	25	192	6 – 8
Crash d'avion piraté	193	1 536	9 – 11
Attentat à la bombe dans un stade	1 537	12 288	12 – 14
Bombe sale	12 289	98 304	15 – 17
Attaque nucléaire d'une grande ville	98 305	736 432	18 – 20

Un type d'attaque correspondra *a priori* à une sévérité type, mais le modèle autorisera une flexibilité entre niveaux si la sévérité résultante est plus importante. Pour trouver les probabilités de survenance de chaque niveau d'attaque terroriste, nous effectuons les hypothèses suivantes :

- A chaque niveau, nous supposons que les probabilités conditionnelles de succès ou d'échec de l'attaque (en se plaçant du point de vue des terroristes) sont constantes :

$$P[\text{Succès} / \text{Niveau}(i)] = \alpha, \quad 1 \leq i \leq 20$$

$$P[\text{Echec} / \text{Niveau}(i)] = \beta, \quad 1 \leq i \leq 20$$

Le modèle considère ainsi que si l'attentat de niveau i ne provoque que des dégâts matériels et / ou des blessés, il s'agira d'un « attentat échoué ».

Même si le premier niveau du modèle ne cause pas de morts, on définit arbitrairement une probabilité conditionnelle de 'succès sans mort' au niveau 1, ce qui nous est utile pour calibrer la sévérité du modèle.

- Si la tactique de l'attaque ou le moyen employé ne correspond pas à une sévérité de niveau i mais à celle d'un niveau plus élevé, le résultat ne sera ni un succès ni un échec au niveau i .

Ce troisième degré de liberté permet de définir une probabilité conditionnelle de transition vers le niveau supérieur :

$$P[\text{Escalade} / \text{Niveau}(i)] = 1 - \alpha - \beta$$

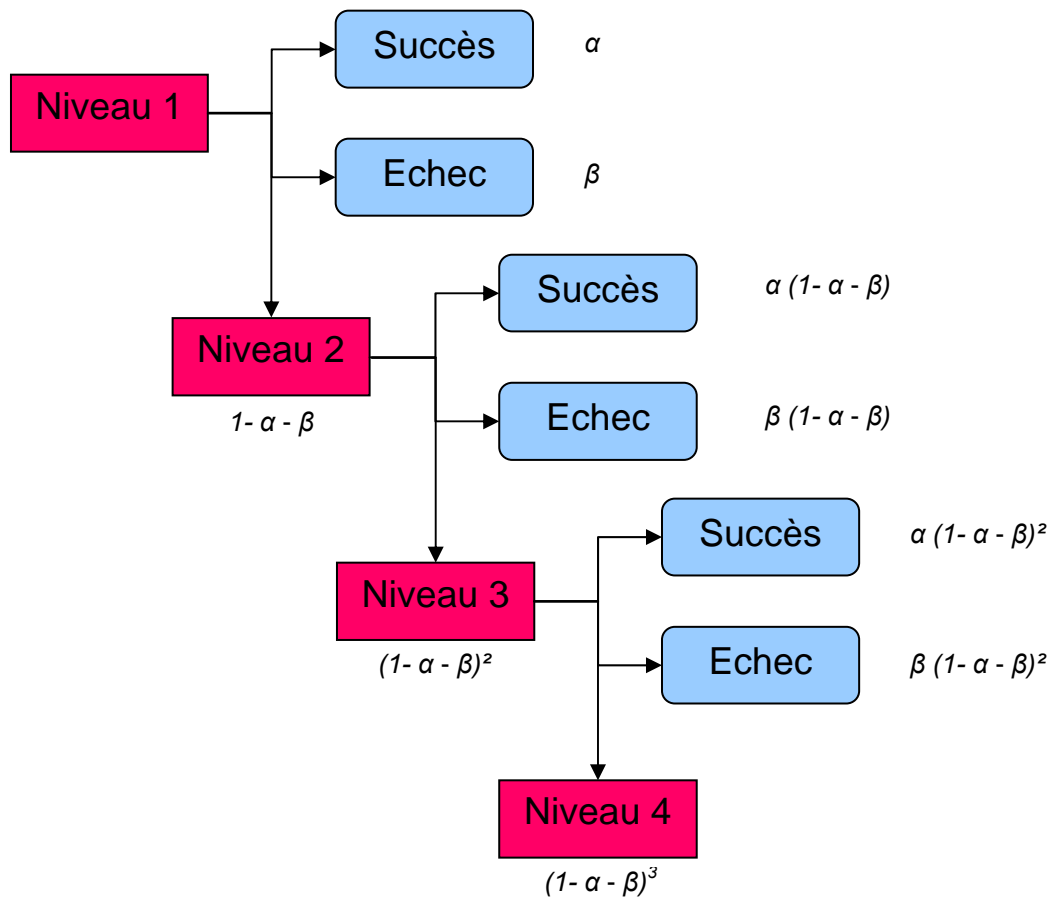
La sévérité du nombre de blessés ne fait pas passer au niveau supérieur, le modèle ne se concentre que sur le nombre de morts. Ainsi les attentats du 11 septembre 2001 – considérés en tant qu'un seul événement – (2987 morts, 2337 blessés) correspondent au niveau 12 du modèle ; l'attaque du métro de Tokyo du 20 mars 1995 (12 morts, 5000 blessés) correspond au niveau 4 du modèle.

Ainsi, les probabilités de 'succès' ou 'd'échec' restreintes au niveau i ($1 \leq i \leq 20$) s'écrivent :

$$P[\text{Succès} \cap \text{Niveau}(i)] = \alpha \cdot (1 - \alpha - \beta)^{i-1}$$

$$P[\text{Echec} \cap \text{Niveau}(i)] = \beta \cdot (1 - \alpha - \beta)^{i-1}$$

Ce modèle permet de faire décroître exponentiellement la probabilité de succès en fonction du niveau i .



4 – Détermination des paramètres régionaux

1 – Estimation des paramètres

Il s'agit de trouver le couple $(\alpha ; \beta)$ correspondant à chaque pays : nous nous orientons vers la résolution d'un système de 2 équations à 2 inconnues.

Posons X la variable aléatoire réelle qui représente le nombre de morts par attaque terroriste.

- Le théorème des probabilités totales permet de décomposer la probabilité de l'événement $X = 0$ (i.e. l'attaque échoue) en fonction des 20 niveaux de sévérité :

$$P[\text{Echec}] = \sum_{i=1}^{20} P[\text{Echec} \cap \text{Niveau}(i)] = \sum_{i=1}^{20} \beta \cdot (1 - \alpha - \beta)^{i-1}$$

Soit

$$P[X = 0] = \beta \frac{1 - (1 - \alpha - \beta)^{20}}{\alpha + \beta}$$

- L'espérance mathématique du nombre annuel de morts par attaque s'écrit :

$$E[X] = \sum_{i=1}^{20} P[\text{Succès} \cap \text{Niveau}(i)] \times \text{Nombre moyen de morts du niveau}(i)$$

Il n'y a pas de formule simple pour calculer l'espérance mathématique du nombre de morts par attaque, car le nombre moyen de morts du niveau i ne suit pas une progression géométrique comme le fait la borne supérieure du niveau. La probabilité $P[X = 0]$ de l'événement « attentat échoué » et l'espérance mathématique $E[X]$ du nombre de morts par attaque sont estimées par les observations empiriques fournies précédemment :

Pays	$P[X = 0]$	$E[X]$
France	91,40%	0,14
Japon	94,03%	0,28
Etats-Unis	85,51%	11,59

Les observations terroristes des 3 pays permettent d'identifier des tendances différentes : très haute fréquence d'attentats faiblement meurtriers en France (36,19 attentats et 0,14 morts par attentat par an), faible fréquence d'attentats faiblement meurtriers au Japon (2,48 attentats et 0,28 morts par attentat par an) et haute fréquence d'attentats meurtriers aux Etats-Unis (10,22 attentats et 11,59 morts par attentat par an).

L'utilisation de la fonction Solver sur Excel permet de déterminer chaque couple $(\alpha ; \beta)$, en vérifiant que nous pouvons faire l'approximation $(1 - \alpha - \beta)^{20} \approx 0$ (car $0 < (1 - \alpha - \beta) < 1$) :

Pays	Probabilité conditionnelle de succès α	Probabilité conditionnelle d'échec β	Probabilité conditionnelle d'escalade $(1 - \alpha - \beta)$
France	5,62%	59,70%	34,69%
Japon	3,29%	51,87%	44,84%
Etats-Unis	5,83%	34,38%	59,79%

Ces chiffres montrent bien la plus forte propension des Etats-Unis à avoir des attentats plus meurtriers qu'en France ou au Japon, *i.e.* une probabilité d'escalade vers un niveau supérieur de sévérité de 59,79% contre 34,69% et 44,84% par niveau pour la France et le Japon, ce qui explique la plus forte espérance de nombre de morts par attentat aux Etats-Unis.

2 – Simulations

Pour chaque pays, nous simulons la sinistralité terroriste sur 20.000 années.

- Fréquence :
 - pour chaque année, on effectue un tirage uniforme dans la loi de Poisson inverse¹⁶ pour obtenir un nombre (entier) d'attentats terroriste par an.
- Sévérité : la sévérité de chaque attentat se détermine en deux étapes
 - tirage uniforme dans la loi des succès / échec du pays pour déterminer le niveau de sévérité de l'attaque (s'il y a un attentat) ;
 - tirage uniforme au sein de l'intervalle défini par le niveau de sévérité pour déterminer le nombre de morts.

3 – Vérifications

Nous vérifions que les caractéristiques de la sinistralité simulée sont conformes aux hypothèses :

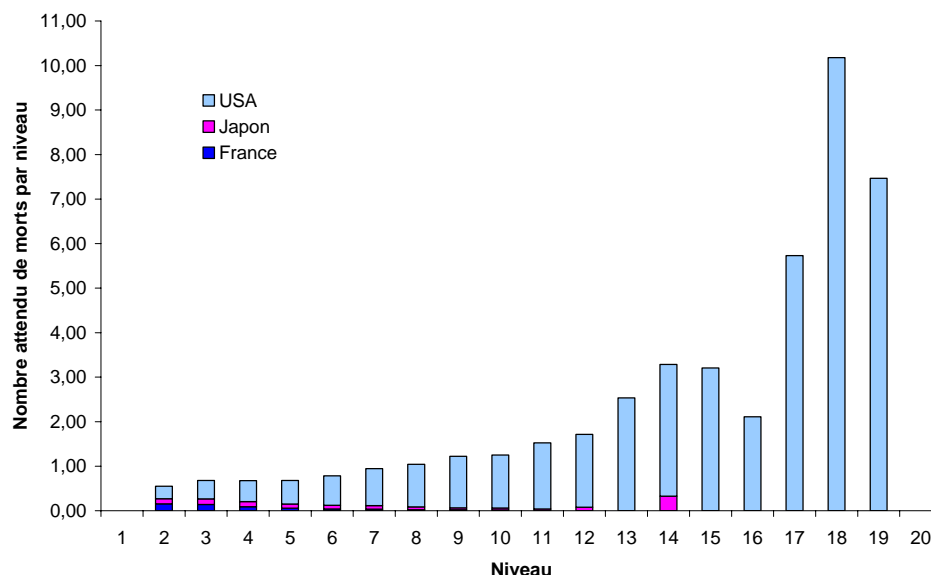
<u>Pays</u>	Nombre annuel d'attaques terroristes		Proportion annuelle d'attentats échoués		Nombre annuel de morts par attentat	
	<i>observé</i>	<i>simulé</i>	<i>observée</i>	<i>simulée</i>	<i>observé</i>	<i>simulé</i>
France	36,19	36,17	91,40%	91,40%	0,14	0,15
Japon	2,48	2,48	94,03%	94,09%	0,28	0,30
Etats-Unis	10,22	10,21	85,51%	85,51%	11,59	10,96

Les sorties du modèle nous semblent cohérentes avec les observations historiques (certains écarts entre observations et simulations s'expliquent par le 'faible' nombre de simulations : dans le cas des Etats-Unis par exemple, l'attentat de sévérité de niveau 20 a pour probabilité $3,33 \cdot 10^{-6}$ soit 1 chance sur 300,000 tirages).

¹⁶ La fonction Poisson Inverse utilisée sous Excel est celle développée par Henry P. Aubert. Le code est accessible sur : http://www-rocq.inria.fr/axis/modulad/excel_macros.htm#poissoninverse (MODULAD n°35 (décembre 2006)).

5 – Résultats du modèle terroriste

Nous pouvons représenter le nombre simulé de morts par niveau de sévérité d'attentat terroriste (*i.e.* la moyenne du nombre de décès simulé par niveau multiplié par la probabilité de survenance d'un attentat terroriste du niveau considéré) sur une période de 4 années consécutives :



Ainsi, le nombre global moyen de morts causés par l'ensemble des attaques terroristes en France, au Japon et aux Etats-Unis est de 45,61 morts (sur une période de 4 années consécutives). L'étude de la distribution du nombre annuel de morts de l'ensemble des attentats des 3 pays permet de mesurer l'impact des attentats terroristes sur l'indice de mortalité de référence du *Mortality Bond* :

Déviations de la mortalité de référence (%)

Inférieure	Supérieure	Proportion des scénarii	Période de retour (ans)
0	1	99,915%	1 176
1	2	0,038%	2 105
2	3	0,008%	2 500
3	4	0,007%	3 077
4	5	0,010%	4 444
5	10	0,015%	13 333
10	15	0,003%	20 000
15+	-	0,005%	

Ainsi, d'après ce modèle, la période de retour d'une déviation de plus de 6% de la mortalité de référence est de 10 000 ans (ce qui correspond au percentile 99,99% de la distribution du nombre annuel de morts de l'ensemble des attentats des 3 pays).

ANNEXE D – DONNEES UTILISEES ET ANALYSE DES PANDEMIES PASSESSES

1 – Tables de mortalité

• France

○ Hommes

France (Death rates per 100,000)

Total	0.00%																				
Weight	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	7.00%	7.40%	7.30%	7.30%	7.20%	7.10%	7.00%	6.90%	6.80%	6.70%	6.60%	6.50%	6.40%		
Year	0	14	59	104	159	204	259	304	359	404	459	504	559	604	659	704	759	804	859		
	Males																				
1900	20 622.00	1 895.00	486.60	314.20	545.40	646.70	798.30	929.60	1 115.20	1 321.40	1 640.90	2 045.40	2 780.40	3 950.10	5 649.60	9 183.70	14 420.20	22 662.80			
1901	18 600.20	1 771.60	473.50	307.0	492.90	604.90	743.80	860.70	1 041.10	1 217.60	1 513.60	1 966.80	2 683.10	3 650.10	5 344.60	8 399.60	13 116.60	20 716.10			
1902	17 138.20	1 761.80	433.40	281.80	488.10	780.00	741.40	836.10	994.20	1 205.60	1 472.40	1 880.30	2 534.00	3 546.40	5 240.80	8 216.30	12 969.80	20 077.10			
1903	17 272.40	1 678.90	405.40	271.50	481.50	764.50	729.10	799.30	966.70	1 149.40	1 398.80	1 776.60	2 409.80	3 503.70	5 183.70	8 237.50	12 951.40	20 561.40			
1904	18 314.90	1 639.00	379.50	267.10	488.70	745.90	723.40	786.70	951.20	1 144.30	1 398.80	1 806.70	2 399.80	3 547.40	5 197.30	8 408.30	13 188.90	20 541.40			
1905	17 208.90	1 575.20	381.70	267.0	481.90	731.30	749.40	820.70	989.00	1 222.70	1 508.50	1 947.50	2 610.80	3 748.40	5 453.80	8 537.20	13 396.60	21 006.80			
1906	18 041.10	1 661.60	383.40	271.20	507.80	745.30	739.10	832.00	996.00	1 233.90	1 523.00	1 949.50	2 688.90	3 820.70	5 542.10	8 632.30	13 305.60	21 020.80			
1907	16 271.40	1 512.40	363.20	252.50	502.30	763.90	757.00	866.70	1 066.10	1 305.70	1 637.10	2 076.50	2 784.40	4 101.10	5 969.40	9 115.40	14 326.90	22 032.40			
1908	16 236.80	1 425.20	339.00	241.20	478.90	738.10	730.30	818.10	986.90	1 208.40	1 528.10	1 967.20	2 668.60	3 749.50	5 506.20	8 420.20	13 068.40	19 947.90			
1909	14 752.50	1 378.80	332.90	234.40	459.50	705.20	710.00	816.30	981.00	1 208.90	1 569.00	2 010.40	2 707.80	3 879.70	5 605.60	8 943.00	13 866.10	21 303.10			
1910	13 769.50	1 329.20	303.50	217.90	449.50	664.80	690.20	774.70	910.50	1 151.50	1 443.00	1 888.20	2 511.00	3 652.20	5 200.70	8 216.60	12 797.20	19 704.20			
1911	18 713.70	1 583.00	314.60	235.10	476.10	718.60	714.50	789.60	955.00	1 151.50	1 448.90	1 902.50	2 562.40	3 643.90	5 309.30	8 706.40	13 935.00	21 453.10			
1912	13 492.80	1 343.20	317.10	223.70	426.30	697.70	702.90	786.20	944.20	1 159.60	1 486.90	1 884.40	2 526.10	3 620.20	5 215.10	7 946.40	12 532.90	19 686.50			
1913	14 011.90	1 331.90	323.30	226.20	444.00	673.80	686.80	775.50	933.00	1 139.80	1 428.00	1 881.40	2 491.30	3 499.30	5 292.60	8 017.90	12 747.80	19 192.50			
1914	13 649.90	1 219.60	305.80	237.20	3 636.10	7 803.00	6 319.00	5 227.60	2 955.50	2 109.70	1 590.20	1 974.70	2 669.40	3 745.40	5 631.00	8 731.40	13 956.00	21 512.90			
1915	14 109.00	1 568.80	398.80	275.00	2 796.40	6 984.40	7 735.20	6 395.10	3 689.00	2 424.70	1 821.60	1 998.80	2 684.20	3 813.00	5 665.00	8 662.50	13 657.70	20 680.00			
1916	14 027.10	1 363.20	354.00	299.40	1 835.00	6 981.90	5 888.60	4 752.50	3 088.40	1 915.40	1 659.90	1 835.50	2 542.30	3 633.90	5 382.40	8 605.50	13 306.40	20 466.00			
1917	16 602.40	1 271.80	342.00	249.10	1 390.80	3 899.50	3 117.80	2 336.40	1 495.90	1 522.60	1 495.90	1 809.30	2 512.20	3 638.90	5 510.60	8 931.50	13 951.30	21 791.70			
1918	18 524.20	1 875.50	553.40	428.80	1 675.00	6 119.10	6 203.80	5 008.90	4 076.60	2 435.80	2 187.50	2 284.40	2 740.30	3 750.20	5 697.70	8 607.00	12 900.30	19 602.60			
1919	15 648.70	1 442.80	360.80	275.00	571.60	1 620.90	1 576.90	1 379.60	1 327.30	1 396.70	1 617.20	2 419.20	3 400.20	5 220.30	7 346.40	10 719.60	15 882.20	22 725.00			
1920	15 407.30	1 278.30	318.40	227.70	460.20	747.50	712.10	729.30	800.90	954.80	1 183.70	1 651.50	2 275.00	3 243.40	4 833.20	7 512.50	11 687.60	17 953.20			
1921	14 289.10	1 303.90	278.90	217.60	446.70	694.60	656.60	690.30	810.50	963.10	1 218.10	1 683.30	2 346.80	3 340.40	4 962.70	7 649.10	11 995.60	18 740.50			
1922	10 749.80	1 008.20	257.70	188.90	388.90	593.10	643.30	687.00	834.10	996.00	1 287.20	1 714.90	2 440.00	3 480.50	5 209.50	8 199.60	13 228.00	19 893.90			
1923	12 035.70	1 089.70	223.10	185.90	392.80	578.20	604.50	661.40	802.90	960.40	1 227.10	1 652.30	2 329.90	3 330.10	4 911.50	7 654.80	11 914.10	18 803.00			
1924	10 730.60	890.70	215.50	179.40	392.10	603.30	602.10	660.70	834.80	1 043.10	1 315.60	1 707.10	2 447.20	3 499.60	5 112.00	8 000.00	12 529.90	19 137.40			
1925	11 271.70	1 001.50	243.10	198.20	405.80	603.20	612.30	686.30	845.90	1 100.50	1 388.60	1 808.70	2 512.50	3 591.50	5 269.60	8 150.00	12 707.70	20 086.50			
1926	11 887.30	1 103.20	246.30	193.20	446.30	620.90	634.40	702.90	863.10	1 121.30	1 419.20	1 864.40	2 541.70	3 641.70	5 307.30	8 037.30	12 196.60	18 882.60			
1927	10 329.70	920.70	228.30	183.00	391.10	559.80	572.00	651.50	784.70	973.60	1 241.60	1 655.70	2 249.70	3 334.60	4 917.50	7 795.50	12 525.80	19 911.60			
1928	11 438.20	924.10	244.30	191.90	381.20	544.90	562.80	621.40	750.70	977.80	1 222.80	1 642.60	2 264.70	3 356.60	4 941.40	7 586.70	11 974.60	18 544.20			
1929	11 800.10	956.70	241.70	186.10	398.00	571.00	592.30	666.30	822.50	1 064.20	1 375.70	1 838.40	2 474.70	3 646.20	5 415.20	8 444.10	13 666.60	21 425.20			
1930	9 809.90	786.70	221.80	162.00	364.70	525.00	557.60	647.70	794.30	1 008.40	1 317.00	1 737.70	2 317.20	3 366.00	4 809.20	7 433.40	11 603.30	17 325.40			
1931	9 388.80	772.80	208.50	166.50	372.50	535.10	547.60	624.60	773.50	977.30	1 274.10	1 721.00	2 370.90	3 400.00	5 082.60	7 968.50	12 636.20	19 219.10			
1932	9 886.50	759.20	211.10	166.70	355.50	515.90	525.10	604.40	745.00	958.90	1 251.80	1 688.30	2 372.40	3 330.30	5 008.20	7 614.30	12 143.90	19 261.70			
1933	9 139.20	705.60	204.40	164.80	344.00	488.90	504.50	581.20	740.00	980.30	1 303.10	1 727.60	2 405.80	3 382.30	5 072.00	7 719.60	12 196.60	18 882.60			
1934	8 889.80	702.40	201.50	161.90	311.60	468.90	504.70	608.10	780.10	971.90	1 272.30	1 732.00	2 381.60	3 350.20	4 984.60	7 447.80	11 688.10	17 387.60			
1935	8 496.30	630.60	185.80	148.60	297.10	483.00	497.50	633.80	800.20	1 017.00	1 365.90	1 792.30	2 493.00	3 475.60	5 119.70	7 617.10	12 169.70	18 722.80			
1936	8 467.10	628.10	176.10	140.20	273.60	455.40	488.20	605.60	766.70	1 011.60	1 287.10	1 758.70	2 379.50	3 406.50	5 043.80	7 679.90	12 038.00	18 422.20			
1937	8 247.80	621.10	176.20	136.60	278.30	444.60	494.90	611.60	775.50	975.10	1 292.70	1 729.00	2 381.90	3 372.70	4 963.00	7 475.50	11 650.70	17 489.90			
1938	8 307.70	590.30	170.30	137.60	273.30	469.20	499.40	617.70	806.00	1 024.00	1 313.90	1 781.60	2 473.90	3 433.30	4 979.60	7 718.00	11 964.40	18 191.10			
1939	8 080.00	534.60	156.10	127.30	261.70	407.00	456.20	570.00	755.00	974.10	1 296.80	1 747.60	2 424.00	3 489.00	4 996.60	7 960.80	12 428.70	19 522.90			
1940	7 557.40	509.10	200.20	165.70	409.40	361.80	361.80	2 176.20	2 197.50	1 702.60	1 400.40	1 608.50	2 052.30	2 912.60	4 019.20	5 559.20	9 236.10	14 872.40	23 199.80		
1941	8 892.00	568.50	183.60	147.20	308.00	464.40	513.70	640.90	839.60	1 119.30	1 629.40	2 010.60	2 711.00	3 785.40	5 433.90	8 425.20	13 840.30	20 874.60			
1942	9 234.70	559.80	179.50	145.80	373.60	567.00	741.40	698.00	760.30	978.30	1 315.40	1 754.30	2 496.60	3 637.10	5 487.90	8 467.20	14 046.40	21 404.90			
1943	9 754.20	615.40	250.70	205.40																	

o Femmes

France (Death rates per 100,000)

Total

Year	Weight																		
	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%			
	Females																		
	0	1.4	5.9	10.14	15.19	20.24	25.29	30.34	35.39	40.44	45.49	50.54	55.59	60.64	65.69	70.74	75.79	80.84	
1900	16 751.60	1 866.50	501.90	372.80	549.90	711.70	788.10	836.50	904.60	989.40	1 197.70	1 501.30	2 096.70	3 204.80	4 975.30	7 854.60	12 699.40	19 651.20	14 504.50
1901	15 084.60	1 694.50	482.40	350.30	517.80	690.00	746.70	787.10	844.50	949.20	1 095.60	1 400.10	1 884.10	2 924.00	4 428.70	7 172.60	11 406.90	17 594.50	14 504.50
1902	14 000.10	1 681.50	447.10	343.80	511.70	673.50	728.10	767.40	824.00	930.70	1 067.60	1 343.80	1 863.30	2 774.60	4 312.40	6 965.50	11 091.70	16 932.50	14 504.50
1903	14 016.20	1 598.10	444.00	334.40	506.10	654.90	717.90	761.60	800.10	890.70	1 026.00	1 317.50	1 826.30	2 754.10	4 226.30	6 963.30	11 230.30	17 331.10	14 504.50
1904	14 960.00	1 661.10	430.70	323.80	524.20	674.50	732.40	775.90	825.90	915.10	1 056.10	1 334.20	1 803.50	2 789.00	4 287.20	7 130.60	11 213.90	17 351.80	14 504.50
1905	13 847.90	1 472.60	403.60	325.00	515.70	661.10	708.20	746.30	789.00	874.90	1 002.50	1 273.80	1 711.60	2 655.80	4 278.90	7 286.00	11 489.00	17 682.50	14 504.50
1906	14 707.50	1 571.10	406.40	316.60	517.60	664.20	719.50	755.90	805.90	914.50	1 093.20	1 368.30	1 870.20	2 814.10	4 299.30	7 466.30	11 415.70	17 468.00	14 504.50
1907	13 301.40	1 465.50	390.20	316.80	510.70	664.20	738.00	788.90	830.20	944.30	1 134.50	1 421.30	1 905.50	3 007.20	4 625.40	7 635.10	12 245.20	18 637.60	14 504.50
1908	13 308.50	1 383.70	363.10	293.80	486.30	626.40	694.50	722.10	777.40	865.10	1 058.30	1 344.10	1 839.50	2 761.90	4 303.00	7 012.60	11 234.60	17 610.10	14 504.50
1909	11 841.00	1 315.50	354.70	291.90	456.90	613.50	661.00	713.90	774.90	856.30	1 073.60	1 375.10	1 807.30	2 638.00	4 654.10	7 466.30	12 119.00	18 391.10	14 504.50
1910	11 117.80	1 333.50	325.30	287.80	447.40	595.50	629.00	667.40	736.90	819.50	1 003.50	1 280.90	1 713.90	2 604.90	4 150.30	6 627.70	10 995.60	16 487.80	14 504.50
1911	15 641.20	1 533.80	333.20	290.60	487.50	601.70	664.50	696.00	746.90	836.00	1 018.20	1 333.90	1 799.40	2 724.90	4 397.10	7 180.70	11 979.20	18 139.10	14 504.50
1912	10 829.40	1 275.20	335.90	299.70	436.30	576.80	616.30	664.20	715.90	801.50	983.20	1 275.20	1 716.20	2 563.90	4 142.70	6 473.90	10 612.50	15 803.50	14 504.50
1913	11 538.20	1 307.80	325.30	298.90	440.10	568.60	627.10	638.90	708.10	804.10	1 043.40	1 309.00	2 666.90	4 060.00	6 547.50	10 716.20	16 079.00	14 504.50	14 504.50
1914	11 179.00	1 176.00	324.20	277.70	447.20	566.20	627.10	663.90	736.30	837.70	1 019.60	1 317.60	1 786.80	2 771.20	4 275.80	7 208.10	11 179.00	18 009.40	14 504.50
1915	11 274.80	1 451.60	396.10	326.10	465.30	574.00	626.90	660.40	746.00	851.90	1 033.10	1 367.90	1 815.30	2 707.70	4 234.40	7 113.50	11 325.60	17 500.00	14 504.50
1916	11 563.90	1 324.00	356.80	308.40	471.70	527.30	593.40	633.30	696.60	797.90	972.80	1 287.40	1 757.50	2 603.90	4 100.60	6 924.60	10 991.80	16 327.70	14 504.50
1917	9 267.10	1 209.40	354.40	313.80	481.90	545.10	598.50	636.70	696.70	795.40	978.40	1 283.00	1 765.40	2 612.70	4 201.20	7 137.70	11 442.60	18 626.40	14 504.50
1918	15 585.00	1 691.70	608.80	487.10	973.10	1 287.20	1 470.10	1 527.30	1 319.80	1 299.90	1 299.90	1 602.90	2 006.40	2 766.30	4 410.90	7 146.20	11 142.00	17 923.70	14 504.50
1919	10 766.30	1 362.50	373.60	342.60	502.00	734.40	803.00	826.60	819.70	867.80	1 034.90	1 317.10	1 795.20	2 568.80	4 118.90	6 825.00	11 108.20	17 684.70	14 504.50
1920	12 427.50	1 244.70	337.00	271.30	461.00	602.00	654.00	673.30	685.40	742.80	901.30	1 179.20	1 696.50	2 362.50	3 710.10	6 128.00	10 076.60	15 712.60	14 504.50
1921	11 545.10	1 194.10	277.10	244.00	438.70	562.80	597.80	603.80	665.70	733.90	899.60	1 175.30	1 627.10	2 426.60	3 769.10	6 147.40	10 199.70	15 823.50	14 504.50
1922	8 331.20	956.20	223.10	222.00	432.90	558.10	592.40	601.10	639.30	738.90	847.50	1 179.60	1 603.80	2 480.80	3 984.40	6 059.50	11 064.40	16 957.30	14 504.50
1923	9 525.30	1 022.80	223.70	220.00	427.40	543.90	563.30	560.90	614.30	694.30	873.50	1 129.10	1 612.20	2 371.00	3 667.80	5 954.90	9 872.50	15 355.80	14 504.50
1924	9 267.10	926.30	214.50	215.40	437.30	547.40	565.80	566.70	616.10	696.30	876.50	1 165.90	1 626.30	2 426.90	4 006.90	6 013.30	9 986.60	15 180.20	14 504.50
1925	8 702.10	926.80	249.40	220.20	456.90	599.20	552.80	562.90	606.70	721.10	829.00	1 195.10	1 629.10	2 463.70	3 908.90	6 291.50	10 414.50	15 896.00	14 504.50
1926	9 430.20	962.80	258.90	228.90	468.50	579.90	561.20	566.30	610.90	735.60	906.70	1 188.40	1 626.60	2 427.90	3 727.00	6 170.40	10 254.30	16 450.00	14 504.50
1927	8 181.30	866.10	236.50	215.50	432.30	558.80	528.60	538.00	577.20	664.20	832.80	1 127.60	1 609.50	2 338.30	3 697.00	6 049.70	10 152.30	16 426.00	14 504.50
1928	9 019.00	871.10	240.40	221.30	431.30	549.90	524.50	519.70	564.30	652.60	801.60	1 099.50	1 513.30	2 300.00	3 600.80	5 919.80	9 718.10	15 604.60	14 504.50
1929	9 273.90	871.20	249.90	204.20	427.00	550.20	534.80	529.90	594.40	703.10	883.90	1 183.20	1 619.40	2 402.40	4 021.70	6 186.30	11 240.60	17 922.00	14 504.50
1930	7 764.10	710.20	209.80	182.60	396.00	499.30	484.00	486.40	543.10	649.10	826.70	1 087.30	1 491.40	2 239.90	3 461.50	5 515.90	9 068.90	14 175.20	14 504.50
1931	7 272.50	716.70	205.80	180.60	387.00	497.40	465.80	466.90	544.20	654.90	836.50	1 097.60	1 532.00	2 260.40	3 693.80	6 013.30	9 986.60	15 180.20	14 504.50
1932	7 397.20	706.20	199.40	172.10	386.70	457.20	453.50	462.60	523.00	642.80	817.00	1 074.20	1 513.40	2 223.00	3 571.90	5 863.00	9 483.00	14 981.90	14 504.50
1933	7 118.20	628.50	192.90	161.40	348.80	437.50	436.80	456.50	516.00	623.60	829.00	1 073.60	1 536.60	2 298.90	3 545.20	5 793.90	9 546.80	15 330.60	14 504.50
1934	6 723.40	626.60	186.00	159.80	297.30	414.80	420.90	433.10	486.50	598.30	782.90	1 033.00	1 441.50	2 140.00	3 392.00	5 437.20	8 966.60	14 027.30	14 504.50
1935	6 417.00	554.30	169.60	152.40	291.90	414.00	426.40	436.50	508.10	613.10	829.10	1 087.60	1 518.20	2 225.40	3 518.30	5 575.30	9 433.70	14 904.50	14 504.50
1936	6 412.20	568.70	162.00	142.30	260.70	391.30	388.90	411.00	474.60	595.30	779.50	1 061.90	1 436.60	2 134.20	3 374.20	5 579.30	9 143.20	14 541.60	14 504.50
1937	6 328.10	534.50	156.30	140.00	257.70	386.70	403.60	406.40	462.00	569.70	752.70	1 033.80	1 398.50	2 118.40	3 246.90	5 396.40	8 886.50	13 679.40	14 504.50
1938	6 377.20	610.30	159.80	138.60	249.70	399.80	386.60	406.30	453.90	579.30	779.30	1 036.90	1 421.90	2 187.60	3 330.70	5 518.30	9 223.20	14 484.60	14 504.50
1939	6 168.10	457.60	141.30	121.80	240.30	374.60	372.90	380.80	433.10	541.90	754.70	1 003.00	1 423.00	2 124.30	3 300.00	5 565.70	9 900.00	14 981.90	14 504.50
1940	8 470.70	645.70	186.60	156.20	291.50	396.40	421.30	450.00	504.30	621.90	829.50	1 133.50	1 613.00	2 474.20	3 982.10	6 621.80	11 364.40	18 629.70	14 504.50
1941	7 004.70	516.40	156.20	137.80	258.50	366.30	367.60	367.60	462.10	588.30	788.00	1 067.70	1 472.60	2 171.40	3 476.30	5 862.00	9 657.00	15 802.50	14 504.50
1942	7 234.20	486.70	151.10	136.50	243.30	426.40	422.40	452.80	529.70	707.40	976.50	1 387.10	2 105.00	3 397.80	5 557.80	9 829.20	15 902.80	14 504.50	14 504.50
1943	7 580.80	540.30	216.80	194.30	405.90	565.80	668.00	622.40	612.00	620.00	728.00								

○ *Taux de mortalité combiné France*

France (Death rates per 100,000)

Total

Weight

Year	Standardized
1980	0,01348
1981	0,01262
1982	0,01221
1983	0,01179
1984	0,01172
1985	0,01226
1986	0,01239
1987	0,01299
1988	0,01223
1989	0,01234
1990	0,01152
1991	0,01180
1992	0,01167
1993	0,01138
1994	0,02133
1995	0,02421
1996	0,02000
1997	0,01655
1998	0,02530
1999	0,01326
2000	0,01040
2001	0,01043
2002	0,01055
2003	0,01017
2004	0,01049
2005	0,01076
2006	0,01065
2007	0,00987
2008	0,00974
2009	0,01058
2010	0,00992
2011	0,00990
2012	0,00970
2013	0,00977
2014	0,00965
2015	0,00986
2016	0,00996
2017	0,00945
2018	0,00966
2019	0,00932
2020	0,01446
2021	0,01046
2022	0,00970
2023	0,01142
2024	0,01686
2025	0,00953
2026	0,00845
2027	0,00622
2028	0,00618
2029	0,00620
2030	0,00603
2031	0,00621
2032	0,00576
2033	0,00592
2034	0,00562
2035	0,00553
2036	0,00563
2037	0,00546
2038	0,00492
2039	0,00486
2040	0,00495
2041	0,00480
2042	0,00494
2043	0,00500
2044	0,00472
2045	0,00483
2046	0,00470
2047	0,00471
2048	0,00469
2049	0,00478
2050	0,00445
2051	0,00451
2052	0,00452
2053	0,00442
2054	0,00437
2055	0,00433
2056	0,00433
2057	0,00416
2058	0,00413
2059	0,00412
2060	0,00405
2061	0,00397
2062	0,00392
2063	0,00391
2064	0,00383
2065	0,00378
2066	0,00371
2067	0,00367
2068	0,00351
2069	0,00347
2070	0,00339
2071	0,00335
2072	0,00331
2073	0,00329
2074	0,00324
2075	0,00318
2076	0,00311
2077	0,00298
2078	0,00292
2079	0,00288
2080	0,00284
2081	0,00284
2082	0,00282
2083	0,00278

• Japon

○ Hommes

Table with columns: Japan (Death rates per 100,000), Total, Weight, Year, and age groups (0, 14, 59, 10-14, 15-19, 20-24, 25-29, 30-34, 35-39, 40-44, 45-49, 50-54, 55-59, 60-64, 65-69, 70-74, 75-79, 80-84).

○ Femmes

Table with columns: Japan (Death rates per 100,000), Total, Weight, Year, and age groups (0, 14, 59, 10-14, 15-19, 20-24, 25-29, 30-34, 35-39, 40-44, 45-49, 50-54, 55-59, 60-64, 65-69, 70-74, 75-79, 80-84).

○ *Taux de mortalité combiné Japon***Japan (Death rates per 100,000)****Total****Weight**

Year	Standardized
1950	0,01683
1951	0,01573
1952	0,01478
1953	0,01488
1954	0,01391
1955	0,01338
1956	0,01375
1957	0,01420
1958	0,01277
1959	0,01255
1960	0,01268
1961	0,01225
1962	0,01230
1963	0,01152
1964	0,01128
1965	0,01141
1966	0,01083
1967	0,01050
1968	0,01035
1969	0,01022
1970	0,01019
1971	0,00943
1972	0,00906
1973	0,00892
1974	0,00863
1975	0,00826
1976	0,00797
1977	0,00761
1978	0,00738
1979	0,00709
1980	0,00710
1981	0,00684
1982	0,00657
1983	0,00655
1984	0,00635
1985	0,00619
1986	0,00598
1987	0,00579
1988	0,00579
1989	0,00564
1990	0,00561
1991	0,00552
1992	0,00552
1993	0,00548
1994	0,00528
1995	0,00536
1996	0,00512
1997	0,00502
1998	0,00502
1999	0,00504
2000	0,00480
2001	0,00466
2002	0,00454
2003	0,00453

• USA

○ Hommes

US (Death rates per 100,000)

Year	Total										
	<1	1 to 4	5 to 14	15 to 24	25 to 34	35 to 44	45 to 54	55 to 64	65 to 74	75 to 84	85+
Total	100,00%										
Weight	0,00%	0,00%	0,51%	1,08%	6,23%	18,39%	23,87%	16,76%	5,95%	1,71%	0,37%
	Males										
1900	17 914,40	2 054,20	384,30	594,00	824,30	1 067,70	1 569,90	2 874,10	5 929,00	12 806,40	26 877,20
1901	15 837,50	1 769,30	366,00	570,00	833,00	1 097,30	1 609,40	2 963,00	5 919,20	12 970,30	26 806,60
1902	15 336,50	1 713,80	342,20	522,90	765,90	1 032,10	1 512,30	2 798,10	5 650,90	12 050,90	24 862,00
1903	14 680,80	1 590,70	362,80	533,20	788,60	1 043,30	1 560,00	2 900,60	5 845,00	12 675,20	26 266,30
1904	15 391,10	1 659,30	369,60	549,50	799,90	1 110,80	1 636,60	3 108,60	6 173,00	13 256,60	28 074,70
1905	15 662,60	1 577,30	344,70	529,80	799,60	1 062,00	1 596,30	2 984,60	5 889,90	12 884,50	27 054,20
1906	16 017,00	1 640,70	337,70	566,10	787,50	1 092,00	1 595,70	2 944,60	5 820,50	12 651,30	26 165,40
1907	15 291,20	1 527,30	329,90	580,00	814,90	1 142,90	1 683,10	3 111,70	6 269,70	13 398,00	27 501,20
1908	14 606,50	1 456,80	312,10	504,40	700,60	981,90	1 515,50	2 844,30	5 642,40	12 590,20	25 149,60
1909	13 995,40	1 406,10	292,50	459,40	663,60	954,20	1 478,30	2 773,70	5 699,30	12 392,80	25 140,60
1910	14 553,20	1 458,00	301,70	483,60	692,90	995,10	1 523,40	2 866,60	5 873,60	12 741,60	25 679,40
1911	12 593,00	1 222,60	278,50	469,20	670,90	978,30	1 484,10	2 802,60	5 811,30	12 508,10	24 927,20
1912	12 331,50	1 147,00	257,70	451,40	647,00	950,70	1 484,90	2 817,20	5 785,90	12 521,70	24 863,00
1913	12 756,10	1 245,10	280,60	489,90	685,10	970,20	1 500,80	2 790,30	5 771,40	12 284,80	24 136,50
1914	11 884,20	1 074,80	262,70	441,80	637,60	940,40	1 446,40	2 740,50	5 776,40	12 054,70	23 886,40
1915	11 450,10	968,70	242,90	423,30	618,70	913,50	1 436,10	2 769,30	5 675,20	12 455,20	24 672,30
1916	11 820,50	1 169,20	261,30	454,90	659,90	970,50	1 509,10	2 898,30	6 063,60	12 865,50	25 546,40
1917	11 736,40	1 119,30	259,90	486,00	708,40	1 006,70	1 547,50	2 933,50	6 110,90	12 899,20	25 107,10
1918	12 453,60	1 600,60	415,30	515,20	792,40	1 092,40	1 528,30	2 879,20	5 949,60	11 811,50	22 156,10
1919	10 180,20	973,50	283,40	530,30	744,20	906,30	1 280,30	2 444,20	5 184,70	11 086,70	22 969,90
1920	10 368,00	1 027,70	280,10	477,80	643,00	821,80	1 262,70	2 483,30	5 453,30	12 214,30	25 300,90
1921	9 812,90	842,40	265,70	383,10	479,60	684,10	1 161,30	2 325,70	5 110,40	11 441,70	24 129,70
1922	8 697,80	787,60	231,00	377,60	499,10	741,00	1 249,10	2 474,80	5 508,40	12 175,50	25 784,60
1923	9 022,90	846,00	232,30	386,70	510,20	772,20	1 311,60	2 566,00	5 622,40	12 743,80	27 939,90
1924	8 623,60	723,80	219,10	376,30	483,30	758,70	1 309,20	2 488,90	5 489,40	12 284,20	26 376,00
1925	8 457,60	673,20	215,70	375,90	491,20	761,90	1 326,20	2 513,50	5 540,70	12 527,30	27 362,50
1926	8 708,80	762,40	211,70	373,20	495,40	789,30	1 387,60	2 596,50	5 764,90	13 183,50	28 129,20
1927	7 747,00	624,10	208,00	350,40	475,70	758,60	1 321,00	2 504,50	5 523,20	12 263,10	25 423,30
1928	8 232,70	683,40	212,80	376,40	510,10	801,80	1 413,00	2 646,30	5 854,40	13 226,10	27 146,50
1929	8 003,50	660,30	207,00	372,60	515,50	738,50	1 407,00	2 694,30	5 837,30	12 886,30	25 980,30
1930	7 701,30	602,60	189,80	349,60	488,90	745,90	1 369,60	2 661,00	5 582,00	11 912,20	23 671,20
1931	7 217,70	561,60	183,40	336,30	471,50	744,30	1 343,60	2 617,10	5 436,60	11 749,10	23 409,20
1932	6 654,50	487,70	169,00	301,60	431,90	692,00	1 280,00	2 605,70	5 407,20	12 107,60	24 233,70
1933	6 828,20	503,00	165,60	292,20	426,10	681,90	1 291,10	2 599,70	5 363,30	11 831,70	23 272,20
1934	7 429,30	540,60	169,60	299,00	433,90	695,00	1 349,60	2 660,30	5 434,90	12 217,60	23 512,00
1935	6 885,10	469,20	169,60	294,40	430,30	698,60	1 329,20	2 629,50	5 367,30	12 168,30	23 466,60
1936	7 086,10	471,00	165,70	304,90	440,30	739,00	1 405,60	2 767,70	5 606,60	13 057,00	25 267,10
1937	6 874,40	446,30	152,30	291,20	422,00	703,90	1 377,60	2 719,40	5 453,60	12 638,90	23 803,70
1938	6 523,90	408,30	136,10	249,40	363,20	622,10	1 264,60	2 532,10	5 245,00	11 879,60	22 216,50
1939	6 031,90	342,60	125,50	236,60	343,90	595,20	1 245,00	2 551,10	5 273,30	12 065,20	23 263,90
1940	6 189,80	311,50	117,80	228,90	338,40	588,10	1 248,80	2 612,00	5 482,30	12 126,40	24 639,00
1941	5 880,00	299,40	113,50	232,00	329,80	574,70	1 222,80	2 539,30	5 264,80	11 529,70	23 192,10
1942	5 443,20	260,80	107,20	229,00	321,70	561,60	1 214,70	2 509,20	5 125,20	11 000,30	22 207,60
1943	4 927,00	277,00	112,00	264,40	319,30	554,90	1 219,30	2 571,80	5 296,90	11 722,40	24 284,00
1944	4 911,80	250,20	112,20	278,10	322,00	538,70	1 166,50	2 503,40	5 023,00	11 074,50	22 651,90
1945	4 798,00	219,30	105,80	272,60	348,30	547,00	1 160,10	2 501,00	4 910,30	10 771,50	22 074,00
1946	5 211,70	186,40	97,40	212,90	261,90	495,70	1 124,20	2 426,20	4 790,60	10 407,10	22 108,10
1947	3 883,60	175,30	83,90	192,70	244,40	479,60	1 134,60	2 499,20	4 521,90	10 659,30	22 930,10
1948	4 016,70	174,20	80,40	182,60	233,10	465,10	1 121,20	2 464,20	4 583,40	10 510,60	22 640,90
1949	3 963,00	163,60	78,90	171,80	218,70	443,70	1 062,70	2 420,60	4 641,50	10 381,20	21 496,70
1950	3 729,00	151,70	70,90	167,90	216,50	426,00	1 067,10	2 395,30	4 521,40	10 426,00	21 626,00
1951	3 685,20	147,60	71,00	173,20	218,20	427,00	1 061,80	2 386,20	4 482,00	10 350,50	20 810,00
1952	3 613,20	152,00	69,60	180,60	215,60	417,00	1 054,50	2 386,40	4 786,60	10 228,70	19 673,60
1953	3 478,90	141,70	65,90	176,40	206,40	406,30	1 038,10	2 377,80	4 814,20	10 275,90	19 915,90
1954	3 388,30	128,40	60,20	163,70	196,20	377,20	987,10	2 254,20	4 673,80	9 800,60	18 741,10
1955	3 213,80	123,10	59,00	165,80	191,80	377,00	973,90	2 256,90	4 734,60	10 044,10	19 588,40
1956	3 201,30	118,80	56,80	167,30	191,60	370,70	964,10	2 288,70	4 782,20	10 078,00	20 045,30
1957	3 156,70	119,70	58,50	165,20	193,60	381,10	987,60	2 346,70	4 916,90	10 098,40	20 726,10
1958	3 163,90	119,30	55,70	154,60	188,00	373,10	977,10	2 298,10	4 852,40	10 135,30	20 833,40
1959	3 105,80	116,20	57,80	154,00	189,40	367,60	972,50	2 275,10	4 787,60	9 912,10	20 543,40
1960	3 069,30	119,60	55,70	152,10	187,90	372,80	992,20	2 309,50	4 914,40	10 178,40	21 186,30
1961	2 928,80	110,50	52,50	146,80	183,60	366,40	966,60	2 242,70	4 772,30	9 853,70	21 082,60
1962	2 934,00	106,10	52,10	146,80	185,30	371,40	974,10	2 267,10	4 866,80	10 010,30	22 253,50
1963	2 925,30	110,10	51,30	149,70	191,30	377,60	986,10	2 318,00	4 997,70	10 279,60	22 936,90
1964	2 860,20	107,60	51,90	154,80	197,70	384,40	972,60	2 289,00	4 848,50	9 961,30	21 640,60
1965	2 786,60	104,30	50,90	157,40	197,60	385,40	978,20	2 296,90	4 887,00	10 122,60	22 080,90
1966	2 713,70	106,70	47,40	167,90	202,00	391,90	986,70	2 317,60	4 948,90	10 180,00	22 086,60
1967	2 586,30	99,40	50,30	170,60	204,50	399,40	969,10	2 279,00	4 875,40	9 936,50	21 339,40
1968	2 562,60	96,20	52,30	182,80	214,00	406,00	988,70	2 344,10	5 049,10	10 215,20	21 732,00
1969	2 484,50	95,50	51,50	191,60	217,20	410,70	967,90	2 291,00	4 934,90	10 068,30	20 875,60

o Femmes

US (Death rates per 100,000)

Total

Weight 0,00% 0,00% 0,45% 0,82% 3,37% 7,11% 7,33% 4,04% 1,35% 0,49% 0,13%

Year	Females										
	<1	1 to 4	5 to 14	15 to 24	25 to 34	35 to 44	45 to 54	55 to 64	65 to 74	75 to 84	85+
1900	14 541,20	1 912,30	387,50	577,60	815,20	975,20	1 417,70	2 576,00	5 388,30	11 877,30	25 517,40
1901	12 810,60	1 619,60	341,40	540,00	775,70	957,50	1 385,50	2 603,50	5 342,10	12 001,20	25 567,10
1902	12 409,90	1 596,80	319,40	506,20	726,30	883,40	1 279,30	2 386,80	4 951,10	10 834,60	22 611,10
1903	11 833,10	1 492,80	336,30	502,30	725,20	903,80	1 304,90	2 541,90	5 182,00	11 542,20	24 713,20
1904	12 423,90	1 522,60	364,60	549,40	757,50	924,90	1 369,90	2 604,40	5 490,50	12 032,60	26 209,00
1905	12 546,00	1 419,20	334,90	509,70	718,00	869,00	1 326,60	2 561,90	5 354,20	11 669,30	25 486,50
1906	12 916,00	1 510,20	315,20	494,70	703,60	851,30	1 290,70	2 464,70	5 177,80	11 477,70	25 020,70
1907	12 389,00	1 408,40	304,30	480,10	686,00	875,30	1 310,80	2 592,90	5 493,10	12 395,30	26 467,20
1908	11 909,00	1 335,70	292,60	447,90	633,90	802,80	1 222,20	2 365,70	5 113,50	11 370,50	24 640,50
1909	11 317,30	1 290,40	270,40	417,40	602,70	781,30	1 172,50	2 337,00	5 083,30	11 327,70	23 986,10
1910	11 762,10	1 335,30	285,10	423,30	611,70	790,40	1 207,20	2 366,00	5 240,50	11 740,10	24 599,60
1911	10 184,10	1 129,40	255,70	426,50	600,90	787,20	1 186,60	2 339,90	5 186,30	11 549,00	24 415,10
1912	9 847,40	1 039,90	234,00	399,30	570,90	762,90	1 158,10	2 329,40	5 111,10	11 553,30	23 713,80
1913	10 188,60	1 140,50	254,80	405,10	588,10	766,20	1 175,80	2 285,50	5 054,40	11 342,50	23 170,40
1914	9 509,90	972,50	238,20	397,00	556,40	747,60	1 159,20	2 265,10	5 039,20	11 102,40	22 729,00
1915	8 995,30	878,70	216,10	390,90	543,50	744,60	1 165,00	2 318,60	5 247,20	11 509,00	23 532,40
1916	9 281,20	1 052,30	228,50	421,70	571,90	774,80	1 195,00	2 386,80	5 380,10	11 950,10	24 699,60
1917	9 147,20	1 011,50	241,90	442,40	597,40	785,10	1 202,00	2 398,60	5 336,10	11 921,10	24 205,70
1918	9 860,90	1 545,00	410,20	543,60	799,40	1 133,60	1 367,60	2 403,60	5 190,30	10 927,40	21 905,00
1919	9 974,60	891,40	255,00	532,90	759,90	814,10	1 154,60	2 182,10	4 795,00	10 486,20	21 676,00
1920	8 667,30	946,70	247,40	486,70	712,70	799,80	1 170,20	2 243,90	5 046,30	11 589,00	24 466,80
1921	7 082,10	758,60	227,80	381,50	497,60	655,60	1 072,70	2 082,10	4 678,20	10 826,60	23 756,10
1922	6 787,30	695,00	196,60	383,20	506,10	680,70	1 102,80	2 150,00	4 922,30	11 369,00	25 835,70
1923	7 164,70	766,10	197,00	388,60	498,70	686,10	1 123,50	2 201,40	5 035,40	11 981,40	27 988,40
1924	6 699,60	641,30	183,10	376,30	470,40	651,00	1 105,90	2 095,40	4 711,30	11 200,90	26 025,60
1925	6 587,90	607,60	177,20	376,00	476,10	672,40	1 089,20	2 121,90	4 792,60	11 377,00	27 130,30
1926	6 830,30	603,20	174,40	367,80	483,60	681,00	1 139,30	2 201,70	4 988,70	11 952,10	27 843,80
1927	5 989,90	556,90	168,60	345,00	462,40	647,80	1 078,00	2 059,30	4 699,00	10 958,70	24 696,00
1928	6 356,40	610,30	174,70	361,10	484,50	689,10	1 129,00	2 177,30	4 965,30	11 861,50	26 593,60
1929	6 286,10	589,60	166,90	349,60	482,70	663,60	1 112,90	2 183,80	4 943,10	11 602,90	25 015,90
1930	6 073,60	523,30	153,20	319,30	443,10	614,90	1 062,30	2 123,70	4 675,80	10 663,40	22 138,00
1931	5 646,60	490,60	149,00	301,40	427,60	599,20	1 040,60	2 074,70	4 536,00	10 400,30	21 428,60
1932	5 386,20	436,40	139,10	274,90	402,60	574,90	1 010,20	2 056,40	4 577,40	10 786,00	22 659,10
1933	5 403,00	441,30	133,50	256,00	386,50	562,40	983,30	2 010,90	4 432,30	10 473,70	21 442,30
1934	5 853,60	474,00	136,60	252,00	381,60	548,30	994,70	2 022,60	4 436,00	10 651,60	21 711,50
1935	5 280,30	411,90	135,70	247,10	375,60	544,60	979,10	1 981,00	4 369,10	10 514,30	21 698,50
1936	5 489,60	407,80	129,30	252,10	379,90	560,20	996,70	2 033,50	4 542,80	11 354,30	23 625,70
1937	5 359,90	390,30	118,20	234,90	353,70	537,50	970,20	1 962,90	4 341,30	10 835,80	21 904,60
1938	5 065,60	358,00	106,60	207,40	309,60	497,00	905,50	1 861,70	4 176,60	10 369,30	20 539,00
1939	4 604,30	293,30	92,90	189,50	291,50	464,70	888,00	1 858,00	4 168,00	10 510,50	21 629,40
1940	4 774,30	267,00	89,10	181,10	274,30	452,20	880,70	1 800,40	4 222,20	10 368,60	22 759,10
1941	4 627,80	259,80	84,00	171,00	266,10	425,50	829,50	1 714,30	3 980,80	9 727,20	20 876,20
1942	4 291,30	225,70	73,70	156,40	237,30	407,70	798,10	1 668,80	3 865,70	9 340,90	20 293,90
1943	3 849,30	236,10	80,70	154,60	236,00	408,60	813,40	1 716,80	3 993,40	9 900,30	22 116,70
1944	3 897,60	215,20	75,60	144,50	221,30	391,20	764,70	1 636,10	3 782,50	9 369,90	20 776,10
1945	3 717,60	186,10	74,00	136,80	209,70	375,90	748,20	1 587,70	3 631,70	9 011,30	20 134,20
1946	4 013,20	166,10	66,40	129,60	192,40	348,30	714,90	1 530,30	3 508,60	8 731,10	20 302,20
1947	3 600,50	145,70	67,10	117,40	179,10	333,50	710,40	1 523,60	3 528,10	8 853,30	20 720,60
1948	3 102,90	145,50	56,70	105,60	160,10	316,60	679,30	1 478,80	3 427,50	8 641,60	20 565,60
1949	3 056,10	136,40	52,90	94,50	150,20	299,70	658,60	1 432,00	3 362,40	8 378,00	19 425,90
1950	2 854,60	126,70	49,90	89,10	142,70	290,30	641,50	1 404,00	3 333,20	8 399,60	19 194,70
1951	2 789,00	125,90	47,20	85,20	137,30	281,60	634,30	1 379,00	3 213,40	8 236,70	19 005,60
1952	2 706,60	129,80	48,60	83,40	132,10	273,20	615,00	1 341,00	3 164,00	8 081,00	18 614,40
1953	2 689,00	118,00	43,30	75,30	121,40	260,30	599,70	1 312,30	3 139,90	8 064,80	18 683,40
1954	2 534,70	107,80	40,20	67,50	112,30	244,80	589,00	1 286,70	2 979,10	7 626,90	17 740,00
1955	2 489,40	103,30	38,20	67,90	109,40	239,20	543,00	1 222,60	2 978,00	7 785,50	18 554,80
1956	2 431,70	101,30	37,70	66,10	108,40	233,90	534,10	1 223,70	2 966,10	7 750,50	18 662,30
1957	2 425,20	103,60	38,60	68,00	113,80	236,20	547,60	1 243,20	3 000,70	7 781,60	19 151,00
1958	2 452,50	103,80	37,20	61,80	108,40	227,90	536,90	1 212,70	2 940,20	7 738,90	19 103,30
1959	2 379,90	97,30	37,20	62,10	107,80	223,30	520,70	1 182,30	2 866,50	7 551,00	18 681,40
1960	2 321,30	98,40	37,30	61,30	106,60	229,40	526,70	1 196,40	2 871,80	7 633,10	19 008,40
1961	2 233,70	92,60	35,00	59,00	104,70	222,50	515,70	1 145,90	2 786,00	7 288,80	18 688,70
1962	2 219,20	92,10	35,30	60,50	105,90	228,90	522,10	1 157,20	2 783,60	7 361,70	19 403,80
1963	2 214,90	92,60	35,10	61,80	106,60	232,80	528,50	1 170,20	2 792,50	7 407,60	19 787,70
1964	2 193,00	89,10	34,20	61,00	107,10	231,70	528,30	1 137,00	2 684,10	7 112,20	19 507,00
1965	2 128,80	87,10	33,40	61,30	105,70	233,30	526,50	1 122,20	2 671,00	7 088,60	18 688,40
1966	2 086,10	87,30	33,80	64,10	106,90	237,10	526,30	1 108,60	2 611,10	7 078,30	18 864,30
1967	1 983,80	78,90	32,60	64,10	101,50	230,40	517,00	1 092,60	2 629,80	6 811,00	18 037,00
1968	1 956,10	80,70	33,40	66,40	102,80	238,20	528,90	1 126,20	2 680,70	6 978,20	18 425,00
1969	1 903,80	80,20	33,40	68,40	102,60	237,00	513,00	1 094,60	2 615,20	6 775,40	17 710,10
1970	1 863,70	75,40	31,80	68,10	101,60	231,10	517,20	1 088,90	2 579,70	6 677,60	16 518,00
1971	1 842,90	73,80	32,30	67,20	100,30	226,90	503,70	1 077,50	2 494,80	6 447,30	16 348,50
1972	1 575,30	71,00	32,20	66,90	96,90	222,00	496,10	1 072,50	2 524,00	6 430,10	16 377,30
1973	1 542,20	69,40	31,30	65,90	93,30	216,10	492,40	1 067,60	2 437,60	6 369,40	16 477,00
1974	1 502,10	64,60	28,80	61,10	88,70	203,20	472,90	1 030,60	2 351,20	6 079,10	15 724,70
1975	1 410,90	62,70	26,80	59,80	83,60	191,40	455,20	993,70	2 237,30	5 743,10	14 454,50
1976	1 375,20	60,40	26,10	57,70	80,50	181,10	447,10	963,80	2 189,80	5 668,40	14 833,60
1977	1 257,00	59,70	25,60	59,60	78,20	176,40	437,90	959,80	2 141,10	5 473,50	14 127,60
1978	1 222,70	59,80	25,60	59,60	77,50	169,80	431,70	948,20	2 126,30	5 444,10	14 345,00
1979	1 176,60	57,00	24,30	57,60	74,80	161,40	413,40	917,70	2 072,30	5 270,70	13 788,20
1980	1 141,70	54,70	24,20	57,50	75,90	169,30	412,90	934,30	2 144,70	5 440,10	

○ Taux de mortalité combiné USA

US (death rates per 100,000)	
Total	
Weight	
Year	Standardized
1900	0,02259
1901	0,02206
1902	0,02142
1903	0,02217
1904	0,02342
1905	0,02259
1906	0,02234
1907	0,02357
1908	0,02140
1909	0,02101
1910	0,02165
1911	0,02127
1912	0,02114
1913	0,02106
1914	0,02066
1915	0,02006
1916	0,02173
1917	0,02202
1918	0,02414
1919	0,01927
1920	0,01959
1921	0,01797
1922	0,01910
1923	0,01981
1924	0,01923
1925	0,01949
1926	0,02023
1927	0,01918
1928	0,02040
1929	0,02028
1930	0,01936
1931	0,01902
1932	0,01880
1933	0,01855
1934	0,01896
1935	0,01876
1936	0,01975
1937	0,01916
1938	0,01787
1939	0,01786
1940	0,01808
1941	0,01741
1942	0,01703
1943	0,01749
1944	0,01675
1945	0,01654
1946	0,01589
1947	0,01618
1948	0,01691
1949	0,01552
1950	0,01544
1951	0,01528
1952	0,01507
1953	0,01499
1954	0,01426
1955	0,01433
1956	0,01438
1957	0,01471
1958	0,01451
1959	0,01431
1960	0,01460
1961	0,01417
1962	0,01442
1963	0,01472
1964	0,01441
1965	0,01449
1966	0,01460
1967	0,01434
1968	0,01475
1969	0,01444
1970	0,01419
1971	0,01395
1972	0,01403
1973	0,01381
1974	0,01328
1975	0,01275
1976	0,01254
1977	0,01221
1978	0,01205
1979	0,01186
1980	0,01179
1981	0,01149
1982	0,01121
1983	0,01117
1984	0,01105
1985	0,01105
1986	0,01089
1987	0,01076
1988	0,01072
1989	0,01046
1990	0,01030
1991	0,01015
1992	0,00996
1993	0,01008
1994	0,00994
1995	0,00986
1996	0,00968
1997	0,00930
1998	0,00911
1999	0,00908
2000	0,00890
2001	0,00875
2002	0,00866
2003	0,00850

2 – Analyse des pandémies passées – calibration de la sévérité

La calibration de la courbe de sévérité est fondée sur des données historiques de surmortalité des 5 évènements de mortalité connus au XXe siècle : grippe espagnole de 1918, grippe américaine de 1957, 1968, 1977 et épisode du SRAS à Hong-Kong en 2003.

Les données de mortalité sont disponibles à un niveau de précision exploitable sur le site du *Center for Disease Control* aux USA (source: www.cdc.gov/nchs/data). Ces données sont adaptées à la constitution de l'indice composite de référence d'AXA : répartition par âge et sexes donnée en Section 2 de la Partie III (avec les pondérations suivantes par pays : 60% France, 25% Japon et 15% USA). C'est donc un raccourci pratique que d'adapter des données sur population américaine à l'ensemble des pays couverts par l'indice, mais à notre connaissance, ni la France ni le Japon n'offrent une vision aussi exhaustive des causes de mortalité et surtout des historiques de données publiques permettant de constituer des tables de données exhaustives.

TOUS SEXES											
	<1	1-4	5-14	15-24	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74	75-84	85+
Distribution Indice Composite (Aggregate Male and Female)	0,0000%	0,1350%	0,7306%	1,7367%	22,3049%	25,7361%	27,2405%	17,6597%	3,8516%	0,5769%	0,0280%
US Pop 1918	2,2595%	8,9857%	21,0565%	17,5093%	15,9338%	13,4476%	9,9731%	6,1584%	3,2856%	1,3904%	0,0000%
US Pop 2003	1,3612%	5,4447%	14,0836%	14,1785%	13,7012%	15,2672%	14,0317%	9,5712%	6,3084%	4,4297%	1,6226%
Age moyen		2	10	20	30	40	50	60	70	80	90
											44,8
HOMMES											
	<1	1-4	5-14	15-24	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74	75-84	85+
Distribution Indice Composite (Aggregate Male and Female)	0,0000%	0,0697%	0,3735%	0,9576%	11,8098%	14,3149%	15,3314%	10,3110%	2,4843%	0,4090%	0,0000%
US Pop 1918	1,1501%	4,5413%	10,6271%	8,2465%	7,7785%	7,0159%	5,3726%	3,2720%	1,6927%	0,6618%	0,0000%
US Pop 2003	0,6960%	2,7840%	7,2107%	7,2876%	6,9488%	7,6161%	6,8926%	4,6060%	2,8728%	1,7743%	0,4961%
Age moyen		2	10	20	30	40	50	60	70	80	90
											45,3
FEMMES											
	<1	1-4	5-14	15-24	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74	75-84	85+
Distribution Indice Composite (Aggregate Male and Female)	0,0000%	0,0653%	0,3571%	0,7791%	10,4951%	11,4212%	11,9091%	7,3487%	1,3674%	0,1679%	0,0280%
US Pop 1918	1,1094%	4,4444%	10,4294%	9,2628%	8,1554%	6,4317%	4,6004%	2,8864%	1,5929%	0,7286%	0,0000%
US Pop 2003	0,6652%	2,6607%	6,8729%	6,8909%	6,7524%	7,6511%	7,1391%	4,9652%	3,4356%	2,6554%	1,1265%
Age moyen		2	10	20	30	40	50	60	70	80	90
											44,1

US Population 7/1/18		SOURCE: www.census.gov/popest/archives/pre-1980			
Age	All races		total		
	Male	Female			
All ages	51 974 000	51 234 000	103 208 000		
0	1 187 000	1 145 000		1,15%	male <1
1	1 181 000	1 149 000		4,54%	male 1-5
2	1 175 000	1 149 000		10,63%	Male 5-14
3	1 169 000	1 147 000		8,25%	male 15-24
4	1 162 000	1 142 000		7,78%	male 25-34
5	1 154 000	1 134 000		7,02%	male 35-44
6	1 145 000	1 125 000		5,37%	male 45-54
7	1 135 000	1 115 000		3,27%	male 55-64
8	1 124 000	1 102 000		1,69%	male 65-74
9	1 111 000	1 088 000		0,66%	male 75+
10	1 097 000	1 074 000			
11	1 082 000	1 059 000		1,11%	female <1
12	1 064 000	1 043 000		4,44%	female 1-5
13	1 041 000	1 023 000		10,43%	Female 5-14
14	1 015 000	1 001 000		9,26%	female 15-24
15	990 000	981 000		8,16%	female 25-34
16	966 000	959 000		6,43%	female 35-44
17	937 000	945 000		4,60%	female 45-54
18	899 000	944 000		2,89%	female 55-64
19	857 000	951 000		1,59%	female 65-74
20	816 000	955 000		0,73%	female 75+
21	774 000	960 000			
22	749 000	962 000			
23	752 000	957 000			
24	771 000	946 000			
25	788 000	937 000			
26	810 000	928 000			
27	823 000	912 000			
28	821 000	887 000			
29	810 000	857 000			
30	801 000	825 000			
31	790 000	792 000			
32	786 000	767 000			
33	793 000	756 000			
34	806 000	756 000			
35	815 000	752 000			
36	827 000	751 000			
37	822 000	741 000			
38	793 000	716 000			
39	749 000	682 000			
40	707 000	651 000			
41	660 000	619 000			
42	627 000	592 000			
43	618 000	573 000			
44	623 000	561 000			
45	623 000	547 000			
46	624 000	534 000			
47	618 000	519 000			
48	600 000	503 000			
49	575 000	485 000			
50	551 000	469 000			
51	529 000	454 000			
52	504 000	436 000			
53	476 000	413 000			
54	445 000	388 000			
55	415 000	362 000			
56	383 000	337 000			
57	358 000	316 000			
58	345 000	305 000			
59	338 000	299 000			
60	331 000	292 000			
61	325 000	286 000			
62	314 000	277 000			
63	296 000	262 000			
64	272 000	243 000			
65	250 000	226 000			
66	230 000	210 000			
67	210 000	194 000			
68	192 000	178 000			
69	174 000	163 000			
70	159 000	152 000			
71	146 000	140 000			
72	135 000	132 000			
73	127 000	126 000			
74	124 000	123 000			
75+	683 000	752 000			

1-juil.-03		
MALE	143 024 340	
Under 5 years	10 119 295	3,5%
5 to 9 years	10 103 765	7,2%
10 to 14 years	10 864 203	7,2%
15 to 19 years	10 514 499	7,3%
20 to 24 years	10 677 069	7,3%
25 to 29 years	9 750 051	6,9%
30 to 34 years	10 456 274	6,9%
35 to 39 years	10 727 589	7,6%
40 to 44 years	11 419 119	7,6%
45 to 49 years	10 732 190	6,9%
50 to 54 years	9 310 626	6,9%
55 to 59 years	7 625 831	4,6%
60 to 64 years	5 767 995	4,6%
65 to 69 years	4 524 310	2,9%
70 to 74 years	3 829 453	2,9%
75 to 79 years	3 103 505	1,8%
80 to 84 years	2 056 060	1,8%
85 to 89 years	1 004 187	0,5%
90 to 94 years	350 763	0,5%
95 to 99 years	76 623	0,0%
100 years and over	10 933	0,0%
SUM	147 764 636	49,2%
Under 5 years	9 671 442	3,3%
5 to 9 years	9 641 682	6,9%
10 to 14 years	10 343 875	6,9%
15 to 19 years	9 957 341	6,9%
20 to 24 years	10 080 706	6,8%
25 to 29 years	9 372 477	6,8%
30 to 34 years	10 262 773	7,7%
35 to 39 years	10 680 032	7,7%
40 to 44 years	11 568 635	7,1%
45 to 49 years	11 031 118	7,1%
50 to 54 years	9 728 677	5,0%
55 to 59 years	8 096 303	5,0%
60 to 64 years	6 341 934	3,4%
65 to 69 years	5 218 219	3,4%
70 to 74 years	4 772 035	2,7%
75 to 79 years	4 361 291	2,7%
80 to 84 years	3 360 354	1,0%
85 to 89 years	2 021 002	1,0%
90 to 94 years	935 890	0,1%
95 to 99 years	272 963	0,1%
100 years and over	45 887	0,1%
Total Pop	290 788 976	50,815%

US population		source: www.census.gov/popest/	
3,5%	male <5	49,185%	
7,2%	Male 5-14	50,815%	
7,3%	male 15-24		
6,9%	male 25-34		
7,6%	male 35-44		
6,9%	male 45-54		
4,6%	male 55-64		
2,9%	male 65-74		
1,8%	male 75-84		
0,5%	male 85+		
49,2%	SUM		
3,3%	female <5		
6,9%	Female 5-14		
6,9%	female 15-24		
6,8%	female 25-34		
7,7%	female 35-44		
7,1%	female 45-54		
5,0%	female 55-64		
3,4%	female 65-74		
2,7%	female 75-84		
1,1%	female 85+		
50,8%	SUM		

Les données de la population en 1918 et 2003 aux USA sont utilisées afin de mesurer les taux de déviation de mortalité liée aux événements mentionnés précédemment.

Les données de mortalité « toute cause » et pour cause de « grippe » sont également référencées et exploitées afin d'extraire des taux de surmortalité spécifiques.

TOUS SEXES

	<1	1-4	5-14	15-24	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74	75-84	85+
Distribution Indice Composite (Aggregate Male and Female)	0,0000%	0,1350%	0,7306%	1,7367%	22,3049%	25,7361%	27,2405%	17,6597%	3,8516%	0,5769%	0,0280%
US Pop 1918	2,2595%	8,9857%	21,0565%	17,5093%	15,9338%	13,4476%	9,9731%	6,1584%	3,2856%	1,3904%	0,0000%
US Pop 2003	1,3612%	5,4447%	14,0836%	14,1785%	13,7012%	15,2672%	14,0317%	9,5712%	6,3084%	4,4297%	1,6226%
Age moyen		2	10	20	30	40	50	60	70	80	90

All Causes: Death Rates per 100,000 mid year population

Year	<1	1-4	5-14	15-24	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74	75-84	85+
<i>source: www.cdc.gov/nchs/data/statab/hist290_0039.pdf (p. 1-3)</i>											
1917	10 457,2	1 066,0	256,0	468,9	649,1	900,8	1 385,6	2 678,6	5 728,4	12 386,2	24 593,6
1918	11 167,2	1 573,5	412,8	1 070,6	1 643,5	1 339,3	1 524,1	2 648,1	5 505,0	11 295,7	22 213,5
1919	9 095,0	928,0	269,3	531,6	752,0	861,6	1 226,9	2 310,0	4 998,3	10 782,0	22 225,0
1920	9 226,4	987,2	263,9	487,4	677,5	811,3	1 219,3	2 358,8	5 253,4	11 888,1	24 825,2
<i>source: www.cdc.gov/nchs/data/dvs/mx1950_59.pdf (p. 1)</i>											
1956	2 823,1	110,2	47,4	115,5	149,1	300,9	746,8	1 744,0	3 809,3	8 785,6	19 229,7
1957	2 797,5	111,8	48,8	115,6	152,8	307,1	764,9	1 780,6	3 902,7	8 807,5	19 789,8
1958	2 814,5	111,7	46,6	107,5	147,4	298,9	753,5	1 739,8	3 836,0	8 794,4	19 795,3
1959	2 748,7	106,9	47,7	107,5	147,8	293,9	743,3	1 711,7	3 757,3	8 584,9	19 417,5
<i>source: www.cdc.gov/nchs/data/dvs/mx196067.pdf and mx196878.pdf (p. 1)</i>											
1967	2 290,7	89,4	41,7	116,5	151,9	309,7	736,3	1 657,2	3 624,6	8 093,6	19 223,2
1968	2 265,7	89,6	43,0	123,7	157,2	319,8	751,3	1 704,4	3 724,0	8 293,5	19 582,7
1969	2 199,6	88,0	42,6	129,2	158,7	321,4	732,5	1 661,3	3 632,7	8 097,5	18 821,8
1970	2 142,4	84,5	41,3	127,7	157,4	314,5	730,0	1 658,8	3 582,7	8 004,4	16 344,9
<i>source: www.cdc.gov/nchs/data/dvs/mx196878.pdf and nchs/data/statab/gm290-98.pdf</i>											
1976	1 549,4	68,8	34,2	111,7	133,2	253,9	635,3	1 452,3	3 118,1	6 952,0	16 058,6
1977	1 432,6	67,6	34,0	114,8	132,8	247,3	621,2	1 408,5	3 044,1	6 755,7	15 369,0
1978	1 381,4	67,9	33,2	115,0	131,7	238,7	610,4	1 387,1	3 015,9	6 709,7	15 479,6
1979	1 332,9	64,2	31,5	114,8	133,0	229,8	589,7	1 338,0	2 929,0	6 496,6	14 962,4
<i>source: cdc.gov/nchs/data/nvsr/nvsr53/nvsr53_15.pdf page 7 of 40</i>											
2002 final	695,0	31,2	17,4	81,4	103,6	202,9	430,1	952,4	2 314,7	5 556,9	14 828,3
2003 preliminary	710,1	31,1	16,8	80,2	102,2	199,3	430,3	937,3	2 253,5	5 460,1	14 595,6

Cause: Influenza and Pneumonia

Year	<1	1-4	5-14	15-24	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74	75-84	85+
<i>source: www.cdc.gov/nchs/data/statab/hist290_0039.pdf (page 55 ff of 109)</i>											
1917	1 474,5	211,5	24,0	38,9	59,3	98,1	148,8	281,4	614,6	1 503,0	3 187,4
1918	2 273,3	718,0	176,2	580,5	992,6	554,8	347,8	381,9	646,3	1 179,0	2 230,6
1919	1 594,2	293,9	63,3	141,4	235,9	181,0	163,9	233,2	459,6	913,9	1 842,2
1920	1 495,0	283,7	45,1	101,3	180,6	164,0	164,9	255,8	545,9	1 194,3	2 379,1
excess of 1918-20 over 3 x 1917	939,0	661,1	212,6	706,5	1 231,2	605,5	230,2	26,7	-192,0	-1 221,8	-3 110,3

excess of 1918-20 over 3 x 1917 without 2nd dip

Year	<1	1-4	5-14	15-24	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74	75-84	85+
<i>source: www.cdc.gov/nchs/data/dvs/mx1950_59.pdf (p. 124)</i>											
1956	225,3	15,3	2,3	2,4	3,0	7,0	14,0	30,4	80,6	258,0	853,5
1957	239,9	18,3	3,8	5,5	5,6	10,2	20,6	44,3	106,9	298,6	979,8
1958	245,3	16,0	2,3	2,9	4,3	7,8	17,3	38,9	96,0	292,8	988,1
1959	239,2	15,3	2,5	2,7	3,8	7,7	15,5	33,5	86,5	281,6	924,3
<i>source: www.cdc.gov/nchs/data/dvs/mx196067.pdf (p. 124 of 216) and nchs/data/dvs/mx196878.pdf (p. 257-258 of 427)</i>											
1967	185,7	9,5	1,7	2,3	3,2	7,1	14,4	29,3	82,3	276,7	961,3
1968	234,9	9,9	1,8	2,8	4,4	9,3	19,9	41,9	106,0	330,7	1 187,8
1969	209,2	8,5	1,8	2,5	4,1	9,0	18,1	39,0	99,0	302,9	1 026,2
1970	180,8	7,6	1,6	2,4	3,8	8,5	17,3	36,2	90,2	272,8	814,5
<i>source: www.cdc.gov/nchs/data/dvs/mx196878.pdf (p. 257-58 of 427) and nchs/data/statab/gm290-98.pdf (p. 613-15 of 1005)</i>											
1976	63,0	3,8	1,0	1,5	2,4	5,4	11,6	25,9	69,9	274,3	994,6
1977	51,3	3,0	0,9	1,2	2,0	4,4	9,6	21,5	58,3	222,2	763,1
1978	46,1	2,9	0,8	1,3	2,1	4,4	10,0	23,5	58,3	244,6	884,3
1979	33,0	2,0	0,6	0,8	1,5	3,2	7,1	16,4	47,8	184,2	694,9

HOMMES											
	<1	1-4	5-14	15-24	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74	75-84	85+
Distribution Indice Composite (Aggregate Male and Female)	0,0000%	0,0697%	0,3735%	0,9576%	11,8096%	14,3149%	15,3314%	10,3110%	2,4843%	0,4090%	0,0000%
US Pop 1918	1,1501%	4,5413%	10,6271%	8,2465%	7,7785%	7,0159%	5,3726%	3,2720%	1,6927%	0,6618%	0,0000%
US Pop 2003	0,6960%	2,7840%	7,2107%	7,2876%	6,9488%	7,6161%	6,8926%	4,6060%	2,8728%	1,7743%	0,4961%
Age moyen		2	10	20	30	40	50	60	70	80	90
All Causes: Death Rates per 100,000 mid year population											
1917	11 736,4	1 119,3	269,9	496,0	708,4	1 006,7	1 547,5	2 933,5	6 110,9	12 899,2	25 107,1
1918	12 453,5	1 600,6	415,3	1 215,2	1 902,4	1 528,3	1 670,5	2 870,2	5 849,5	11 811,5	22 756,1
1919	10 190,2	973,5	283,4	530,3	744,2	905,3	1 290,3	2 444,2	5 194,7	11 096,7	22 958,9
1920	10 358,0	1 027,7	280,1	477,8	643,0	821,8	1 262,7	2 463,3	5 453,3	12 214,3	25 300,9
1956	3 201,3	118,8	56,8	167,3	191,6	370,7	964,1	2 288,7	4 762,2	10 078,0	20 045,3
1957	3 156,7	119,7	58,5	165,2	193,5	381,1	987,6	2 346,7	4 916,9	10 098,4	20 726,1
1958	3 163,9	119,3	55,7	154,6	188,0	373,1	977,1	2 298,1	4 852,4	10 135,3	20 833,4
1959	3 105,8	116,2	57,8	154,0	189,4	367,8	972,5	2 275,1	4 787,6	9 912,1	20 543,4
1967	2 586,3	99,4	50,3	170,6	204,5	393,4	969,1	2 279,0	4 875,4	9 935,5	21 339,4
1968	2 562,6	98,2	52,3	182,8	214,0	406,0	988,7	2 344,1	5 049,1	10 215,2	21 732,0
1969	2 484,5	95,5	51,5	191,6	217,2	410,7	967,9	2 291,0	4 934,9	10 068,3	20 875,6
1970	2 410,0	93,2	50,5	188,5	215,3	402,6	958,5	2 282,7	4 873,8	10 010,2	17 821,5
1976	1 715,0	76,9	41,9	164,8	187,0	329,8	837,7	1 981,6	4 331,4	9 077,8	18 666,5
1977	1 599,7	75,2	41,8	169,2	188,5	321,2	818,1	1 915,7	4 224,3	8 898,1	18 071,6
1978	1 532,8	76,7	40,5	169,4	186,8	311,6	802,1	1 884,5	4 181,5	8 835,6	18 211,8
1979	1 482,0	71,0	38,4	171,0	192,3	301,0	778,9	1 815,4	4 048,9	8 565,4	17 604,4
2002 final	761,5	35,2	20,0	117,3	142,2	257,5	547,5	1 184,0	2 855,3	6 760,5	16 254,5
2003 preliminary	788,6	34,8	19,6	114,4	139,5	252,3	548,0	1 160,2	2 771,2	6 632,9	15 774,7
Cause: Influenza and Pneumonia											
1917	1 665,0	224,1	24,6	51,0	79,1	130,8	188,3	313,5	608,4	1 369,4	3 028,7
1918	2 520,5	712,0	162,5	700,6	1 216,6	691,1	411,8	420,8	655,8	1 112,9	2 111,2
1919	1 785,1	301,4	59,0	142,5	232,8	204,3	181,9	244,0	444,7	836,4	1 717,5
1920	1 691,6	295,4	45,4	105,2	172,2	178,8	180,9	267,2	534,0	1 100,0	2 269,5
excess of 1918-20 over 3 x 1917	1 002,2	636,5	193,1	795,3	1 384,3	681,8	209,7	-8,5	-190,7	-1 058,9	-2 987,9
excess of 1918-20 over 3 x 1917 without 2nd dip	1 002,2	636,5	193,1	795,3	1 384,3	1 384,3	1 384,3	1 384,3	1 384,3	1 384,3	1 384,3
1956	248,0	15,9	2,3	2,7	3,4	8,4	18,9	42,6	106,8	311,8	930,0
1957	265,9	19,0	4,0	5,2	5,4	12,4	27,9	61,8	144,9	360,4	1 097,3
1958	271,4	16,2	2,3	3,3	4,8	10,0	23,6	54,7	131,7	361,0	1 107,0
1959	265,9	16,4	2,4	3,0	4,3	9,3	20,8	46,8	118,3	345,7	1 035,8
1967	184,6	10,7	1,8	2,7	3,6	9,0	19,9	41,3	119,2	363,1	1 150,2
1968	260,9	10,3	1,8	3,3	5,0	11,5	25,9	58,3	152,2	431,5	1 375,5
1969	235,3	9,3	1,8	2,9	4,4	10,7	23,7	54,0	142,3	406,0	1 214,4
1970	203,4	8,6	1,6	2,8	4,5	10,4	22,6	50,2	129,9	376,3	959,8
1976											
1977											
1978						not used					
1979	35,8	2,1	0,6	0,9	1,8	4,2	9,7	22,9	71,1	261,6	933,0

FEMMES											
	<1	1-4	5-14	15-24	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74	75-84	85+
Distribution Indice Composite (Aggregate Male and Female)	0,0000%	0,0653%	0,3571%	0,7791%	10,4951%	11,4212%	11,9091%	7,3487%	1,3674%	0,1679%	0,0280%
US Pop 1918	1,1094%	4,4444%	10,4294%	9,2628%	8,1554%	6,4317%	4,8004%	2,8864%	1,5929%	0,7286%	0,0000%
US Pop 2003	0,6652%	2,6607%	6,8729%	6,8909%	6,7524%	7,6511%	7,1391%	4,9652%	3,4356%	2,6554%	1,1265%
Age moyen		2	10	20	30	40	50	60	70	80	90
All Causes: Death Rates per 100,000 mid year population											
1917	9 147,2	1 011,5	241,8	442,4	587,4	785,1	1 202,0	2 398,6	5 336,1	11 921,1	24 205,7
1918	9 850,9	1 545,8	410,2	943,6	1 399,4	1 133,6	1 357,6	2 403,6	5 150,3	10 827,4	21 805,0
1919	7 974,8	881,4	255,0	532,9	759,9	814,1	1 154,6	2 162,1	4 795,0	10 496,2	21 676,0
1920	8 067,3	945,7	247,4	496,7	712,7	799,8	1 170,2	2 243,9	5 046,3	11 589,0	24 466,8
1956	2 431,7	101,3	37,7	66,1	108,4	233,9	534,1	1 223,7	2 956,1	7 750,5	18 662,3
1957	2 425,2	103,6	38,8	68,0	113,8	236,2	547,6	1 243,2	3 000,7	7 781,6	19 151,0
1958	2 452,5	103,8	37,2	61,8	108,4	227,9	535,9	1 212,7	2 940,2	7 738,9	19 103,3
1959	2 379,9	97,3	37,2	62,2	107,8	223,3	520,7	1 182,3	2 856,5	7 551,0	18 681,4
1967	1 983,8	78,9	32,8	64,1	101,5	230,4	517,0	1 092,6	2 629,8	6 811,0	18 037,0
1968	1 956,1	80,7	33,4	66,4	102,8	238,2	528,9	1 126,2	2 680,7	6 978,2	18 425,0
1969	1 903,8	80,2	33,4	68,4	102,6	237,0	513,0	1 094,6	2 615,2	6 775,4	17 710,1
1970	1 863,7	75,4	31,8	68,1	101,6	231,1	517,2	1 098,9	2 579,7	6 677,6	15 518,0
1976	1 375,2	60,4	26,1	57,7	80,5	181,1	447,1	983,8	2 188,8	5 668,4	14 833,6
1977	1 257,0	59,7	25,8	59,6	78,2	176,4	437,9	959,8	2 141,1	5 473,5	14 127,6
1978	1 222,7	58,8	25,6	59,6	77,5	168,6	431,7	948,2	2 125,3	5 444,1	14 245,0
1979	1 176,6	57,0	24,3	57,6	74,8	161,4	413,4	917,7	2 072,3	5 270,7	13 788,2
2002 final	625,3	27,0	14,7	43,7	64,0	148,8	316,9	738,0	1 664,7	4 757,9	14 209,6
2003 preliminary	628,0	27,2	13,9	44,0	63,7	146,6	316,8	730,6	1 820,8	4 676,5	14 074,4
Cause: Influenza and Pneumonia											
1917	1 279,5	198,6	23,3	27,0	38,6	62,4	104,0	246,2	620,9	1 624,1	3 307,3
1918	2 020,4	724,2	190,2	475,1	781,4	406,5	275,0	339,2	636,5	1 239,0	2 320,5
1919	1 399,0	286,2	67,7	140,3	238,9	155,5	143,4	221,4	475,1	984,2	1 935,4
1920	1 293,6	271,7	44,9	97,5	189,1	147,8	146,8	243,4	558,2	1 280,7	2 461,6
excess of 1918-20 over 3 x 1917	874,5	686,3	232,9	631,9	1 093,6	522,6	253,2	65,4	-192,9	-1 368,4	-3 204,4
excess of 1918-20 over 3 x 1917 without 2nd dip	874,5	686,3	232,9	631,9	1 093,6	1 093,6	1 093,6	1 093,6	1 093,6	1 093,6	1 093,6
1956	201,8	14,8	2,4	2,0	2,7	5,6	9,2	18,7	57,1	215,0	800,2
1957	212,9	17,7	3,7	5,8	5,7	8,1	13,4	27,7	73,1	249,4	899,6
1958	218,3	15,8	2,3	2,5	3,8	5,7	11,2	23,9	64,4	239,0	908,9
1959	211,6	14,1	2,5	2,4	3,4	6,1	10,3	21,0	58,8	231,6	851,4
1967	146,0	8,4	1,6	1,8	2,9	5,4	9,3	18,3	53,0	216,5	855,4
1968	207,8	9,5	1,8	2,4	3,9	7,3	14,3	27,1	69,6	261,7	1 055,1
1969	182,2	7,7	1,9	2,1	3,8	7,4	12,9	25,4	65,2	233,7	924,4
1970	157,4	6,6	1,6	2,1	3,2	6,6	12,3	23,6	59,3	204,4	733,2
1976											
1977											
1978											
1979	29,9	1,9	0,6	0,7	1,1	2,3	4,7	10,7	30,1	138,2	589,0

▪ **Grippe espagnole de 1918 (nombre de morts par 100,000)**

Total Death Rate for 1917	1554,05
Total Death Rate for 1918	1922,61
Total Death Rate for 1919	1412,58
Total Death Rate for 1920	1404,00
Influenza Death Rate for 1917	164,93
Influenza Death Rate for 1918	580,19
Influenza Death Rate for 1919	212,44
Influenza Death Rate for 1920	204,03
Excess Influenza Death Rate for 1918	415,25
Percentage Increase in Death Rate	26,72%
Excess Influenza Death Rate for 1918-20	501,86
Percentage Increase in Death Rate	32,2938%
Excess Influenza Death Rate for 1918-20 if no second di	1239,02
Percentage Increase in Death Rate	79,73%

▪ **Grippe espagnole de 1918 actualisée à 2003 (nombre de morts par 100,000)**

Taux de décès naturel basé sur mortalité américaine de 1917 et 2003 appliqué à tout le portefeuille de référence (indice composite) :

death rate per 100,000 for all causes	
1917	1 554,05
2003	505,34
ratio	32,52%

Taux de surmortalité due à grippe espagnole de 1918 (en 1918) : 501,86

Prise en compte du progrès médical à hauteur de 60% :

Partial credit factor 60%

	Weight	Excess Deaths per 100,000	Percentage of 2003 baseline mortality
Assumed extra deaths based on 1918 excess flu			
No benefit of modern public health and medicine	40%	415,25	82,17%
Proportional benefit of modern public health and medicine	60%	135,03	26,72%
Weighted Average	100%	247,12	48,90%
Assumed extra deaths based on 1918-20 excess flu			
No benefit of modern public health and medicine	40%	501,86	99,31%
Proportional benefit of modern public health and medicine	60%	163,19	32,29%
Weighted Average	100%	298,66	59,1007%

▪ **Grippe de 1957 (nombre de morts par 100,000)**

Total Death Rate for 1956	871,90
Total Death Rate for 1957	891,80
Total Death Rate for 1958	875,71
Total Death Rate for 1959	863,30
Average for 1959 and 1956	867,60
Influenza Death Rate for 1956	17,66
Influenza Death Rate for 1957	25,11
Influenza Death Rate for 1958	21,77
Influenza Death Rate for 1959	19,55
Average for 1959 and 1956	18,60
Excess Influenza Death Rate for 1957	6,51
Excess Influenza Death Rate for 1958	3,17
Sum of Excess Death Rate for 1957 & 1958	9,67
Percentage Increase in Death Rate	1,1093%

- **Grippe de 2003 (nombre de morts par 100,000)**

2003 SARS	
Nb deaths due to SARS	299
Total HKG population	6 900 000
Excess Influenza Death Rate for SARS	4,33
Total Death Rate for Index	505,34
Percentage Increase in Death Rate	0,8575%

- **Grippe de 1968 (nombre de morts par 100,000)**

Total Death Rate for 1967	859,61
Total Death Rate for 1968	883,86
Total Death Rate for 1969	867,09
Influenza Death Rate for 1967	18,24
Influenza Death Rate for 1968	24,47
Excess Influenza Death Rate for 1968	6,23
Percentage Increase in Death Rate	0,7247%

- **Grippe de 1977 (nombre de morts par 100,000)**

1977 Epidemic	
Nb deaths due to SARS	10 000
Total US population 1977	221 411 985
Total HKG population	4,52
Total Death Rate for Index	728,41
Percentage Increase in Death Rate	0,6200%

- **Synthèse des déviations de mortalité calibrées sur ces historiques**

Mortalité de base (2003)		0,5053%			
<u>Année</u>	<u>% Déviation</u>	<u>Population</u>	<u>Nbre morts excédent</u>	<u>gx équivalent</u>	<u>Percentile distribution</u>
1918 ajusté	59,101%	103 208 000	308 242	0,2987%	0,00%
1918	32,294%	103 208 000	168 430	0,1632%	3,23%
1957	1,109%	170 923 962	9 582	0,0056%	27,42%
2003	0,858%	6 900 000	299	0,0043%	51,61%
1968	0,725%	198 506 260	7 270	0,0037%	75,81%
1977	0,620%	219 570 149	6 880	0,0031%	100,00%

3 – Estimation de la courbe de sévérité

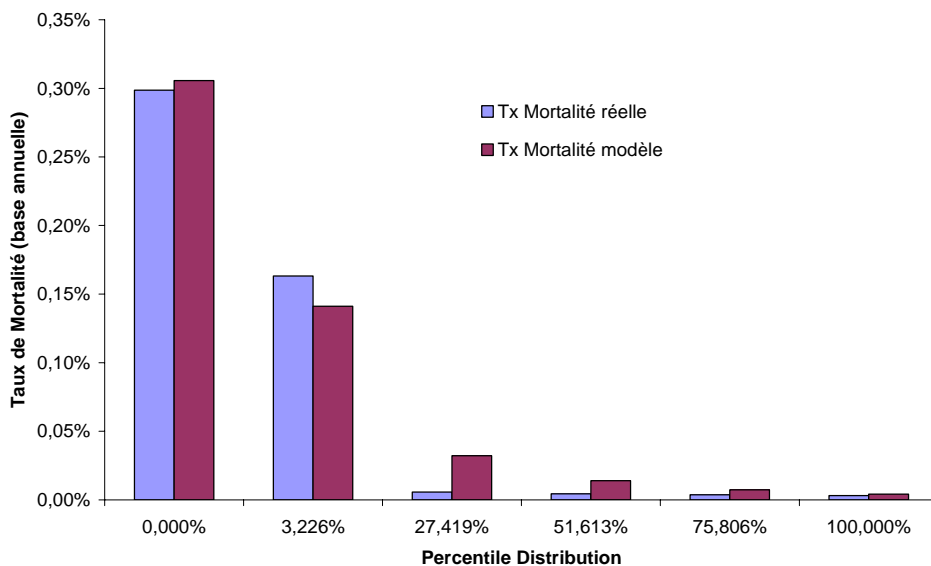
▪ Essai 1

	Tx Surmortalité	Percentile	Déviatiion "historique"	Tx Surmortalité estimée	Ecart quadratique	Réalisée	Modélisée	SSE	SST	SSR
	0,29866%	0,00%	59,10%	0,30563%	0,00000%	59,10%	60,48%	0,000000%	0,000479%	
	0,16319%	3,23%	32,29%	0,14122%	0,000005%	32,29%	27,95%	0,000005%	0,000070%	
	0,00561%	27,42%	1,11%	0,03219%	0,000007%	1,11%	6,37%	0,000007%	0,000055%	
	0,00433%	51,61%	0,86%	0,01393%	0,000001%	0,86%	2,76%	0,000001%	0,000057%	
	0,00366%	75,81%	0,72%	0,00724%	0,000000%	0,72%	1,43%	0,000000%	0,000058%	
	0,00313%	100,00%	0,62%	0,00415%	0,000000%	0,62%	0,82%	0,000000%	0,000059%	
					223,87			0,000013%	0,000777%	0,000764%
					= a * EXP (b * SQRT(x))				R² =	98,27%
# pandémies	31	a	0,003056	0,50%						
années	420	b	-4,29837							
fréquence	7,38%	c	0,505%							

	Percentile	Déviatiion "historique"	Déviatiion estimée	Percentile	Tx Mortalité réelle	Tx Mortalité modèle
	0,00%			0,00%	0,29866%	0,30563%
	3,23%			3,23%	0,16319%	0,14122%
	27,42%			27,42%	0,00561%	0,03219%
	51,61%			51,61%	0,00433%	0,01393%
	75,81%			75,81%	0,00366%	0,00724%
	100,00%			100,00%	0,00313%	0,00415%

Période de retour (ans)	Percentile	Déviatiion "historique"	Déviatiion estimée
27 096,8	0,05%		
13 548,4	0,10%		
6 774,2	0,20%		
4 516,1	0,30%		
3 387,1	0,40%		
3 010,8	0,45%		45,3292%
2 709,7	0,50%		44,6276%
420,0	3,23%	32,29%	27,9463%
49,4	27,42%	1,11%	6,3695%
26,3	51,61%	0,86%	2,7573%
17,9	75,81%	0,72%	1,4331%
13,5	100,00%	0,62%	0,8219%

Période de retour (ans)	Percentile	Déviatiion estimée	Taux de surmortalité
#DIV/0!	0,00%	60,4789%	3,0563%
27 097	0,05%	54,9366%	2,7762%
13 548	0,10%	52,7924%	2,6678%
9 032	0,15%	51,2041%	2,5876%
6 774	0,20%	49,9022%	2,5218%
5 419	0,25%	48,7827%	2,4652%
4 516	0,30%	47,7922%	2,4151%
3 871	0,35%	46,8991%	2,3700%
3 387	0,40%	46,0829%	2,3288%
3 011	0,45%	45,3292%	2,2907%
2 710	0,50%	44,6276%	2,2552%
2 463	0,55%	43,9705%	2,2220%
2 258	0,60%	43,3516%	2,1907%
2 084	0,65%	42,7662%	2,1612%
1 935	0,70%	42,2104%	2,1331%
1 806	0,75%	41,6810%	2,1063%
1 694	0,80%	41,1752%	2,0808%
1 594	0,85%	40,6909%	2,0563%
1 505	0,90%	40,2261%	2,0328%
1 426	0,95%	39,7791%	2,0102%



Essai 2

Tx Surmortalité	Percentile	Déviatiion "historique"	Tx Surmortalité estimée	Ecart quadratique	Réalisée	Modélisée	SSE	SST	SSR
0,29866%	0,00%	59,10%	0,29848%	0,000000%	59,10%	59,07%	0,000000%	0,000479%	
0,16319%	3,23%	32,29%	0,16356%	0,000000%	32,29%	32,37%	0,000000%	0,000070%	
0,00561%	27,42%	1,11%	0,00180%	0,000000%	1,11%	0,36%	0,000000%	0,000055%	
0,00433%	51,61%	0,86%	0,00002%	0,000000%	0,86%	0,00%	0,000000%	0,000057%	
0,00366%	75,81%	0,72%	0,00000%	0,000000%	0,72%	0,00%	0,000000%	0,000058%	
0,00313%	100,00%	0,62%	0,00000%	0,000000%	0,62%	0,00%	0,000000%	0,000059%	
				9,42			0,000001%	0,000777%	0,000777%

pandémies
années
fréquence

31
420
7,38%

a
b
c

0,002985
-18,64800
0,505%

0,50%

y = a * EXP (b * x)

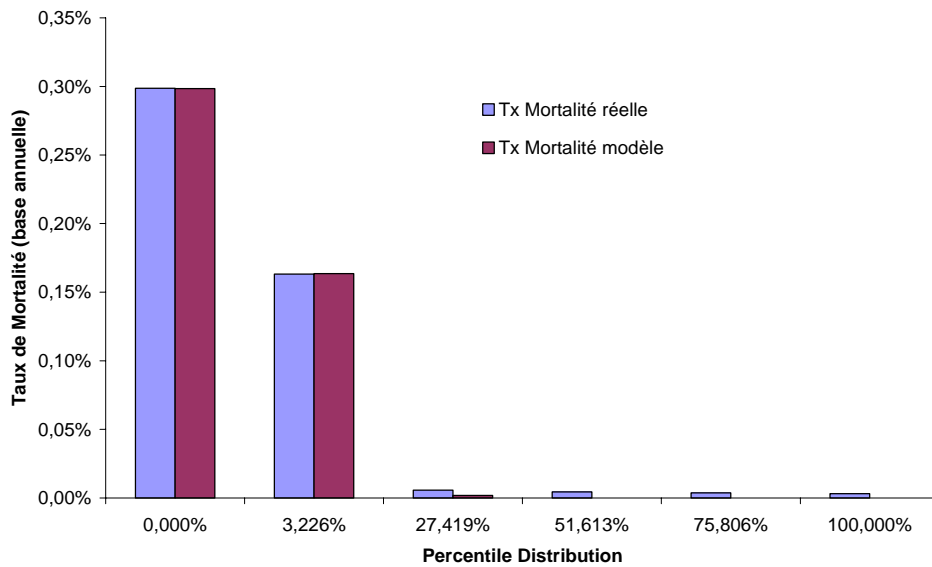
R² =

99,93%

Période de retour (ans)	Percentile	Déviatiion "historique"	Déviatiion estimée
27 096,8	0,05%		
13 548,4	0,10%		
6 774,2	0,20%		
4 516,1	0,30%		
3 387,1	0,40%		
3 010,8	0,45%		54,3115%
2 709,7	0,50%		53,8075%
420,0	3,23%	32,29%	32,3659%
49,4	27,42%	1,11%	0,3554%
26,3	51,61%	0,86%	0,0039%
17,9	75,81%	0,72%	0,0000429%
13,5	100,00%	0,62%	0,0000005%

Percentile	Tx Mortalité réelle	Tx Mortalité modèle
0,00%	0,29866%	0,29848%
3,23%	0,16319%	0,16356%
27,42%	0,00561%	0,00180%
51,61%	0,00433%	0,00002%
75,81%	0,00366%	0,00000%
100,00%	0,00313%	0,00000%

Période de retour (ans)	Percentile	Déviatiion estimée	Taux de surmortalité
#DIV/0!	0,00%	59,0658%	2,9848%
27 097	0,05%	58,5177%	2,9571%
13 548	0,10%	57,9746%	2,9297%
9 032	0,15%	57,4365%	2,9025%
6 774	0,20%	56,9035%	2,8756%
5 419	0,25%	56,3754%	2,8489%
4 516	0,30%	55,8522%	2,8224%
3 871	0,35%	55,3338%	2,7963%
3 387	0,40%	54,8203%	2,7703%
3 011	0,45%	54,3115%	2,7446%
2 710	0,50%	53,8075%	2,7191%
2 463	0,55%	53,3081%	2,6939%
2 258	0,60%	52,8134%	2,6689%
2 084	0,65%	52,3232%	2,6441%
1 935	0,70%	51,8376%	2,6196%
1 806	0,75%	51,3566%	2,5953%
1 694	0,80%	50,8799%	2,5712%
1 594	0,85%	50,4077%	2,5473%
1 505	0,90%	49,9399%	2,5237%
1 426	0,95%	49,4764%	2,5003%



Essai 3

Tx Surmortalité	Percentile	Déviatiion "historique"	Tx Surmortalité estimée	Ecart quadratique	Réalisée	Modélisée	SSE	SST	SSR
0,29866%	0,00%	59,10%	0,30116%	0,000000%	59,10%	59,59%	0,000000%	0,000479%	
0,16319%	3,23%	32,29%	0,15246%	0,000001%	32,29%	30,17%	0,000001%	0,000070%	
0,00561%	27,42%	1,11%	0,03018%	0,000006%	1,11%	5,97%	0,000006%	0,000055%	
0,00433%	51,61%	0,86%	0,01379%	0,000001%	0,86%	2,73%	0,000001%	0,000057%	
0,00366%	75,81%	0,72%	0,00587%	0,000000%	0,72%	1,16%	0,000000%	0,000058%	
0,00313%	100,00%	0,62%	0,00000%	0,000000%	0,62%	0,00%	0,000000%	0,000059%	
				138,24			0,000008%	0,000777%	0,000769%

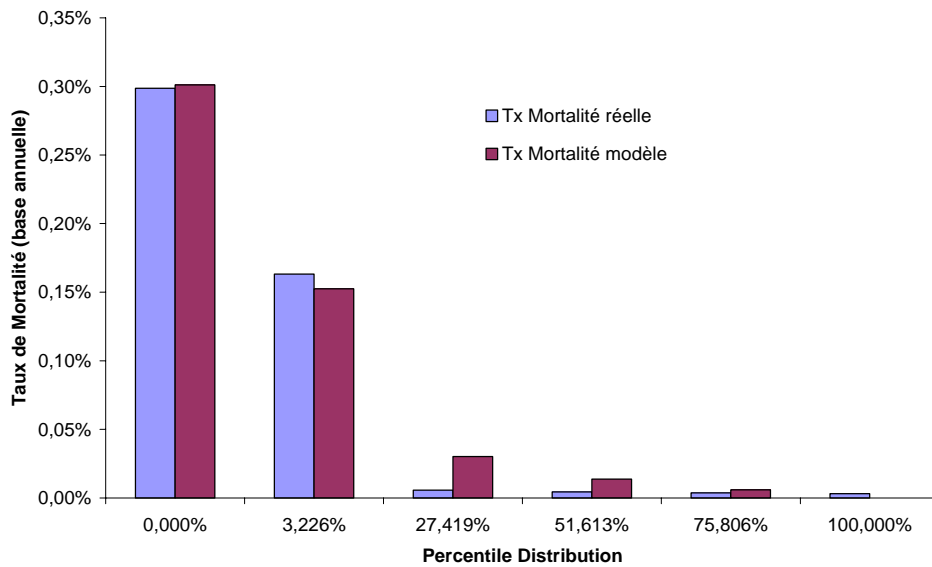
pandémies : 31
 années : 420
 fréquence : 7,38%

a = 0,000152 b = 1,520264 c = 0,505% y = a * TAN (b * (1-x)) R² = 98,93%

Période de retour (ans)	Percentile	Déviatiion "historique"	Déviatiion estimée
27 096,8	0,05%		
13 548,4	0,10%		
6 774,2	0,20%		
4 516,1	0,30%		
3 387,1	0,40%		
3 010,8	0,45%		52,4758%
2 709,7	0,50%		51,7881%
420,0	3,23%	32,29%	30,1695%
49,4	27,42%	1,11%	5,9723%
26,3	51,61%	0,86%	2,7279%
17,9	75,81%	0,72%	1,1614%
13,5	100,00%	0,62%	0,0000%

Percentile	Tx Mortalité réelle	Tx Mortalité modèle
0,00%	0,29866%	0,30116%
3,23%	0,16319%	0,15246%
27,42%	0,00561%	0,03018%
51,61%	0,00433%	0,01379%
75,81%	0,00366%	0,00587%
100,00%	0,00313%	0,00000%

Période de retour (ans)	Percentile	Déviatiion estimée	Taux de surmortalité
#DIV/0!	0,00%	59,5947%	3,0116%
27 097	0,05%	58,7100%	2,9669%
13 548	0,10%	57,8511%	2,9235%
9 032	0,15%	57,0170%	2,8813%
6 774	0,20%	56,2065%	2,8404%
5 419	0,25%	55,4186%	2,8005%
4 516	0,30%	54,6525%	2,7618%
3 871	0,35%	53,9072%	2,7242%
3 387	0,40%	53,1819%	2,6875%
3 011	0,45%	52,4758%	2,6518%
2 710	0,50%	51,7881%	2,6171%
2 463	0,55%	51,1182%	2,5832%
2 258	0,60%	50,4653%	2,5502%
2 084	0,65%	49,8288%	2,5181%
1 935	0,70%	49,2082%	2,4867%
1 806	0,75%	48,6027%	2,4561%
1 694	0,80%	48,0119%	2,4262%
1 594	0,85%	47,4352%	2,3971%
1 505	0,90%	46,8722%	2,3687%
1 426	0,95%	46,3224%	2,3409%



Essai 4

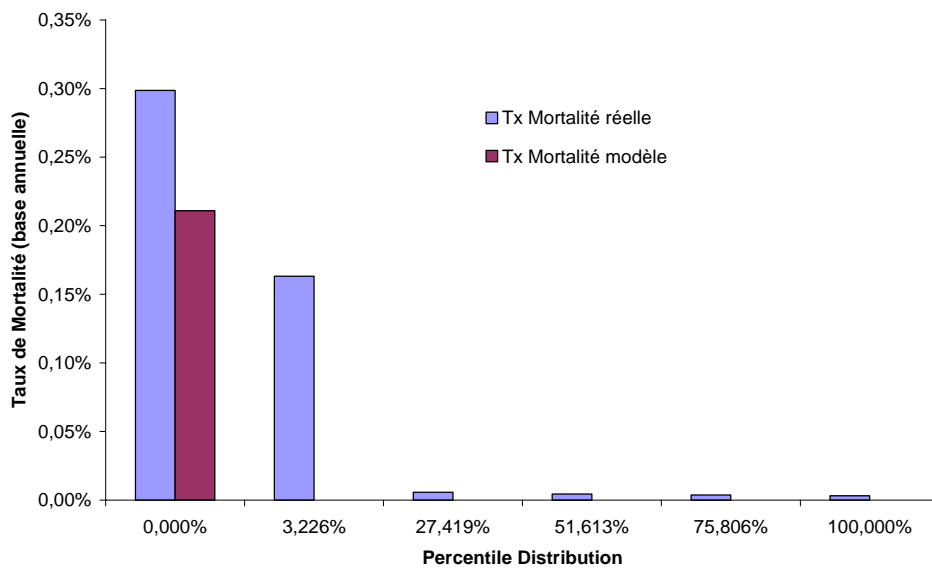
Tx Surmortalité	Percentile	Déviati on "historique"	Tx Surmortalité estimée	Ecart quadratique	Réalisée	Modélisée	SSE	SST	SSR
0,29866%	0,00%	59,10%	0,21100%	0,000077%	59,10%	41,75%	0,000077%	0,000479%	
0,16319%	3,23%	32,29%	0,00000%	0,000266%	32,29%	0,00%	0,000266%	0,000070%	
0,00561%	27,42%	1,11%	0,00000%	0,000000%	1,11%	0,00%	0,000000%	0,000055%	
0,00433%	51,61%	0,86%	0,00000%	0,000000%	0,86%	0,00%	0,000000%	0,000057%	
0,00366%	75,81%	0,72%	0,00000%	0,000000%	0,72%	0,00%	0,000000%	0,000058%	
0,00313%	100,00%	0,62%	0,00000%	0,000000%	0,62%	0,00%	0,000000%	0,000059%	
				5731,60			0,000344%	0,000777%	0,000433%

# pandémies	31	a	0,000000	0,50%	y = a / (x^b)	R² =	55,76%
années	420	b	1,226709				
fréquence	7,38%	c	0,505%	0,00000%			

Période de retour (ans)	Percentile	Déviati on "historique"	Déviati on estimée
27 096,8	0,05%		
13 548,4	0,10%		
6 774,2	0,20%		
4 516,1	0,30%		
3 387,1	0,40%		
3 010,8	0,45%		0,00001%
2 709,7	0,50%		0,00001%
420,0	3,23%	32,29%	0,00000%
49,4	27,42%	1,11%	0,00000%
26,3	51,61%	0,86%	0,00000%
17,9	75,81%	0,72%	0,00000%
13,5	100,00%	0,62%	0,00000%

Percentile	Tx Mortalité réelle	Tx Mortalité modèle
0,00%	0,29866%	0,21100%
3,23%	0,16319%	0,00000%
27,42%	0,00561%	0,00000%
51,61%	0,00433%	0,00000%
75,81%	0,00366%	0,00000%
100,00%	0,00313%	0,00000%

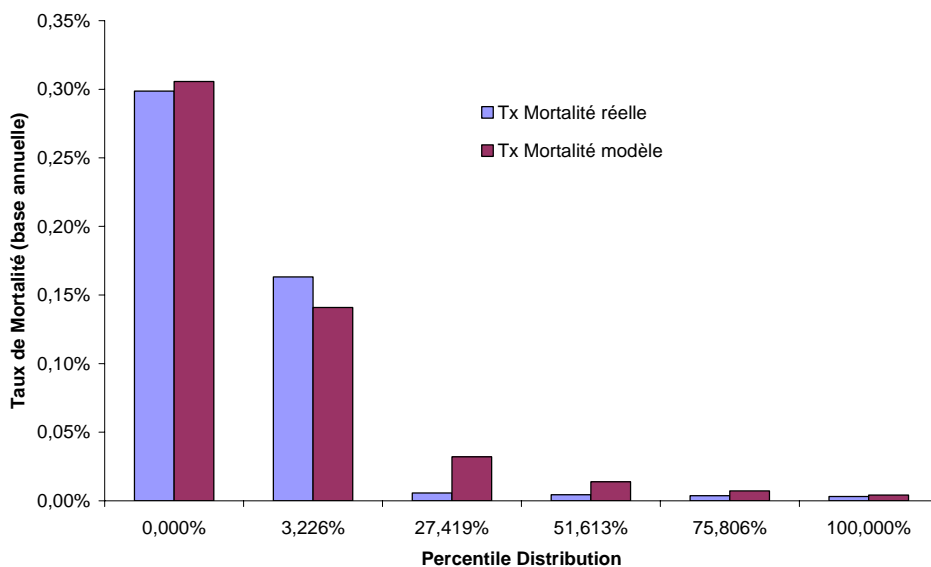
Période de retour (ans)	Percentile	Déviati on estimée	Taux de surmortalité
#DIV/0!	0,00%	#DIV/0!	#DIV/0!
27 097	0,05%	0,00010%	0,0000%
13 548	0,10%	0,00004%	0,0000%
9 032	0,15%	0,00003%	0,0000%
6 774	0,20%	0,00002%	0,0000%
5 419	0,25%	0,00001%	0,0000%
4 516	0,30%	0,00001%	0,0000%
3 871	0,35%	0,00001%	0,0000%
3 387	0,40%	0,00001%	0,0000%
3 011	0,45%	0,00001%	0,0000%
2 710	0,50%	0,00001%	0,0000%
2 463	0,55%	0,00001%	0,0000%
2 258	0,60%	0,00000%	0,0000%
2 084	0,65%	0,00000%	0,0000%
1 935	0,70%	0,00000%	0,0000%
1 806	0,75%	0,00000%	0,0000%
1 694	0,80%	0,00000%	0,0000%
1 594	0,85%	0,00000%	0,0000%
1 505	0,90%	0,00000%	0,0000%
1 426	0,95%	0,00000%	0,0000%



▪ Calibration finale

	Tx Surmortalité	Percentile	Déviati on "historique"	Déviati on estimée	Ecart quadratique	Réalisée	Modélisée	SSE	SST	SSR
	0,2987%	0,00%	59,10%	60,48%	0,018992%	59,10%	60,48%	0,000000%	0,000479%	
	0,1632%	3,23%	32,29%	27,89%	0,193806%	32,29%	27,89%	0,000005%	0,000070%	
	0,0056%	27,42%	1,11%	6,33%	0,273037%	1,11%	6,33%	0,000007%	0,000055%	
	0,0043%	51,61%	0,86%	2,74%	0,035311%	0,86%	2,74%	0,000001%	0,000057%	
	0,0037%	75,81%	0,72%	1,42%	0,004835%	0,72%	1,42%	0,000000%	0,000058%	
	0,0031%	100,00%	0,62%	0,81%	0,000374%	0,62%	0,81%	0,000000%	0,000059%	
					8 789 247,99			0,000013%	0,000777%	0,000764%
# pandémie s	31	a	0,003056	0,50%					R² =	98,27%
années	420	b	-4,30885							
fréquence	7,38%	c	0,505%	44,5946%						
		d	13 193,64		CommandBut					
		e	90							
Période de retour (ans)	Percentile	Déviati on "historique"	Déviati on estimée	Déviati on asymptotique	Taux de surmortalité			Percentile	Tx Mortalité réelle	Tx Mortalité modèle
27 096,8	0,05%			864,69%	43,6967%			0,00%	0,29866%	0,30563%
13 548,4	0,10%			426,57%	21,5561%			3,23%	0,16319%	0,14096%
6 774,2	0,20%			201,56%	10,1857%			27,42%	0,00561%	0,03201%
4 516,1	0,30%			120,96%	6,1127%			51,61%	0,00433%	0,01383%
3 387,1	0,40%			75,97%	3,8393%			75,81%	0,00366%	0,00718%
3 010,8	0,45%		60,48%	59,21%	2,9920%			100,00%	0,00313%	0,00411%
2 709,7	0,50%		44,59%	44,59%	2,2533%					
420,0	3,23%	32,29%	27,89%		1,4086%					
49,4	27,42%		6,33%		0,3201%					
26,3	51,61%		2,74%		0,1383%					
17,9	75,81%		1,42%		0,0718%					
13,5	100,00%		0,81%		0,0411%					

Période de retour (ans)	Percentile	Déviati on queue distribution	Taux de surmortalité
27 097	0,05%	864,69%	43,6967%
13 548	0,10%	426,57%	21,5561%
9 032	0,15%	277,91%	14,0438%
6 774	0,20%	201,56%	10,1857%
5 419	0,25%	154,08%	7,7863%
4 516	0,30%	120,96%	6,1127%
3 871	0,35%	95,97%	4,8498%
3 387	0,40%	75,97%	3,8393%
3 011	0,45%	59,21%	2,9920%
2 710	0,50%	44,59%	2,2533%
2 463	0,55%	43,94%	2,2203%
2 258	0,60%	43,32%	2,1890%
2 084	0,65%	42,73%	2,1593%
1 935	0,70%	42,17%	2,1312%
1 806	0,75%	41,64%	2,1044%
1 694	0,80%	41,14%	2,0788%
1 594	0,85%	40,65%	2,0543%
1 505	0,90%	40,19%	2,0308%
1 426	0,95%	39,74%	2,0082%
1 355	1,00%	39,31%	1,9864%



*

* *

ANNEXE E – ANALYSE DES SÉRIES TEMPORELLES & REGRESSIONS COBB-DOUGLAS

1 – Séries Temporelles AR(p) sur données historiques de mortalité

- **Tests mis en œuvre**

L'ensemble des tests ci-dessous est mis en œuvre dans le cadre d'un modèle de régression multiple avec constante que l'on peut résumer ainsi sous forme matricielle :

$$\begin{cases} Y = X \cdot b + C + u \\ u \propto N_n(0, \sigma^2 \cdot I_n) \end{cases} \text{ avec } k \text{ variables exogènes observées sur un échantillon de taille } n; X \text{ est la}$$

matrice (n, k) des données exogènes constituée des valeurs X_1, \dots, X_k pour l'individu i de l'échantillon n :

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & \dots & X_{j1} & \dots & X_{k1} \\ X_{12} & \dots & & & \\ \dots & & X_{ji} & & \dots \\ \dots & & & & \\ X_{1n} & \dots & X_{jn} & \dots & X_{kn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C \text{ un vecteur constant}$$

Dans l'analyse effectuée, les X_{ji} sont les opérateurs retard de l'endogène X_i puisque le modèle testé est un modèle autorégressif multiple. Le modèle multiple s'écrit donc :

$$\begin{cases} Y_i = \sum_{j=1}^k b_j \cdot X_{ji} + C + u_i & i \in \{1; n\} \\ E(u_i) = 0 & V(u_i) = \sigma^2 & E(u_i \cdot u_h) = 0 & i \neq h \end{cases}$$

(i) *Test de Fischer*

Ce test de significativité sur l'ensemble des paramètres du modèle consiste à postuler les hypothèses :

$$\begin{cases} H_0 : b = b^0 \\ H_1 : b \neq b^0 \end{cases} \quad b^0 \text{ étant un point donné de } \mathfrak{R}^k$$

Au seuil critique α , on accepte l'hypothèse H_0 si :

$$\frac{(\hat{b} - b^0)' \cdot X \cdot X \cdot (\hat{b} - b^0)}{k \cdot \hat{\sigma}^2} < f_{1-\alpha}(k-1; n-k-1) \quad \text{où} \quad f_{1-\alpha}(k-1; n-k-1) \text{ est le fractile}$$

d'ordre $1 - \alpha$ de la loi Fisher – Snedecor $F(k-1; n-k-1)$. Les valeurs de $f_{1-\alpha}$ sont représentées graphiquement.

(ii) *Test de Student*

Ce test de significativité sur chaque paramètre du modèle consiste à postuler les hypothèses :

$$\begin{cases} H_0 : b_j = b_j^0 \\ H_1 : b_j \neq b_j^0 \end{cases} \text{ pour } j = \{1; k\} \quad ; \text{ on note } v_j \text{ le terme diagonal } (j, j) \text{ de } (X'X)^{-1}$$

Au seuil critique α , on accepte l'hypothèse H_0 si :

$$\frac{(\hat{b}_j - b_j^0)}{\hat{\sigma} / \sqrt{v_j}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-k-1) \quad \text{où } t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-k-1) \text{ est le fractile d'ordre } 1 - \alpha / 2 \text{ de la loi Student } (n-k-1).$$

Les résultats de cette analyse sont proposés dans les copies d'écran des fichiers Excel ayant servi au modèle de régressions des taux de mortalité pour la France, le Japon et les USA.

(iii) *Test de normalité des résidus*

Le test mis en œuvre pour valider l'hypothèse de normalité de distribution des résidus est un test du Chi-deux utilisé en tant que test d'adéquation à une loi donnée.

En notant de manière synthétique $D(\hat{p}, p)$ la distance entre les distributions p (théorique) et \hat{p} empirique centrée en p , on suppose que si X suit la loi théorique F alors la distance D doit être « petite ».

On construit ainsi le test d'hypothèse suivant :

$$\begin{cases} H_0 : X \propto F \\ H_1 : X \neq F \end{cases} \quad \text{avec pour région critique au seuil } \alpha : \begin{cases} W = \{u_1, \dots, u_k\} : D(\hat{p}, p) < c \\ P_F(W) = 1 - \alpha \end{cases}$$

Avec une classification fondée sur les m multiples d'écart-type de la loi $N(\mu, \sigma)$, on cherche à identifier la normalité des deux paramètres moyenne et écart-type estimés dans la régression, soit un nombre final de degrés de liberté égal à $m - (k = 2) - 1$.

On accepte l'hypothèse de normalité des résidus si la statistique D sur l'échantillon W est inférieure à la statistique de test c .

Nous présentons ci-après les résultats analytiques de ce test et proposons une représentation graphique de l'adéquation à la fonction de répartition théorique d'une loi $N(\mu, \sigma)$.

(iv) *Test d'hypothèse nulle de la moyenne des résidus*

Avec σ connu, le test repose sur la variable de décision \bar{X} . Ainsi pour $H_0 : m = m_0$ contre $H_1 : m = m_1$ avec $m_1 > m_0$, la région critique est définie par $\bar{X} > k$. La variable k se détermine en considérant que :

$$\bar{X} \propto LG\left(m; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{alors} \quad \Pr(\bar{X} > k | m_0) = \Pr\left(U > \frac{k - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \alpha$$

Avec σ inconnu, la variable de décision est la variable de Student T_{n-1} :

$$T_{n-1} = \frac{\bar{X} - m}{S} \cdot \sqrt{n-1}$$

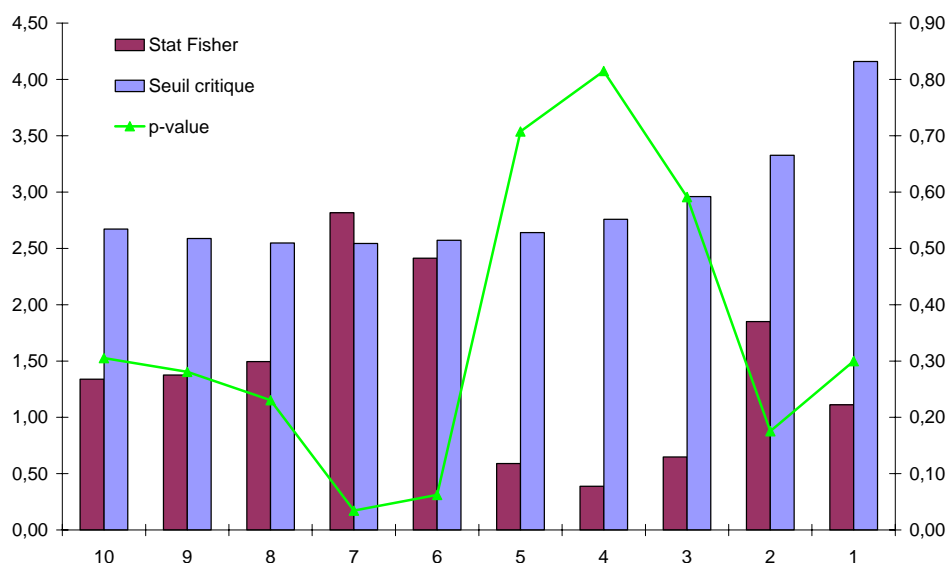
Ainsi pour $H_0 : m = m_0$ contre $H_1 : m \neq m_0$, la région critique est définie par :

$$|T_{n-1}| > k \quad \text{avec} \quad T_{n-1} = \frac{\bar{X} - m_0}{S} \cdot \sqrt{n-1}.$$

Au seuil critique α , on rejette l'hypothèse H_0 si la statistique de test $t > T_{n-1}$.

- **Résultats des tests mis en œuvre**

- **France**

(i) *Test de Fischer*

(ii) Test de Student

Date	FR	t0	t-1	t-2	t-3	t-4	t-5	t-6	t-7	t-8	t-9	t-10	var estimée (x)	estimate	réel	Résidus
1968	0,4780%															
1970	0,4452%	6,863%														
1971	0,4514%	-1,393%	6,863%													
1972	0,4520%	-0,141%	-1,393%	6,863%												
1973	0,4417%	2,282%	-0,141%	-1,393%	6,863%											
1974	0,4365%	1,174%	2,282%	-0,141%	-1,393%	6,863%										
1975	0,4331%	0,775%	1,174%	2,282%	-0,141%	-1,393%	6,863%									
1976	0,4325%	0,140%	0,775%	1,174%	2,282%	-0,141%	-1,393%	6,863%					0,838%	0,4295%	0,4325%	-0,0030%
1977	0,4164%	3,734%	0,140%	0,775%	1,174%	2,282%	-0,141%	-1,393%	3,298%	0,4183%	0,4164%					0,0019%
1978	0,4125%	0,933%	3,734%	0,140%	0,775%	1,174%	2,282%	-0,141%	2,255%	0,4070%	0,4125%					-0,0055%
1979	0,4119%	0,136%	0,933%	3,734%	0,140%	0,775%	1,174%	2,282%	1,083%	0,4080%	0,4119%					-0,0039%
1980	0,4049%	1,718%	0,136%	0,933%	3,734%	0,140%	0,775%	1,174%	2,810%	0,4004%	0,4049%					-0,0045%
1981	0,3970%	1,944%	1,718%	0,136%	0,933%	3,734%	0,140%	0,775%	1,876%	0,3973%	0,3970%					0,0003%
1982	0,3924%	1,147%	1,944%	1,718%	0,136%	0,933%	3,734%	0,140%	1,536%	0,3909%	0,3924%					-0,0015%
1983	0,3910%	0,361%	1,147%	1,944%	1,718%	0,136%	0,933%	3,734%	1,207%	0,3877%	0,3910%					-0,0033%
1984	0,3827%	2,136%	0,361%	1,147%	1,944%	1,718%	0,136%	0,933%	2,392%	0,3817%	0,3827%					-0,0010%
1985	0,3781%	1,180%	2,136%	0,361%	1,147%	1,944%	1,718%	0,136%	2,170%	0,3744%	0,3781%					-0,0038%
1986	0,3705%	2,016%	1,180%	2,136%	0,361%	1,147%	1,944%	1,718%	1,302%	0,3732%	0,3705%					0,0027%
1987	0,3572%	3,594%	2,016%	1,180%	2,136%	0,361%	1,147%	1,944%	1,981%	0,3632%	0,3572%					0,0060%
1988	0,3509%	1,755%	3,594%	2,016%	1,180%	2,136%	0,361%	1,147%	1,684%	0,3512%	0,3509%					0,0003%
1989	0,3471%	1,096%	1,755%	3,594%	2,016%	1,180%	2,136%	0,361%	1,699%	0,3450%	0,3471%					-0,0021%
1990	0,3389%	2,355%	1,096%	1,755%	3,594%	2,016%	1,180%	2,136%	1,526%	0,3418%	0,3389%					0,0029%
1991	0,3351%	1,121%	2,355%	1,096%	1,755%	3,594%	2,016%	1,180%	1,089%	0,3352%	0,3351%					0,0001%
1992	0,3313%	1,134%	1,121%	2,355%	1,096%	1,755%	3,594%	2,016%	0,579%	0,3332%	0,3313%					0,0019%
1993	0,3294%	0,580%	1,134%	1,121%	2,355%	1,096%	1,755%	3,594%	0,982%	0,3281%	0,3294%					-0,0013%
1994	0,3239%	1,684%	0,580%	1,134%	1,121%	2,355%	1,096%	1,755%	1,485%	0,3245%	0,3239%					0,0007%
1995	0,3180%	1,792%	1,684%	0,580%	1,134%	1,121%	2,355%	1,096%	1,801%	0,3180%	0,3180%					0,0000%
1996	0,3112%	2,152%	1,792%	1,684%	0,580%	1,134%	1,121%	2,355%	1,340%	0,3138%	0,3112%					0,0026%
1997	0,2982%	4,183%	2,152%	1,792%	1,684%	0,580%	1,134%	1,121%	2,102%	0,3047%	0,2982%					0,0065%
1998	0,2925%	1,922%	4,183%	2,152%	1,792%	1,684%	0,580%	1,134%	1,765%	0,2929%	0,2925%					0,0005%
1999	0,2885%	1,357%	1,922%	4,183%	2,152%	1,792%	1,684%	0,580%	1,456%	0,2882%	0,2885%					-0,0003%
2000	0,2840%	1,545%	1,357%	1,922%	4,183%	2,152%	1,792%	1,684%	1,526%	0,2841%	0,2840%					0,0001%
2001	0,2843%	-0,111%	1,545%	1,357%	1,922%	4,183%	2,152%	1,792%	0,639%	0,2822%	0,2843%					-0,0021%
2002	0,2823%	0,709%	-0,111%	1,545%	1,357%	1,922%	4,183%	2,152%	0,556%	0,2828%	0,2823%					0,0004%
2003	0,2783%	1,433%	0,709%	-0,111%	1,545%	1,357%	1,922%	4,183%	0,771%	0,2802%	0,2783%					0,0019%
Forecast	1,464%	1,433%	0,709%	-0,111%	1,545%	1,357%	1,922%		1,4635%	0,27421%						1
	2,081%	1,464%	1,433%	0,709%	-0,111%	1,545%	1,357%		2,0808%	0,26851%						2
	2,274%	2,081%	1,464%	1,433%	0,709%	-0,111%	1,545%		2,2741%	0,26240%						3
	2,419%	2,274%	2,081%	1,464%	1,433%	0,709%	-0,111%		2,4186%	0,25605%						4

Nbval = 28

Paramètres	a6	a5	a4	a3	a2	a1	a0	Résidus		p-value	alpha
	Moy	STD	Moy	STD							
STD	0,1281013	0,15541024	0,18266327	0,18503948	0,17327103	0,17676923	0,00748147	0,0333			1,960
R2 et Var globale	0,40807944	0,00903936	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	-0,00014%	0,00289%		
F	2,41295557	21	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	v1	v2	0,06231081	5,00%
SS Reg	0,00118298	0,00171591	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	6,0000	21,0000	CHECK	

T-test	3,3255	1,8237	1,5653	0,6003	1,0614	0,3305	4,4576	Seuil critique Student		Seuil critique Fisher	
p-value	0,003212	0,082461	0,132466	0,554709	0,300561	0,744272	0,000218				
Décision	Significatif	N/S	N/S	N/S	N/S	N/S	Significatif	2,0796			2,5727

(iii) Test de normalité des résidus

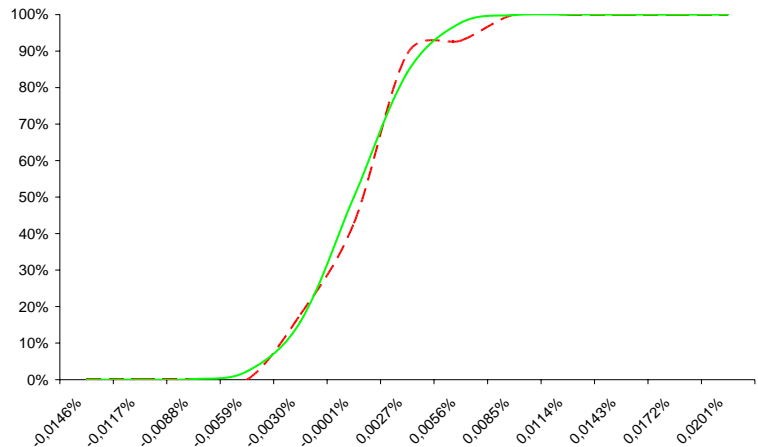
Classe	FD empirique	FD théorique	(O - T)² / T
-5	0,0146%	0,0000%	2,867E-07
-4	0,0117%	0,0000%	3,167E-05
-3	0,0088%	0,0000%	1,350E-03
-2	0,0059%	0,0000%	2,275E-02
-1	0,0030%	17,8571%	15,8655%
0	0,0001%	42,8571%	50,0000%
1	0,0027%	89,2857%	84,1345%
2	0,0056%	92,8571%	97,7250%
3	0,0085%	100,0000%	99,8650%
4	0,0114%	100,0000%	99,9968%
5	0,0143%	100,0000%	100,0000%
6	0,0172%	100,0000%	100,0000%
7	0,0201%	100,0000%	100,0000%

D = 10

5,00% 1,00%

18,31 23,21

Accepte Accepte

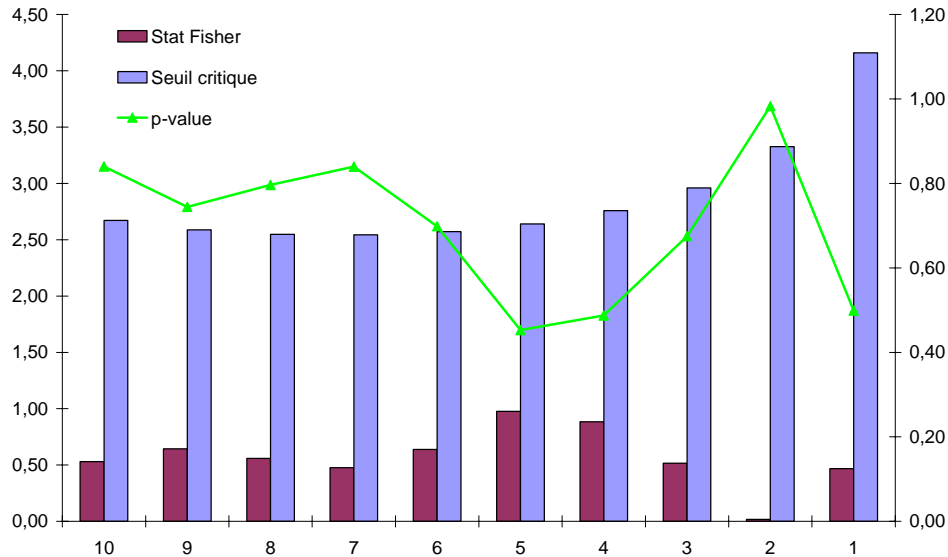


(iv) Test d'hypothèse nulle de la moyenne des résidus

	moy	std	Seuil
Résidus	-0,00014%	0,00289%	5%
m0	0%	T-stat	
t=	-0,256563081	2,0518	
Décision	Accepte H0		

▪ Japon

(i) Test de Fischer



(ii) Test de Student

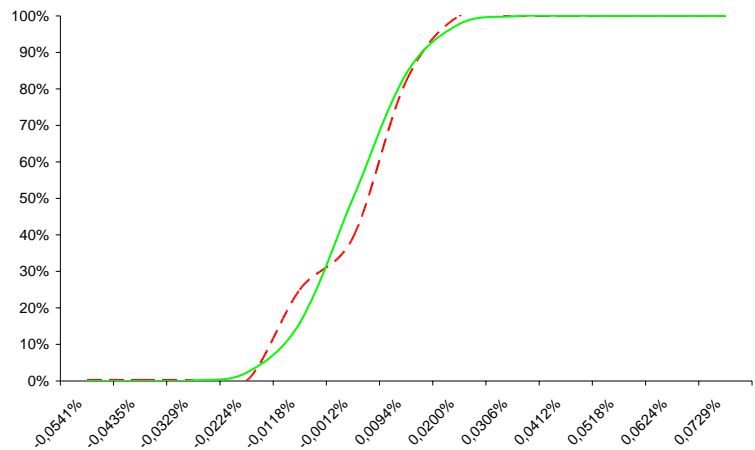
Date	JAP	t0	t-1	t-9	t-10	a1* estimée (t)	estimate	réel	Résidus
1969	1,0219%								
1970	1,0193%	0,2629%							
1971	0,9439%	7,4872%	0,263%			2,672%	0,9920%	0,9429%	0,0491%
1972	0,9062%	3,9936%	7,487%			1,791%	0,9261%	0,9062%	0,0199%
1973	0,8915%	1,6243%	3,994%			2,230%	0,9960%	0,8915%	-0,0055%
1974	0,8626%	3,2391%	1,624%			2,506%	0,8692%	0,8626%	0,0065%
1975	0,8264%	4,1989%	3,239%			2,309%	0,8427%	0,8264%	0,0163%
1976	0,7974%	3,5133%	4,199%			2,192%	0,8083%	0,7974%	0,0109%
1977	0,7612%	4,5316%	3,513%			2,276%	0,7792%	0,7612%	0,0180%
1978	0,7378%	3,0751%	4,532%			2,152%	0,7449%	0,7378%	0,0070%
1979	0,7092%	3,8750%	3,075%			2,329%	0,7206%	0,7092%	0,0114%
1980	0,7098%	-0,0823%	3,875%			2,232%	0,6934%	0,7098%	-0,0164%
1981	0,6843%	3,6011%	-0,082%			2,714%	0,6906%	0,6843%	0,0063%
1982	0,6573%	3,9463%	3,601%			2,265%	0,6688%	0,6573%	0,0115%
1983	0,6551%	0,3254%	3,946%			2,223%	0,6427%	0,6551%	-0,0125%
1984	0,6352%	3,0392%	0,325%			2,685%	0,6377%	0,6352%	0,0025%
1985	0,6194%	2,4874%	3,039%			2,334%	0,6204%	0,6194%	0,0010%
1986	0,5981%	3,4402%	2,487%			2,401%	0,6045%	0,5981%	0,0064%
1987	0,5798%	3,2603%	3,440%			2,285%	0,5844%	0,5798%	0,0058%
1988	0,5794%	-0,1389%	3,260%			2,307%	0,5653%	0,5794%	-0,0142%
1989	0,5635%	2,7404%	-0,139%			2,721%	0,5636%	0,5635%	0,0001%
1990	0,5607%	0,4934%	2,740%			2,370%	0,5502%	0,5607%	-0,0106%
1991	0,5520%	1,5547%	0,493%			2,644%	0,5459%	0,5520%	-0,0061%
1992	0,5522%	-0,0340%	1,555%			2,515%	0,5381%	0,5522%	-0,0141%
1993	0,5478%	0,7955%	-0,034%			2,709%	0,5373%	0,5478%	-0,0106%
1994	0,5283%	3,5721%	0,796%			2,607%	0,5335%	0,5283%	0,0053%
1995	0,5365%	-1,5519%	3,572%			2,289%	0,5163%	0,5365%	-0,0202%
1996	0,5123%	4,4963%	-1,552%			2,894%	0,5209%	0,5123%	0,0086%
1997	0,5018%	2,0910%	4,496%			2,156%	0,5013%	0,5018%	-0,0003%
1998	0,5022%	-0,1212%	2,091%			2,449%	0,4993%	0,5022%	-0,0129%
1999	0,5038%	-0,2640%	-0,121%			2,7192%	0,4886%	0,5038%	-0,0150%
2000	0,4798%	4,7179%	-0,264%			2,7366%	0,4898%	0,4798%	0,0100%
2001	0,4664%	2,7929%	4,717%			2,1291%	0,4696%	0,4664%	0,0032%
2002	0,4538%	2,6915%	2,792%			2,3638%	0,4554%	0,4538%	0,0015%
2003	0,4527%	0,2523%	2,691%			2,3762%	0,4431%	0,4527%	-0,0096%
Forecast		2,6736%	0,2523%			2,6736%	0,44060%		1
		2,3784%	2,6736%			2,37836%	0,43012%		2
		2,4144%	2,3784%			2,41436%	0,41973%		3
		2,4100%	2,4144%			2,40997%	0,40962%		4

Paramètres		a1	a0	Résidus		
STD		-0,1219	0,0270	Moy	STD	1,960
R2 et Var globale		0,1783	0,0055	-0,00117%	0,01059%	
F		0,0149	0,0197			
SS Reg		0,4678	31,0000	v1	v2	p-value
		0,0002	0,0120	1,0000	31,0000	0,49910201
						alpha
						5,00%
						CHECK

T-test	0,6839	4,9178		
p-value	0,499102	0,000027	Seuil critique Student	Seuil critique Fisher
Décision	N/S	Significatif	2,0395	4,1596

(iii) Test de normalité des résidus

Classe	FD empirique	FD théorique	(O-T) ² /T	
-5	-0,0541%	0,0000%	0,0000%	2,8665E-07
-4	-0,0435%	0,0000%	0,0032%	3,1671E-05
-3	-0,0329%	0,0000%	0,1350%	0,0013499
-2	-0,0224%	0,0000%	2,2750%	0,02275013
-1	-0,0118%	25,0000%	15,8655%	0,05259115
0	-0,0012%	39,2857%	50,0000%	0,02295918
1	0,0094%	82,1429%	84,1345%	0,00047145
2	0,0200%	100,0000%	97,7250%	0,00052962
3	0,0306%	100,0000%	99,8650%	1,8247E-06
4	0,0412%	100,0000%	99,9968%	1,0031E-09
5	0,0518%	100,0000%	100,0000%	8,2169E-14
6	0,0624%	100,0000%	100,0000%	9,7336E-19
7	0,0729%	100,0000%	100,0000%	1,6381E-24
				0,10068522
		D =	10	
		5,00%	1,00%	
		18,31	23,21	
		Accepte	Accepte	

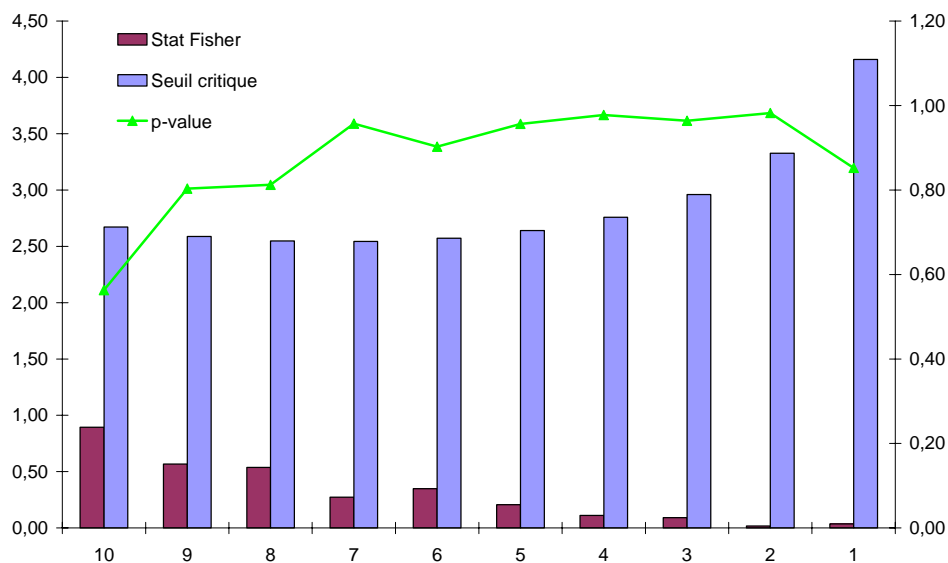


(iv) Test d'hypothèse nulle de la moyenne des résidus

	mo	std	Seuil
Résidus	-0,00117%	0,01059%	5%
m0	0%	I-stat	
t =	-0,576210384	2,0518	
Décision	Accepte H0		

▪ USA

(i) Test de Fischer



(ii) Test de Student

Date	US	t0	t-1	t-9	t-10	a1* estimée (d)	estimate	réel	Résidus
1969	1,4440%								
1970	1,4190%	1,734%							
1971	1,3945%	1,725%	1,734%			1,527%	1,3973%	1,3945%	0,0028%
1972	1,4026%	-0,578%	1,725%			1,527%	1,3732%	1,4026%	-0,0294%
1973	1,3810%	1,539%	-0,578%			1,605%	1,3801%	1,3810%	-0,0009%
1974	1,3281%	3,827%	1,539%			1,533%	1,3598%	1,3281%	0,0317%
1975	1,2754%	3,970%	3,827%			1,456%	1,3088%	1,2754%	0,0334%
1976	1,2539%	1,684%	3,970%			1,451%	1,2569%	1,2539%	0,0030%
1977	1,2206%	2,661%	1,684%			1,528%	1,2348%	1,2206%	0,0142%
1978	1,2049%	1,289%	2,661%			1,495%	1,2023%	1,2049%	-0,0025%
1979	1,1660%	3,224%	1,289%			1,542%	1,1863%	1,1660%	0,0203%
1980	1,1788%	-1,094%	3,224%			1,476%	1,1488%	1,1788%	-0,0300%
1981	1,1492%	2,509%	-1,094%			1,622%	1,1596%	1,1492%	0,0105%
1982	1,1210%	2,451%	2,509%			1,500%	1,1319%	1,1210%	0,0109%
1983	1,1174%	0,319%	2,451%			1,502%	1,1042%	1,1174%	-0,0133%
1984	1,1050%	1,111%	0,319%			1,574%	1,0999%	1,1050%	-0,0052%
1985	1,1054%	-0,030%	1,111%			1,548%	1,0879%	1,1054%	-0,0174%
1986	1,0888%	1,502%	-0,030%			1,586%	1,0878%	1,0888%	-0,0009%
1987	1,0760%	1,169%	1,502%			1,534%	1,0721%	1,0760%	-0,0040%
1988	1,0723%	0,343%	1,169%			1,546%	1,0594%	1,0723%	-0,0129%
1989	1,0463%	2,431%	0,343%			1,573%	1,0555%	1,0463%	0,0092%
1990	1,0300%	1,552%	2,431%			1,503%	1,0306%	1,0300%	0,0005%
1991	1,0154%	1,421%	1,552%			1,533%	1,0143%	1,0154%	-0,0012%
1992	0,9963%	1,886%	1,421%			1,537%	0,9988%	0,9963%	0,0035%
1993	1,0081%	-1,190%	1,886%			1,521%	0,9811%	1,0081%	-0,0270%
1994	0,9943%	1,368%	-1,190%			1,625%	0,9917%	0,9943%	-0,0026%
1995	0,9857%	0,868%	1,368%			1,539%	0,9790%	0,9857%	-0,0067%
1996	0,9584%	2,765%	0,868%			1,556%	0,9704%	0,9584%	0,0119%
1997	0,9299%	2,972%	2,765%			1,492%	0,9441%	0,9299%	0,0142%
1998	0,9109%	2,048%	2,972%			1,485%	0,9161%	0,9109%	0,0052%
1999	0,9080%	0,318%	2,048%			1,516%	0,8971%	0,9080%	-0,0109%
2000	0,8897%	2,016%	0,318%			1,574%	0,8937%	0,8897%	0,0040%
2001	0,8748%	1,671%	2,016%			1,517%	0,8762%	0,8748%	0,0014%
2002	0,8658%	1,029%	1,671%			1,529%	0,8615%	0,8658%	-0,0044%
2003	0,8500%	1,829%	1,029%			1,550%	0,8524%	0,8500%	0,0024%
Forecast		1,5234%	1,8291%			1,5234%	0,83705%		
		1,5337%	1,5234%			1,5337%	0,82421%		
		1,5333%	1,5337%			1,5333%	0,81157%		
		1,5333%	1,5333%			1,5333%	0,79913%		

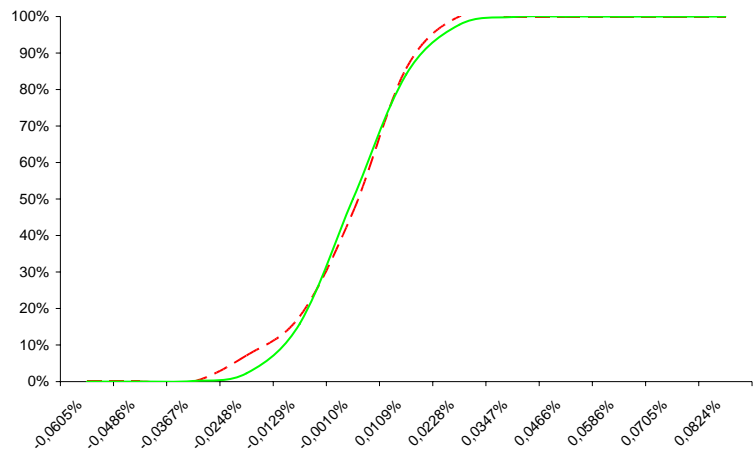
Nbval =		33		
Paramètres	a1	a0	Résidus	
	-0,0337	0,0159	Moy	
STD	0,1796	0,0035	STD	
R2 et Var globale	0,0011	0,0126	-0,00099%	0,01191%
F	0,0352	31,0000	p-value	alpha
SS Reg	0,0000	0,0049	1,0000	31,0000
			0,85235297	5,00%
			CHECK	

T-test	0,1877	4,5121	Seuil critique Student	Seuil critique Fisher
p-value	0,852353	0,000086	2,0395	4,1586
Décision	N/S	Significatif		

(iii) Test de normalité des résidus

Classe	FD empirique	FD théorique	(O - T) ² /T
-5	-0,0605%	0,0000%	2,8665E-07
-4	-0,0486%	0,0000%	3,1671E-05
-3	-0,0367%	0,0000%	0,0013499
-2	-0,0248%	7,1429%	0,10415722
-1	-0,0129%	17,8571%	15,8655%
0	-0,0010%	46,4286%	50,0000%
1	0,0109%	85,7143%	84,1345%
2	0,0228%	100,0000%	97,7250%
3	0,0347%	100,0000%	99,8650%
4	0,0466%	100,0000%	99,9988%
5	0,0586%	100,0000%	100,0000%
6	0,0705%	100,0000%	100,0000%
7	0,0824%	100,0000%	100,0000%

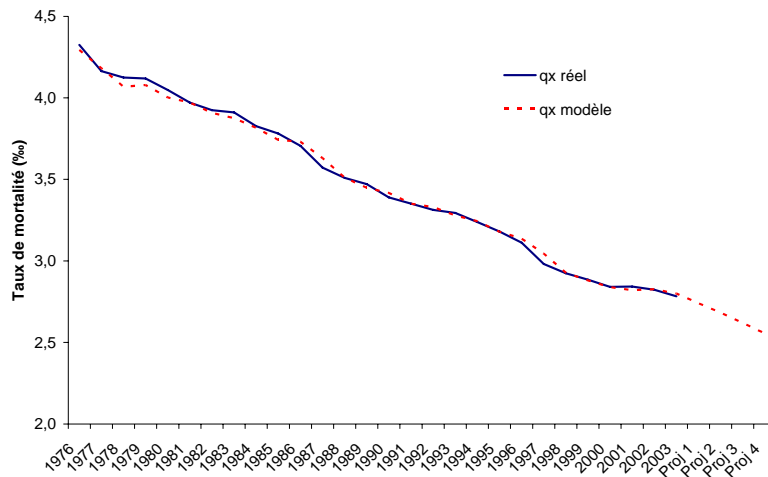
D =		10	
	5,00%	1,00%	
	18,31	23,21	
	Accepte	Accepte	



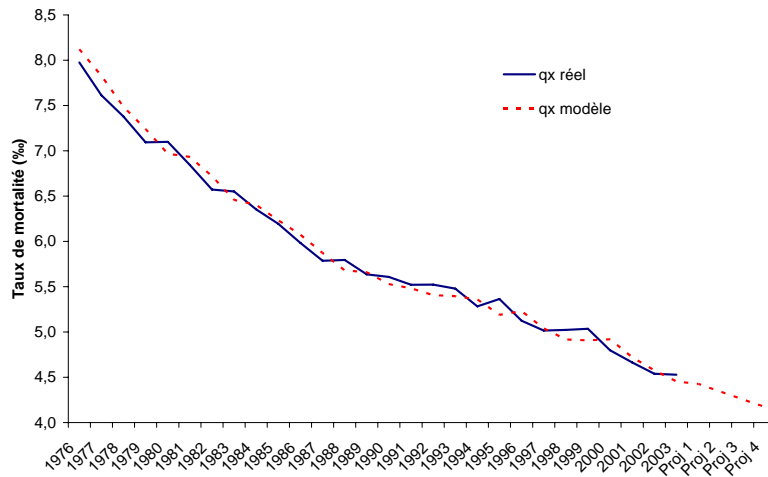
(iv) Test d'hypothèse nulle de la moyenne des résidus

Résidus	mov	std	Seuil
	-0,00099%	0,01191%	5%
m0	0%	T-stat	
t=	-0,432032508	2,0518	
Décision	Accepte H0		

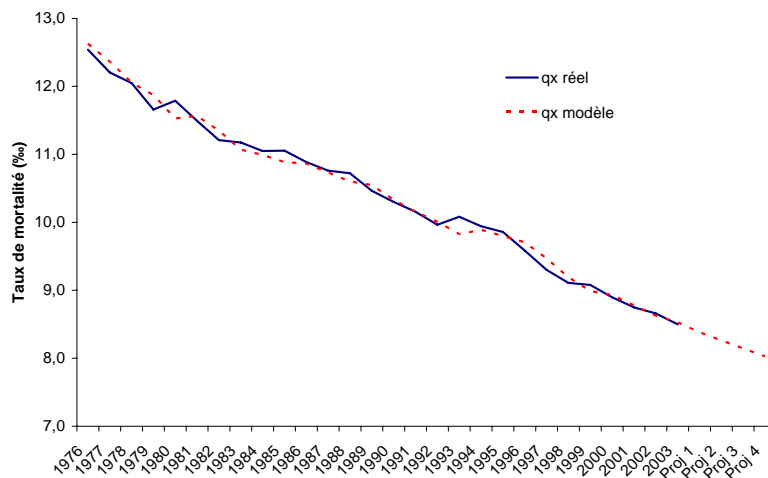
▪ **Projection France**



▪ **Projection Japon**



▪ **Projection USA**



■ **Projection Indice Combiné (ICM_t)**

(i) *Tableaux de projections des indices locaux et combinés*

France				JAPON				USA			
	Estim* Centrale	IC haut 95%	IC bas 95%		Estim* Centrale	IC haut 95%	IC bas 95%		Estim* Centrale	IC haut 95%	IC bas 95%
2002	0,2823%			2002	0,4538%			2002	0,8658%		
2003	0,2783%	0,2783%	0,2783%	2003	0,4527%			2003	0,8500%	0,8500%	0,8500%
Proj 1	0,27421%	0,27423%	0,27420%	Proj 1	0,4406%	0,4407%	0,4405%	Proj 1	0,8370%	0,8372%	0,8369%
Proj 2	0,26851%	0,26854%	0,26848%	Proj 2	0,4301%	0,4303%	0,4299%	Proj 2	0,8242%	0,8246%	0,8238%
Proj 3	0,26240%	0,26244%	0,26236%	Proj 3	0,4197%	0,4200%	0,4195%	Proj 3	0,8116%	0,8121%	0,8110%
Proj 4	0,25605%	0,25611%	0,25600%	Proj 4	0,4096%	0,4099%	0,4093%	Proj 4	0,7991%	0,7999%	0,7984%
Brute	-2,0599%	-2,0548%	-2,0650%	Brute	-2,4692%	-2,4502%	-2,4882%	Brute	-1,5309%	-1,5082%	-1,5537%
Avg	-1,9356%	-1,9311%	-1,9400%	Avg	-2,2004%	-2,1837%	-2,2171%	Avg	-1,5683%	-1,5484%	-1,5882%
Proj 1	-1,4481%	-1,4453%	-1,4509%	Proj 1	-1,4614%	-2,7758%	-2,8173%	Proj 1	-1,6777%	-1,6661%	-1,6892%
Proj 2	-1,7699%	-1,7644%	-1,7754%	Proj 2	-2,5280%	-1,1801%	-1,1983%	Proj 2	-1,5285%	-1,5055%	-1,5514%
Proj 3	-2,1764%	-2,1716%	-2,1812%	Proj 3	-2,3961%	-2,3778%	-2,4145%	Proj 3	-1,5335%	-1,5109%	-1,5561%
Proj 4	-2,3455%	-2,3408%	-2,3502%	Proj 4	-2,4122%	-2,3937%	-2,4307%	Proj 4	-1,5333%	-1,5108%	-1,5559%
Moy	-1,9350%	-1,9305%	-1,9394%	Moy	-2,1994%	-2,1818%	-2,2152%	Moy	-1,5682%	-1,5483%	-1,5882%

France

	Central	IC Haut	IC Bas
Proj 1	0,27421%	0,27423%	0,27420%
Proj 2	0,26851%	0,26854%	0,26848%
Proj 3	0,26240%	0,26244%	0,26236%
Proj 4	0,25605%	0,25611%	0,25600%

Japon

	Central	IC Haut	IC Bas
Proj 1	0,44060%	0,44069%	0,44050%
Proj 2	0,43012%	0,43029%	0,42995%
Proj 3	0,41973%	0,41998%	0,41949%
Proj 4	0,40962%	0,40994%	0,40930%

USA

	Central	IC Haut	IC Bas
Proj 1	0,83705%	0,83725%	0,83685%
Proj 2	0,82421%	0,82480%	0,82383%
Proj 3	0,81157%	0,81214%	0,81101%
Proj 4	0,79913%	0,79987%	0,79839%

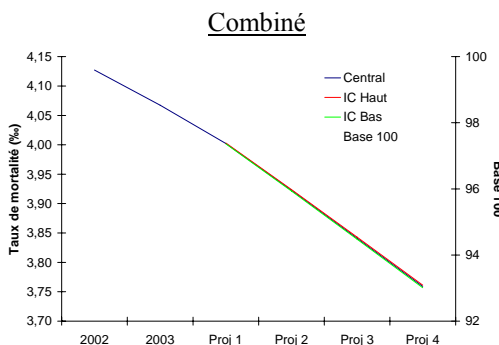
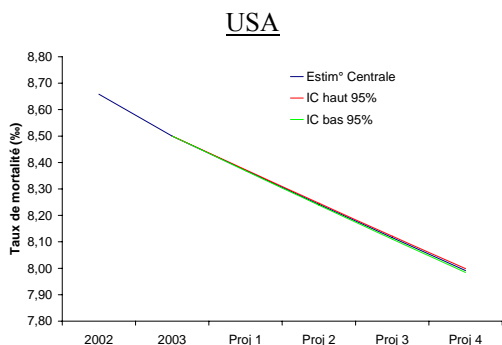
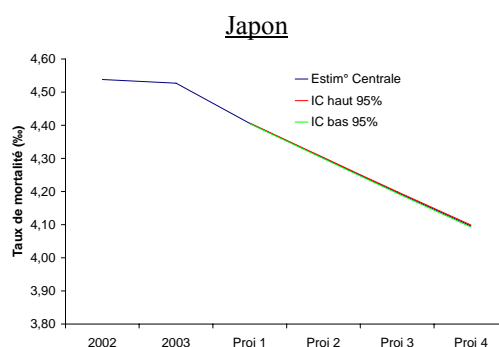
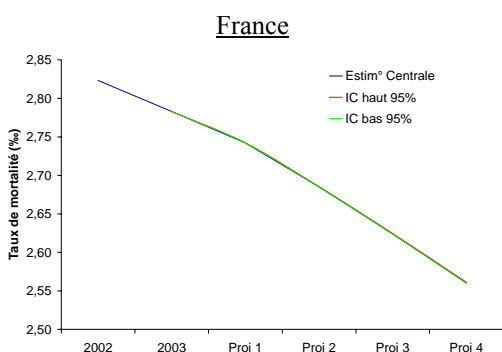
Combiné

	Central	IC Haut	IC Bas
Proj 1	0,40023%	0,40030%	0,40017%
Proj 2	0,39227%	0,39238%	0,39215%
Proj 3	0,38411%	0,38428%	0,38394%
Proj 4	0,37591%	0,37613%	0,37568%

Index Combiné

	Central	IC Haut	IC Bas	Base 100	Base 100	Base 100
2002	0,4127%	0,4127%	0,4127%	100,00	100,00	100,00
2003	0,4067%	0,4067%	0,4067%	100,00	100,00	100,00
Proj 1	0,4002%	0,4003%	0,4002%	98,36	98,37	98,36
Proj 2	0,3923%	0,3924%	0,3921%	96,60	96,62	96,58
Proj 3	0,3841%	0,3843%	0,3839%	94,64	94,67	94,60
Proj 4	0,3759%	0,3761%	0,3757%	92,64	92,69	92,59
Brute	-1,950%	-1,936%	-1,965%	-1,893%	-1,880%	-1,905%
Avg	-1,864%	-1,852%	-1,877%			
Proj 1	-1,524%	-1,516%	-1,532%	-0,818%	-0,815%	-0,822%
Proj 2	-1,791%	-1,776%	-1,806%	-1,713%	-1,702%	-1,725%
Proj 3	-2,035%	-2,020%	-2,049%	-1,912%	-1,897%	-1,926%
Proj 4	-2,107%	-2,093%	-2,121%	-2,070%	-2,056%	-2,085%
Moy	-1,864%	-1,851%	-1,877%	-1,628%	-1,618%	-1,639%

(ii) *Projection graphique avec Intervalle de Confiance à 95% des indices locaux et combiné*



2 – Régressions Cobb-Douglas

- Modèle 1 – « linéaire » :

$$EER = \gamma + \alpha \cdot PFL + \beta \cdot CEL$$

- Avec constante :

Transaction	PFL	CEL	EL	Spread émis (réel)	EER réel	EER estimé	SSE
Osiris B2 (A - / A3)	0,1170%	62,393%	0,0730%	1,200%	1,1270%	1,4167%	0,00084%
Osiris C (BBB / Ba)	0,2550%	69,804%	0,1780%	2,850%	2,6720%	2,4646%	0,00043%
Osiris D (BB+ / Ba')	0,5260%	71,103%	0,3740%	5,000%	4,6260%	4,4973%	0,00017%
Tartan (BBB / Baa3)	0,2930%	61,433%	0,1800%	3,000%	2,8200%	2,7333%	0,00008%
Tartan (A / A2)	0,0970%	54,639%	0,0530%	0,900%	0,8470%	1,2520%	0,00164%
Vita I (A / A1)	0,0770%	20,519%	0,0158%	1,350%	1,3342%	1,0371%	0,00088%
Vita II (BBB / Baa2)	0,2344%	62,201%	0,1458%	1,900%	1,7542%	2,2958%	0,00293%
Vita II (A - / A2)	0,0755%	54,437%	0,0411%	1,400%	1,3589%	1,0906%	0,00072%
Vita II (A / Aa3)	0,0165%	44,242%	0,0073%	0,900%	0,8927%	0,6291%	0,00069%
Vita II (A+ / A2)	0,0015%	20,000%	0,0003%	0,300%	0,2997%	0,4705%	0,00029%
Vita III (4-yr) (AA1)	0,042%	92,857%	0,039%	1,10%	1,0610%	0,9129%	0,00022%
Vita III (4yr) (AA- / A)	0,037%	86,486%	0,032%	0,80%	0,7680%	0,8633%	0,00009%
Vita III (5-yr) (AA- / A)	0,036%	86,111%	0,031%	0,80%	0,7690%	0,8551%	0,00007%
Vita III (5-yr) (AA1)	0,039%	94,872%	0,037%	1,12%	1,0830%	0,8943%	0,00036%
							0,00941%

14

Paramètres	CEL	PFL	Cste				
STD	0,00345	7,4916	0,0042				
R2 et Var globale	94,40%	0,002925279	#N/A	v1	v2	p-value	alpha
F	92,65982144	11	#N/A	2	11	1,3073E-07	5,00%
SS Reg	0,001585828	9,41298E-05	#N/A			OK	
T-test	0,5529	13,4790	1,7876				
p-value	0,59135962	3,4927E-08	0,10138974			Seuil critique Student	Seuil critique Fisher
Décision	N/S	Significatif	N/S			2,2010	3,9823

- Sans constante :

Transaction	PFL	CEL	EL	Spread émis (réel)	EER réel	EER estimé	SSE
Osiris B2 (A - / A3)	0,1170%	62,393%	0,0730%	1,200%	1,1270%	1,3640%	0,00056%
Osiris C (BBB / Ba)	0,2550%	69,804%	0,1780%	2,850%	2,6720%	2,4828%	0,00036%
Osiris D (BB+ / Ba')	0,5260%	71,103%	0,3740%	5,000%	4,6260%	4,5817%	0,00002%
Tartan (BBB / Baa3)	0,2930%	61,433%	0,1800%	3,000%	2,8200%	2,7138%	0,00011%
Tartan (A / A2)	0,0970%	54,639%	0,0530%	0,900%	0,8470%	1,1524%	0,00093%
Vita I (A / A1)	0,0770%	20,519%	0,0158%	1,350%	1,3342%	0,7456%	0,00346%
Vita II (BBB / Baa2)	0,2344%	62,201%	0,1458%	1,900%	1,7542%	2,2677%	0,00264%
Vita II (A - / A2)	0,0755%	54,437%	0,0411%	1,400%	1,3589%	0,9852%	0,00140%
Vita II (A / Aa3)	0,0165%	44,242%	0,0073%	0,900%	0,8927%	0,4548%	0,00192%
Vita II (A+ / A2)	0,0015%	20,000%	0,0003%	0,300%	0,2997%	0,1597%	0,00020%
Vita III (4-yr) (AA1)	0,042%	92,857%	0,039%	1,10%	1,0610%	1,0114%	0,00002%
Vita III (4yr) (AA- / A)	0,037%	86,486%	0,032%	0,80%	0,7680%	0,9257%	0,00025%
Vita III (5-yr) (AA- / A)	0,036%	86,111%	0,031%	0,80%	0,7690%	0,9152%	0,00021%
Vita III (5-yr) (AA1)	0,039%	94,872%	0,037%	1,12%	1,0830%	1,0032%	0,00006%
							0,01215%

14

Paramètres	CEL	PFL	Cste				
STD	0,00170	0,58979	#N/A				
R2 et Var globale	97,55%	0,00318165	#N/A	v1	v2	p-value	alpha
F	238,7414239	12	#N/A	2	12	2,1710E-10	5,00%
SS Reg	0,00483351	0,000121475	#N/A			OK	3,89
T-test	4,3458	13,0716	#N/A				
p-value	0,00095183	1,8543E-08	#N/A			Seuil critique Student	Seuil critique Fisher
Décision	Significatif	Significatif	#N/A			2,1788	3,8853

- Modèle 2 – « log-linéaire » :

$$EER = \gamma \cdot (PFL)^\alpha \cdot (CEL)^\beta$$

- Avec constante :

Transaction	PFL	CEL	ln(PFL)	ln(CEL)	EL	Spread émis (réel)	EER réel	ln(EER)	EER estimé	SSE
Osiris B2 (A- / A3)	0,1170%	0,0730%	-675,075%	-722,247%	0,0730%	1,200%	1,1270%	-448,5611%	1,5686%	0,00195%
Osiris C (BBB / Ba)	0,2550%	0,1780%	-597,166%	-633,114%	0,1780%	2,850%	2,6720%	-362,2343%	2,1913%	0,00241%
Osiris D (BB+ / Ba)	0,5260%	0,3740%	-524,762%	-558,867%	0,3740%	5,000%	4,6260%	-307,3470%	2,9898%	0,02677%
Tarlan (BBB / Baa2)	0,2930%	0,1800%	-583,275%	-631,897%	0,1800%	3,000%	2,8200%	-356,8433%	2,3490%	0,00222%
Tarlan (A / A2)	0,0970%	0,0530%	-693,821%	-754,263%	0,0530%	0,900%	0,8470%	-477,1225%	1,4649%	0,00392%
Vita I (A / A1)	0,0770%	0,0158%	-716,912%	-875,292%	0,0158%	1,350%	1,3342%	-431,6839%	1,4651%	0,00017%
Vita II (BBB / Baa2)	0,2344%	0,1458%	-605,590%	-653,069%	0,1458%	1,900%	1,7542%	-404,3157%	2,1275%	0,00139%
Vita II (A- / A2)	0,0755%	0,0411%	-718,879%	-779,692%	0,0411%	1,400%	1,3589%	-429,8495%	1,3131%	0,00002%
Vita II (A / Aa3)	0,0185%	0,0073%	-870,957%	-952,505%	0,0073%	0,900%	0,8927%	-471,8675%	0,6891%	0,00041%
Vita II (A+ / A2)	0,0015%	0,0003%	-1110,746%	-1271,690%	0,0003%	0,300%	0,2987%	-581,0143%	0,2616%	0,00001%
Vita III (4-yr) (AA1)	0,042%	0,039%	-777,526%	-784,936%	0,039%	1,10%	1,0610%	-454,5958%	0,9610%	0,00010%
Vita III (4yr) (AA- / A)	0,037%	0,032%	-790,201%	-804,719%	0,032%	0,80%	0,7680%	-486,9136%	0,9158%	0,00022%
Vita III (5-yr) (AA- / A)	0,036%	0,031%	-792,941%	-807,894%	0,031%	0,80%	0,7690%	-486,7834%	0,9053%	0,00019%
Vita III (5-yr) (AA1)	0,039%	0,037%	-784,936%	-790,201%	0,037%	1,12%	1,0830%	-452,5435%	0,9283%	0,00024%
										0,03992%
14										
Paramètres	CEL	PFL	Cste							
STD	-0,1034	0,5415	-1,2462							
R2 et Var globale	0,17928	0,21300	0,41437							
F	84,80%	0,285779867	#N/A	v1	v2	p-value	alpha			
SS Reg	30,68928286	11	#N/A	2	11	0,00003160858	5,00%			
	5,012795583	0,898371455	#N/A			OK				
T-test	0,5768	2,5423	3,0075							
p-value	0,5757	0,0274	0,0119			Seuil critique Student	Seuil critique Fisher			
Décision	N/S	Significatif	Significatif			2,2010	3,9823			
			EXP (cste)							
			0,2876							

- Sans constante :

Transaction	PFL	CEL	ln(PFL)	ln(CEL)	EL	Spread émis (réel)	EER réel	ln(EER)	EER estimé	SSE
Osiris B2 (A- / A3)	0,1170%	0,0730%	-675,075%	-722,247%	0,0730%	1,200%	1,1270%	-448,5611%	1,7889%	0,00436%
Osiris C (BBB / Ba)	0,2550%	0,1780%	-597,166%	-633,114%	0,1780%	2,850%	2,6720%	-362,2343%	2,8061%	0,00018%
Osiris D (BB+ / Ba)	0,5260%	0,3740%	-524,762%	-558,867%	0,3740%	5,000%	4,6260%	-307,3470%	4,3527%	0,00075%
Tarlan (BBB / Baa2)	0,2930%	0,1800%	-583,275%	-631,897%	0,1800%	3,000%	2,8200%	-356,8433%	3,1455%	0,00108%
Tarlan (A / A2)	0,0970%	0,0530%	-693,821%	-754,263%	0,0530%	0,900%	0,8470%	-477,1225%	1,6422%	0,00632%
Vita I (A / A1)	0,0770%	0,0158%	-716,912%	-875,292%	0,0158%	1,350%	1,3342%	-431,6839%	1,7830%	0,00201%
Vita II (BBB / Baa2)	0,2344%	0,1458%	-605,590%	-653,069%	0,1458%	1,900%	1,7542%	-404,3157%	2,7361%	0,00864%
Vita II (A- / A2)	0,0755%	0,0411%	-718,879%	-779,692%	0,0411%	1,400%	1,3589%	-429,8495%	1,4099%	0,00003%
Vita II (A / Aa3)	0,0185%	0,0073%	-870,957%	-952,505%	0,0073%	0,900%	0,8927%	-471,8675%	0,5827%	0,00098%
Vita II (A+ / A2)	0,0015%	0,0003%	-1110,746%	-1271,690%	0,0003%	0,300%	0,2987%	-581,0143%	0,1610%	0,00018%
Vita III (4-yr) (AA1)	0,042%	0,039%	-777,526%	-784,936%	0,039%	1,10%	1,0610%	-454,5958%	0,8716%	0,00036%
Vita III (4yr) (AA- / A)	0,037%	0,032%	-790,201%	-804,719%	0,032%	0,80%	0,7680%	-486,9136%	0,8197%	0,00003%
Vita III (5-yr) (AA- / A)	0,036%	0,031%	-792,941%	-807,894%	0,031%	0,80%	0,7690%	-486,7834%	0,8089%	0,00001%
Vita III (5-yr) (AA1)	0,039%	0,037%	-784,936%	-790,201%	0,037%	1,12%	1,0830%	-452,5435%	0,8289%	0,00065%
										0,02655%
14										
Paramètres	CEL	PFL	Cste							
STD	-0,2283	0,8404	0,0000							
R2 et Var globale	0,22541	0,24348	#N/A							
F	98,41%	0,369356678	#N/A	v1	v2	p-value	alpha			
SS Reg	1006,352837	12	#N/A	2	12	0,00000000000	5,00%			
	274,5820749	1,637092269	#N/A			OK				
T-test	1,0128	3,4518	#N/A							
p-value	0,3311	0,0048	#N/A			Seuil critique Student	Seuil critique Fisher			
Décision	N/S	Significatif	#N/A			2,1788	3,8853			

- Modèle 3 – « quadratique » :

$$EER = \gamma_1 + \alpha_1 \cdot PFL + \beta_1 \cdot CEL + \alpha_2 \cdot (PFL)^2 + \beta_2 \cdot (CEL)^2$$

- Avec constante :

Transaction	PFL	CEL	PFL^2	CEL^2	EL	Spread émis (réel)	EER réel	EER estimé	SSE
Osisir B2 (A- / A3)	0,1170%	62,393%	0,000%	38,929%	0,0730%	1,200%	1,1270%	1,3180%	0,00036%
Osisir C (BBB / Ba)	0,2550%	69,804%	0,001%	48,726%	0,1780%	2,850%	2,6720%	2,3845%	0,00083%
Osisir D (BB+ / Ba1)	0,5260%	71,103%	0,003%	50,556%	0,3740%	5,000%	4,6260%	4,6495%	0,00001%
Tartan (BBB / Baa3)	0,2930%	61,433%	0,001%	37,741%	0,1800%	3,000%	2,8200%	2,6534%	0,00029%
Tartan (A / A2)	0,0970%	54,639%	0,000%	29,854%	0,0530%	0,900%	0,8470%	1,1588%	0,00097%
Vita I (A / A1)	0,0770%	20,519%	0,000%	4,210%	0,0158%	1,350%	1,3342%	1,1202%	0,00046%
Vita II (BBB / Baa2)	0,2344%	62,201%	0,001%	38,690%	0,1458%	1,900%	1,7542%	2,1964%	0,00196%
Vita II (A- / A2)	0,0755%	54,437%	0,000%	29,634%	0,0411%	1,400%	1,3589%	1,0052%	0,00125%
Vita II (A / Aa3)	0,0165%	44,242%	0,000%	19,574%	0,0073%	0,900%	0,8927%	0,5963%	0,00088%
Vita II (A+ / A2)	0,0015%	20,000%	0,000%	4,000%	0,0003%	0,300%	0,2997%	0,5994%	0,00090%
Vita III (4-yr) (A/A1)	0,042%	92,857%	0,000%	86,224%	0,039%	1,10%	1,0610%	0,9824%	0,00006%
Vita III (4yr) (AA- / A)	0,037%	86,486%	0,000%	74,799%	0,032%	0,80%	0,7680%	0,8881%	0,00014%
Vita III (5-yr) (AA- / A)	0,036%	86,111%	0,000%	74,151%	0,031%	0,80%	0,7690%	0,8780%	0,00012%
Vita III (5-yr) (A/A1)	0,039%	94,872%	0,000%	90,007%	0,037%	1,12%	1,0830%	0,9824%	0,00010%
0,00831%									
14									
Paramètres	CEL^2	PFL^2	CEL	PFL	Cste				
STD	0,011900374	197,5835532	-0,01199668	6,79213963	0,007815463				
R2 et Var globale	0,01872448	409,8653399	0,022069521	2,26165663	0,005038693				
F	0,950511582	0,003039343	#N/A	#N/A	#N/A	v1	v2	p-value	alpha
SS Reg	43,21518344	9	#N/A	#N/A	#N/A	4	9	0,00000704171	5,00%
	0,001596819	8,31384E-05	#N/A	#N/A	#N/A			OK	
T-test	0,6356	0,4821	0,5436	3,0032	1,5511				
p-value	0,5409	0,6413	0,5999	0,0149	0,1553			Seuil critique Student	Seuil critique Fisher
Décision	N/S	N/S	N/S	Significatif	N/S			2,2622	3,6331

- Sans constante :

Transaction	PFL	CEL	PFL^2	CEL^2	EL	Spread émis (réel)	EER réel	EER estimé	SSE
Osisir B2 (A- / A3)	0,1170%	62,393%	0,000%	38,929%	0,0730%	1,200%	1,1270%	1,4082%	0,00079%
Osisir C (BBB / Ba)	0,2550%	69,804%	0,001%	48,726%	0,1780%	2,850%	2,6720%	2,3827%	0,00084%
Osisir D (BB+ / Ba1)	0,5260%	71,103%	0,003%	50,556%	0,3740%	5,000%	4,6260%	4,6453%	0,00000%
Tartan (BBB / Baa3)	0,2930%	61,433%	0,001%	37,741%	0,1800%	3,000%	2,8200%	2,6497%	0,00029%
Tartan (A / A2)	0,0970%	54,639%	0,000%	29,854%	0,0530%	0,900%	0,8470%	1,2478%	0,00161%
Vita I (A / A1)	0,0770%	20,519%	0,000%	4,210%	0,0158%	1,350%	1,3342%	0,7966%	0,00289%
Vita II (BBB / Baa2)	0,2344%	62,201%	0,001%	38,690%	0,1458%	1,900%	1,7542%	2,2142%	0,00212%
Vita II (A- / A2)	0,0755%	54,437%	0,000%	29,634%	0,0411%	1,400%	1,3589%	1,1122%	0,00061%
Vita II (A / Aa3)	0,0165%	44,242%	0,000%	19,574%	0,0073%	0,900%	0,8927%	0,6927%	0,00040%
Vita II (A+ / A2)	0,0015%	20,000%	0,000%	4,000%	0,0003%	0,300%	0,2997%	0,3412%	0,00002%
Vita III (4-yr) (A/A1)	0,042%	92,857%	0,000%	86,224%	0,039%	1,10%	1,0610%	0,9202%	0,00020%
Vita III (4yr) (AA- / A)	0,037%	86,486%	0,000%	74,799%	0,032%	0,80%	0,7680%	0,9149%	0,00022%
Vita III (5-yr) (AA- / A)	0,036%	86,111%	0,000%	74,151%	0,031%	0,80%	0,7690%	0,9101%	0,00020%
Vita III (5-yr) (A/A1)	0,039%	94,872%	0,000%	90,007%	0,037%	1,12%	1,0830%	0,8925%	0,00036%
0,01054%									
14									
Paramètres	CEL^2	PFL^2	CEL	PFL	Cste				
STD	-0,012838189	342,8756138	0,019203135	5,665967001	0				
R2 et Var globale	0,010476616	426,1444307	0,009698056	2,28756337	#N/A				
F	0,878735957	0,003245967	#N/A	#N/A	#N/A	v1	v2	p-value	alpha
SS Reg	115,0693627	10	#N/A	#N/A	#N/A	4	10	0,00000002562	5,00%
	0,004849621	0,000105363	#N/A	#N/A	#N/A			OK	
T-test	1,2254	0,8046	1,9801	2,4769	#N/A				
p-value	0,2485	0,4398	0,0759	0,0327	#N/A			Seuil critique Student	Seuil critique Fisher
Décision	N/S	N/S	N/S	Significatif	#N/A			2,2281	3,4780

*

* *

ANNEXE F – ELEMENTS DE THEORIE DE LA MESURE DU RISQUE

Les développements ci-dessous constituent une synthèse des principaux résultats axiomatiques de la théorie du risque et de la réassurance.

Plusieurs ouvrages ont contribué à cette synthèse : **HENRIET & ROCHET [1991]**, **PLANTIN & DEELSTRA [1999]**, le chapitre 20 de **La Réassurance – Approche technique [2003]**, **DICKSON [2005]** ainsi que les articles de **WANG [1995] & [1996]**.

1 – Rappels

Une prime d'assurance (en non-vie) est traditionnellement obtenue à partir des éléments suivants :

$$P'' = (1 + \beta) \cdot \pi + (f + g) \cdot P'' - PF \quad \text{en notant :}$$

π	la prime pure
β	le chargement de sécurité
P''	la prime commerciale
f	les frais généraux
g	les commissions d'affaires
PF	les produits financiers escomptés

Le chargement de sécurité λ (« *risk load* » en anglais) est un terme qui s'ajoute à l'estimation technique des engagements couverts par l'assureur (prime « pure » π égale à la valeur attendue – espérance mathématique - des sinistres).

La prime pure est la mesure principale du risque par application du principe de mutualisation des risques (théorème central limite et réduction de la variabilité de l'espérance de perte pour l'assureur par segmentation et atomicité du portefeuille).

Toutefois, la mutualisation n'est jamais parfaite et ne permet pas d'éliminer complètement la variabilité du risque : le chargement de sécurité permet de réduire la variance du résultat ou encore la probabilité de ruine de la compagnie (*cf.* TD 1^{ère} année du Centre d'Etudes Actuarielles). La protection de la ruine permet également la rémunération du risque pris *in fine* par les actionnaires de la société et doit ainsi se traduire par un coût du capital moindre pour la société d'assurance et un coût du risque moindre pour l'ensemble de la société (équilibre Pareto optimal).

A prime pure identique, la prime de risque augmente avec la variabilité du risque et l'aversion au risque du souscripteur. Aussi l'élément principal dans la conception et la tarification d'un chargement de sécurité réside-t-il en la détermination d'une mesure cohérente de risque.

Quelques mesures simples du risque sont fournies par les propositions suivantes, en notant X la variable aléatoire réelle modélisant le montant cumulé des sinistres :

<u>Principe</u>	<u>Mesure de risque</u>
Utilité nulle	$E[u(\Pi_u(X) - X)] = u(0)$ où u est une fonction d'utilité de von Neumann Morgenstern
Prime pure	$\Pi(X) = E[X]$ - cas particulier avec $u(x) = x$
Epérance mathématique	$\Pi(X) = (1 + \beta) \cdot E[X]$, $\beta > 0$
Variance	$\Pi(X) = E[X] + \beta \cdot Var[X]$, $\beta > 0$
Ecart-type	$\Pi(X) = E[X] + \beta \cdot \sigma(X)$, $\beta > 0$
Exponentiel	$\Pi(X) = \frac{1}{\alpha} \cdot \ln(E[e^{\alpha X}])$, $\alpha > 0$ paramètre d'aversion au risque
Perte maximale	$\Pi(X) = \alpha \cdot E[X] + (1 - \alpha) \cdot Max(X)$, $\alpha > 0$ $\Pi(X) = \frac{E[X \cdot e^{\alpha X}]}{E[e^{\alpha X}]}$, $\alpha \geq 0$
Esscher	permettant de recalculer $E(X)$ sous une nouvelle fonction de répartition G (transformée d'Esscher) de $F(x)$ telle que : $dG(x) = \frac{e^{\alpha x} \cdot dF(x)}{\int e^{\alpha x} \cdot dF(x)}$
MEDAF / CAPM	Ratio Sharpe

Pour autant, toutes ces mesures de risque ne remplissent pas les propriétés attendues d'un « bon » principe de prime pure :

<u>Propriété</u>	<u>Expression formelle</u>
« Au moins la prime pure »	$\forall X, P(X) \geq \cdot E[X]$; « non-negative loading »
Homogénéité et Invariance par changement d'échelle	$\forall X \text{ et } \beta > 0, P(\beta \cdot X) = \beta \cdot P(X)$ $\forall X \text{ et } c \geq 0, P(X + c) = P(X) + c$
Additivité ou sous-additivité	$\forall X \perp X', P(X + X') = P(X) + P(X')$ ou $P(X + X') \leq P(X) + P(X')$
Convexité	$\forall X, \forall X', \lambda \in [0,1], P[\lambda \cdot X + (1 - \lambda) \cdot X'] \leq \lambda \cdot P(X) + (1 - \lambda) \cdot P(X')$
Préservation de la dominance stochastique	Si $X \leq_{ST} X'$, alors $P(X) \leq P(X')$
Additivité par tranches	Tranche (a,b] d'un risque X est définie par :

$$I_{(ab]} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq X < a \\ X - a & \text{si } a \leq X < b \\ b - a & \text{si } b < X \end{cases}$$

avec pour fonction de survie

$$S_{I_{(ab]}}(t) = \begin{cases} S_X(a+t) & \text{si } 0 \leq t < (b-a) \\ 0 & \text{si } (b-a) \leq t \end{cases}$$

$$\text{avec } S_X(t) = 1 - F_X(t) = 1 - \Pr[X \leq x] = \Pr[X > x]$$

Quand X est divisé en tranches $\{(x_i, x_{i+1}], i = 0, 1, \dots\}$:

$$X = I_{(0,x_1]} + I_{(0,x_2]} + \dots \text{avec } 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots$$

$$\text{alors } P(X) = \sum_{i=0}^{\infty} P(I_{(x_i, x_{i+1}]})$$

L'additivité par tranche assure une cohérence dans les chargements des tranches dans les traités de réassurance non-proportionnelle notamment.

Les avantages et limites de chacun de ces principes d'évaluation de prime sont démontrés formellement dans les ouvrages référencés (*cf. supra*). La plupart des principes de prime exposés ci-dessus respectent au moins les propriétés de prime pure. Toutefois, des risques ayant le même profil en moyenne devraient être tarifés à la même prime, sauf si leur variance est différente – or le critère de la prime pure n'en tient pas compte. Par ailleurs, la plupart de ces principes de tarification ne satisfont pas aux critères d'additivité ou de translation (homogénéité / invariance).

2 – La transformée d'Esscher

La transformée d'Esscher mérite une attention particulière car elle constitue un préambule utile au principe de tarification de la prime ajustée du risque développée ci-après (« *risk adjusted premium principle* »).

On peut interpréter la prime d'Esscher comme la prime pure d'un risque \tilde{X} lié à X par la relation qui suit. En supposant que X est une variable aléatoire à valeur dans $]0; \infty[$ et de fonction de densité f , alors on définit la fonction de densité g d'une variable \tilde{X} par :

$$g(x) = \frac{e^{\alpha x} \cdot f(x)}{\int_0^{\infty} e^{\alpha x} \cdot f(x) dx}$$

et G la fonction de répartition de \tilde{X} définie par :

$$G(x) = \frac{\int_0^x e^{\alpha y} \cdot f(y) \cdot dy}{M_X(\alpha)}$$

La fonction de répartition G est la transformée d'Esscher de F de paramètre α . En notant que :

$$M_{\tilde{X}}(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot g(x) dx \text{ est la fonction génératrice des moments de } \tilde{X}, \text{ il vient : } M_{\tilde{X}}(t) = \frac{M_X(t + \alpha)}{M_X(\alpha)}$$

Ce résultat est important car dans pour calculer la prime sur \tilde{X} :

$$E[\tilde{X}] = \frac{\int_0^{\infty} x \cdot e^{\alpha x} \cdot f(x) dx}{\int_0^{\infty} e^{\alpha x} \cdot f(x) dx} = \frac{E[X \cdot e^{\alpha X}]}{E[e^{\alpha X}]} = \Pi(X)$$

L'espérance de \tilde{X} reflète donc la prime d'Esscher Π du sinistre X .

- Propriété de la prime pure

En notant que si $\alpha = 0$, on a $M_{\tilde{X}}(t) = M_X(t)$ et donc $E[\tilde{X}] = \Pi(X) = E[X]$.

Pour $\alpha \geq 0$:

$$\begin{aligned} E[\tilde{X}^r] &= \frac{d^r}{dt^r} M_{\tilde{X}}(t) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d^r}{dt^r} M_X(t + \alpha) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{M_X^{(r)}(\alpha)}{M_X(\alpha)} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \Pi(X) &= \frac{d}{d\alpha} E[\tilde{X}] \\ &= \frac{d}{d\alpha} \frac{M_X'(\alpha)}{M_X(\alpha)} \\ &= \frac{1}{M_X(\alpha)^2} \cdot [M_X^{(2)}(\alpha) \cdot M_X(\alpha) - M_X'(\alpha)^2] \\ &= E[\tilde{X}^2] - E[\tilde{X}]^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Aussi $\Pi(X)$ est une fonction non décroissante de α et donc $\forall \alpha \geq 0, \Pi(X) \geq E[X]$.

- Propriété de translation

Le principe de calcul de prime par la transformée d'Esscher est cohérente avec la propriété d'invariance par translation. En effet, pour $Y = X + c$:

$$\begin{aligned} \Pi(Y) &= \frac{E[Y \cdot e^{\alpha Y}]}{E[e^{\alpha Y}]} \\ &= \frac{E[(X + c) \cdot e^{\alpha(X+c)}]}{E[e^{\alpha(X+c)}]} \\ &= \frac{E[Xe^{\alpha X}] \cdot e^{\alpha c} + c \cdot E[e^{\alpha X}] \cdot e^{\alpha c}}{E[e^{\alpha X}] \cdot e^{\alpha c}} \\ &= \frac{E[Xe^{\alpha X}]}{E[e^{\alpha X}]} + c \\ &= \Pi(X) + c \end{aligned}$$

- Propriété d'additivité

$$\begin{aligned}
 \Pi(X_1 + X_2) &= \frac{E[(X_1 + X_2) \cdot e^{\alpha(X_1 + X_2)}]}{E[e^{\alpha(X_1 + X_2)}]} \\
 &= \frac{E[X_1 \cdot e^{\alpha X_1}] \cdot E[e^{\alpha X_2}] + E[e^{\alpha X_1}] \cdot E[X_2 \cdot e^{\alpha X_2}]}{E[e^{\alpha X_1}] + E[e^{\alpha X_2}]} \\
 &= \frac{E[X_1 \cdot e^{\alpha X_1}]}{E[e^{\alpha X_1}]} + \frac{E[X_2 \cdot e^{\alpha X_2}]}{E[e^{\alpha X_2}]} \\
 &= \Pi(X_1) + \Pi(X_2)
 \end{aligned}$$

- Propriété d'invariance

Le principe de construction de prime par la transformée d'Esscher n'est pas invariante par homothétie.

En notant : $\Pi_X(\alpha)$ la prime d'Esscher de paramètre α pour le risque X . Si $Z = \kappa \cdot X$, alors la prime d'Esscher pour le risque Z , noté $\Pi_Z(\alpha)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \Pi_Z(\alpha) &= \frac{E[Z \cdot e^{\alpha Z}]}{E[e^{\alpha Z}]} \\
 &= \frac{\kappa \cdot E[X \cdot e^{\kappa \cdot \alpha X}]}{E[e^{\kappa \cdot \alpha X}]} \\
 &= \kappa \cdot \Pi_X(\kappa \alpha) \\
 &\neq \kappa \cdot \Pi_X(\alpha), \quad \forall \kappa \neq 1
 \end{aligned}$$

- Exemple d'ajustement par le principe de la prime d'Esscher

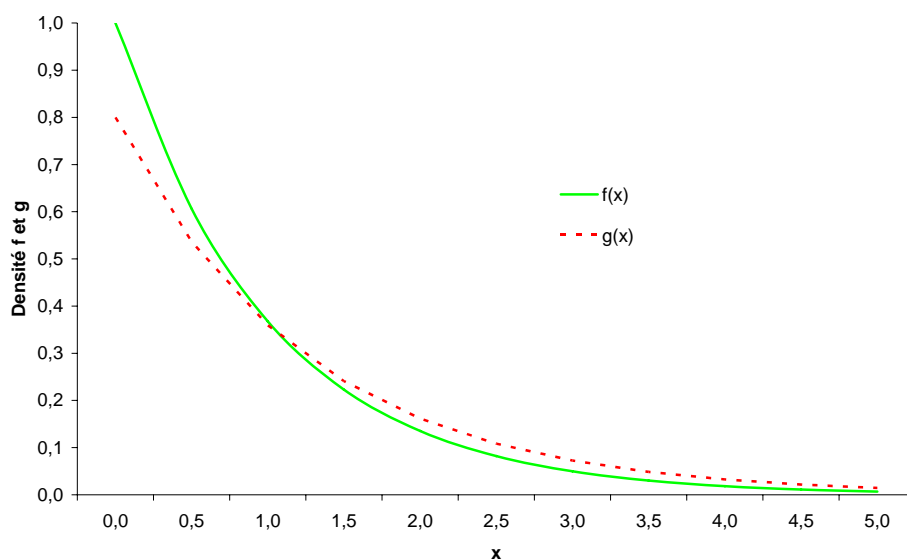
Supposons que : $F(x) = 1 - \exp\{-\lambda \cdot x\}$, $x \geq 0$. On cherche à déterminer la transformée d'Esscher de F de paramètre $\alpha > 0$ avec $\alpha < \lambda$. D'après ce qui précède, on peut directement écrire que :

$$M_{\bar{x}}(t) = \frac{M_X(t + \alpha)}{M_X(\alpha)} = \frac{\lambda - \alpha}{\lambda - \alpha - t}$$

Donc la transformée d'Esscher de la fonction F est $G(x) = 1 - \exp\{-(\lambda - \alpha) \cdot x\}$. On peut remarquer que la densité g est la même densité que f ajustée d'un poids $w(x)$ tel que :

$$g(x) = w(x) \cdot f(x) \quad \text{avec} \quad w(x) = \frac{e^{\alpha x}}{M_X(\alpha)}$$

Comme $\alpha > 0$, on en déduit que $w'(x) > 0$ et donc le poids associé à $f(x)$ augmente plus x prend des valeurs extrêmes. Le graphique ci-dessous illustre par un exemple chiffré cette transformation pour $\alpha = 0,2$.



3 – « Risk adjusted premium principle » : PH-Transform et opérateurs de distorsion

1 – Principes généraux

Les opérateurs de distorsion constituent un outil intéressant et particulièrement pratique pour calculer des primes selon le principe de l'ajustement du prix au risque. Ce principe de calcul de prime peut être analysée comme une bijection entre le niveau de risque implicite ou perçu d'un sinistre représenté par une variable aléatoire positive et le degré d'aversion au risque du preneur de risque (« *risk-taker* »).

Le coefficient d'aversion au risque résume en soi la marge de sécurité requise pour équilibrer la prime avec l'espérance de perte. Il s'agit d'effectuer une distorsion de la loi de probabilité sous-jacente des sinistres à l'aide d'une fonction plus ou moins complexe qui attribue plus de poids à la queue de distribution de la fonction de répartition des sinistres. Cette distorsion sera d'autant plus importante que l'aversion au risque est élevée, un assureur / investisseur averse au risque accordant plus de poids aux événements rares et extrêmes dans le principe de tarification.

Le principe de tarification en ajustant la prime au risque peut être formalisé de la manière suivante – en notant X une variable aléatoire positive ayant pour fonction de distribution F et ρ le coefficient d'aversion au risque :

$$\Pi(X) = \int_0^{\infty} [\Pr(X > x)]^{1/\rho} \cdot dx = \int_0^{\infty} [1 - F(x)]^{1/\rho} \cdot dx \quad \text{avec } \rho \geq 1$$

L'esprit de ce principe de tarification est directement comparable avec le principe d'Esscher : il introduit une distorsion dans le poids accordé aux probabilités de survenance de risques extrêmes en « skewant » négativement la densité de probabilité de réalisation des risques sous-jacents.

Si l'on définit la fonction de distribution G d'une variable positive X^* par : $1 - G(x) = [1 - F(x)]^{1/\rho}$

Comme on a : $E[X^*] = \int_0^\infty [1 - G(x)] \cdot dx$ il résulte que : $E[X^*] = \Pi(X)$

De plus si X est une variable aléatoire continue, alors la densité de X^* peut être obtenue directement en dérivant les termes :

$$g(x) = \frac{1}{\rho} \cdot [1 - F(x)]^{(1/\rho)-1} \cdot f(x)$$

Le principe de tarification par ajustement de la prime au risque remplit toutes les propriétés énoncées précédemment sauf l'additivité.

- Propriété de la prime pure

Cette propriété est respectée par la concavité du profil de la distorsion opérée par un coefficient $\rho \geq 1$. En effet comme :

$$1 - F(x) \leq [1 - F(x)]^{1/\rho}$$

Il vient que pour tout $x > 0$, puisque : $E[X] = \int_0^\infty [1 - F(x)] \cdot dx$

On trouve immédiatement que : $\Pi(X) \geq E[X]$

- Propriété de translation

En posant $Y = X + c$, on peut exprimer la probabilité $\Pr(Y > x)$ ainsi :

$$\Pr(Y > x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < c \\ 1 - F(x - c) & \text{si } x \geq c \end{cases} \quad \text{Alors en notant } \Pi(Y) \text{ la prime associée à } Y :$$

$$\begin{aligned} \Pi(Y) &= \int_0^\infty [\Pr(Y > x)]^{1/\rho} \cdot dx \\ &= \int_0^c dx + \int_c^\infty [1 - F(x - c)]^{1/\rho} \cdot dx \\ &= c + \int_0^\infty [1 - F(y)]^{1/\rho} \cdot dy \\ &= c + \Pi(X) \end{aligned}$$

- Propriété d'invariance

En posant $Z = \kappa \cdot X$, on peut exprimer la probabilité $\Pr(Z > x)$ ainsi $\Pr(Z > x) = \Pr\left(X > \frac{x}{\kappa}\right)$, d'où :

$$\begin{aligned}\Pi(Z) &= \int_0^{\infty} [\Pr(Z > x)]^{1/\rho} \cdot dx \\ &= \int_0^{\infty} \left[\Pr\left(X > \frac{x}{\kappa}\right)\right]^{1/\rho} \cdot dx \\ &= \kappa \cdot \int_0^{\infty} [\Pr(X > y)]^{1/\rho} \cdot dy \\ &= \kappa \cdot \Pi(X)\end{aligned}$$

- Propriété d'additivité

Le principe de tarification par ajustement de la prime au risque ne remplit pas la propriété d'additivité. Un contre-exemple permet de l'illustrer simplement.

Soit X_1 et X_2 deux risques i.i.d. tels que : $\Pr(X_1 = 0) = \Pr(X_2 = 1) = 0,5$

En posant le coefficient d'aversion au risque $\rho = 2$, on montre aisément que :

$$\Pi(X_1) = \Pi(X_2) = 0,5^{1/2} \quad \text{et} \quad \Pi(X_1 + X_2) = 0,5 \cdot (1 + 3^{1/2})$$

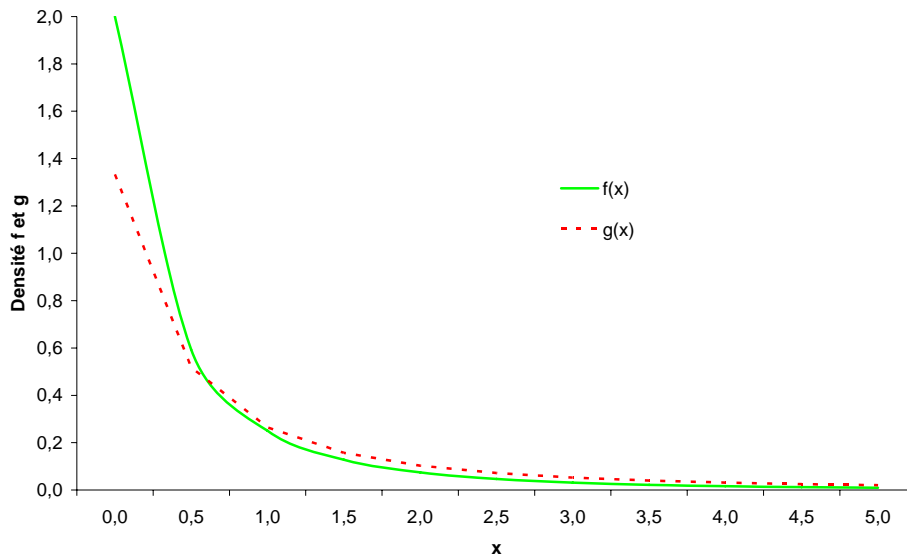
D'où l'on tire directement que : $\Pi(X_1) + \Pi(X_2) > \Pi(X_1 + X_2)$

- Exemple d'ajustement d'une loi de Pareto $X \propto Pa(\alpha, \lambda)$ par PH-transform

D'après TASSI [2004] $1 - F(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\alpha$ d'où $1 - H(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha/\rho}$.

Avec $H(x)$ la fonction de distribution de la variable $X^* \propto Pa\left(\frac{\alpha}{\rho}, \lambda\right)$ de telle sorte que

$$\Pi(X) = \frac{\rho \cdot \lambda}{\alpha - \rho} \quad \text{avec} \quad \rho < \alpha$$



2 – Transformée de Wang et lien avec le CAPM

Comme le souligne **C.M. COSTE** au chapitre 20 de l'ouvrage collectif **La Réassurance – approche technique [2003]**, les principales limites des PH-transforms sont les suivantes :

- (i) manque de souplesse en matière d'allure : comparé aux prix de marché, le chargement relatif des tranches hautes croît parfois trop vite
- (ii) la PH-transform ne peut s'appliquer simultanément aux actifs et aux engagements
- (iii) la PH-transform ne conserve pas la log-normalité

WANG [1995] & [1996] propose ainsi un procédé moins intuitif mais plus juste de tarification à la valeur du risque, cherchant ainsi à unifier les principes de calcul de primes d'assurance et ceux de la finance.

On définit la transformée de Wang comme la fonction g_λ : $g_\lambda(x) = \Phi[\Phi^{-1}(x) + \lambda]$ avec $\lambda \in \mathfrak{R}$ et Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (Φ^{-1} la fonction inverse de Φ).

La prime ajustée au risque de paramètre λ est donnée par l'intégrale de Choquet suivante :

$$H_g[X] = \int_{-\infty}^c \{g_\lambda[S_X(x)] - 1\} \cdot dx + \int_c^{\infty} g_\lambda[S_X(x)] \cdot dx$$

Du fait de la concavité de la fonction g_λ on a :

$$H_g[X] \geq E[X]$$

WANG [2000] montre qu'en utilisant la fonction Φ , on trouve que g_λ remplit toutes les propriétés souhaitables d'un principe de calcul de prime. En effet, avec :

$$f(x) = \frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On obtient les résultats suivants :

- (i) $g_\lambda(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g_\lambda(x) = 0$
- (ii) $g_\lambda(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g_\lambda(x) = 1$
- (iii) $\frac{dg_\lambda(x)}{dx} = \frac{f(x+\lambda)}{f(x)} = e^{-\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}} > 0$
- (iv) $\frac{d^2 g_\lambda(x)}{dx^2} = -\lambda \cdot \frac{f(x+\lambda)}{f(x)^2}$ donc g_λ est concave pour $\lambda > 0$ et convexe pour $\lambda < 0$
- (v) $g'_\lambda(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{dg_\lambda(x)}{dx} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}} = +\infty$

On vérifie alors que la transformée de Wang remplit les propriétés usuelles d'un « bon » procédé de chargement :

- $Min[X] \leq H_g[X; \lambda] \leq Max[X]$
- $H_g[X; \lambda]$ est une fonction croissante de λ ; quand λ croît de $-\infty$ à $+\infty$, $H_g[X; \lambda]$ croît de $Min[X]$ à $Max[X]$
- Pour une constante c , $H_g[c; \lambda] = c$ et $H_g[X + c; \lambda] = H_g[X; \lambda] + c$
- Pour une variable aléatoire X non dégénérée :

$$\begin{aligned} H_g[X; \lambda] &< E[X] & \text{si } \lambda < 0 \\ H_g[X; \lambda] &= E[X] & \text{si } \lambda = 0 \\ H_g[X; \lambda] &> E[X] & \text{si } \lambda > 0 \end{aligned}$$

- Pour $\kappa > 0$, on a : $H_g[\kappa \cdot X; \lambda] = \kappa \cdot H_g[X; \lambda]$
- Pour $\kappa < 0$, on a : $H_g[\kappa \cdot X; \lambda] = \kappa \cdot H_g[X; -\lambda]$ et notamment $H_g[-X; \lambda] = -H_g[X; -\lambda]$
- Si une tranche $(a, c]$ est divisée en deux sous tranches $(a, b]$ et $(b, c]$, alors pour $a < b < c$:

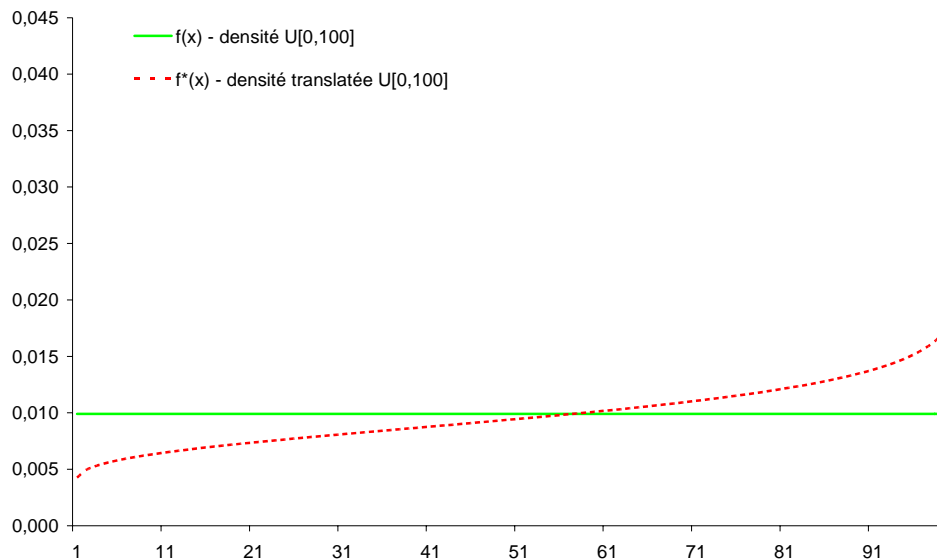
$$H_g[X(a, c]; \lambda] = H_g[X(a, b]; \lambda] + H_g[X(b, c]; \lambda]$$

- Quelles que soient les variables X_1 et X_2 :

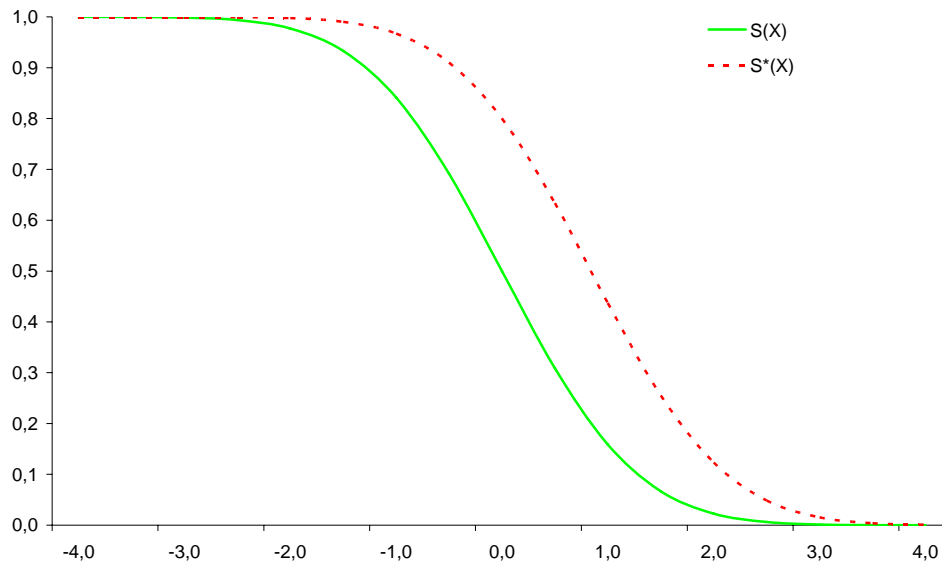
$$\begin{aligned} H_g[X_1 + X_2; \lambda] &\leq H_g[X_1; \lambda] + H_g[X_2; \lambda] & \text{si } \lambda > 0 \\ H_g[X_1 + X_2; \lambda] &\geq H_g[X_1; \lambda] + H_g[X_2; \lambda] & \text{si } \lambda < 0 \end{aligned}^s$$

On peut illustrer la transformation de Wang à partir d'exemples de lois usuelles :

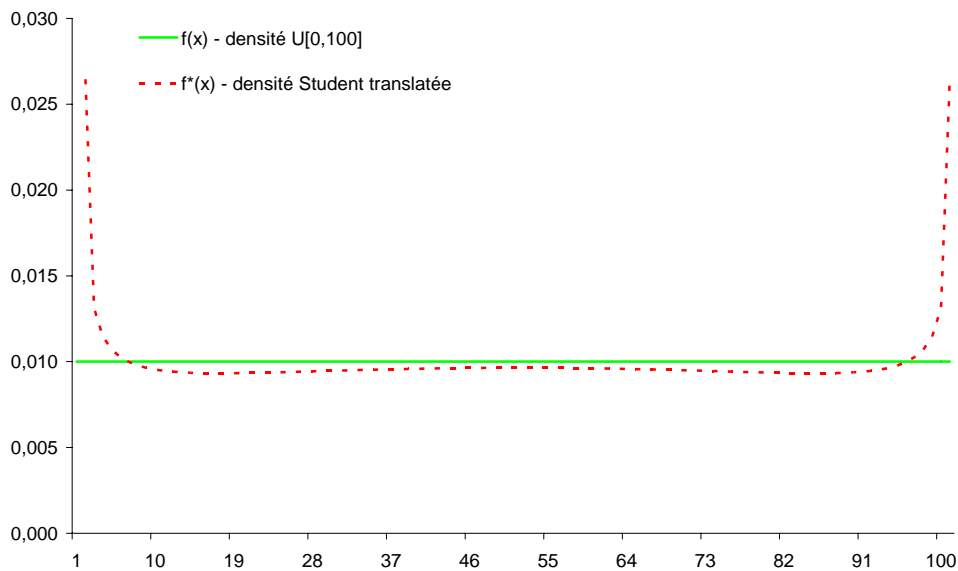
- Exemple d'ajustement d'une loi uniforme $X \propto U[0, 100]$ avec $\lambda = 0,3$



- Exemple d'ajustement d'une loi uniforme $X \propto N(0,1)$ avec $\lambda = 0,8$



- Exemple d'ajustement d'une loi uniforme $X \propto U[0,100]$ par une distribution de Student à deux paramètres $\lambda = 0,3$ et $k = 7$ (degrés de liberté)



3 – Lien avec le CAPM

La transformée de Wang assure l'invariance de loi pour la distorsion d'une loi normale.

En effet si un risque X suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 , alors sa transformée par l'opérateur de distorsion de Wang sera également une loi normale de paramètres : $\mu' = \mu + \lambda \sigma$ et $\sigma' = \sigma$.

Il s'ensuit que : $H_g[X; \lambda] = E[X] + \lambda \cdot \sigma$ qui reflète le principe traditionnel de tarification à l'écart-type. Il en va de même pour une variable aléatoire suivant une loi log-normale.

WANG [2000] montre le lien entre son approche de la tarification du risque d'assurance sans *à priori* sur le modèle de distribution des sinistres et l'approche du CAPM qui justifie la rémunération de la part du risque non diversifiable par un indice de marché général.

La prime de risque que permet de mettre à jour la distorsion de probabilité est donc justifiée par l'adéquation du prix à la mesure du risque envisagée : le concept de « *fair value* » ou de tarification « risque-neutre » trouve ici sa significativité.

*

* *