

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD – LYON 1

École Doctorale Sciences Économiques et de Gestion

THÈSE

Présentée pour l'obtention

du DIPLÔME DE DOCTORAT

(Arrêté du 7 août 2006)

par

Rivo RANDRIANARIVONY

Prise en Compte des Discontinuités de Cours Financiers en Assurance et Finance

Soutenue publiquement le 28 novembre 2008, devant le jury composé de :

M.	Jean BERTHON	Fondation du Risque	
Pr.	Griselda DEELSTRA	Université Libre de Bruxelles	
Pr.	François QUITTARD-PINON	Université de Lyon 1	(Directeur)
Pr.	Philippe RAIMBOURG	Université de Paris 1	
Pr.	Michael ROCKINGER	Université de Lausanne, HEC	(Rapporteur)
Pr.	Patrick ROUSSEAU	IAE Aix-En-Provence	(Rapporteur)

N° d'ordre 229-2008

Année 2008

À Dada sy Neny
À Tina

Remerciements

Je tiens à remercier le Professeur François Quittard-Pinon pour avoir accepté de diriger mes travaux. Je tiens particulièrement à exprimer ici ma sincère gratitude pour le soutien continu et la confiance qu'il m'a accordés tout au long de cette thèse. Les conseils prodigués et les multiples discussions que nous avons eues ensemble ont été particulièrement enrichissants. J'espère que la collaboration scientifique que nous avons eue portera encore de nombreux fruits.

Tous mes remerciements s'adressent aux Professeurs Mickael Rockinger et Patrick Rousseau pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je suis également très honoré que M. Jean Berthon, président de la Fondation du Risque, les Professeurs Griselda Deelstra et Philippe Raimbourg aient accepté de faire partie de mon jury.

À Olivier Le Courtois, je souhaite de tout cœur que notre longue amitié donnera lieu à une activité scientifique encore plus fructueuse. Je lui adresse mes remerciements pour les nombreux encouragements et conseils qu'il m'a offerts. ありがとう ございます。

Je tiens ici à remercier tous les professeurs qui m'ont suivi tout au long de mes études, à Madagascar, aux États-Unis et ici en France. Leurs efforts, leur patience n'auront pas été vains.

Je ne pourrais terminer sans exprimer ma profonde reconnaissance à tous ceux qui m'entourent, ici ou au loin. Par leur présence ou par leurs pensées, ils ont toujours été là, me témoignant leur confiance et leur affection sans cesse. Misaotra betsaka.

Sommaire

Introduction générale	1
I Méthodologies d'évaluation d'options et quelques applications en finance	7
1 Produits dérivés de type européen	9
2 Options exotiques, défaut sur fonds propres et intéressement des dirigeants	51
II Assurance-vie et théorie de la ruine	93
3 Contrats d'assurance-vie	95
4 Retour sur la théorie de la ruine	137
Conclusion générale	167
Bibliographie	177
Table des matières	181

Introduction Générale

Les modèles mathématiques constituent un pilier incontournable de la finance de marché contemporaine. Dans un monde complexe, c'est un moyen privilégié d'appréhender le comportement des marchés. Pour les intervenants sur le marché, pouvoir représenter le cours des actifs financiers de la façon la plus proche possible de la réalité constitue un enjeu majeur. Les divers acteurs doivent aussi cependant concilier la recherche des représentations de cours les plus réalistes possibles avec d'autres exigences parfois contradictoires. Parmi celles-ci, la facilité d'expression et la simplicité de leur manipulation figurent en bonne place. Pour les praticiens en salles de marché, il est vital d'avoir une mise en œuvre à la fois efficace et la plus rapide possible. En effet, de la rapidité de la cotation d'un produit pour le client peut dépendre la conclusion ou non d'une affaire.

La thèse de Bachelier (voir Bachelier (1900*a*) et Bachelier (1900*b*)) est le premier travail reconnu de modélisation des fluctuations constatées sur le marché. Bachelier a imaginé une représentation mathématique des cours par un mouvement brownien, un usage novateur pour l'époque. Si cette première approche de la réalité des cours d'actifs financiers permettait de rendre compte de leur caractère intrinsèquement aléatoire, par nature la représentation par un mouvement brownien induit aussi des cours négatifs, ce qui n'est pas souhaitable. Il faudra attendre les années 60 et l'article de Samuelson de 1965 pour remédier à ce problème. La solution a consisté à utiliser des exponentielles de mouvement brownien, encore appelées mouvements browniens géométriques. Passer par la fonction exponentielle garantit que les prix obtenus soient positifs. Ce sont cette fois-ci les rendements (logarithmiques) des actifs financiers qui sont représentés par des mouvements browniens. En particulier, la loi des rendements des cours d'actifs qui en découle est une loi gaussienne. Le mouvement brownien géométrique est devenu la pierre angu-

laire de la finance moderne depuis les travaux de Black et Scholes (1973) et de Merton (1973). En effet, l'obtention de formules fermées dans l'évaluation de plusieurs types d'actifs contingents dans ce cadre gaussien est une propriété importante. Cette propriété répond aux exigences de performance et de rapidité mentionnées plus haut et a fait du modèle de Black, Scholes et Merton un cadre de travail classique qui sert souvent de référence ou de premier modèle mis en œuvre pour l'évaluation de produits complexes.

Toutefois, dès les années soixante, des auteurs comme Mandelbrot (1963) ou Fama (1965) ont proposé des représentations non-gaussiennes des rendements d'actifs. Plusieurs études empiriques comme celle de Cont (2001) (voir aussi celles rappelées par Jondeau, Poon et Rockinger (2007)) ont en effet remis en cause l'hypothèse de normalité des rendements. Mandelbrot note ainsi que des phases de forte volatilité sont suivies de phases de faible volatilité, un phénomène connu sous le nom de regroupement de volatilité. Ce phénomène peut par exemple être modélisé par des dynamiques à volatilité stochastique. Il est aussi admis que la plupart des lois de rendement sont leptokurtiques et exhibent des asymétries avec des queues épaisses étalées sur la gauche. Cela signifie plus de rendements extrêmes, en particulier négatifs, que ne laisse prévoir une loi gaussienne. De telles lois de rendement impliquent aussi que les trajectoires prises par les cours d'actifs financiers présentent des discontinuités.

Les turbulences récentes sur les marchés financiers démontrent à plusieurs reprises ces ruptures sur les cours. Ainsi, le cours de l'assureur American International Group (AIG) a perdu 30 % au cours de clôture du vendredi 12 septembre 2008 et le Lundi Noir, le 15 septembre 2008, le jour où la banque d'investissement Lehman Brothers se mettait sous la protection du chapitre 11 de la loi américaine sur les faillites, l'assureur AIG perdait 60 % en réaction aux craintes du marché d'un risque de défaut, et encore 21 % et 45 % les 16 et 17 septembre 2008 pour terminer à 2.05 dollars alors que le 2 janvier 2008 dernier, le titre AIG clôturait encore à 56.30 dollars. Les sauts ne sont pas forcément négatifs comme le prouvent les rallyes généraux constatés sur les places de marché à la clôture du vendredi 21 septembre. En réaction au plan de sauvetage massif annoncé par la Maison Blanche ce jour-là, il y a eu un rebond significatif des indices mondiaux et en particulier sur les places européennes, avec 9.27 % de gain à 4324.87 points pour

le CAC 40, un gain historique depuis la création de cet indice, et 8.84 % à 5311.30 points pour le FTSE 100.

Il est donc essentiel de pouvoir modéliser ces discontinuités et de tenir compte de ces sauts dans un modèle plus proche de la réalité des marchés. Plusieurs modèles alternatifs ont alors été proposés depuis les travaux de Mandelbrot dans les années soixante et en continuant à la fin des années quatre-vingt-dix avec la modélisation des prix d'actifs financiers par des exponentielles de processus de Lévy. Dans un article fondateur, Carr, Geman, Madan et Yor (2002) introduisent des processus purement discontinus, permettant de remplacer complètement la composante diffusive par des sauts de faible amplitude arrivant avec un taux infini. Aït-Sahalia (2004) a proposé une méthodologie pour séparer les composantes diffusive et à sauts d'une semi-martingale. Pour un tour d'horizon de ces divers modèles, voir aussi Cont et Tankov (2004a). Leur développement demeure jusqu'à maintenant un domaine de recherche très actif.

Il est intéressant alors d'étudier les conséquences de la prise en compte de ces discontinuités sur l'évaluation d'actifs contingents fondamentaux tels que les options. Les produits dérivés sont plus difficiles à étudier et à analyser, les couvertures plus délicates à construire dès que les dynamiques des rendements d'actifs sont plus complexes qu'une diffusion, la présence de sauts rendant le marché incomplet. C'est l'étude de l'impact de ces sauts dans les domaines de la finance et de l'assurance qui constitue l'objet de cette thèse.

La première partie va nous permettre de mettre en place les méthodologies d'évaluation d'options utilisées tout au long de ce travail et de voir l'impact de ces discontinuités de cours dans quelques applications en finance.

Le premier chapitre expose les méthodologies d'évaluation déployées pour l'évaluation de produits dérivés de type européen. Nous nous appuyons sur l'approche par transformée de Fourier généralisée développée par Boyarchenko et Levendorskiï (2000) pour les processus de Lévy réguliers de type exponentiel qui comprennent les processus KoBoL initiés par Koponen (1995) et les processus CGMY développés par Carr et al. (2002). Nous l'adaptions à la classe des processus diffusifs avec sauts parmi lesquels le modèle de Merton (1976) et celui de Kou (2002). Les options *vanille* européennes sont déjà peu simples à évaluer dans le cas de ces deux modèles mixtes diffusifs et sauts. Pour chacun de ceux-ci, la solution peut être exprimée sous la forme d'une série, une formule semi-fermée constituée d'une

somme pondérée de termes. La solution peut être obtenue numériquement en effectuant une résolution numérique de l'équation intégral-différentielle correspondante (cf. Cont et Voltchkova (2005)) ou en conduisant des simulations de Monte-Carlo. La transformée de Fourier généralisée permet de son côté d'avoir une approche unifiée de l'évaluation de produits optionnels quoique nous n'ayons plus de formule semi-explicite et que nous devons recourir à une mise en œuvre numérique. Nous introduisons dans ce premier chapitre un modèle diffusif avec sauts étendant le modèle de Kou et pour lequel il n'y a plus aucune solution explicite ou semi-explicite proposée dans la littérature (cf. Quittard-Pinon et Randrianarivony (2008c)). Ce modèle est appelé modèle diffusif à sauts hyperexponentiels. Nous verrons dans ce chapitre laquelle de ces approches est la plus à même de répondre aux exigences de performance des intervenants de marché (cf. Quittard-Pinon et Randrianarivony (2008d)). Nous discuterons aussi de l'évaluation des options puissance qui n'a de solution connue que dans le cadre classique de Black, Scholes et Merton. Par ailleurs, ce premier chapitre présente aussi le calibrage de ces modèles diffusifs et sauts sur des données de marché (cf. Quittard-Pinon et Randrianarivony (2008b)).

Le deuxième chapitre porte sur l'étude de la prise en compte des sauts sur le défaut sur fonds propres et la rémunération des dirigeants. Comme dans les modèles structurels du défaut, il est important de pouvoir modéliser et connaître le temps de passage par une barrière afin d'évaluer les produits de défaut sur fonds propres. Une exposition des options exotiques et de façon générale, de la prise en compte des barrières et des temps de passage est alors effectuée dans ce second chapitre. Si peu de formules fermées sont connues, même dans le cadre classique de Black, Scholes et Merton pour l'évaluation des diverses options exotiques et le calcul des temps de passage par une barrière, leur obtention est encore plus difficile dans le cadre des processus de Lévy exponentiels, en général et des processus diffusifs avec sauts, en particulier. Le franchissement de la barrière peut en effet se faire soit par l'intermédiaire de la composante diffusive, et continue, soit être dû à la survenue d'un saut. Dans ce cas, la taille du saut peut faire dépasser la trajectoire du processus par rapport à la barrière de beaucoup. La distance du point ainsi atteint à la barrière est appelée *overshoot*. Un aperçu de l'approche générale par les facteurs de Wiener-Hopf est alors exposé, outil qui sera mis en évidence dans le dernier chapitre. Dans le cadre des modèles

diffusifs avec sauts hyperexponentiels, le calcul du temps de premier passage se fait par une transformée de Laplace. Le calcul de l'*overshoot* pour le cas du modèle diffusif à sauts hyperexponentiels est inspiré du raisonnement de Kou et Wang (2003) pour le modèle à sauts exponentiels doubles. Une partie importante de la rémunération des dirigeants est basée sur un nouveau type de *stock option* dont le critère de performance est mesuré par le comportement de la valeur de l'entreprise par rapport à un indice synthétique proposé par Johnson et Tian (2000a). Ces *stock options* dites indexées sont une alternative aux *stock options* classiques avec prix d'exercice fixe. Ces auteurs ont montré les meilleurs effets incitatifs de cette nouvelle sorte de *stock option* dans Johnson et Tian (2000b) dans le cadre du modèle de Black, Scholes et Merton. Avec ce critère de performance, l'évaluation de cette rémunération complémentaire se ramène au calcul d'une option d'échange. Le deuxième chapitre montre alors le calcul, relativement technique, des options d'échange en présence de sauts. De nouveau, s'il y a une solution explicite avec la formule de Margrabe (1978) dans le cadre diffusif de Black, Scholes et Merton, il ne semble pas qu'il y ait de solution connue, même semi-explicite, dans le cas des modèles diffusifs avec sauts. Cette proposition de solution est l'une des contributions de cette thèse. L'impact des discontinuités du cours de l'entreprise sur la rémunération de ses dirigeants est alors exploré.

Dans la deuxième partie de la thèse, assurance-vie et théorie de la ruine, nous nous intéressons à l'impact des sauts dans le domaine de l'assurance. Dans un premier temps, nous y verrons le comportement de certains contrats d'assurance-vie. Dans un second temps, nous reviendrons sur la théorie de la ruine d'une compagnie d'assurance.

Le troisième chapitre, premier chapitre de la deuxième partie, pose la question de la conséquence sur la valeur des contrats d'assurance-vie des discontinuités de la valeur du portefeuille d'actifs auquel ces contrats sont adossés. Une nouvelle dimension dont nous tenons compte dans ce chapitre est aussi le risque de mortalité inhérent à ce type de contrat. Ce risque particulier associé au souscripteur du contrat est supposé indépendant des risques financiers. Cette hypothèse nous semble raisonnable dans une première approche. Deux modèles de mortalité sont alors utilisés pour représenter ce risque, le modèle de Gompertz et le modèle de Makeham. Deux produits en particulier seront étudiés dans ce chapitre. Le premier est un contrat à garantie flexible en cas de vie : le souscripteur investit un capital initial dans

un portefeuille d'actifs et s'il est en vie à l'échéance, la compagnie s'engage à lui verser soit la valeur à cet instant du portefeuille soit au minimum la valeur d'un actif moins risqué qui sert de garantie. Le second produit est une police d'assurance en cas de décès. Le contrat à bénéfice minimum garanti en cas de décès verse au bénéficiaire du contrat le maximum entre la valeur du portefeuille investi au moment du décès du souscripteur et la valeur de l'apport initial rémunérée par la compagnie d'assurance à un taux minimum garanti. Sur ce type de produit, la compagnie d'assurance prélève directement des frais de mortalité et de gestion sur le portefeuille d'actifs. Dans plusieurs travaux, il apparaît que le taux des frais prélevés semblent surévalué, notamment dans l'article de Milevsky et Posner (2001) qui utilise un modèle gaussien. Un nouvel élément de réponse est apporté dans ce troisième chapitre avec la prise en compte simultanée du risque de taux d'intérêt, de la présence de sauts et du risque de mortalité (cf. Quittard-Pinon et Randrianarivony (2008a)).

Le dernier chapitre porte sur la théorie de la ruine des compagnies d'assurance. Le but est d'étudier la faillite et la survie de ces compagnies. Nous nous intéressons à la dynamique des réserves de la compagnie. Ces réserves correspondent à la différence entre les actifs de la compagnie et ses passifs. La dynamique des réserves est représentée par le processus de surplus. Le fait que les actifs soient placés sur les marchés financiers entraîne nécessairement que les chocs subis par ces actifs se répercutent sur le processus de surplus, que les sauts provoqués soient à la hausse ou à la baisse. Nous proposons alors l'utilisation de deux processus de Lévy, un processus diffusif et sauts d'un côté et un processus stable de l'autre. Les résultats obtenus offrent une nouvelle perspective à la théorie de la ruine, en particulier en horizon de gestion infini (voir aussi Le Courtois et Randrianarivony (2007)). Le renflouement en urgence de l'assureur américain AIG est un exemple édifiant qui va dans le sens de ces résultats.

Cette thèse a donné lieu à des communications dans des congrès internationaux et des publications dans les revues suivantes : International Journal of Business, Banque et Marchés et Finance.

Première partie

**Méthodologies d'évaluation
d'options et quelques
applications en finance**

Chapitre 1

Produits dérivés de type européen dans le cadre des modèles diffusifs avec sauts

Introduction

Ce chapitre étudie la mise en œuvre de l'approche présentée par Boyarchenko et Levendorskiĭ (2002*b*) dans le cadre général des modèles de Lévy exponentiels sur la classe des modèles diffusifs avec sauts. Nous montrons que cette approche est très performante par rapport aux solutions semi-explicites obtenues auparavant par Merton (1976) et Kou (2002), en particulier relativement à cette dernière. La puissance de cette approche dite par transformée de Fourier généralisée est mise en évidence sur un modèle qui étend et généralise celui de Kou.

Dans un premier temps, nous rappelons le cadre général des modèles diffusifs avec sauts et en particulier les modèles originels de Merton et de Kou. Nous proposons aussi dans cette section une extension de ce dernier modèle. Nous détaillons alors dans la section 1.2 une approche générale pour évaluer les options de type européen. Nous étudions ensuite l'exactitude de cette approche ainsi que sa performance par rapport aux solutions obtenues par Merton et Kou avant de l'utiliser sur le modèle étendu que nous introduisons. Enfin, nous présentons dans la section 1.3 un calibrage de ces modèles sur des données de marché.

1.1 Cadre des modèles diffusifs avec sauts

Nous commençons par décrire le cadre général ainsi que les hypothèses de marché sous lesquelles nous nous plaçons. Nous verrons ensuite le détail ainsi que les solutions des modèles de Merton et de Kou.

1.1.1 Cadre général

1.1.1.1 Le marché

Nous posons les hypothèses classiques suivantes sur le fonctionnement du marché. Le marché financier est supposé être parfait. En particulier, il est supposé sans frictions. Les actifs peuvent être échangés en n'importe quelle quantité, sans coûts de transaction ni imposition. Les ventes à découvert sont autorisées et le coût de l'argent est le même tant pour le prêt que pour l'emprunt.

Le taux d'intérêt instantané est supposé constant et égal à r . Nous disposons aussi sur ce marché d'un actif sans risque B . Sa valeur à chaque instant est égale à $B_t = B_0 \exp(rt)$.

Nous notons $S = \{S_t, t \geq 0\}$ le processus de prix de l'actif sous-jacent considéré. Nous avons aussi une option européenne écrite sur cet actif sur le marché et nous supposons que l'action ne distribue pas de dividendes pendant la vie de l'option.

Notons $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration naturelle générée par le processus S . Nous dirons qu'une mesure de probabilité Q définie sur $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ est une mesure martingale équivalente si :

- Q est équivalente à la mesure historique P , c'est-à-dire que les événements négligeables sont les mêmes sous les deux mesures ;
- le processus de prix actualisé $e^{-rt}S_t$ est une martingale sous Q par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Une telle mesure martingale équivalente est aussi appelée mesure risque-neutre car le rendement sur le placement sans risque est le même que le rendement attendu (en espérance) de l'actif S . En effet, si nous investissons dans l'actif risqué, à un moment donné T , la valeur de notre actif sera S_T et en espérance, nous avons alors $E_Q(S_T | \mathcal{F}_0) = S_0 \exp(rT)$. Or, nous pouvons garantir cette même valeur si nous achetons S_0/B_0 parts de l'obligation sans risque. Nous verrons plus loin dans ce chapitre l'importance de ce type

de mesure et en particulier sa fonction de mesure d'évaluation de produits dérivés.

Nous allons maintenant nous pencher sur la dynamique générale d'un actif dans les modèles diffusifs avec sauts, avant de présenter les modèles particuliers de Merton et de Kou.

1.1.1.2 La dynamique générale du sous-jacent

Nous nous intéressons maintenant à la dynamique du cours de l'actif S_t dans le cadre des modèles diffusifs avec sauts. Nous avons évoqué plus haut qu'au modèle diffusif initial de Black et Scholes (1973) et de Merton (1973) est alors ajoutée une composante de sauts représentée par un processus de Poisson composé. Nous verrons plus loin que c'est la spécification de cette composante de sauts qui différencie les modèles de Merton (1976) et de Kou (2002).

Dans la lignée du modèle de Black, Scholes et Merton, la dynamique du cours peut être définie classiquement au travers d'une équation différentielle stochastique du type suivant :

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = \mu dt + \sigma dW_t + d \left(\sum_{i=1}^{N_t} (Y_i - 1) \right),$$

où le dernier terme représente les sauts affectant la dynamique de l'actif sous-jacent. Après résolution de cette équation différentielle stochastique, en appliquant le lemme d'Itô généralisé, nous pouvons représenter la dynamique du sous-jacent de façon synthétique comme

$$S_t = S_0 \exp(X_t),$$

où S_0 est le prix à l'instant 0 de l'actif et

$$X_t = \underbrace{\omega t + \sigma W_t}_{\text{partie diffusive}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N_t} J_i}_{\text{sauts}}. \quad (1.1)$$

W est un mouvement brownien standard avec $W_0 = 0$. Les constantes ω et $\sigma > 0$ sont respectivement la dérive et la volatilité de la partie diffusive de la dynamique de cours. N est un processus de Poisson simple de paramètre λ .

Les variables aléatoires (J_i) sont indépendantes et identiquement distribuées et représentent la taille des sauts pouvant survenir. Nous noterons $\phi_J(u) = E[e^{iuJ}]$ la fonction caractéristique de la loi de ces sauts.

Le processus de Poisson composé ainsi constitué correspond à la composante de sauts du modèle. Les processus W , N et la suite de variables aléatoires (J_i) sont supposés indépendants. Cette écriture synthétique fait aussi appartenir les modèles diffusifs avec sauts à la grande famille des modèles de Lévy exponentiels.

Nous pouvons déduire directement de l'équation (1.1) la fonction caractéristique de la variable aléatoire X_t

$$\phi_{X_t}(u) = e^{t \left(i\omega u - \frac{\sigma^2}{2} u^2 + \lambda (\phi_J(u) - 1) \right)} = e^{-t\psi(u)},$$

et donc l'exposant caractéristique associé au processus de Lévy X s'écrit :

$$\psi(u) = -i\omega u + \frac{\sigma^2}{2} u^2 - \lambda(\phi_J(u) - 1). \quad (1.2)$$

Nous allons maintenant passer en revue les modèles originaux de Merton et de Kou.

1.1.2 Le modèle à sauts gaussiens de Merton

Dans son article, Merton (1976) commence par décrire formellement la dynamique de l'actif à partir de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \begin{cases} (\alpha - \lambda\kappa) dt + \sigma dW_t, & \text{s'il n'y a pas de saut de cours,} \\ (\alpha - \lambda\kappa) dt + \sigma dW_t + (Y - 1), & \text{si un saut se produit,} \end{cases} \quad (1.3)$$

où pas plus d'un saut de prix ne se produit à aucun instant presque sûrement, ce qui traduit le fait que la composante de sauts est d'activité finie.

Un saut est représenté par la variable aléatoire Y qui fait passer le prix de l'actif de S_t à YS_t . Nous voyons que $Y - 1$ représente alors le pourcentage de changement de prix lorsqu'un saut de Poisson se produit. L'espérance mathématique de ce pourcentage est notée par $\kappa = E(Y - 1)$. Dans ce modèle, α représente le rendement instantané espéré sur l'actif S_t . Le nombre moyen d'événements de Poisson par unité de temps est λ .

Comme mentionné auparavant, nous pouvons alors déduire de l'équation différentielle stochastique précédente la dynamique du sous-jacent

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \kappa \right) t + \sigma W_t \right) \prod_{i=1}^{N_t} Y_i$$

que nous pouvons réécrire comme

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \kappa \right) t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} J_i \right), \quad (1.4)$$

en posant $J_i = \ln(Y_i)$ et dont nous pouvons écrire la partie exponentielle sous la même forme que l'équation (1.1) en posant $\omega = \alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \kappa$. Nous reviendrons sur cette écriture plus loin. Pour le moment, intéressons-nous à l'établissement de la formule d'évaluation d'une option écrite sur un tel sous-jacent par Merton.

Le prix $F(S, t)$ d'une telle option obéit naturellement à une dynamique similaire à celle écrite en (1.3) pour son sous-jacent. En effet, les évènements qui impactent fortement sur le sous-jacent influent par la même occasion sur le prix de l'option. Les évènements de Poisson sur ce dernier arrivent ainsi à la même fréquence λ . Nous posons $\kappa_F = E(Y_F - 1)$ l'espérance de la variation en pourcentage du saut de prix de l'option qui survient alors. Comme le changement de prix de l'option survient quand l'évènement de Poisson sur son sous-jacent a lieu, comme le prix de celui-ci passe de S à $S Y$, la variable aléatoire Y_F s'écrit $Y_F = F(S Y, t) / F(S, t)$.

Notons α_F le rendement instantané espéré sur l'option et σ_F la volatilité instantanée du rendement de l'option. L'application du lemme d'Itô nous donne l'expression de ces deux dernières quantités :

$$\begin{aligned} \alpha_F &= \left(\frac{\sigma^2}{2} S^2 F_{SS} + (\alpha - \lambda \kappa) S F_S + F_t + \lambda E [F(S Y, t) - F(S, t)] \right) / F \\ \sigma_F &= \sigma S F_S / F \end{aligned} \quad (1.5)$$

où les indices sur F indiquent les dérivées partielles sur cette fonction.

Nous pouvons maintenant construire une stratégie de portefeuille en détenant une part p_1 du sous-jacent, une part p_2 en option et une part $p_3 = 1 - p_1 - p_2$ en actif sans risque B . La valeur P du portefeuille obéit alors au même type de dynamique (1.3) que le sous-jacent et l'option avec

le même paramètre λ d'arrivée des sauts. Les autres paramètres de la dynamique de la valeur du portefeuille s'écrivent de la manière suivante :

$$\alpha_P = p_1(\alpha - r) + p_2(\alpha_F - r) + r \quad (1.6)$$

$$\sigma_P = p_1 \sigma + p_2 \sigma_F \quad (1.7)$$

$$Y_P - 1 = p_1(Y - 1) + p_2[F(SY, t) - F(S, t)]/F(S, t). \quad (1.8)$$

Dans le modèle classique de Black et Scholes où il n'y a qu'une partie diffusive avec $\lambda = 0$, le portefeuille peut être rendu complètement sans risque en choisissant judicieusement les parts en sous-jacent $p_1 = p_1^*$ et en option $p_2 = p_2^*$ telles que $p_1^* \sigma + p_2^* \sigma_F = 0$. Pour éviter toute opportunité d'arbitrage, le rendement attendu sur ce portefeuille P^* doit être égal au taux sans risque r . À partir des écritures (1.6) et (1.7), il est alors aisé d'obtenir la relation suivante :

$$\frac{\alpha - r}{\sigma} = \frac{\alpha_F - r}{\sigma_F}. \quad (1.9)$$

En combinant cette équation avec les relations (1.5) définissant les paramètres de la dynamique du prix de l'option, nous pouvons retrouver l'équation aux dérivées partielles de Black et Scholes, à savoir

$$\frac{\sigma^2}{2} S^2 F_{SS} + rS F_S - rF + F_t = 0. \quad (1.10)$$

Au contraire du modèle diffusif simple cependant, le risque dû aux sauts ne peut plus être complètement couvert par la stratégie de portefeuille habituelle de Black et Scholes. Bien plus encore, aucune stratégie de portefeuille simple ne peut plus être construite pour éliminer complètement ce risque résiduel. Il reste encore une composante de sauts dans l'équation différentielle stochastique qui régit la dynamique du portefeuille de couverture P^* de Black et Scholes.

Pour évaluer l'option, Merton remarque que la source des sauts peut être attribuée habituellement à des informations spécifiques à l'entreprise ou à son secteur d'activité et dans ce cas, celles-ci ont un impact négligeable sur le reste du marché. La composante de sauts représente alors un risque non systémique. Elle sera par conséquent non corrélée avec le marché.

En appliquant cette remarque au portefeuille de couverture de Black et Scholes, le risque résiduel dû aux sauts de ce portefeuille représente un risque diversifiable et le coefficient bêta de P^* est alors nul. En supposant

que le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF) de Sharpe (1964), Lintner (1965) et Mossin (1966) s'applique au marché, le rendement espéré de ce portefeuille avec un bêta nul est alors égal au taux d'intérêt sans risque r . L'équation (1.9) tient encore. Combinée avec les relations (1.5), nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{\sigma^2}{2} S^2 F_{SS} + (r - \lambda\kappa) S F_S - rF - F_\tau + \lambda E [F(SY, \tau) - F(S, \tau)] = 0, \quad (1.11)$$

où cette fois-ci, le prix de l'option est écrit en fonction du temps restant avant échéance τ . Dans le cas d'une option européenne de vente avec un prix d'exercice K par exemple, les conditions aux limites s'écrivent

$$\begin{cases} F(0, \tau) = 0, \\ F(S, 0) = (K - S)^+. \end{cases}$$

Merton a alors démontré que dans le cas général, la solution peut être exprimée sous la forme d'une série. Il explicite cette formule semi-explicite dans un cas particulier où les variables aléatoires Y_i sont supposées log-normales et, par conséquent, les variables aléatoires J_i sont normales.

Nous allons présenter dans ce cas particulier une démonstration plus directe en utilisant une mesure d'évaluation implicitement choisie par Merton avec les hypothèses précédentes. Ainsi, comme le risque dû aux sauts est supposé intrinsèque à l'actif sous-jacent, il n'y a pas de prime de risque spécifique associée aux sauts. Par conséquent, la composante de sauts du processus garde les mêmes propriétés que sous la mesure historique sous la mesure risque-neutre Q . Par contre, la partie diffusive, et en particulier sa dérive, est modifiée comme dans le modèle de Black et Scholes par le changement de mesure. Pour alléger la notation, nous garderons W pour désigner un processus de Wiener sous la nouvelle mesure Q . Il nous reste alors à choisir la dérive qui rend le prix actualisé $e^{-rt} S_t$ une martingale sous Q , ce qui est le cas avec

$$\omega = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\kappa, \quad (1.12)$$

et la dynamique de l'actif sous-jacent sous Q s'écrit alors :

$$S_t = S_0 \exp \left(\omega t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} J_i \right). \quad (1.13)$$

Nous reprenons ici les notations utilisées par Merton (1976) pour caractériser ces sauts gaussiens

$$\begin{cases} \gamma = \ln(E(Y)) = \ln(1 + \kappa) \\ \text{Var}(J) = \delta^2 \\ E(J) = \gamma - \frac{1}{2}\delta^2 \end{cases}$$

Par ailleurs, notons $g(S_T) = F(S_T, T)$ le payoff à l'échéance de notre produit dérivé de type européen. Le prix de ce produit dérivé est alors donné par

$$F(S_t, t) = e^{-r(T-t)} E_Q[g(S_T)|\mathcal{F}_t] = e^{-r\tau} E_Q[g(S_T)|S_t = S],$$

où τ est le temps restant avant échéance et l'espérance est calculée sous la mesure d'évaluation Q . Par la suite, nous précisons seulement la mesure sous laquelle l'espérance est calculée quand il y a une possibilité de confusion.

Pour fixer les idées, nous prendrons une option européenne de vente de prix d'exercice K où nous nous retrouvons donc avec un payoff $g(S_T) = (K - S_T)^+$. Nous avons donc

$$P_{MJ}(S, \tau) = e^{-r\tau} E \left[g \left(S e^{\omega\tau + \sigma W_\tau + \sum_{i=1}^{N_\tau} J_i} \right) \right],$$

où $P_{MJ}(S, \tau)$ est le prix d'une option européenne de vente dans le modèle diffusif avec sauts de Merton.

Comme les propriétés de la composante de sauts du processus restent les mêmes sous Q , nous avons en conditionnant par le nombre de sauts N_τ :

$$\begin{aligned} P_{MJ}(S, \tau) &= e^{-r\tau} \sum_{n \geq 0} Q(N_\tau = n) E \left[g \left(S e^{\omega\tau + \sigma W_\tau + \sum_{i=1}^n J_i} \right) \middle| N_\tau \right] \\ &= e^{-r\tau} \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} E \left[g \left(S e^{\omega\tau + \sigma W_\tau + \sum_{i=1}^n J_i} \right) \middle| N_\tau \right]. \end{aligned}$$

Or, nous savons que $\sum_{i=1}^n J_i$ suit une loi normale d'espérance $n\gamma - \frac{1}{2}n\delta^2$ et de variance $n\delta^2$. Nous avons alors

$$P_{MJ}(S, \tau) = e^{-r\tau} \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} E \left[g \left(S e^{\omega\tau + n\gamma - \frac{1}{2}n\delta^2 + \sigma_n W_\tau} \right) \right],$$

où $\sigma_n^2 = \sigma^2 + \frac{n\delta^2}{\tau}$.

En utilisant l'expression de la dérive (1.12) et en ajoutant et en retranchant $\frac{1}{2}\sigma_n^2\tau$, nous avons ensuite :

$$\begin{aligned} P_{MJ}(S, \tau) &= \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} e^{-r\tau} E \left[g \left(S e^{(r-\lambda\kappa)\tau + n\gamma - \frac{1}{2}\sigma_n^2\tau + \sigma_n W_\tau} \right) \right] \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} P(S e^{(-\lambda\kappa + \frac{n\gamma}{\tau})\tau}, K, \tau, r, 0, \sigma_n^2) \end{aligned}$$

où $P(S, K, \tau, r, 0, \sigma^2)$ est la formule explicite du prix d'une option de vente européenne dans le cas d'un sous-jacent sans sauts, ne distribuant pas de dividendes et de volatilité σ , de valeur S à l'instant t , autrement dit le prix classique du modèle de Black et Scholes.

En utilisant la relation suivante

$$P(S e^{m\tau}, K, \tau, r, 0, \sigma^2) = e^{m\tau} P(S, K, \tau, r + m, 0, \sigma^2),$$

nous obtenons

$$P_{MJ}(S, \tau) = \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau} e^{-\lambda\kappa\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} e^{n\gamma} P(S, K, \tau, r - \lambda\kappa + \frac{n\gamma}{\tau}, 0, \sigma_n^2).$$

En posant $\lambda' = \lambda(1 + \kappa)$, nous retrouvons alors exactement la formule semi-explicite de Merton, ici pour une option européenne de vente :

$$P_{MJ}(S, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'\tau} (\lambda'\tau)^n}{n!} P(S, K, \tau, r_n, 0, \sigma_n^2) \quad (1.14)$$

où $P(S, K, \tau, r_n, 0, \sigma_n^2)$ est le prix Black et Scholes d'une option de vente européenne avec un taux $r_n = r - \lambda\kappa + \frac{n\gamma}{\tau}$ et une variance $\sigma_n^2 = \sigma^2 + \frac{n\delta^2}{\tau}$.

Nous pouvons interpréter cette série comme la somme de prix d'options européennes classiques sachant que n sauts de Poisson sont survenus, pondérée par la probabilité qu'une variable aléatoire de Poisson prenne la valeur n .

Nous donnons dans le tableau 1.1 les prix d'options européennes de vente obtenus selon la formule (1.14). Cette série converge rapidement et nous pouvons déjà obtenir une bonne précision, avec une erreur absolue inférieure à 10^{-6} , en faisant une somme partielle sur 7 termes. Ici, les prix sont obtenus

Modèle à sauts gaussiens de Merton			
Option européenne de vente			
$S_0 = 100, r = 0.05, \sigma = 0.16, \tau = 0.5, \lambda = 0.5, E(J) = 0, Var(J) = 0.25$			
Série C_1		Série C_2	
Prix d'exercice	Prix Merton	Prix d'exercice	Prix Merton
90.00	3.3852810	97.00	5.8008161
92.00	3.9415482	97.60	6.0704609
94.00	4.6014032	98.20	6.3521959
96.00	5.3723119	98.80	6.6461910
98.00	6.2583155	99.41	6.9525887
100.00	7.2598293	100.02	7.2715027
102.00	8.3738029	100.64	7.6030185
104.00	9.5941848	101.26	7.9471923
106.00	10.9125934	101.88	8.3040514
108.00	12.3190876	102.51	8.6735944
110.00	13.8029344	103.14	9.0557919

TABLE 1.1 – Évaluation d’une option européenne de vente dans le cadre du modèle à sauts gaussiens de Merton sur les deux séries de contrats C_1 et C_2 . Les prix donnés ici sont calculés selon la série de la formule (1.14) et arrondis au plus près à la septième décimale.

en tronquant la série dès que l’erreur relative passe en dessous de 10^{-16} . Empiriquement, l’expérience nous montre que le calcul de 14 termes suffit alors.

Le prix initial du sous-jacent est de $S_0 = 100$ et le taux d’intérêt sans risque est fixé à $r = 0.05$. Les paramètres du modèle sont donnés par $\sigma = 0.16, \lambda = 0.5, E(J) = 0, Var(J) = 0.25$. Les options ont un temps restant avant échéance de $\tau = 0.5$ et forment deux séries de contrats C_1 et C_2 . Les contrats C_1 ont des prix d’exercice échelonnés de 90 à 110 par pas de 2 alors que les contrats C_2 varient eux d’un peu plus d’un demi point de base à chaque fois, précisément de 0.615 %. Nous verrons plus loin à quoi correspond la série de contrats C_2 .

1.1.3 Le modèle à sauts exponentiels doubles de Kou

De son côté, Kou (2002) est revenu sur l’évaluation d’options dans le cadre d’un modèle diffusif avec sauts en proposant une autre loi de probabilité pour les sauts. Dans ce modèle, le prix de l’actif est supposé vérifier

l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = \mu dt + \sigma dW_t + d\left(\sum_{i=1}^{N_t} (Y_i - 1)\right).$$

La dynamique de S_t s'écrit alors

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right) \prod_{i=1}^{N_t} Y_i \quad (1.15)$$

qui est similaire à la dynamique (1.4) suivie par S_t dans le modèle à sauts gaussiens de Merton. De nouveau, en posant $J = \ln(Y)$, nous pouvons mettre la partie exponentielle sous la même forme que l'équation (1.1) en posant $\omega = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$.

Cependant, à la différence du modèle de Merton, la loi des sauts J suit cette fois-ci une loi exponentielle double asymétrique. Plus précisément,

$$J = \ln(Y) \stackrel{d}{=} \begin{cases} \eta_1, & \text{avec une probabilité } p, \\ -\eta_2, & \text{avec une probabilité } q \end{cases} \quad (1.16)$$

où $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q = 1$ et η_1 et η_2 sont des variables aléatoires exponentielles de moyenne $1/\lambda_1$ et $1/\lambda_2$ respectivement, avec $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

La fonction caractéristique de cette loi de sauts s'écrit de la façon suivante

$$\phi_J(u) = \frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - iu} + \frac{q\lambda_2}{\lambda_2 + iu}. \quad (1.17)$$

Cette fonction caractéristique est bien définie à la condition que u soit dans la bande de régularité définie par la contrainte suivante sur sa partie imaginaire :

$$-\lambda_1 < \Im u < \lambda_2. \quad (1.18)$$

L'espérance de Y se déduit de (1.17) :

$$E(Y) = E(e^J) = \phi_J(-i) = \frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - 1} + \frac{q\lambda_2}{\lambda_2 + 1}. \quad (1.19)$$

Par la suite, nous vérifierons que $\lambda_1 > 1$ pour garantir que l'espérance de Y soit finie, $E(Y) = E(e^J) < \infty$, ce qui signifie en particulier qu'un saut de prix positif ne peut excéder 100 % en moyenne, ce qui reste une contrainte raisonnable pour le modèle.

En se basant sur les travaux de Naik et Lee (1990) et en se servant de la théorie des anticipations rationnelles, Kou construit à partir de la probabilité historique une probabilité risque-neutre sous laquelle le prix actualisé du sous-jacent est une martingale. Nous référons aussi le lecteur à un article récent de Le Courtois et Quittard-Pinon (2007) sur les liens entre les univers historique et risque-neutre dans le cadre du modèle diffusif avec sauts de Kou. Dans le cadre des transformées d'Esscher que ces auteurs utilisent, ils prouvent que la dynamique sous la nouvelle mesure risque-neutre reste dans la même famille des modèles diffusifs avec sauts de Kou.

De la même manière que précédemment, le prix d'équilibre d'une option européenne avec un payoff $F(S_T, T)$ à l'échéance T s'écrit sous cette nouvelle mesure comme

$$F(S_t, t) = e^{-r(T-t)} E_Q [F(S_T, T) | \mathcal{F}_t], \quad \forall t \in [0, T].$$

Le prix d'équilibre d'une option européenne d'achat peut alors s'écrire de façon similaire à la formule d'évaluation d'une option européenne d'achat dans le cas sans sauts.

Si nous notons la probabilité :

$$P(X_t \geq a) = \Upsilon(\omega, \sigma, \lambda, p, \lambda_1, \lambda_2, a, t) \quad (1.20)$$

où X_t s'écrit comme dans l'équation (1.1) avec un processus de Poisson N de paramètre λ et des sauts J vérifiant (1.16), Kou montre que le prix d'une option européenne d'achat s'écrit dans ce modèle

$$P_{KJ}(S_0, \tau) = S_0 \Upsilon\left(r + \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\kappa, \sigma, \lambda', p', \lambda'_1, \lambda'_2, \ln(K/S_0), \tau\right) - Ke^{-r\tau} \Upsilon\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\kappa, \sigma, \lambda, p, \lambda_1, \lambda_2, \ln(K/S_0), \tau\right) \quad (1.21)$$

où $\kappa = E(Y - 1)$, $\lambda' = \lambda(1 + \kappa)$, $p' = \frac{p}{1 + \kappa} \times \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1}$, $\lambda'_1 = \lambda_1 - 1$ et $\lambda'_2 = \lambda_2 + 1$.

Si le prix de l'option semble s'écrire de façon concise, la queue de probabilité Υ s'écrit de fait comme une double somme infinie dont chaque terme nécessite l'évaluation d'un élément de la suite des fonctions spéciales $Hh_n(x)$ décrites par Abramowitz et Stegun (1974, p. 691). Si nous avons ici aussi une formule semi-explicite comme dans le cas du modèle à sauts gaussiens

Modèle à sauts exponentiels doubles de Kou			
Option européenne d'achat			
$S_0 = 100, r = 0.05, \sigma = 0.16, \tau = 0.5, \lambda = 1, p = 0.4, \lambda_1 = 10, \lambda_2 = 5$			
Série C_1		Série C_2	
Prix d'exercice	Prix Kou	Prix d'exercice	Prix Kou
90.00	14.8118905	97.00	9.7789477
92.00	13.2764024	97.60	9.3989071
94.00	11.8139684	98.20	9.0253635
96.00	10.4346054	98.80	8.6586420
98.00	9.1473173	99.41	8.2990574
100.00	7.9594292	100.02	7.9469119
102.00	6.8760520	100.64	7.6024934
104.00	5.8997425	101.26	7.2660732
106.00	5.0303905	101.88	6.9379047
108.00	4.2653317	102.51	6.6182210
110.00	3.5996498	103.14	6.3072339

TABLE 1.2 – Évaluation d'une option européenne d'achat dans le cadre du modèle à sauts exponentiels doubles de Kou sur les deux séries de contrats C_1 et C_2 . Les prix donnés ici sont calculés suivant la formule (1.21) et arrondis au plus près à la septième décimale.

de Merton, nous verrons que la présence de ces fonctions spéciales rend cette formule très coûteuse en pratique.

Le tableau 1.2 donne les prix d'options européennes d'achat sur les mêmes séries de contrats que précédemment. De nouveau, la convergence de la série double qui entre en jeu dans le calcul de la probabilité définie en (1.20) est très rapide. L'expérience montre que le calcul de 7 termes permet d'obtenir une erreur absolue inférieure à 10^{-6} . Avec 13 termes de cette série double, les tests que nous avons menés montrent que l'erreur relative ne dépasse pas 10^{-16} . Ce sont les prix ainsi obtenus qui sont reportés dans le tableau 1.2.

Le prix initial du sous-jacent est ici aussi fixé à $S_0 = 100$ et le taux d'intérêt sans risque est à $r = 0.05$. La volatilité de la partie diffusive reste $\sigma = 0.16$, les sauts surviennent à un taux moyen de $\lambda = 1$ et suivent une loi exponentielle double paramétrée par $p = 0.4, \lambda_1 = 10, \lambda_2 = 5$.

Les deux séries de contrats C_1 et C_2 ont les mêmes caractéristiques qu'auparavant, toujours avec le temps restant avant échéance de $\tau = 0.5$. Le

contrat de la série C_1 dont le prix d'exercice est $K = 98$ correspond à un exemple de Kou (2002) où le prix de l'option donné était de 9.14732, ce qui est bien ce que nous obtenons ici, en arrondissant au plus près à la cinquième décimale.

1.1.4 Un nouveau modèle diffusif avec sauts

Nous proposons maintenant un nouveau modèle diffusif avec sauts qui étend le modèle de Kou.

Nous disons que la dynamique du sous-jacent sous une mesure risque-neutre d'évaluation Q s'écrit $S_t = S_0 \exp(X_t)$ où X est un processus mixte brownien-Poisson composé comme décrit dans l'équation (1.1). Nous reviendrons plus loin sur le problème de l'obtention de cette mesure risque-neutre d'évaluation dont nous avons eu un aperçu avec le modèle de Kou.

Soit alors une suite de variables aléatoires $(\eta_i)_{i \in P \cup N}$ de loi exponentielle telles que $\eta_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$, où P et N sont deux ensembles d'indices disjoints et où $\lambda_i > 0$ pour tout i . Donnons-nous aussi une suite de nombres positifs $(p_i)_{i \in P \cup N}$ telle que $\sum_{i \in P \cup N} p_i = 1$.

Au lieu de la loi exponentielle double suivie par les sauts dans le modèle de Kou, nous proposons une loi exponentielle multiple pour la loi des sauts J :

$$J \stackrel{d}{=} \begin{cases} \eta_{k_1}, & \text{avec une probabilité } p_{k_1}, \\ \vdots & \\ \eta_{k_p}, & \text{avec une probabilité } p_{k_p}, \\ -\eta_{l_1}, & \text{avec une probabilité } p_{l_1}, \\ \vdots & \\ -\eta_{l_n}, & \text{avec une probabilité } p_{l_n}, \end{cases} \quad (1.22)$$

où $\{k_1, \dots, k_p\} = P$ et $\{l_1, \dots, l_n\} = N$. L'ensemble d'indices P (respectivement N) regroupe les probabilités qu'a la variable aléatoire J de prendre une valeur positive (respectivement négative).

Cette extension naturelle de la loi de sauts peut en fait aussi être vue comme un cas particulier de lois dites *phase-type* décrites en détail par Asmussen (2000). Plus précisément ici, les sauts négatifs (respectivement positifs) suivent une loi hyperexponentielle H_n avec n (resp. H_p avec p) canaux parallèles.

La fonction de densité associée aux sauts J s'écrit

$$f_J(x) = \sum_{i \in P} p_i \lambda_i e^{-\lambda_i x} \mathbb{1}_{\{\mathbb{R}^+\}} + \sum_{i \in N} p_i \lambda_i e^{\lambda_i x} \mathbb{1}_{\{\mathbb{R}^-\}}$$

tandis que la fonction caractéristique associée à J s'écrit :

$$\phi_J(u) = \sum_{i \in P} p_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i - iu} + \sum_{i \in N} p_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i + iu}, \quad (1.23)$$

une fonction bien définie dans la bande de régularité définie par

$$-\min_{i \in P}(\lambda_i) < \Im u < \min_{i \in N}(\lambda_i). \quad (1.24)$$

Nous voyons ici que le modèle de Kou n'est qu'un cas particulier du modèle plus général que nous présentons ici, en prenant $|P| = 1$ et $|Q| = 1$.

De même que dans le modèle de Kou, nous nous assurons de la contrainte sur l'espérance

$$E(Y) = E(e^J) = \phi_J(-i) = \sum_{i \in P} p_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i - 1} + \sum_{i \in N} p_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i + 1} \quad (1.25)$$

en vérifiant que pour tout $i \in P$, $\lambda_i > 1$ et donc qu'aucun saut de prix positif ne puisse dépasser 100 % en moyenne.

Cette fois-ci, une solution semi-explicite est encore plus difficilement accessible que dans le cas du modèle de Kou. Nous allons plutôt exposer une approche très générale d'évaluation numérique de produits dérivés de type européen dans la section suivante. Nous verrons alors que dans le cadre de cette approche, l'évaluation d'une option dans ce modèle diffusif avec sauts exponentiels multiples se révèle particulièrement simple et performante.

1.2 Une approche générale pour l'évaluation

Dans les modèles dynamiques simples en temps discret et avec un espace de probabilité sous-jacent fini, il est depuis longtemps établi que l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage est équivalente à l'existence d'une mesure martingale équivalente. Un tel marché arbitré est alors dit complet si, et seulement si, il existe une et une seule mesure martingale équivalente. En théorie financière classique, le marché aussi est complet, l'unique mesure

risque-neutre sert alors naturellement de mesure d'évaluation de produits dérivés.

De façon plus générale en temps continu, en définissant une classe étendue de stratégies d'arbitrage, Delbaen et Schachermayer (1994) prouvent que la condition de non arbitrage est équivalente à l'existence d'une mesure martingale équivalente. En fait, si le processus de Lévy utilisé pour le sous-jacent n'est pas un processus purement gaussien, il y a en général une infinité de mesures martingales équivalentes pour lesquelles la condition de non arbitrage est encore vérifiée. Le marché est alors incomplet et le prix des produits dérivés vérifiant l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage ne peut plus être déterminé de façon unique. Le marché est aussi incomplet dans le cas des modèles diffusifs avec sauts, les processus utilisés dans ces modèles étant des cas particuliers de processus de Lévy.

Nous avons vu que pour procéder à l'évaluation des options européennes, Merton et Kou ont chacun eu recours dans leur modèle à des arguments d'équilibre de marché. Nous allons pour notre part nous replacer dans le cadre de la théorie de l'évaluation risque-neutre. Dans le cadre de cette théorie, l'existence d'une mesure martingale équivalente permet de ramener le calcul du prix d'une option écrite sur l'actif S à un calcul d'espérance de la valeur actualisée de son payoff par rapport à cette mesure.

Le choix de la mesure risque-neutre d'évaluation dans le cas des marchés incomplets reste un problème ouvert même si plusieurs axes de recherche ont déjà été explorés dans ce sens. Voir en particulier le tour d'horizon effectué dans Cont et Tankov (2004a) ou Le Courtois et Quittard-Pinon (2007). Nous supposons par la suite que la dynamique du sous-jacent suit un modèle diffusif avec sauts sous une mesure risque-neutre Q donnée. Si le sous-jacent suit le même type de dynamique dans l'univers historique, cette hypothèse rend bien entendu compte du choix implicite d'un changement de mesure de type conservatif, comme un changement de mesure par une transformée d'Esscher le permet par exemple.

Une fois cette hypothèse posée, nous devons nous assurer que la mesure d'évaluation choisie constitue bien une mesure martingale équivalente.

1.2.1 Condition mesure martingale équivalente

Par définition de la mesure martingale équivalente Q , nous savons en particulier que le processus de prix actualisé est une martingale sous cette

mesure. Ainsi, pour $t > 0$, il vient

$$\begin{aligned} S_0 &= E_Q[e^{-rt} S_t] \\ &= E_Q[e^{-rt} S_0 e^{X_t}] \\ S_0 &= S_0 e^{-rt} e^{-t\psi_Q(-i)} \end{aligned}$$

De cette égalité peut être obtenue la condition suivante sur l'exposant caractéristique du processus X sous la nouvelle mesure Q :

$$r + \psi_Q(-i) = 0. \quad (1.26)$$

Cette condition que nous appellerons condition mesure martingale équivalente doit être vérifiée par tout modèle diffusif avec sauts sous une mesure risque-neutre. Nous pouvons maintenant passer à l'évaluation d'actifs contingents proprement dite.

1.2.2 Évaluation de produits dérivés

Soit alors maintenant un actif contingent avec un payoff modélisé par g comme $F(S_T, T) = g(X_T)$, où F représente le prix du produit dérivé, ici avec un prix du sous-jacent égal à S_T à l'échéance T .

L'approche que nous allons exposer se base sur l'utilisation des transformées de Fourier généralisées. Elle est dans la droite ligne de l'approche proposée par Boyarchenko et Levendorskiï (2002b) dans le cadre plus général des modèles avec des sous-jacents à processus de Lévy exponentiels. Conceptuellement, l'utilisation des transformées de Fourier généralisées est beaucoup plus satisfaisante que l'approche utilisée par Carr et Madan (1998) où ils doivent modifier de façon *ad hoc* le prix de l'option en fonction du prix d'exercice pour des raisons d'intégrabilité.

1.2.2.1 Transformée de Fourier généralisée du payoff

Supposons que g soit mesurable et qu'il existe δ tel que $e^{\delta x} g(x)$ soit une fonction intégrable. Introduisons alors la transformée de Fourier de g

$$\hat{g}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} g(x) dx \quad (1.27)$$

que nous pouvons étendre et définir sur la ligne $\Im u = \delta$ en une transformée de Fourier généralisée de g .

Typiquement, pour une option européenne d'achat (resp. de vente), le payoff est déterminé par

$$g(X_T) = (S_0 e^{X_T} - K)^+$$

$$\text{(resp. } g(X_T) = (K - S_0 e^{X_T})^+ \text{)}.$$

Calculons la transformée de Fourier de ce payoff dans le cas de l'option d'achat :

$$\begin{aligned} \hat{g}(u) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} (S_0 e^x - K)^+ dx \\ \hat{g}(u) &= S_0 \left[\frac{e^{x(1-iu)}}{1-iu} \right]_{\ln(K/S_0)}^{+\infty} - K \left[\frac{e^{-iux}}{-iu} \right]_{\ln(K/S_0)}^{+\infty}. \end{aligned}$$

Cette intégrale est donc définie si, et seulement si,

$$\Im u = \delta < -1. \tag{1.28}$$

Finalement, nous obtenons

$$\hat{g}(u) = \frac{K e^{-iu \ln(K/S_0)}}{(-iu)(-iu + 1)} \tag{1.29}$$

En faisant un calcul similaire pour l'option européenne de vente, nous obtenons exactement la même transformée de Fourier (1.29) pour son payoff. La seule différence est la condition d'existence de l'intégrale, qui entraîne la contrainte suivante sur u

$$\Im u = \delta > 0. \tag{1.30}$$

1.2.2.2 Formule générale d'évaluation

Par ailleurs, nous savons que le prix actualisé de cet actif contingent est une Q -martingale. Ainsi, en prenant l'espérance sous Q , nous avons

$$e^{-rt} F(S_t, t) = E[e^{-rT} g(X_T) | \mathcal{F}_t].$$

Si nous notons $\tau = T - t$ le temps restant avant échéance, nous avons

$$\begin{aligned} F(S_t, t) &= e^{-r\tau} E[g(X_T) | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r\tau} E[g(X_T - X_t + X_t) | X_t = x], \end{aligned}$$

puisque le processus de Lévy X est un processus de Markov.

Ainsi,

$$F(S_t, t) = e^{-r\tau} E[g(X_\tau + x)]$$

comme X est un processus à accroissements indépendants et stationnaires.

La fonction g étant la transformée de Fourier inverse de \hat{g} , nous avons

$$F(S_t, t) = \frac{1}{2\pi} e^{-r\tau} E \left[\int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{iu(X_\tau+x)} \hat{g}(u) du \right].$$

Finalement,

$$F(S_t, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{iux} e^{-r\tau} E[e^{iuX_\tau}] \hat{g}(u) du,$$

à condition que la fonction caractéristique $E[e^{iuX_\tau}]$ existe.

Nous obtenons alors la formule générale d'évaluation suivante pour tous les produits dérivés de type européen :

$$F(S_0 e^x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{iux} e^{-\tau(r+\psi(u))} \hat{g}(u) du. \quad (1.31)$$

où $x = \ln(S_t/S_0)$ et $\tau = T - t$ est le temps restant avant échéance.

Pour le cas particulier d'une option européenne, introduisons alors l'expression (1.29) dans cette formule générale :

$$F(S_t, t) = K \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} \frac{e^{ixu - \tau(r+\psi(u))}}{(-iu)(-iu+1)} du, \quad (1.32)$$

où cette fois-ci $x = \ln(S_t/K)$ est le logarithme de la distance à la monnaie.

Avec la contrainte (1.28) sur la droite d'intégration : $\delta < -1$, nous ob-

tenons l'évaluation d'une option européenne d'achat :

$$C(S_t, t) = -\frac{K}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} \frac{e^{ixu-\tau(r+\psi(u))}}{u(u+i)} du \quad (1.33)$$

tandis que la contrainte (1.30) avec $\delta > 0$ donne l'évaluation de l'option européenne de vente. Le théorème des résidus nous permet de relier ces deux résultats.

Tout d'abord, le calcul des résidus de la fonction intégrande en ses deux pôles donne

- en $u = -i$, $\frac{e^{ix(-i)-\tau(r+\psi(-i))}}{-i} = -\frac{e^x}{i}$, en utilisant la condition mesure martingale équivalente (1.26) ;
- en $u = 0$, $\frac{e^{ix(0)-\tau(r+\psi(0))}}{i} = \frac{e^{-r\tau}}{i}$.

Ensuite, un contour d'intégration est construit de la façon suivante : une partie S_c de la droite d'intégration correspondant à l'option européenne d'achat est étendue en une courbe fermée en lui attachant un premier arc circulaire à droite rejoignant un deuxième segment S_p parallèle à la droite d'intégration précédente mais dans le sens inverse et enfin un troisième arc circulaire qui rejoint le segment S_c , de nouveau parallèlement à l'axe des imaginaires. Les intégrales curvilignes sur les deux arcs circulaires tendent vers 0 quand les segments S_c et S_p tendent vers les deux droites d'intégration qui nous intéressent.

Si le segment S_p du contour d'intégration est placé parallèlement à l'axe des réels strictement entre les deux pôles à partir de la position correspondant à l'option d'achat, le théorème des résidus donne

$$\begin{aligned} C(S_t, t) &= 2\pi i \times \text{Res}(-i) - \frac{K}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} \frac{e^{ixu-\tau(r+\psi(u))}}{u(u+i)} du \\ &= 2\pi i \left(-\frac{K}{2\pi} \right) \left(-\frac{e^x}{i} \right) - \frac{K}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} \frac{e^{ixu-\tau(r+\psi(u))}}{u(u+i)} du \\ C(S_t, t) &= S_t - \frac{K}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} \frac{e^{ixu-\tau(r+\psi(u))}}{u(u+i)} du \text{ avec } -1 < \delta < 0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Si le segment S_p du contour est placé au-delà du pôle 0, il vient

$$\begin{aligned}
 C(S_t, t) &= 2\pi i \times \text{Res}(-i) + 2\pi i \times \text{Res}(0) - \frac{K}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} \frac{e^{ixu-\tau(r+\psi(u))}}{u(u+i)} du \\
 &= S_t + 2\pi i \left(-\frac{K}{2\pi} \right) \left(\frac{e^{-r\tau}}{i} \right) - \frac{K}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} \frac{e^{ixu-\tau(r+\psi(u))}}{u(u+i)} du \\
 C(S_t, t) &= S_t - Ke^{-r\tau} - \frac{K}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} \frac{e^{ixu-\tau(r+\psi(u))}}{u(u+i)} du \text{ avec } \delta > 0, \quad (1.35)
 \end{aligned}$$

qui, incidemment, permet de retrouver la relation de parité entre les options d'achat et les options de vente.

La disponibilité de ces formules d'évaluation alternatives de l'option européenne d'achat est particulièrement intéressante pour une meilleure précision des algorithmes numériques utilisés, comme le rappelle Lee (2004).

Nous allons maintenant chercher à calculer la partie intégrale de l'équation (1.32) qui s'écrit :

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} \frac{e^{ixu-\tau(r+\psi(u))}}{(-iu)(-iu+1)} du. \quad (1.36)$$

1.2.3 Implémentation numérique

Après la spécification de la fonction g et le calcul de sa transformée de Fourier \hat{g} , comme nous venons de le voir avec l'équation (1.36), le changement de variable $u \rightarrow u + i\delta$ donne

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} e^{-\tau r - \delta x} \frac{e^{-\tau\psi(u+i\delta)}}{(-iu+\delta)(-iu+\delta+1)} du.$$

Le regroupement des termes en x et en u permet alors de ramener la formule générale (1.31) à la forme suivante

$$f(x, t) = R(x, \delta) \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixu} \Psi(u, \delta) du, \quad (1.37)$$

où $R(x, \delta) = e^{-\tau r - \delta x}$ et $\Psi(u, \delta) = \frac{e^{-\tau\psi(u+i\delta)}}{(-iu+\delta)(-iu+\delta+1)}$.

Cette forme nous amène naturellement à choisir la méthode de calcul

numérique par transformée de Fourier rapide (FFT) de Cooley et Tukey (1965), ce qui nous permet d'obtenir simultanément N résultats à partir de N points en un temps $\mathcal{O}(N \log_2(N))$.

D'abord, nous calculons l'intégrale en appliquant la méthode des rectangles avec un pas d'intégration égal à η . Soit N un entier positif puissance de 2 et posons

$$u_j = u_{min} + \eta(j - 1) \text{ pour } j = 1, \dots, N, \text{ avec } u_{min} = -\frac{N\eta}{2}.$$

L'équation (1.37) devient alors

$$f(x, t) \approx R(x, \delta) \times \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N e^{ixu_j} \Psi(u_j, \delta) \eta. \quad (1.38)$$

Pour mettre en place la transformée de Fourier rapide, nous découpons le domaine des x avec un espacement régulier de taille λ :

$$x_k = x_{min} + \lambda(k - 1) \text{ pour } k = 1, \dots, N,$$

où x_{min} est choisi de manière à ce que tous les contrats à évaluer soient couverts par les x_k .

La transformée de Fourier rapide retourne alors N valeurs pour $f(x, t)$:

$$f(x_k, t) \approx R(x_k, \delta) e^{iu_{min}\lambda(k-1)} \times \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N e^{i\lambda\eta(j-1)(k-1)} e^{ix_{min}u_j} \Psi(u_j, \delta) \eta. \quad (1.39)$$

La condition de réciprocité des paramètres $\lambda\eta = \frac{2\pi}{N}$ imposée par la transformée de Fourier rapide nous oblige à faire un compromis entre le pas d'intégration η et la variation entre deux contrats successifs λ . Nous avons pris $N = 4096$ et un pas d'intégration de $\eta = 0.25$, nous obtenons alors une variation de 0.615 % entre deux contrats successifs. En pratique, pour les contrats qui tombent entre deux contrats successifs évalués en sortie de la transformée de Fourier rapide, nous procédons à une interpolation par splines cubiques.

1.2.4 Application

Dans cette section, nous allons revisiter les modèles de Merton et de Kou avec cette implémentation puis nous l'utiliserons dans le cadre du modèle à sauts exponentiels multiples où nous n'avons plus de formules d'évaluation semi-explicites comme dans les deux cas précédents.

1.2.4.1 Retour sur le modèle de Merton

Dans ce cas, les sauts sont gaussiens et la fonction caractéristique associée à leur loi est alors

$$\phi_J(u) = e^{iE(J)u - \frac{1}{2}\text{Var}(J)u^2}. \quad (1.40)$$

À partir de l'équation (1.2), nous déduisons l'exposant caractéristique du processus de Lévy associé au modèle à sauts gaussiens de Merton sous Q

$$\psi_Q(u) = -i\omega u + \frac{\sigma^2}{2}u^2 - \lambda \left(e^{iE(J)u - \frac{\text{Var}(J)}{2}u^2} - 1 \right). \quad (1.41)$$

La condition mesure martingale équivalente s'écrit alors

$$0 = r + \psi_Q(-i) = r - \omega - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \left(e^{E(J) + \frac{\text{Var}(J)}{2}} - 1 \right),$$

ce qui implique que sous Q , la dérive ω doit vérifier

$$\omega = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \left(e^{E(J) + \frac{\text{Var}(J)}{2}} - 1 \right).$$

Le tableau 1.3 donne alors les erreurs constatées par rapport aux prix reportés dans le tableau 1.1, en utilisant la transformée de Fourier rapide pour calculer les prix d'options européennes de vente sur les deux séries de contrats C_1 et C_2 selon la formule (1.39).

1.2.4.2 Retour sur le modèle de Kou

Pour le modèle à sauts exponentiels doubles de Kou, nous déduisons des équations (1.2) et (1.17) l'exposant caractéristique associé au modèle :

$$\psi_Q(u) = -i\omega u + \frac{\sigma^2}{2}u^2 - \lambda \left(\frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - iu} + \frac{q\lambda_2}{\lambda_2 + iu} - 1 \right).$$

Modèle à sauts gaussiens de Merton
Option européenne de vente par FFT
 $S_0 = 100, r = 0.05, \sigma = 0.16, \tau = 0.5, \lambda = 0.5, E(J) = 0, Var(J) = 0.25$

Série C_1		Série C_2	
Prix d'exercice	Erreur	Prix d'exercice	Erreur
90.00	-1.91221e-009	97.00	-4.9738e-014
92.00	3.91564e-009	97.60	-6.03961e-014
94.00	2.42324e-008	98.20	-6.03961e-014
96.00	3.40255e-008	98.80	-5.59552e-014
98.00	5.62976e-009	99.41	-6.39488e-014
100.00	6.51181e-008	100.02	-5.86198e-014
102.00	7.03429e-008	100.64	-7.10543e-014
104.00	3.7984e-008	101.26	-5.86198e-014
106.00	1.39778e-008	101.88	-6.21725e-014
108.00	5.6158e-009	102.51	-7.63833e-014
110.00	4.63758e-009	103.14	-7.10543e-014

TABLE 1.3 – Erreur de l'évaluation effectuée par transformée de Fourier rapide par rapport au prix obtenu selon la formule semi-explicite de Merton sur les deux séries de contrats C_1 et C_2 .

Modèle à sauts exponentiels doubles de Kou
Option européenne d'achat par FFT
 $S_0 = 100, r = 0.05, \sigma = 0.16, \tau = 0.5, \lambda = 1, p = 0.4, \lambda_1 = 10, \lambda_2 = 5$

Série C_1		Série C_2	
Prix d'exercice	Erreur	Prix d'exercice	Erreur
90.00	-1.51487e-008	97.00	1.95399e-014
92.00	-1.60534e-008	97.60	-7.10543e-015
94.00	-1.16162e-008	98.20	1.77636e-014
96.00	-3.77282e-009	98.80	3.01981e-014
98.00	2.01567e-009	99.41	4.9738e-014
100.00	3.05118e-008	100.02	7.10543e-015
102.00	4.61735e-008	100.64	2.75335e-014
104.00	3.27544e-008	101.26	1.59872e-014
106.00	1.53197e-008	101.88	3.9968e-014
108.00	7.85505e-009	102.51	4.9738e-014
110.00	9.24877e-009	103.14	4.70735e-014

TABLE 1.4 – Erreur de l'évaluation effectuée par transformée de Fourier rapide par rapport au prix obtenu selon la formule semi-explicite de Kou sur les deux séries de contrats C_1 et C_2 .

Modèle	Temps pour 101 contrats	Temps moyen	FFT ($N = 4096$)
Merton	$\simeq 0.73$ s	$\simeq 0.007$ s	$\simeq 0.015$ s
Kou	$\simeq 6$ mn 40 s	$\simeq 4$ s	$\simeq 0.016$ s

TABLE 1.5 – Comparaison des performances des deux approches dans les modèles de Merton et de Kou. Temps mesurés sur une machine équipée d'un processeur Pentium[®] 4 référencé à 2.8 GHz et dotée de 1 Go de mémoire vive.

où, pour rappel, $p + q = 1$, $\lambda_1 > 1$ et $\lambda_2 > 0$, sans oublier la condition (1.18) sur la fonction caractéristique : $-\lambda_1 < \Im u < \lambda_2$.

De nouveau, il nous faut tenir compte de la condition mesure martingale équivalente :

$$0 = r + \psi_Q(-i) = r - \omega - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \left(\frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - 1} + \frac{q\lambda_2}{\lambda_2 + 1} - 1 \right),$$

ce qui donne la condition suivante sur ω :

$$\omega = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \left(\frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - 1} + \frac{q\lambda_2}{\lambda_2 + 1} - 1 \right).$$

Nous donnons dans le tableau 1.4 les erreurs commises par rapport aux prix obtenus par la formule semi-explicite reportés en tableau 1.2 en utilisant la formule (1.39) pour évaluer ces options d'achat. Ces options portent toujours sur les mêmes séries de contrats C_1 et C_2 . Le contour d'intégration choisi est $\mathbb{R} + i\delta$ avec δ au milieu de $-\lambda_1$ et de -1 .

Les temps de calcul de ces deux approches ont alors été mesurés sur une machine standard équipée d'un processeur Pentium[®] 4 référencé à 2.8 GHz et dotée de 1 Go de mémoire vive. Les résultats sont reportés sur le tableau 1.5. La première colonne de ce tableau se rapporte au temps de calcul nécessaire pour évaluer une centaine de contrats avec les formules semi-explicites de Merton et de Kou. La deuxième indique le temps moyen mis pour calculer chaque contrat avec ces formules. Enfin, la troisième colonne renseigne sur le temps mis pour calculer la transformée de Fourier rapide sur 4096 points dans les deux modèles.

1.2.4.3 Cas du modèle à sauts exponentiels multiples

Nous pouvons maintenant passer à la condition mesure martingale équivalente que notre processus doit vérifier sous Q . D'après les équations (1.2), (1.26) et (1.23), cette condition s'écrit

$$0 = r - \omega - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \left(\sum_{i \in P} p_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i - 1} + \sum_{i \in N} p_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i + 1} - 1 \right),$$

ce qui entraîne la condition suivante sur ω :

$$\omega = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \left(\sum_{i \in P} p_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i - 1} + \sum_{i \in N} p_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i + 1} - 1 \right).$$

Nous avons gardé les mêmes paramètres de la partie diffusive du processus X et pris les deux lois de sauts exponentiels multiples données dans le tableau 1.6 pour illustrer ce nouveau modèle. La première loi de sauts présente un seul saut positif de probabilité 0.4. Dans la seconde loi, il n'y a plus aucun saut positif : toute sa probabilité a été reportée sur le saut négatif de plus petit paramètre. Par expérience en effet, ce sont les variables exponentielles de petit paramètre qui influent fortement sur les prix d'options. Nous pouvons expliquer théoriquement ce constat par le fait que la moyenne de chaque variable aléatoire exponentielle modélisant un saut est l'inverse de son paramètre¹.

Loi de sauts	Sauts positifs	Sauts négatifs
L_1	(0.4, 7)	(0.3, 5) – (0.2, 7) – (0.1, 9)
L_2	Aucun	(0.7, 5) – (0.2, 7) – (0.1, 9)

TABLE 1.6 – Exemples de loi de sauts exponentiels multiples. Chaque couple (p, λ) représente la probabilité p d'un saut dont la variable aléatoire exponentielle correspondante est de paramètre λ .

Parallèlement au prix des options européennes d'achat portant sur la série de contrats C_1 , nous donnons aussi les volatilités implicites associées dans le tableau 1.7. Le sous-jacent vaut toujours $S_0 = 100$ à l'instant initial, avec un taux sans risque $r = 0.05$ et un temps restant avec échéance $\tau = 0.5$.

1. Pour une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre λ , la fonction de densité s'écrit $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$. La moyenne est donnée par l'espérance mathématique $E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \frac{1}{\lambda}$.

Ici encore, le temps de calcul pris par la transformée de Fourier rapide est d'environ 0.015 s alors que la dynamique du sous-jacent est plus générale par rapport au modèle de Kou, largement plus coûteux en temps dans sa dérivation de prix originale.

Si les prix obtenus avec les sauts L_2 sont au-dessus des prix donnés par les sauts L_1 jusqu'au contrat de prix d'exercice 106, c'est le contraire qui se manifeste après. Nous assistons au même phénomène du côté des volatilités implicites. Remarquons que dans les deux cas, la volatilité implicite est plus importante que la volatilité *a priori* du modèle diffusif classique. Elle présente une convexité très prononcée par rapport aux prix d'exercice dans le cas de la loi L_1 et moins pour le cas de la loi L_2 . En tous les cas, elle n'est pas constante, ce qui rejoint qualitativement les observations empiriques faites sur les données de marché mentionnées au début de cette étude.

Modèle à sauts exponentiels multiples					
Option européenne d'achat					
$S_0 = 100, r = 0.05, \sigma = 0.16, \tau = 0.5, \lambda = 1$					
Loi de sauts	L_1		L_2		
K	Prix	Volatilité	Prix	Volatilité	
90.00	14.5478818	25.549 %	15.3323568	29.291 %	
92.00	13.0393977	25.041 %	13.8074665	28.445 %	
94.00	11.6145671	24.612 %	12.3414812	27.631 %	
96.00	10.2828945	24.262 %	10.9427522	26.856 %	
98.00	9.0521296	23.989 %	9.6197015	26.123 %	
100.00	7.9276887	23.790 %	8.3803040	25.438 %	
102.00	6.9122876	23.662 %	7.2315400	24.801 %	
104.00	6.0058246	23.601 %	6.1788850	24.215 %	
106.00	5.2055082	23.604 %	5.2259009	23.677 %	
108.00	4.5061915	23.667 %	4.3739751	23.186 %	
110.00	3.9008541	23.787 %	3.6222355	22.739 %	

TABLE 1.7 – Évaluation d'options européennes d'achat portant sur la série de contrats C_1 et de leurs volatilités implicites dans le cadre du nouveau modèle diffusif à sauts exponentiels multiples.

1.3 Analyse des résultats et calibrage

Nous allons analyser les résultats recueillis jusqu'ici et discuter l'intérêt de la méthode proposée.

1.3.1 Discussion

Nous voyons sur les tableaux 1.3 et 1.4 que les prix obtenus via la formule (1.39) avec une transformée de Fourier rapide sur $N = 4096$ points sont d'une très grande exactitude tant dans le modèle de Merton que celui de Kou. Remarquons que même pour la série de contrats C_1 dont les prix sont obtenus par interpolation par splines cubiques, l'erreur maximale constatée ne dépasse pas 10^{-7} . La série C_2 correspond à des contrats dont les prix sont directement obtenus en sortie de la transformée de Fourier rapide. Nous voyons que l'erreur commise n'excède pas 10^{-13} dans ce cas.

Les prix d'équilibre obtenus par Merton et Kou sont bien retrouvés par l'évaluation risque-neutre du moment que nous faisons l'hypothèse que les dynamiques sous la mesure d'évaluation sont bien des modèles diffusifs avec sauts. Ce résultat rejoint les développements de Merton et de Kou où tous les processus qui interviennent pour mener à bien les évaluations restent des processus mixtes brownien-Poisson.

Côté performances, nous voyons sur les deux premières colonnes du tableau 1.5 le coût énorme induit par les évaluations de fonctions spéciales dans la formule semi-explicite de Kou par rapport à celle de Merton. Le rapport de vitesse est de plus de 500 entre les deux formules semi-explicites.

Sur la troisième colonne, nous voyons que le calcul complet de la transformée de Fourier rapide sur 4096 points reste stable sous les 2 centièmes de seconde, et cela, quel que soit le modèle considéré. En effet, une fois N choisi, le coût du calcul reste pratiquement le même. Remarquons ici que le temps moyen pris par la formule semi-explicite de Merton est du même ordre que le temps du calcul de la transformée de Fourier rapide. A partir de quelques contrats, pratiquement une dizaine ou plus, l'approche que nous exposons ici redevient largement plus performante en termes de temps de calcul. Même dans le cas hypothétique où nous nous contenterions d'évaluer une seule option à la fois, cette approche reste un candidat de choix dans le cadre des modèles diffusifs avec sauts.

Elle est aussi plus souple. En effet, nous allons voir dans la section sui-

vante que plusieurs produits dérivés de type européen peuvent être évalués de cette manière.

1.3.2 Options puissance

Comme nous l'avons vu plus haut, plusieurs payoffs peuvent en effet être modélisés par $F(S_T, T) = g(X_T)$. Ces payoffs correspondent à ce que nous appelons produit dérivé de type européen en ce sens que ceux-ci dépendent uniquement de la valeur à l'échéance du sous-jacent. Cette souplesse sur le choix du payoff nous permet d'évaluer simplement toute cette classe de produits. Nous avons ainsi vu le cas des options européennes standard. Nous allons voir ici l'exemple des options puissance dont le payoff s'écrit

$$g(X_T) = (S_T^\beta - K)^+ = (S_0^\beta e^{\beta X_T} - K)^+$$

où $\beta > 0$. Typiquement, nous utiliserons une puissance $\beta = 2$. D'autres payoffs de type européen, comme ceux revus par Lee (2004) dans le cadre de l'approche de Carr et Madan (1998), peuvent aussi être simplement évalués ici.

Si une formule explicite peut être établie dans le cadre du modèle classique de Black et Scholes pour le prix d'une option puissance, il n'y a aucun travail à notre connaissance qui donne le prix de ce type d'options dans le cadre des modèles diffusifs avec sauts. L'approche présentée ici va nous permettre d'avoir des résultats dans ce cadre. Nous l'illustrons avec le modèle à sauts gaussiens de Merton.

A partir de la définition du payoff g de l'option puissance, nous obtenons sa transformée de Fourier comme suit :

$$\hat{g}(u) = \frac{\beta K e^{-iu \ln(K^{\frac{1}{\beta}}/S_0)}}{(-iu)(-iu + \beta)}, \quad (1.42)$$

avec la condition sur u suivante :

$$\Im u = \delta < -\beta. \quad (1.43)$$

En introduisant cette expression dans la formule générale d'évaluation

(1.31) et en divisant par le prix d'exercice, nous obtenons ici

$$f(x, t) = \frac{\beta}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} \frac{e^{iux-\tau(r+\psi(u))}}{(-iu)(-iu+\beta)} du. \quad (1.44)$$

où cette fois-ci $x = \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{S_t^\beta}{K} \right)$. Remarquer que nous retrouvons bien la formule (1.36) ainsi que la condition (1.28) associée aux options européennes d'achat si nous mettons $\beta = 1$ dans les formules (1.43) et (1.44) précédentes.

Modèle à sauts gaussiens de Merton			
Option puissance par FFT - $\beta = 2$			
$S_0 = 10, r = 0.05, \sigma = 0.16, \tau = 0.5, \lambda = 0.5, E(J) = 0, Var(J) = 0.25$			
Série C_1		Série C_2	
Prix d'exercice	Option	Prix d'exercice	Option
90.00	22.3782440	<u>97.00</u>	<u>18.1238786</u>
92.00	21.0513986	97.60	17.8122812
94.00	19.8125347	<u>98.20</u>	<u>17.5069226</u>
96.00	18.6639843	98.80	17.2079084
98.00	17.6065229	<u>99.41</u>	<u>16.9153274</u>
100.00	16.6394217	100.02	16.6292598
102.00	15.7605730	<u>100.64</u>	<u>16.3497720</u>
104.00	14.9666623	101.26	16.0769224
106.00	14.2533792	<u>101.88</u>	<u>15.8107540</u>
108.00	13.6156481	102.51	15.5513016
110.00	13.0478528	<u>103.14</u>	<u>15.2985847</u>

TABLE 1.8 – Prix d'une option puissance dans le cadre du modèle à sauts gaussiens de Merton portant sur les deux séries de contrats C_1 et C_2 . Les prix soulignés sont ceux qui sont obtenus en sortie de la FFT. Tous sont arrondis au plus près à la septième décimale.

Les prix d'option que nous avons obtenus sont reportés dans le tableau 1.8. À l'instant initial, le sous-jacent vaut toujours $S_0 = 10$, nous gardons les autres paramètres inchangés. Soulignons qu'en nous servant des mêmes paramètres d'intégration qu'avant ($\eta = 0.25, N = 4096$), les prix donnés par la transformée de Fourier rapide varient cette fois-ci de 1.23 %. Nous pouvons avoir une variation semblable à ce que nous avons eu jusqu'ici en doublant le nombre de points N . Les prix soulignés sur la série de contrats C_2 correspondent à ceux que nous obtenons directement en effec-

tuant une transformée de Fourier rapide. De nouveau, le temps de calcul de cette transformée a seulement pris environ 0.015 s.

Nous voyons que le calcul d'un grand nombre d'options par maturité en une fois est le point fort de l'approche préconisée ici. Nous allons capitaliser sur cette caractéristique pour procéder au calibrage de ces modèles diffusifs avec sauts aux données de marché dans la section suivante.

1.3.3 Calibrage de modèles

Le calibrage consiste à déterminer à partir des données de marché les paramètres du modèle qui permettent le mieux de retrouver les prix du marché, en particulier ceux d'options européennes liquides. Ce problème est connu pour être un problème inverse mal posé. Cependant, plusieurs solutions restent disponibles.

Une des méthodes les plus souvent utilisées dans ce cadre est la méthode des moindres carrés. Elle consiste à résoudre le problème suivant : chercher θ^* tel que

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} \sum_{i=1}^N (C_i - C^{\theta}(T_i, K_i))^2, \quad (1.45)$$

où θ représente les paramètres du modèle à calibrer, N le nombre de prix d'options sur lesquels nous calibrons, $C^{\theta}(T_i, K_i)$ le prix de l'option européenne de maturité T_i et de prix d'exercice K_i selon le modèle et C_i le prix de l'option correspondante relevé sur le marché.

Cela revient à minimiser une fonction objectif qui est l'erreur d'évaluation quadratique du modèle considéré sur l'échantillon de prix retenu. La recherche est arrêtée quand le changement de valeur relatif de la fonction objectif est en dessous d'un seuil de tolérance tol fixé préalablement.

Afin de tenir compte de la valeur intrinsèque de chaque option, une pondération est ajoutée en fonction de la distance à la monnaie de chaque produit. Le système adopté va donner un plus grand poids aux options dans la monnaie et fortement amoindrir celles très en dedans ou en dehors de la monnaie. Plus précisément, pour l'option d'achat de prix d'exercice K_i , le poids ω_i affecté à l'écart entre prix observé et prix théorique dans le problème (1.47) s'écrit :

$$\omega_i = \exp\left(-a \left| \frac{S_0}{K_i} - 1 \right| \right) \quad (1.46)$$

où $a \geq 0$. Le cas $a = 0$ revient au cas sans système de pondération où

tous les écarts de prix auraient la même importance. Le choix $a = 10$ a été adopté dans toute la suite. Le critère choisi conduit à retenir un vecteur de paramètres θ^* défini par

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} \sum_{i=1}^N \omega_i (C_i - C^{\theta}(T_i, K_i))^2. \quad (1.47)$$

Pour juger de la qualité des divers modèles diffusifs avec sauts, nous utilisons la méthode des moindres carrés simple qui fournit déjà une indication précieuse de la qualité des ajustements.

Les mesures d'erreur de modèle que nous choisissons seront la racine de l'erreur quadratique moyenne pondérée définie par

$$\text{RWMSE} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \pi_i [C_i - C^{\theta^*}(T_i, K_i)]^2} \quad (1.48)$$

où $\pi_i = \frac{\omega_i}{\sum_{k=1}^N \omega_k}$, et l'erreur absolue moyenne pondérée définie par

$$\text{AWAE} = \sum_{i=1}^N \pi_i |C_i - C^{\theta^*}(T_i, K_i)|. \quad (1.49)$$

Par ailleurs, les formules suivantes permettent de calculer la variation quadratique totale propre à chaque processus calibré. Ainsi, si la variation quadratique par unité de temps du processus uniquement diffusif se résume à $V_{BSM} = \sigma^2$, pour le processus utilisé dans le modèle de Merton, elle s'écrit

$$V_{Mer} = \sigma^2 + \lambda(E(J)^2 + \text{Var}(J)).$$

Pour le processus du modèle de Kou, la variation quadratique totale par unité de temps s'écrit

$$V_{Kou} = \sigma^2 + 2\lambda \left(\frac{p}{\lambda_1^2} + \frac{q}{\lambda_2^2} \right)$$

tandis que pour le processus à sauts exponentiels multiples, il vient :

$$V_{Mult} = \sigma^2 + 2\lambda \left(\sum_{i \in P} \frac{p_i}{\lambda_i^2} + \sum_{i \in N} \frac{p_i}{\lambda_i^2} \right).$$

Nous allons maintenant présenter les données de marché à partir desquelles nous allons procéder au calibrage.

1.3.3.1 Description des données

Nous utiliserons deux jeux de données dans cette section. Le premier est celui utilisé par Andersen et Andreasen (2000) tandis que le second provient de Schoutens (2003). Les deux jeux de données portent sur l'indice S&P 500. Les options écrites sur ce sous-jacent sont parmi les options européennes les plus liquides. Les maturités concernées sont les 3 mois les plus proches auxquelles s'ajoutent les trois échéances les plus proches tirées du cycle trimestriel calé sur le mois de mars. Le jour d'exercice éventuel de l'option de chacune de ces échéances est fixé au troisième vendredi du mois concerné ou le jour ouvrable le plus proche précédent si ce vendredi est férié². Les opérations d'achat et de vente sur ces options peuvent être conduites jusqu'à la veille du jour d'exercice.

Le premier jeu de données a été recueilli en avril 1999. Les prix d'exercice sont exprimés en pourcentage de la valeur du sous-jacent. Les maturités varient de 0.08 à 10 ans. Le taux d'intérêt relevé est de 5.59 % tandis que l'indice a un taux de dividende continu de 1.14 %. Les prix des options européennes d'achat sur l'indice recueillis sont exprimés à l'origine au travers des volatilités *bid* et *ask* Black et Scholes implicites. Ils sont reportés dans le tableau 1.9 cette fois-ci en prix effectifs en partant du milieu de fourchette de ces volatilités implicites. Ce sont ces prix qui constituent les données de marché sur lesquelles le calibrage portera. En tout, 163 prix d'options sont disponibles dans ce jeu de données D1.

Le second jeu de données, recueilli dans le courant du mois d'avril 2002, porte sur les mêmes produits financiers. Cette fois-ci, les maturités vont de 1 mois à 2 ans et demi. Dans les calibrages qui suivent, ces maturités sont recalculées sur une base de 252 jours ouvrables par an. Le taux d'intérêt relevé est alors de 1.9 % et le taux de dividende continu de l'indice est estimé à 1.2 %. Le jour du relevé, l'indice était alors à 1124.47. Les 75 prix d'options ainsi obtenus sont reportés dans le tableau 1.10. Ils constituent le jeu de données D2.

2. Le lecteur intéressé pourra trouver une description exhaustive de ces produits sur le site institutionnel du Chicago Board Options Exchange <http://www.cboe.com>.

D1	Prix d'exercice (en pourcentage du sous-jacent)											
	50	70	80	85	90	95	100	105	110			
τ												
0.08					10.6471	6.2655	2.7243	0.6558	0.0652			
0.25			16.8428		12.5554	8.6422	5.2849	2.7223	1.3271			
0.50			18.8212		14.8237	11.1618	7.9322	5.2272	3.1271			
0.75		24.6174	20.6015	16.7998	13.2721	10.0870	7.3379	5.0898				
1.00		26.0731	22.2439	18.6109	15.2045	12.0630	9.2409	6.8063				
1.50		28.6358	25.0514	21.6286	18.3908	15.3614	12.5620	10.0529				
2.00		30.9831	27.5768	24.3211	21.2236	18.3014	15.5735	13.0593				
3.00		41.6805	35.1622	32.0652	29.0854	26.2228	23.4880	20.8932	18.4390			
4.00	57.6628	44.7117	38.7600	35.9244	33.1852	30.5387	27.9930	25.5573	23.2216			
5.00	59.1337	47.2475	41.8290	39.2231	36.7064	34.2744	31.9214	29.6578	27.4669			
7.00	61.4463	51.3089	46.6479	44.4204	42.2544	40.1550	38.1217	36.1544	34.2450			
10.00	63.8536	55.7473	52.0323	50.2447	48.5031	46.8054	45.1570	43.5573	41.9979			

	Prix d'exercice (en pourcentage du sous-jacent)											
	115	120	130	140	150	160	170	180	200			
τ												
0.08												
0.25	0.3519	0.0893										
0.50	1.6913	0.8325	0.1441									
0.75	3.3676	2.1118	0.6911	0.1654								
1.00	4.8077	3.2310	1.2373	0.3757	0.0611							
1.50	7.8885	6.0400	3.2855	1.6016	0.6977	0.2677	0.0329					
2.00	10.8107	8.8538	5.6867	3.4263	1.9335	1.0273	0.5155	0.2369				
3.00	16.1510	14.0825	10.5805	7.7381	5.5159	3.8465	2.6420	1.7834	0.7864			
4.00	20.9303	18.8144	15.2811	12.2559	9.7226	7.6232	5.9145	4.5543	2.6578			
5.00	25.3594	23.3481	19.6955	16.5658	13.8727	11.5469	9.5473	7.8313	5.2491			
7.00	32.3925	30.6043	27.2118	24.0844	21.3841	19.0088	16.8610	14.9455	11.7224			
10.00	40.4772	38.9940	36.1535	33.4519	30.8919	28.4583	26.3064	24.4095	21.0266			

TABLE 1.9 – Jeu de données D1. Prix d'options européennes d'achat sur l'indice S&P 500 en avril 1999 calculés à partir des volatilités implicites relevées dans Andersen et Andreasen (2000).

D2	Temps restant avant échéance						
<i>K</i>	0.11508	0.25397	0.61508	0.97619	1.33730	1.69841	2.42063
975			161.60	173.30			
995			144.80	157.00		182.10	
1025			120.10	133.10	146.50		
1050		84.50	100.70	114.80		143.00	171.40
1075		64.30	82.50	97.60			
1090	43.10						
1100	35.60		65.50	81.20	96.20	111.30	140.40
1110		39.50					
1120	22.90	33.50					
1125	20.20	30.70	51.00	66.90	81.70	97.00	
1130		28.00					
1135		25.60	45.50				
1140	13.30	23.20	58.90				
1150		19.10	38.10	53.90	68.30	83.30	112.80
1160		15.30					
1170		12.10					
1175		10.90	27.70	42.50	56.60		99.80
1200			19.60	33.00	46.10	60.90	
1225			13.20	24.90	36.90	49.80	
1250				18.30	29.30	41.20	66.90
1275				13.20	22.50		
1300					17.20	27.10	49.50
1325					12.80		
1350						17.10	35.70
1400						10.10	25.20
1450							17.00
1500							12.20

TABLE 1.10 – Jeu de données D2. Prix d’options européennes d’achat sur l’indice S&P 500 en avril 2002 avec une valeur de l’indice à 1124.47. Source : Schoutens (2003).

1.3.3.2 Résultats

Dans un premier temps, un calibrage du modèle diffusif classique de Black, Scholes et Merton a été effectué sur ces deux jeux de données. La table 1.11 donne la volatilité calibrée et précise l’erreur de modèle ainsi faite. La dernière colonne donne la valeur de la variation quadratique par unité de temps trouvée. Les nombres de cette table restent inchangés que la tolérance sur le changement de valeur relatif de la fonction objectif soit

	σ	RWMSE	AWAE	V_{BSM}
D1	0.2778	1.1048	1.6710	0.0771
D2	0.1527	6.2746	6.6546	0.0233

TABLE 1.11 – Calibrage du modèle diffusif de Black, Scholes et Merton.

	σ	λ	$E(J)$	$\sqrt{Var(J)}$	RWMSE	AWAE	V_{Mer}	
D1	0.1924	0.0726	-0.9397	0.4922	0.2745	0.3870		SE
	0.1924	0.0726	-0.9397	0.4922	0.2745	0.3870	0.1187	4096
	0.1919	0.0740	-0.9264	0.4968	0.2747	0.3866		2048
D2	0.1153	0.0240	-9.0373	0.0453	1.9429	1.8488		SE
	0.1153	0.0241	-9.2382	0.0478	1.9429	1.8486	2.0701	4096
	0.1144	0.0300	-2.2833	0.9999	1.9776	1.8886		2048

TABLE 1.12 – Calibrage du modèle diffusif avec sauts de Merton.

de 10^{-5} ou de 10^{-7} . Ce premier calibrage reste aussi insensible à la valeur initiale du paramètre à calibrer.

Il est à remarquer que dans le cas du jeu de données D1, tant la racine de l'erreur quadratique moyenne pondérée que l'erreur absolue moyenne pondérée sont assez faibles déjà dans le cadre de Black, Scholes et Merton. Par contre, l'erreur de modèle mesurée selon ces deux mêmes critères demeure importante pour le jeu de données D2.

Un second calibrage est alors effectué, cette fois-ci, sur le modèle avec sauts de Merton. Il est effectué de trois manières différentes sur chaque jeu de données. Une première fois, la formule semi-explicite (SE) est utilisée pour l'évaluation de prix d'options et une tolérance de 10^{-7} est admise pour le changement relatif de valeur de la fonction objectif. Une seconde fois, l'évaluation est effectuée au moyen d'une transformée de Fourier rapide avec $N = 4096$ et la même tolérance. Et enfin, une troisième fois avec une évaluation par transformée de Fourier rapide avec $N = 2048$ et une tolérance plus large de 10^{-5} .

Pour ces six calibrages, les paramètres de départ sont à chaque fois les mêmes, à savoir $\theta_0 = (\sigma, \lambda, E(J), \sqrt{Var(J)})_0 = (0.17, 0.089, -0.9, 0.3)$. Le tableau 1.12 récapitule les résultats de calibrage obtenus pour le modèle avec sauts de Merton.

Sur les deux jeux de données, l'erreur de modèle suivant nos deux mesures ne change pas comme attendu, que les prix selon le modèle soient calculés par l'intermédiaire de la formule semi-explicite ou par la transformée de Fourier rapide. En effet, d'après les résultats précédents, l'erreur relative commise

en utilisant la transformée de Fourier rapide avec $N = 4096$ est en dessous de la tolérance admise pour le changement de valeur relatif de la fonction objectif de 10^{-7} . La variation quadratique totale par unité de temps est de nouveau calculée à partir des paramètres de modèle ainsi calibrés. Elle est reportée dans l'avant-dernière colonne de la table 1.12.

Dans l'optique du calibrage des modèles plus exigeants en temps de calcul qui vont suivre, un calibrage avec une transformée de Fourier rapide à $N = 2048$ a aussi été mis en œuvre et testé. Une tolérance de 10^{-5} est alors suffisante dans ce cas. Nous remarquons que les erreurs de modèle trouvées après calibrage sont très proches.

Les paramètres calibrés à partir du jeu de données D1 sont proches de ceux donnés par Andersen et Andreasen (2000) à savoir $\sigma = 0.1765$, $\lambda = 0.089$, $E(J) = -0.8898$, $\sqrt{Var(J)} = 0.4505$. Malgré des erreurs de modèle sensiblement égales, les paramètres calibrés varient sensiblement. En particulier, en faisant varier les paramètres de départ du calibrage, le paramètre $\sqrt{Var(J)}$ a été trouvé très faible à plusieurs reprises.

Si les deux paramètres σ et λ sont facilement retrouvés après calibrage et restent sensiblement les mêmes, les paramètres caractérisant les sauts, $E(J)$ et $\sqrt{Var(J)}$, sont plus difficilement accessibles. Il se trouve en fait que pour σ et λ fixés, la fonction objectif présente une vallée très plate qui fait que plusieurs paramètres de sauts peuvent convenir pour une tolérance donnée et sans que l'erreur de modèle soit changée de façon significative. He, Kennedy, Coleman, Forsyth, Li et Vetzal (2006) font aussi état de ce phénomène dans un article récent. Ces auteurs précisent par ailleurs que si inversement, les paramètres de sauts sont connus, la fonction objectif a un minimum bien défini qui fait du problème de calibrage un problème bien posé, un phénomène que nous retrouvons bien ici avec la stabilité des paramètres σ et λ après calibrage.

Un premier résultat intéressant apparaît ici. Nous avons un bien meilleur ajustement du modèle aux prix de marché en prenant le modèle diffusif avec sauts de Merton en lieu et place du modèle diffusif classique de Black, Scholes et Merton. En effet, les erreurs de modèle ont significativement diminué sur chaque jeu de données avec une mention particulière pour le jeu de données D2 où la racine de l'erreur quadratique moyenne pondérée est passée de 6.2746 à 1.9429. La variation quadratique totale obtenue, V_{Mer} , sur le jeu de données D2 est cependant trop élevée par rapport à celle obtenue

	σ	λ	p	λ_1	λ_2	RWMSE	AWAE	V_{Kou}	
D1	0.1836	0.2780	0.4528	93.9136	1.7624	0.2567	0.3544	0.1317	4096
	0.1834	0.2803	0.4531	79.1197	1.7713	0.2567	0.3548		2048
D2	0.1096	0.1512	0.6965	21.1745	0.6131	1.7437	1.7087	0.2566	4096
	0.1093	0.1494	0.6926	19.3120	0.6133	1.7440	1.7181		2048

TABLE 1.13 – Calibrage du modèle diffusif avec sauts de Kou.

dans le cadre diffusif simple (V_{BSM}). Nous pensons que ce fait est dû à la particularité du deuxième jeu de données. Par ailleurs, le gain est moins fort sur le jeu de données D1 puisque l'ajustement au modèle diffusif de Black, Scholes et Merton est déjà assez bon.

Le calibrage suivant porte sur le modèle avec sauts de Kou. Les paramètres de départ sont ici fixés à $\theta_0 = (\sigma, \lambda, p, \lambda_1, \lambda_2)_0 = (0.15, 0.4, 0.3, 14, 3)$. De nouveau, la transformée de Fourier rapide a été utilisée dans un premier temps avec $N = 2048$ avec une tolérance de 10^{-7} sur le calibrage, puis dans un second temps avec $N = 4096$ et une tolérance de 10^{-7} . L'évaluation des contrats a été affinée pour plus de précision et de stabilité en calculant directement les options d'achat pour les contrats près de la monnaie et ceux en dehors de la monnaie selon la formule (1.33) tandis que pour les contrats dans la monnaie, la formule (1.35) a été utilisée. Les contrats dans la monnaie ont été définis comme ceux dont le prix d'exercice est strictement inférieur à 0.9 fois la valeur du sous-jacent.

Le temps pris par le calibrage peut alors varier d'environ une minute à plus de 5 mn. Le temps prohibitif de la formule semi-explicite de Kou même sur la version tronquée à 7 termes évoquée plus haut l'exclut de ce test de calibrage.

L'avant-dernière colonne de la table 1.13 rapporte de nouveau la variation quadratique totale dans le modèle de Kou. La table 1.13 montre qu'il y a une amélioration de l'ajustement avec le modèle diffusif avec sauts de Kou comparativement à celui proposé par Merton. Ce résultat est particulièrement visible avec la diminution de la mesure RWMSE sur le jeu de données D2. D'ailleurs, la variation quadratique totale par unité de temps, V_{Kou} , revient ici à un niveau raisonnable.

Dans les deux cas, la loi des sauts présente une forte asymétrie avec $\lambda_1 > \lambda_2$. Les sauts à la hausse sont donc en moyenne de plus faible amplitude que les sauts à la baisse. Les sauts positifs ont aussi une probabilité de

	σ	λ	P	N	RWMSE	AWAE	V_{Mult}
D1	0.1147	3.4705	$(3.10^{-7}, 99.7338)$	$(0.0176, 0.9807)$ $(0.9824, 14.2135)$	0.2099	0.2931	0.1739
D2	0.1122	0.1689	$(0.6992, 20.4543)$	$(0.1787, 0.2000)$ $(0.1221, 49.9998)$	1.9709	1.9212	1.5223

TABLE 1.14 – Calibrage du modèle diffusif à sauts exponentiels multiples avec un seul saut positif.

survenue moindre que les sauts négatifs dans le cas du jeu de données D1 et inversement pour le jeu de données D2.

La dernière série de calibrages va porter sur le modèle diffusif à sauts multiples introduit précédemment. L'évaluation par transformée de Fourier rapide se fait ici encore avec $N = 4096$ et le calibrage admet une tolérance de 10^{-7} . En pratique, il peut être souhaitable de rester avec $N = 2048$ dans le calcul de la transformée de Fourier rapide et rester à une tolérance de 10^{-5} pour les raisons de coût en temps de calcul précédemment évoquées sans perdre significativement en précision comme les tables 1.12 et 1.13 le montrent.

Les paramètres de départ adoptés ici sont

$$\theta_0 = (\sigma, \lambda, (p_p, \lambda_p), (p_n, \lambda_n))_0 = (0.15, 0.4, (0.1, 10), [(0.2, 3) - (0.7, 17)]),$$

avec $|P| = 1$ et $|N| = 2$, et donc 7 paramètres à calibrer en tout, avec la contrainte sur les probabilités $\sum_{i \in P \cup N} p_i = 1$.

Les résultats du calibrage du modèle diffusif à sauts exponentiels multiples sont reportés dans la table 1.14. Le constat ici est que si nous pouvons encore améliorer l'ajustement pour le jeu de données D1, nous ne gagnons plus rien sur le jeu de données D2. La variation quadratique totale V_{Mult} dans le cas du jeu de données D2 tend à confirmer ce résultat : elle est de nouveau trop élevée.

Examinons attentivement le calibrage effectué sur le jeu de données D1. La valeur de la probabilité de survenue du seul saut positif nous amène à considérer un modèle où cette probabilité est nulle. Nous procédons à un nouveau calibrage sur le jeu D1 en n'autorisant pas les sauts positifs. Les paramètres de départ choisis sont

$$\theta = (\sigma, \lambda, (p_n, \lambda_n)) = (0.15, 0.5, [(0.3, 3) - (0.2, 17) - (0.5, 40)]),$$

	σ	λ	N	RWMSE	AWAE	V_{Mult}
D1	0.0961	6.5382	(0.0124, 1.1975) (0.9000, 19.0130) (0.0876, 30.0000)	0.2089	0.2880	0.1561

TABLE 1.15 – Calibrage du modèle diffusif à sauts exponentiels multiples sans aucun saut positif sur le jeu de données D1.

avec $|P| = 0$ et $|N| = 3$.

Les résultats précédents sont confirmés par le tableau 1.15. Les sauts négatifs implicites dans les prix relevés dans le jeu de données D1 se répartissent comme suit : les sauts négatifs de taille moyenne ont une probabilité élevée de survenir tandis que les sauts négatifs de grande amplitude ont une probabilité plus faible.

Remarquons ici l'évolution de la volatilité pour le jeu de données D1 entre le calibrage dans le modèle de Kou et ceux dans les modèles à sauts multiples. Si la partie diffusive était à un niveau de volatilité $\sigma = 0.1836$ dans le modèle de Kou, elle est descendue à $\sigma = 0.1147$ dans le modèle à sauts multiples avec un seul saut positif et jusqu'à $\sigma = 0.0961$ dans le modèle sans aucun saut positif. Il se trouve que cette diminution de la volatilité est compensée par une plus grande agitation apportée par la composante de sauts comme en attestent les variations quadratiques totales obtenues pour chacun de ces trois modèles qui restent proches.

Conclusion

Le but poursuivi dans ce chapitre était de démontrer la puissance d'une méthode générale d'évaluation de produits dérivés de type européen sur une classe de modèles de sous-jacents dits diffusifs avec sauts. En particulier, un nouveau modèle diffusif à sauts exponentiels multiples, extension du modèle de Kou, a été introduit en se basant sur la clarté et la puissance d'expression de cette méthode. La forme de la solution d'évaluation obtenue a alors naturellement conduit à une mise en œuvre d'un algorithme numérique basé sur la transformée de Fourier rapide. Les prix obtenus par ce biais ont alors été confrontés aux prix donnés par des formules semi-explicites dans le cas des modèles diffusifs avec sauts de Merton et de Kou. Les résultats obtenus montrent clairement les avantages de cette approche par transformée de Fourier généralisée couplée avec la transformée de Fourier rapide. Elle offre

de bonnes garanties d'exactitude tout en étant extrêmement performante en termes de temps de calcul. La puissance de cette approche est encore illustrée par l'exemple de l'option puissance dont aucune formule d'évaluation n'est connue, sauf dans le cadre classique de Black, Scholes et Merton.

L'approche par transformée de Fourier généralisée est encore mise à contribution pour mener à bien plusieurs calibrages de ces modèles diffusifs avec sauts sur des données de marché. Sur les jeux de données disponibles, il apparaît que ces modèles offrent déjà un bon ajustement au marché. Plusieurs faits empiriques ont aussi pu être mis en évidence. Les lois de sauts dans les modèles de Kou et de Kou étendu sont ainsi asymétriques. En particulier, dans le modèle de Kou, si les sauts négatifs surviennent plus rarement que les sauts positifs, les premiers sont de plus grande amplitude. Par ailleurs, avec le modèle de Kou étendu avec uniquement des sauts négatifs, ceux de taille moyenne apparaissent avec une probabilité plus élevée de survenir que ceux de grande amplitude.

Après avoir consacré ce chapitre à l'évaluation de produits dérivés de type européen, nous verrons dans les chapitres suivants d'autres champs de recherche où ces modèles diffusifs avec sauts restent pertinents.

Chapitre 2

Options exotiques, défaut sur fonds propres et intéressement des dirigeants

Introduction

À côté des produits dérivés de type européen figurent les options exotiques dont en particulier les options qui dépendent de la trajectoire suivie par le cours (encore appelées options *path-dependent*) comme les options à barrière. De façon plus générale, l'étude de la traversée d'un seuil, d'une barrière par la trajectoire d'un processus est particulièrement intéressante puisqu'elle permet de résoudre plusieurs autres thèmes de la finance comme les problèmes du défaut ou de la ruine d'une compagnie. Un deuxième type d'options nous intéresse dans ce chapitre : les options d'échange entre deux actifs financiers. Elles vont aussi nous permettre d'étudier l'impact des discontinuités de cours d'une compagnie sur la rémunération complémentaire de ses dirigeants.

Dans un premier temps, une brève revue des caractéristiques des options exotiques ainsi que les diverses approches utilisées pour les évaluer est effectuée. Ensuite, nous verrons de plus près la prise en compte d'une barrière à travers les options de défaut sur fonds propres dans une deuxième section. Une large section est ensuite dévolue à l'évaluation des options d'échange en présence de sauts ainsi qu'à l'étude de l'influence de ces derniers sur la rémunération par *stock options* des dirigeants.

2.1 Perspectives

Si peu de formules fermées sont connues, même dans le cadre du modèle initial de Black, Scholes et Merton pour l'évaluation des diverses options exotiques, leur obtention est encore plus difficile dans le cadre des modèles de Lévy exponentiels, en général et des modèles diffusifs avec sauts, en particulier.

2.1.1 Caractéristiques de quelques produits

Parmi les options exotiques, les options à barrière ont reçu une attention particulière. Cette famille d'options a un payoff qui dépend du fait que le sous-jacent S soit passé par une barrière B spécifiée par avance ou pas. Dans le cas des modèles généraux de Lévy, le prix peut sauter par dessus la barrière au lieu de l'atteindre uniquement comme dans le modèle diffusif classique. Il se peut alors que le temps de premier passage $\tau_B = \inf\{t > 0 | S_t \geq B\}$ survienne strictement avant le temps de sortie $T_B = \inf\{t > 0 | S_t > B\}$. En effet, l'actif sous-jacent peut atteindre la barrière et redescendre tout de suite sans la traverser. Dans toute la suite, nous nous limiterons au cas où $T_B = \tau_B$ et nous parlerons uniquement alors du temps de premier passage τ_B . Il se trouve que ces deux temps aléatoires sont égaux presque sûrement pour tous les processus de Lévy qui vérifient certaines conditions (voir Kesten (1969)). Ces dernières sont valables en particulier pour les modèles diffusifs avec sauts dont la composante gaussienne est non nulle (voir aussi Bertoin (1996) et Satō (1999)).

Huit différents types d'options à barrière peuvent exister selon que l'option soit une option d'achat ou de vente, que la barrière soit activante (en anglais, *in*) ou désactivante (*out*) et selon que le sous-jacent atteigne la barrière en montant (*up*) ou en descendant (*down*). L'acheteur d'une option *down-and-out call* (DOC) perd ainsi son droit d'exercice si le sous-jacent descend sous la barrière B avant la maturité du produit. Son payoff à maturité T s'écrit $(S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\tau_B > T\}}$ et son prix à l'instant initial est noté $DOC(S_0, K, B)$ où K est le prix d'exercice. L'option *down-and-in call* (DIC) peut seulement être exercée si la barrière a été atteinte avant maturité. Son payoff s'écrit $(S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\tau_B > T\}}$. Il s'en déduit la relation suivante qui relie

les options à barrière activante et désactivante :

$$DOC(S_0, K, B) + DIC(S_0, K, B) = C(S_0, K) \quad (2.1)$$

où $C(S_0, K)$ est une option d'achat européenne standard. De la même façon, la somme d'une option *up-and-in call* (UIC) et d'une option *up-and-out call* (UOC) donnent une option européenne. Il est à noter que ces relations ne dépendent pas du modèle du sous-jacent comme la relation de parité entre les options européennes d'achat et de vente et permettent de ramener l'étude de cette classe d'options à un seul type d'option.

Les options dites *lookback* forment une autre famille d'options exotiques fortement dépendantes de toute la trajectoire suivie par le sous-jacent. Une option d'achat *lookback* à prix d'exercice variable donne à son détenteur le droit d'acheter le sous-jacent à maturité au prix minimum où il a pu descendre depuis l'instant initial. Il est à noter que pour des raisons pratiques, tant pour les options à barrière que pour les options *lookback*, les événements déclenchants sont souvent constatés à des dates discrètes par contrat (*fixings*). Des techniques de correction de continuité ont alors aussi été introduites pour relier les prix obtenus à l'aide de modèles en temps continu à leur version en temps discret et réciproquement (voir à ce sujet Broadie, Glasserman et Kou (1997) et Broadie, Glasserman et Kou (1999)).

2.1.2 Méthode d'évaluation

Une approche générale d'évaluation repose sur l'utilisation de la factorisation de Wiener-Hopf. Cette factorisation permet en effet d'obtenir les transformées de Fourier du supremum et de l'infimum d'un processus de Lévy X . Si η est une variable exponentielle indépendante de paramètre $q > 0$ et en notant $M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} X_s$ le supremum du processus X et $m_t = \inf_{0 \leq s \leq t} X_s$ son infimum, la factorisation de Wiener-Hopf s'écrit

$$E(e^{zM_\eta}) = E(e^{zM_\eta}) E(e^{zm_\eta}) = \psi^+(q, z)\psi^-(q, z)$$

où ψ^+ et ψ^- sont appelés les facteurs de Wiener-Hopf et définis par

$$\psi^+(q, z) = E(e^{zM_\eta}) = q \int_0^{+\infty} e^{-qt} E(e^{zM_t}) dt \quad (2.2)$$

et

$$\psi^-(q, z) = E(e^{z(X_\eta - M_\eta)}) = E(e^{zm_\eta}) = q \int_0^{+\infty} e^{-qt} E(e^{zm_t}) dt. \quad (2.3)$$

Les lois de plusieurs fonctionnelles de processus de Lévy peuvent alors être obtenues (voir Satō (1999)), ce qui permet en particulier d'obtenir les prix d'options à barrière comme une transformée inverse multidimensionnelle de fonctions faisant intervenir ces facteurs de Wiener-Hopf.

Ainsi, par exemple, en conjonction avec des outils d'analyse tirés de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels, Boyarchenko et Levendorskiĭ (2002a) ont obtenu des formules complexes pour l'évaluation des options à barrière. Des résultats similaires et plus généraux ont aussi été obtenus par Nguyen-Ngoc (2003) et Nguyen-Ngoc et Yor (2003) en calculant la transformée de Fourier du prix modifié de l'option.

Le problème de cette approche probabiliste générale demeure à l'heure actuelle le fait que le calcul explicite des facteurs de Wiener-Hopf reste difficile pour plusieurs modèles de la littérature. Même dans les cas où les facteurs de Wiener-Hopf sont connus (processus gaussiens, spectralement positifs, *etc* ...), cette approche est trop coûteuse en temps de calcul puisqu'il faut inverser des intégrales de dimension 2 ou 3.

2.1.3 Cas des modèles diffusifs avec sauts exponentiels

Pour le cas particulier des modèles diffusifs avec sauts exponentiels, en particulier le modèle de Kou avec une composante de sauts à loi exponentielle double, plusieurs résultats explicites ont pu être obtenus.

2.2 Prise en compte d'une barrière

2.2.1 Approximation des processus de Lévy

Un intérêt essentiel des processus diffusifs avec sauts est le fait que tout processus de Lévy puisse être approché aussi précisément que l'on veut par ceux-ci.

Nous verrons ici un exemple d'approximation sur des processus de Lévy à sauts purs, en l'occurrence les processus dits CGMY/KoBoL (voir Carr et al.

(2002), Koponen (1995), Boyarchenko et Levendorskii (1999) et Boyarchenko et Levendorskii (2000)) qui ont une densité de Lévy du type suivant :

$$u_{CGMY}(x) = \begin{cases} C \frac{\exp(-G|x|)}{|x|^{1+Y}} & \forall x < 0, \\ C \frac{\exp(-M|x|)}{|x|^{1+Y}} & \forall x > 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

où $Y < 2$. Nous nous restreindrons comme Carr et al. (2002) aux processus de Lévy à sauts purs à activité infinie et variation finie, c'est-à-dire ceux pour lesquels le paramètre Y est dans l'intervalle $[0, 1[$.

La classe de processus diffusifs avec sauts qui sera utilisée est la classe des processus diffusifs avec sauts exponentiels multiples.

2.2.1.1 Approximation de la composante de sauts

La composante de sauts sera approchée par un processus *phase-type* de type hyperexponentiel, que nous appelons aussi processus à sauts exponentiels multiples. Ces processus sont à activité finie $\lambda = \Pi(\mathbb{R})$ et leur mesure de Lévy Π s'écrit $\Pi(dx) = u(x) dx$ avec la densité de Lévy

$$u(x) = \lambda \left(\sum_{i \in P} p_i \lambda_i e^{-\lambda_i x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+} + \sum_{j \in N} p'_j \lambda'_j e^{\lambda'_j x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^-} \right). \quad (2.5)$$

La méthode d'approximation mise en œuvre ici est basée sur l'approximation des densités de Lévy proposée par Asmussen, Madan et Pistorius (2005). Ainsi, pour la composante de sauts positifs, il viendrait

$$\frac{1}{x^{1+Y}} \simeq \sum_{i \in P} c_i e^{-y_i x}, \quad (2.6)$$

où les coefficients c_i sont déterminés par une procédure de moindres carrés non linéaires.

Avec l'exemple de $Y = 0.5$, $|P| = 7$ et $y_i \in \{0.5, 2, 5, 10, 20, 40, 100\}$, nous obtenons les résultats rapportés dans le tableau 2.1 avec x allant de 0.25 à 5, avec un pas de 0.025. Nous obtenons les coefficients c_i avec une erreur résiduelle $R^2 = 0.017564$, raisonnablement basse.

Cette solution peut aussi servir pour la composante de sauts négatifs en prenant $P = N$ et les mêmes paramètres y_i . Le processus CGMY peut alors

y_i	Coefficient c_i
0.5	0.827017
2.0	3.103806
5.0	11.097780
10.0	19.358322
20.0	90.908747
40.0	173.125085
100.0	1.000000

TABLE 2.1 – Approximation CGMY avec $Y = 0.5$.

être approché par l'intermédiaire de sa densité de Lévy (2.4) en posant

$$\begin{cases} \lambda_i = M + y_i & \text{et } \lambda p_i \lambda_i = C c_i, \forall i \in P \\ \lambda'_j = G + y_j & \text{et } \lambda p'_j \lambda'_j = C c_j, \forall j \in N \end{cases} \quad (2.7)$$

pour la densité de Lévy (2.5) du processus à sauts exponentiels multiples.

L'activité de ce processus est donnée par la formule

$$\lambda = \sum_{i \in P} \frac{C c_i}{\lambda_i} + \sum_{j \in N} \frac{C c_j}{\lambda'_j}.$$

Comme cette activité est finie et que le processus CGMY est à activité infinie, on peut adjoindre à ce processus à sauts hyperexponentiel une partie diffusivo qui va approcher les sauts de petite taille.

2.2.1.2 Approximation des sauts de petite taille

Seuls les sauts de grande amplitude du processus CGMY ont été pris en compte par le processus hyperexponentiel précédent. Pour tenir compte de l'activité infinie inhérente aux processus CGMY considérés et améliorer l'approximation, les sauts de petite taille peuvent être approchés par une diffusion.

Suivant Asmussen et Rosinski (2001), l'approximation est effectuée sur la densité $\tilde{u}(x) = (u_{CGMY}(x) - u(x)) \mathbf{1}_{|x| < \epsilon}$ qui prend en compte tous les sauts dont la taille est inférieure en valeur absolue à ϵ .

Il est alors nécessaire de calculer

$$\sigma^2(\epsilon) = \int_{|x| < \epsilon} x^2 \tilde{u}(x) dx.$$

Pour ce faire, nous avons besoin de calculer la quantité suivante :

$$C \int_0^\epsilon x^2 \frac{e^{-Mx}}{x^{1+Y}} dx = \frac{C}{M^{2-Y}} \Gamma(2-Y) \bar{\Gamma}(M\epsilon, 2-Y)$$

où $\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} dt$ est la fonction gamma et $\bar{\Gamma}(x, a) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt$ est la fonction gamma incomplète. Cette quantité correspond à la partie CGMY de la fonction \tilde{u} .

Nous devons maintenant calculer les intégrales provenant de la partie hyperexponentielle de la fonction \tilde{u} . Ainsi, pour la composante de sauts positifs, nous avons pour $i \in P$:

$$\int_0^\epsilon p_i \lambda_i x^2 e^{-\lambda_i x} dx = \frac{p_i}{\lambda_i^2} \Gamma(3) \bar{\Gamma}(\lambda_i \epsilon, 3)$$

et pour la composante de sauts négatifs, il vient pour $j \in N$:

$$\int_{-\epsilon}^0 p'_j \lambda'_j x^2 e^{\lambda'_j x} dx = \frac{p'_j}{\lambda'^2_j} \Gamma(3) \bar{\Gamma}(\lambda'_j \epsilon, 3).$$

Par la suite, le seuil ϵ sera choisi de façon à minimiser l'erreur relative entre le prix d'options européennes obtenus dans le cadre du modèle CGMY et dans le modèle diffusif avec sauts hyperexponentiels comme calculés dans Randrianarivony (2006).

Pour illustration, en prenant $C = 1.1681$, $G = 3.5762$, $M = 11.4591$, un prix initial du sous-jacent à $S_0 = 100$ et une plage de prix d'exercice K allant de 90 à 110 avec un pas de 2, il vient $\epsilon = 0.03676$.

2.2.2 Temps de passage

La détermination des temps de premier passage joue un rôle important tant en assurance, pour les probabilités de ruine et de survie, qu'en finance, pour les options exotiques où un passage du processus sous-jacent par une barrière intervient, ce qui nous intéresse particulièrement ici.

2.2.2.1 Temps de premier passage

Soit $\tau_b = \inf\{t \geq 0 | X_t \geq b\}$ le temps de premier passage du processus diffusif avec sauts hyperexponentiel X par une barrière $b > 0$. La distribution *phase-type* pour les sauts positifs de ce processus décrite à l'équation (2.5)

a $|P| + 1 = n + 1$ états avec une matrice génératrice

$$T^{(+)} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 & -\lambda_n \end{pmatrix}$$

et des probabilités d'état initial égales à p_i pour les états $i = 1, \dots, n$ et un vecteur de taux d'absorption dans l'état final $t = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

À partir de l'équation (2.5) et de la formule de Lévy-Khintchine, l'exposant caractéristique du modèle diffusif avec sauts hyperexponentiels s'obtient :

$$\begin{aligned} \psi(s) &= \ln(E(e^{sx})) \\ &= \gamma s + \frac{\sigma^2}{2} s^2 + \lambda \left(\sum_{i \in P} p_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i - s} - 1 \right) + \sum_{j \in N} p'_j \left(\frac{\lambda'_j}{\lambda'_j + s} - 1 \right) \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Les racines de l'équation $\psi(s) = a$ avec une partie réelle positive vont permettre de calculer la transformée de Laplace de τ_b au point $a : E(e^{-a\tau_b})$.

Or l'exposant caractéristique peut être vu comme une fonction rationnelle $\psi(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ où

$$q(s) = \prod_{i \in P} (\lambda_i - s) \prod_{j \in N} (\lambda'_j + s) \quad (2.9)$$

qui est de degré $|P| + |N| = n + m$ et

$$p(s) = \gamma s q(s) + \frac{\sigma^2}{2} s^2 q(s) - \lambda q(s) + \lambda \sum_{i \in P} p_i \frac{\lambda_i q(s)}{\lambda_i - s} + \lambda \sum_{j \in N} p'_j \frac{\lambda'_j q(s)}{\lambda'_j + s}, \quad (2.10)$$

qui est généralement de degré $|P| + |N| + 2 = n + m + 2$ étant donné que l'approximation des sauts de petite taille entraînera la présence d'une partie diffusive et donc une volatilité $\sigma > 0$.

Pour résoudre l'équation $\psi(s) = a$, il suffit de trouver les racines du polynôme

$$p(s) - a q(s) = \gamma s q(s) + \frac{\sigma^2}{2} s^2 q(s) - (\lambda + a) q(s) + \lambda \sum_{i \in P} p_i \frac{\lambda_i q(s)}{\lambda_i - s} + \lambda \sum_{j \in N} p'_j \frac{\lambda'_j q(s)}{\lambda'_j + s}.$$

Ce polynôme a exactement $n + m + 2$ racines distinctes en application du théorème des valeurs intermédiaires.

En utilisant un résultat de Asmussen et al. (2005), la transformée de Laplace précédente s'écrit alors

$$E(e^{-a\tau_b}) = \sum_{k=1}^{n+1} A_k e^{-\rho_k b} \quad (2.11)$$

où ρ_k sont les racines positives de l'équation polynomiale précédente et

$$A_k = \frac{\prod_{i \in P} \left(1 - \frac{\rho_k}{\lambda_i}\right)}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} \left(1 - \frac{\rho_k}{\rho_l}\right)}.$$

En particulier, l'équation suivante permet de retrouver la probabilité du temps de premier passage grâce à l'inversion de cette transformée de Laplace

$$\int_0^{\infty} e^{-at} P(\tau_b < t) dt = \frac{1}{a} E(e^{-a\tau_b}). \quad (2.12)$$

2.2.2.2 Prise en compte de l'*overshoot*

Nous pouvons prendre en compte l'*overshoot*, définie comme la valeur du processus en excès en cas de saut à la barrière, par l'intermédiaire de l'espérance suivante :

$$E\left(e^{-a\tau_b} \mathbb{1}_{\{X_{\tau_b} - b > y\}}\right).$$

Notons \mathcal{G} le générateur infinitésimal du processus diffusif avec sauts hyper-exponentiels. Pour toute fonction f deux fois continûment dérivable, nous avons

$$\mathcal{G}f(x) = \frac{\sigma^2}{2} f''(x) + \gamma f'(x) + \int [f(x+t) - f(x)] u(t) dt$$

où u est la densité de Lévy de la composante de sauts définie à l'équation (2.5).

En adaptant le cheminement que Kou et Wang (2003) ont suivi pour les

processus diffusifs à sauts exponentiels doubles, si nous prenons

$$f(x) = E \left(e^{-a\tau_b} \mathbf{1}_{\{X_{\tau_b} - b > y\}} \right),$$

f va satisfaire l'équation $-a f(x) + \mathcal{G}f(x) = 0$ pour tout $x < b$, $f(x) = 0$ si $x \in [b, b + y[$ et $f(x) = 1$ si $x > b + y$. Ce résultat peut être vu comme une extension du théorème de Feynman-Kac standard à un processus diffusif avec sauts.

Il est proposé ici une solution explicite de la forme

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > b + y, \\ 0, & b < x \leq b + y, \\ \sum_{k=1}^{n+1} B_k e^{-\rho_k(b-x)}, & x \leq b, \end{cases} \quad (2.13)$$

où il reste à déterminer les $n + 1$ constantes B_k .

Avec l'hypothèse $x < b$ et $y > 0$, la partie intégrale du générateur infinitésimal s'écrit

$$\begin{aligned} \int f(x+t) u(t) dt &= \lambda \left[\int_{-\infty}^0 \sum_{k=1}^{n+1} B_k e^{-\rho_k(b-x-t)} \left(\sum_{j \in N} p'_j \lambda'_j e^{\lambda'_j t} \right) dt \right. \\ &\quad + \int_0^{b-x} \sum_{k=1}^{n+1} B_k e^{-\rho_k(b-x-t)} \left(\sum_{i \in P} p_i \lambda_i e^{-\lambda_i t} \right) dt \\ &\quad \left. + 0 + \int_{b-x+y}^{\infty} \left(\sum_{i \in P} p_i \lambda_i e^{-\lambda_i t} \right) dt \right] \\ &= \lambda \left[\sum_{k=1}^{n+1} B_k e^{-\rho_k(b-x)} \sum_{j \in N} \frac{p'_j \lambda'_j}{\lambda'_j + \rho_k} \right. \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n+1} B_k e^{-\rho_k(b-x)} \sum_{i \in P} \frac{p_i \lambda_i}{\lambda_i - \rho_k} (1 - e^{(\rho_k - \lambda_i)(b-x)}) \\ &\quad \left. + \sum_{i \in P} p_i e^{-\lambda_i(b-x+y)} \right] \end{aligned}$$

D'où il vient

$$\begin{aligned}
 & \int f(x+t) u(t) dt \\
 &= \lambda \left[\sum_{k=1}^{n+1} B_k e^{-\rho_k(b-x)} \sum_{j \in N} \frac{p'_j \lambda'_j}{\lambda'_j + \rho_k} + \sum_{k=1}^{n+1} B_k e^{-\rho_k(b-x)} \sum_{i \in P} \frac{p_i \lambda_i}{\lambda_i - \rho_k} \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{k=1}^{n+1} B_k \sum_{i \in P} e^{-\lambda_i(b-x)} \frac{p_i \lambda_i}{\lambda_i - \rho_k} + \sum_{i \in P} p_i e^{-\lambda_i(b-x)} e^{-\lambda_i y} \right] \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

Le calcul des dérivées première et seconde donne

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & b < x \\ \sum_{k=1}^{n+1} B_k \rho_k e^{-\rho_k(b-x)}, & x \leq b, \end{cases}$$

et

$$f''(x) = \begin{cases} 0, & b < x \\ \sum_{k=1}^{n+1} B_k \rho_k^2 e^{-\rho_k(b-x)}, & x \leq b. \end{cases}$$

Avec l'écriture de la partie intégrale donnée par (2.14), l'équation complète peut être reconstituée

$$\begin{aligned}
 & -a f(x) + \mathcal{G}f(x) \\
 &= -(a + \lambda) f(x) + \frac{\sigma^2}{2} f''(x) + \gamma f'(x) + \int_R f(x+t) u(t) dt \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} B_k e^{-\rho_k(b-x)} \left[\frac{\sigma^2}{2} \rho_k^2 + \gamma \rho_k + \lambda \left(\sum_{i \in P} \frac{p_i \lambda_i}{\lambda_i - \rho_k} + \sum_{j \in N} \frac{p'_j \lambda'_j}{\lambda'_j + \rho_k} - 1 \right) - a \right] \\
 & - \lambda \sum_{i \in P} p_i e^{-\lambda_i(b-x)} \left[\sum_{k=1}^{n+1} B_k \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \rho_k} - e^{-\lambda_i y} \right].
 \end{aligned}$$

Comme $\psi(\rho_k) - a = 0$ pour tout k , cette équation se résume au dernier terme. Avec la continuité de f en $x = b$, il vient finalement le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n+1} B_k = 0, \\ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \rho_k} B_k = e^{-\lambda_i y}, \forall i \in P, \end{cases} \quad (2.15)$$

ou de façon équivalente l'équation matricielle en $B = (B_1, \dots, B_{n+1})^T$:

$MB = L$ avec $L = (e^{-\lambda_1 y}, \dots, e^{-\lambda_n y}, 0)^T$ et

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \rho_1} & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \rho_2} & \cdots & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \rho_{n+1}} \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \rho_1} & \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \rho_2} & \cdots & \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \rho_{n+1}} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \rho_1} & \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \rho_2} & \cdots & \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \rho_{n+1}} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2.3 Défaut sur fonds propres

Au milieu des années 2000, de nouveaux produits dérivés hybrides entre les instruments sur fonds propres et les dérivés de crédit ont été introduits sur le marché de gré à gré. Ces produits sont très proches des *swaps* de défaut (Credit Default Swaps ou CDS) dans le mécanisme et la terminologie utilisée. Appelés *swaps* de défaut sur fonds propres (Equity Default Swaps ou EDS), ils permettent le transfert d'un risque de diminution importante de la valeur de ceux-ci. Cette diminution importante de valeur constitue le défaut sur fonds propres. Il signale aussi un potentiel défaut futur sur les lignes de crédit et obligataires de la société concernée. En tout état de cause, l'évènement qui déclenche la protection dans le cas des EDS est plus facilement et plus objectivement observable sur le marché que l'évènement de crédit qui sert de référence aux CDS.

2.2.3.1 Évaluation d'un Equity Default Swap

La structure de ces deux produits est par ailleurs très proche avec une jambe payeuse pour l'acheteur de la protection et une jambe receveuse pour le vendeur de la protection. La jambe receveuse se résume à un paiement unique, conditionnellement à la survenue de l'évènement de défaut sur fonds propres. Il correspond au temps de premier passage des fonds propres à moins d'un certain pourcentage D , typiquement $D = 30\%$, de leur valeur à l'initiation du contrat. De façon similaire aux CDS, le vendeur de l'EDS s'engage alors à payer $M(1 - R)$ où M est le montant notionnel sur lequel porte la protection et R est le taux de récupération défini par avance dans les termes du contrat. Cette terminologie vient directement des CDS où l'acheteur de la protection peut récupérer une certaine partie des fonds investis après la survenue de l'évènement de défaut.

En contrepartie de cette protection, l'acheteur de l'EDS effectue des paiements périodiques d'un coupon défini par le taux de *swap* ρ_{EDS} , jusqu'à la survenue de l'évènement de défaut ou que le contrat arrive à maturité. Typiquement, les coupons de la jambe payeuse sont payés semi-annuellement. À la date du défaut τ , le coupon couru est déduit du paiement effectué par le vendeur. Formellement, le temps de premier passage est défini de la façon suivante

$$\tau = \inf\{t \geq 0; S_t \leq D \times S_0\}$$

où S_t est la valeur de l'action observée sur le marché à l'instant t . La figure 2.1 donne le diagramme de flux associé à ce produit. Les flux en pointillé représentent les coupons qui ne sont plus à payer suite au défaut constaté sur les fonds propres. Il est à noter qu'il n'y a pas d'échange de flux à l'initiation du contrat.

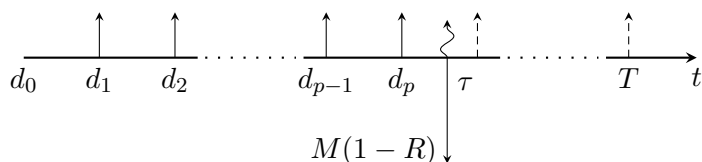


FIGURE 2.1 – Diagramme de flux d'un EDS

Notons par N le nombre de jours restant jusqu'à la maturité T de l'EDS. Avec la convention de $\Delta = 360$ jours pour un an, nous avons ainsi $N = \Delta \times T$ et pour le nombre de jours passés depuis la conception du contrat $n = \Delta \times t$, où t est le temps courant compté en années. Soit δ_n la fonction indicatrice de la survenue du défaut sur fonds propres avant le jour n . Elle est définie par $\delta_n = \mathbb{1}_{\{\tau \leq n/\Delta\}}$.

Le paiement effectué sur la jambe receveuse le jour n peut s'écrire comme

$$R_n = (\delta_n - \delta_{n-1}) \left[M(1 - R) - M\rho_{\text{EDS}} \frac{(n - d_{p(n)})}{\Delta} \right],$$

où $p(n)$ indique la dernière date de paiement de coupon juste avant le jour n . Le dernier terme tient compte du coupon couru jusqu'à la survenue du défaut en τ .

Il y a en tout P coupons sur la jambe payeuse jusqu'à maturité et ils sont effectués aux dates d_p avec $1 \leq p \leq P$. En notant d_0 l'instant initial, le

p^e paiement s'écrit

$$P_p = M\rho_{\text{EDS}} \frac{(d_p - d_{p-1})}{\Delta} (1 - \delta_{d_p}).$$

A l'initiation du contrat, sa valeur est nulle. La relation suivante peut alors être obtenue :

$$E_Q \left[R_n e^{-r \frac{n}{\Delta}} - P_p e^{-r \frac{d_p}{\Delta}} \right] = 0,$$

où r est le taux d'intérêt, supposé constant sur la période considérée.

En notant $\hat{q}(n) = E_Q[\delta_n]$ la probabilité du temps de premier passage qui peut être calculée grâce à l'équation (2.12), le taux de *swap* ρ_{EDS} que le vendeur de la protection doit exiger peut alors être calculé à partir de la formule suivante :

$$\rho_{\text{EDS}} = \frac{(1 - R) \sum_{n=1}^N [\hat{q}(n) - \hat{q}(n-1)] e^{-r \frac{n}{\Delta}}}{\sum_{p=1}^P [1 - \hat{q}(d_p)] \frac{(d_p - d_{p-1})}{\Delta} e^{-r \frac{d_p}{\Delta}} + \sum_{n=1}^N [\hat{q}(n) - \hat{q}(n-1)] \frac{(n - d_p(n))}{\Delta} e^{-r \frac{n}{\Delta}}} \quad (2.16)$$

2.2.3.2 Évaluation d'une Equity Default Option

L'option de défaut sur fonds propres (appelée Equity Default Option ou EDO dans toute la suite) est un produit dérivé qui permet à son acheteur de se protéger contre une baisse brutale du sous-jacent à l'instar d'une EDS mais sur un horizon beaucoup plus court, typiquement un an. Cette option pourrait ainsi servir d'instrument de couverture au vendeur d'une EDS sur la maturité résiduelle de cette dernière. Cette fois-ci, contre le paiement d'une prime P_{EDO} unique à l'initiation du contrat, l'acheteur de la protection reçoit à maturité $M(1 - R)$ où M est le montant notionnel du contrat et R le taux de récupération préalablement convenu entre les deux parties. La figure 2.2 récapitule le diagramme de flux de l'EDO.

La prime P_{EDO} peut être calculée comme suit :

$$P_{\text{EDO}} = E_Q \left[e^{-rT} M(1 - R) \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \right] = e^{-rT} M(1 - R) Q(\tau \leq T), \quad (2.17)$$

où, de nouveau, cette dernière probabilité peut être calculée en inversant la transformée de Laplace obtenue à l'équation (2.12).

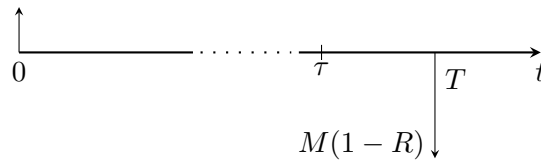


FIGURE 2.2 – Diagramme de flux d'une EDO

2.3 Options d'échange

Dans cette section, nous allons porter notre attention sur les options d'échange, étudiées par Margrabe (1978) dans le cadre de deux sous-jacents log-normaux. L'option d'échange donne le droit à son détenteur d'échanger à l'échéance un actif contre un autre. Soient S^1 et S^2 les processus de prix de ces deux actifs. Le payoff à l'échéance T de l'option de Margrabe s'écrit

$$C_T(S_T^1, S_T^2) = (S_T^2 - S_T^1)^+. \quad (2.18)$$

Comme le montrent Harrison et Pliska (1981), le marché étant supposé sans frictions et sans opportunité d'arbitrage implique l'existence d'une mesure risque-neutre sous laquelle la valeur de l'option s'écrit comme l'espérance actualisée au taux sans risque r du payoff à l'échéance. La valeur de l'option de Margrabe s'écrit ainsi

$$C_t(S_t^1, S_t^2) = E_Q[e^{-r\tau}(S_T^2 - S_T^1)^+ | \mathcal{F}_t], \quad (2.19)$$

où Q est la mesure risque-neutre d'évaluation, $\tau = T - t$ est le temps restant avant échéance et \mathcal{F}_t représente l'information disponible à l'instant t . Dans toute la suite, les calculs sont menés pour l'instant $t = 0$ et les calculs d'espérance se font sous la mesure Q sauf mention du contraire. Il est à rappeler que sorti du cadre gaussien de Black, Scholes et Merton, la mesure risque-neutre d'évaluation n'est plus unique. Nous supposons que la mesure d'évaluation est donnée, après calibrage sur les données de marché par exemple (voir à ce sujet Cont et Tankov (2004b)).

2.3.1 Les deux actifs ont des sauts de taille constante

Dans un premier temps, considérons que les deux actifs suivent chacun un processus diffusif avec des sauts de taille constante.

L'actif S^1 vérifie sous la mesure risque-neutre Q l'équation différentielle stochastique

$$\frac{dS_t^1}{S_{t-}^1} = (r - \lambda\kappa_1) dt + \sigma_1 dW_t + (Y_1 - 1) dN_t$$

où N est un processus de Poisson d'intensité λ et par ailleurs indépendant du mouvement brownien standard W . La taille des sauts est ici supposée constante et égale à $Y_1 = e^{J_1} > 0$ et $\kappa_1 = Y_1 - 1$.

L'actif S^2 vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dS_t^2}{S_{t-}^2} = (r - \lambda\kappa_2) dt + \sigma_2 dW'_t + (Y_2 - 1) dN_t,$$

avec une taille de sauts constante égale à $Y_2 = e^{J_2} > 0$, $\kappa_2 = Y_2 - 1$ et N indépendant de W' , un mouvement brownien standard qui est corrélé avec W par $d\langle W, W' \rangle_t = \rho dt$.

La décorrélation de ces mouvements browniens donne le système d'équations différentielles stochastiques suivant :

$$\frac{dS_t^1}{S_{t-}^1} = (r - \lambda\kappa_1) dt + \sigma_1 dW_t + (Y_1 - 1) dN_t \quad (2.20)$$

$$\frac{dS_t^2}{S_{t-}^2} = (r - \lambda\kappa_2) dt + \rho\sigma_2 dW_t + \sigma_2\sqrt{1 - \rho^2} dZ_t + (Y_2 - 1) dN_t, \quad (2.21)$$

où cette fois-ci, $d\langle W, Z \rangle_t = 0$.

2.3.1.1 Calculs préliminaires

Le lemme d'Itô pour l'inverse de l'actif S^1 s'écrit :

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{S_t^1}\right) &= -\frac{1}{(S_t^1)^2} \left((r - \lambda\kappa_1) S_t^1 dt + \sigma_1 S_t^1 dW_t \right) + \frac{\sigma_1^2 (S_t^1)^2}{(S_t^1)^3} dt \\ &\quad + \left(\frac{1}{S_t^1} - \frac{1}{S_{t-}^1} \right) dN_t \quad (\text{partie sauts}) \\ &= -\frac{1}{S_t^1} \left((r - \lambda\kappa_1) dt + \sigma_1 dW_t \right) + \frac{\sigma_1^2}{S_t^1} dt + \left(\frac{S_{t-}^1 - S_t^1}{S_{t-}^1 S_t^1} \right) dN_t \\ d\left(\frac{1}{S_t^1}\right) &= \frac{1}{S_t^1} (\sigma_1^2 - r + \lambda\kappa_1) dt - \frac{\sigma_1}{S_t^1} dW_t - \frac{\Delta S_t^1}{S_{t-}^1 S_t^1} dN_t, \end{aligned} \quad (2.22)$$

où $\Delta S_t^1 = S_t^1 - S_{t^-}^1$ est le saut qui survient à l'instant t .

Par ailleurs, la règle de différentiation d'Itô permet de calculer :

$$d\left(\frac{S_t^2}{S_t^1}\right) = S_{t^-}^2 d\left(\frac{1}{S_t^1}\right) + \frac{1}{S_t^1} dS_t^2 + d\left[\frac{1}{S_t^1}, S_t^2\right]$$

avec la covariation qui s'écrit :

$$d\left[\frac{1}{S_t^1}, S_t^2\right] = -\rho\sigma_1\sigma_2 \frac{S_t^2}{S_t^1} dt - \frac{\Delta S_t^1}{S_{t^-}^1 S_t^1} \Delta S_t^2 dN_t$$

D'où nous pouvons déduire l'équation différentielle stochastique vérifiée par S^2/S^1 :

$$\begin{aligned} \frac{d(S_t^2/S_t^1)}{S_{t^-}^2/S_{t^-}^1} &= \frac{S_{t^-}^1}{S_{t^-}^2} \left(S_{t^-}^2 d\left(\frac{1}{S_t^1}\right) + \frac{1}{S_t^1} dS_t^2 + d\left[\frac{1}{S_t^1}, S_t^2\right] \right) \\ &= S_{t^-}^1 d\left(\frac{1}{S_t^1}\right) + \frac{dS_t^2}{S_{t^-}^2} + \frac{S_{t^-}^1}{S_{t^-}^2} d\left[\frac{1}{S_t^1}, S_t^2\right] \\ &= (\sigma_1^2 - r + \lambda\kappa_1) dt - \sigma_1 dW_t - \frac{\Delta S_t^1}{S_t^1} dN_t \\ &\quad + (r - \lambda\kappa_2) dt + \rho\sigma_2 dW_t + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t + \frac{\Delta S_t^2}{S_{t^-}^2} dN_t \\ &\quad - \rho\sigma_1\sigma_2 dt - \frac{\Delta S_t^1}{S_t^1} \frac{\Delta S_t^2}{S_{t^-}^2} dN_t \\ \frac{d(S_t^2/S_t^1)}{S_{t^-}^2/S_{t^-}^1} &= \left(\sigma_1^2 + \lambda(\kappa_1 - \kappa_2) - \rho\sigma_1\sigma_2 \right) dt \\ &\quad + (\rho\sigma_2 - \sigma_1) dW_t + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t + \left(\frac{Y_2}{Y_1} - 1 \right) dN_t. \end{aligned} \quad (2.23)$$

En appliquant le lemme d'Itô, la dynamique de S^2/S^1 vient :

$$\frac{S_t^2}{S_t^1} = \frac{S_0^2}{S_0^1} e^{\left(\lambda(\kappa_1 - \kappa_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)\right)t + (\rho\sigma_2 - \sigma_1)W_t + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} Z_t + \ln\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right) \times N_t} \quad (2.24)$$

2.3.1.2 Évaluation de l'option d'échange

L'équation (2.19) s'écrit à l'instant $t = 0$:

$$\begin{aligned} C_0(S_0^1, S_0^2) &= E_Q[e^{-r\tau}(S_T^2 - S_T^1)^+] \\ &= E_Q\left[e^{-r\tau} S_T^2 \mathbb{1}_{\{S_T^2 > S_T^1\}}\right] - E_Q\left[e^{-r\tau} S_T^1 \mathbb{1}_{\{S_T^2 > S_T^1\}}\right] \end{aligned}$$

et par un changement de numéraire que nous allons préciser :

$$\begin{aligned} &= S_0^2 E_{Q_{S^2}} \left[\mathbf{1}_{\{S_T^2 > S_T^1\}} \right] - S_0^1 E_{Q_{S^1}} \left[\mathbf{1}_{\{S_T^2 > S_T^1\}} \right] \\ C_0(S_0^1, S_0^2) &= S_0^2 Q_{S^2} (S_T^2 > S_T^1) - S_0^1 Q_{S^1} (S_T^2 > S_T^1), \end{aligned} \quad (2.25)$$

où les probabilités Q_{S^1} et Q_{S^2} sont définies par rapport à la mesure risque-neutre de la manière suivante :

$$\frac{dQ_{S^1}}{dQ} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \frac{S_T^1}{S_0^1} e^{-rT} \quad (2.26a)$$

$$\frac{dQ_{S^2}}{dQ} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \frac{S_T^2}{S_0^2} e^{-rT} \quad (2.26b)$$

Pour déterminer ces densités de Radon-Nikodym, nous avons besoin des dynamiques de S^1 et de S^2 . Une application directe du lemme d'Itô à l'équation (2.20) donne la dynamique de S^1 qui apparaît alors comme l'exponentielle d'un processus de Lévy :

$$S_t^1 = S_0^1 e^{(r - \lambda \kappa_1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2) t + \sigma_1 W_t + J_1 \times N_t}, \quad (2.27)$$

tandis que la dynamique de S^2 s'écrit :

$$S_t^2 = S_0^2 e^{(r - \lambda \kappa_2 - \frac{1}{2} \sigma_2^2) t + \rho \sigma_2 W_t + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} Z_t + J_2 \times N_t}. \quad (2.28)$$

où, pour rappel, $Y_1 = e^{J_1}$ et $Y_2 = e^{J_2}$.

Il vient alors des équations (2.26a) et (2.27) que

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{S^1}}{dQ} \Big|_{\mathcal{F}_T} &= e^{(-\lambda \kappa_1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2) T + \sigma_1 W_T + J_1 \times N_T} \\ &= e^{-\frac{1}{2} \sigma_1^2 T + \sigma_1 W_T} \times e^{J_1 \times N_T - \lambda \kappa_1 T} \\ \frac{dQ_{S^1}}{dQ} \Big|_{\mathcal{F}_T} &= L_T^1 \end{aligned}$$

où L^1 est le processus solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dL_t^1}{L_{t^-}^1} = \sigma_1 dW_t + (Y_1 - 1) d\tilde{N}_t, \quad L_0^1 = 1$$

avec \tilde{N} le processus de Poisson N compensé.

D'après le théorème de Girsanov, $W'_t = W_t - \sigma_1 t$, $Z'_t = Z_t$ sont des

mouvements browniens standards indépendants et $N'_t = \tilde{N}_t - \lambda(Y_1 - 1)t$ est un processus de Poisson compensé sous la mesure Q_{S^1} associée au numéraire S^1 . De fait, il s'en déduit que N est un processus de Poisson avec intensité λY_1 sous Q_{S^1} .

Sous la mesure Q_{S^1} , la dynamique de S^2/S^1 s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{S_t^2}{S_t^1} &= \frac{S_0^2}{S_0^1} e^{\left(\lambda(Y_1 - Y_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)\right)t + (\rho\sigma_2 - \sigma_1)(W'_t + \sigma_1 t) + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} Z'_t + \ln\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right) \times N_t} \\ &= \frac{S_0^2}{S_0^1} e^{\left(\lambda(Y_1 - Y_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \rho\sigma_1\sigma_2\right)t + (\rho\sigma_2 - \sigma_1)W'_t + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} Z'_t + \ln\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right) \times N_t} \end{aligned}$$

et en posant $\tilde{\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$:

$$\frac{S_t^2}{S_t^1} = \frac{S_0^2}{S_0^1} e^{\left(\lambda(Y_1 - Y_2) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\right)t + \tilde{\sigma}\tilde{W}_t + \ln\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right) \times N_t} \quad (2.29)$$

où \tilde{W} est un mouvement brownien standard sous Q_{S^1} .

La probabilité figurant dans le deuxième terme de l'équation (2.25) peut alors être calculée :

$$\begin{aligned} &Q_{S^1}(S_T^2 > S_T^1) \\ &= Q_{S^1}\left(\frac{S_T^2}{S_T^1} > 1\right) \\ &= Q_{S^1}\left(\frac{S_0^2}{S_0^1} e^{\left(\lambda(Y_1 - Y_2) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\right)T + \tilde{\sigma}\tilde{W}_T + \ln\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right) \times N_T} > 1\right) \end{aligned}$$

puis, en conditionnant par le nombre de sauts survenus jusqu'à l'échéance :

$$\begin{aligned} &= \sum_{n \geq 0} Q_{S^1}(N_T = n) Q_{S^1}\left(\frac{S_0^2}{S_0^1} e^{\left(\lambda(Y_1 - Y_2) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\right)T + \tilde{\sigma}\tilde{W}_T + n \ln\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)} > 1\right) \\ &= \sum_{n \geq 0} Q_{S^1}(N_T = n) Q_{S^1}\left(\tilde{\sigma}\tilde{W}_T > \ln\left(\frac{S_0^1}{S_0^2}\right) - (\lambda(Y_1 - Y_2) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)T - n \ln\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)\right) \end{aligned}$$

Finalement, en posant

$$d_n = \frac{1}{\tilde{\sigma}\sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{S_0^1}{S_0^2}\right) + \lambda(Y_1 - Y_2)T - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 T + n \ln\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right) \right), \quad (2.30)$$

nous avons

$$Q_{S^1}(S_T^2 > S_T^1)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda Y_1 T} \frac{(\lambda Y_1 T)^n}{n!} Q_{S^1}(\tilde{W}_T > -\sqrt{T} d_n) \\
 &= \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda Y_1 T} \frac{(\lambda Y_1 T)^n}{n!} N(d_n)
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

où N est la fonction de répartition d'une loi gaussienne centrée réduite.

Par ailleurs, les équations (2.26b) et (2.28) montrent que

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ_{S^2}}{dQ} \Big|_{\mathcal{F}_T} &= e^{(-\lambda \kappa_2 - \frac{1}{2} \sigma_2^2) T + \rho \sigma_2 W_T + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} Z_T + J_2 \times N_T} \\
 &= e^{-\frac{1}{2} \sigma_2^2 T + \rho \sigma_2 W_T + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} Z_T} \times e^{J_2 \times N_T - \lambda \kappa_2 T} \\
 \frac{dQ_{S^2}}{dQ} \Big|_{\mathcal{F}_T} &= L_T^2
 \end{aligned}$$

où L^2 est la solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dL_t^2}{L_{t-}^2} = \rho \sigma_2 dW_t + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t + (Y_2 - 1) d\tilde{N}_t, \quad L_0^2 = 1$$

avec \tilde{N} le processus de Poisson N compensé.

Cette fois-ci, le théorème de Girsanov stipule que $W'_t = W_t - \rho \sigma_2 t$, $Z'_t = Z_t - \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} t$ sont des mouvements browniens standards indépendants et $N'_t = \tilde{N}_t - \lambda(Y_2 - 1)t$ est un processus de Poisson compensé sous la mesure Q_{S^2} associée au numéraire S^2 . En particulier, N est un processus de Poisson d'intensité λY_2 sous Q_{S^2} .

La dynamique de S^2/S^1 s'écrit alors sous la mesure Q_{S^2} :

$$\begin{aligned}
 \frac{S_t^2}{S_t^1} &= \frac{S_0^2}{S_0^1} e^{(\lambda(Y_1 - Y_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)) t + (\rho \sigma_2 - \sigma_1)(W'_t + \rho \sigma_2 t) + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} (Z'_t + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} t)} \\
 &\quad \times e^{\ln\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right) \times N_t} \\
 &= \frac{S_0^2}{S_0^1} e^{(\lambda(Y_1 - Y_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \rho \sigma_1 \sigma_2) t + (\rho \sigma_2 - \sigma_1) W'_t + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} Z'_t + \ln\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right) \times N_t}
 \end{aligned}$$

et toujours avec $\tilde{\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2}$:

$$\frac{S_t^2}{S_t^1} = \frac{S_0^2}{S_0^1} e^{(\lambda(Y_1 - Y_2) + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2) t + \tilde{\sigma} \tilde{W}_t + \ln\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right) \times N_t} \tag{2.32}$$

où \tilde{W} est, cette fois-ci, un mouvement brownien standard sous Q_{S^2} .

La probabilité sous Q_{S^2} de l'équation (2.25) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 & Q_{S^2}(S_T^2 > S_T^1) \\
 &= Q_{S^2}\left(\frac{S_T^2}{S_T^1} > 1\right) \\
 &= Q_{S^2}\left(\frac{S_0^2}{S_0^1} e^{(\lambda(Y_1 - Y_2) + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)T + \tilde{\sigma}\tilde{W}_T + \ln\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right) \times N_T} > 1\right) \tag{2.33}
 \end{aligned}$$

puis, de nouveau en conditionnant par le nombre de sauts N_T survenus :

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n \geq 0} Q_{S^2}(N_T = n) Q_{S^2}\left(\frac{S_0^2}{S_0^1} e^{(\lambda(Y_1 - Y_2) + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)T + \tilde{\sigma}\tilde{W}_T + n \ln\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)} > 1\right) \\
 &= \sum_{n \geq 0} Q_{S^2}(N_T = n) Q_{S^2}\left(\tilde{\sigma}\tilde{W}_T > \ln\left(\frac{S_0^1}{S_0^2}\right) - (\lambda(Y_1 - Y_2) + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)T - n \ln\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)\right) \\
 &= \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda Y_2 T} \frac{(\lambda Y_2 T)^n}{n!} Q_{S^2}\left(\tilde{W}_T > -\sqrt{T}(d_n + \tilde{\sigma}\sqrt{T})\right) \\
 &= \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda Y_2 T} \frac{(\lambda Y_2 T)^n}{n!} N(d_n + \tilde{\sigma}\sqrt{T}) \tag{2.34}
 \end{aligned}$$

Dans le cas de sous-jacents représentés avec des processus diffusifs avec des sauts de taille constante, nous avons alors, grâce aux équations (2.25), (2.31) et (2.34), la formule semi-explicite suivante pour une option de Margrabe :

$$\begin{aligned}
 C_0(S_0^1, S_0^2) &= S_0^2 \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda Y_2 T} \frac{(\lambda Y_2 T)^n}{n!} N(d_n + \tilde{\sigma}\sqrt{T}) \\
 &\quad - S_0^1 \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda Y_1 T} \frac{(\lambda Y_1 T)^n}{n!} N(d_n), \tag{2.35}
 \end{aligned}$$

où, pour rappel,

$$d_n = \frac{1}{\tilde{\sigma}\sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{S_0^2}{S_0^1}\right) + \lambda(Y_1 - Y_2)T - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 T + n \ln\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right) \right).$$

2.3.1.3 Résultats numériques et discussion

Dans le cas où la taille de sauts des deux sous-jacents est la même, c'est-à-dire $Y_1 = Y_2 > 0$, la formule précédente (2.35) se ramène à la formule d'évaluation d'une option de Margrabe dans le cas Black, Scholes et Merton :

$$C_0(S_0^1, S_0^2) = S_0^2 N(d_{BS} + \tilde{\sigma}\sqrt{T}) - S_0^1 N(d_{BS}), \tag{2.36}$$

où

$$d_{BS} = \frac{1}{\tilde{\sigma}\sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{S_0^2}{S_0^1}\right) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 T \right).$$

Nous retrouvons aussi cette formule d'évaluation (2.36) dans le cas où le processus de Poisson a une intensité $\lambda = 0$. Il est à remarquer que le taux d'intérêt r n'intervient ni dans cette formule ni dans la formule (2.35) tenant en compte les sauts de taille constante puisque dans ce produit dérivé, c'est la performance relative des deux actifs qui importe.

Dans ce qui suit, les paramètres suivants ont été utilisés pour les deux actifs considérés. Le prix initial des deux sous-jacents est respectivement de $S_0^1 = 100$ et de $S_0^2 = 110$. Leur partie diffusible a été fixée à $\sigma_1^2 = 0.22$ et $\sigma_2^2 = 0.18$. Le temps restant avant échéance de l'option est de $\tau = 1$.

Les figures 2.3 et 2.4 montrent la sensibilité du prix de l'option d'échange en fonction du coefficient de corrélation ρ . L'intensité du processus de Poisson gouvernant les sauts est $\lambda = 1$. La taille des sauts de l'actif à échanger S^1 est fixée à $Y_1 = 1.25$. Les prix d'option calculés sur la figure 2.3 correspondent à une taille des sauts de l'actif S^2 inférieure à celle des sauts de S^1 tandis que la figure 2.4 présente les prix calculés pour une taille des sauts de S^2 supérieure à celle des sauts de S^1 .

Le trait continu représente le prix de cette option d'échange dans le cadre uniquement diffusif de Black, Scholes et Merton. Ces figures montrent que la non prise en compte des sauts sous-évalue le prix de cette option dans le cadre de Black, Scholes et Merton et cela d'autant plus que les tailles de sauts diffèrent.

2.3.2 Un mouvement brownien contre un processus diffusif avec sauts

Dans cette section, nous considérons que sous la mesure risque-neutre Q , l'actif S^1 suit un processus diffusif classique de Black, Scholes et Merton, avec un taux de dividende continu δ_1

$$\frac{dS_t^1}{S_t^1} = (r - \delta_1) dt + \sigma_1 dW_t$$

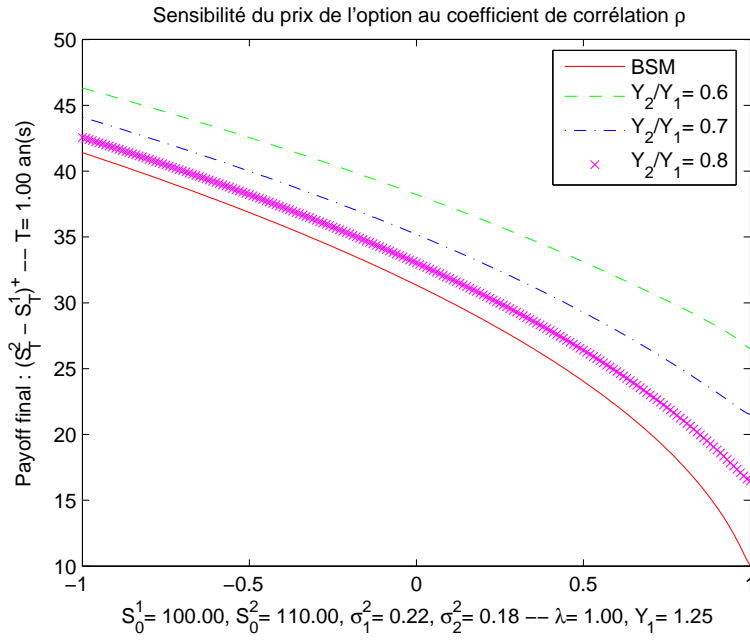


FIGURE 2.3 – Sensibilité d’une option de Margrabe au coefficient de corrélation ρ – Rapport des tailles de sauts $Y_2/Y_1 < 1$.

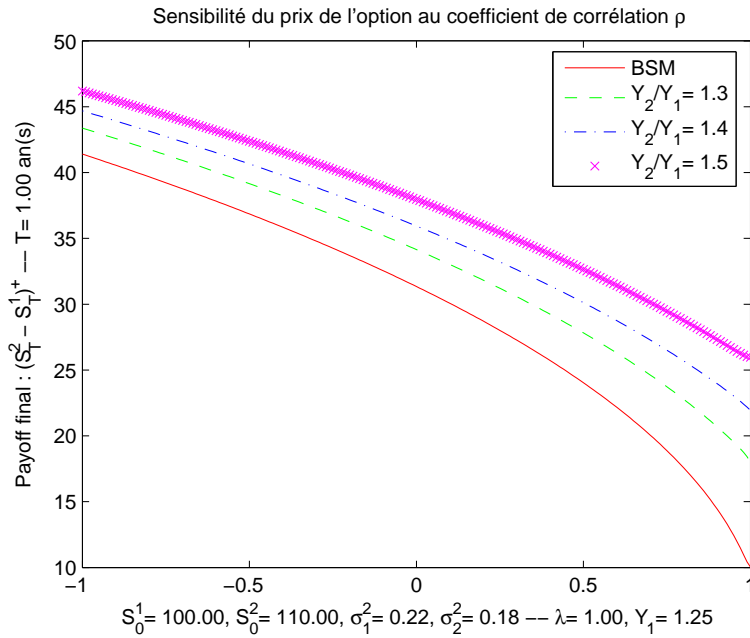


FIGURE 2.4 – Sensibilité d’une option de Margrabe au coefficient de corrélation ρ – Rapport des tailles de sauts $Y_2/Y_1 > 1$.

où W est un mouvement brownien standard sous Q et que l'actif S^2 suive un processus diffusif avec sauts et délivre un dividende continu de taux δ_2 :

$$\frac{dS_t^2}{S_{t^-}^2} = (r - \delta_2 - \lambda\kappa_2) dt + \rho\sigma_2 dW_t + \sigma_2\sqrt{1 - \rho^2} dZ_t + (Y_2 - 1) dN_t,$$

où Z est un autre mouvement brownien standard tel que $d\langle W, Z \rangle_t = 0$ et N est un processus de Poisson d'intensité λ indépendant des deux précédents mouvements browniens. Cette fois, la taille des sauts Y_2 est une variable aléatoire indépendante de ces processus avec $\kappa_2 = E(Y_2 - 1)$.

2.3.2.1 Calculs préliminaires

L'inverse de l'actif S^1 s'écrit à l'aide du lemme d'Itô :

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{S_t^1}\right) &= -\frac{1}{(S_t^1)^2} \left((r - \delta_1)S_t^1 dt + \sigma_1 S_t^1 dW_t \right) + \frac{\sigma_1^2 (S_t^1)^2}{(S_t^1)^3} dt \\ &= -\frac{1}{S_t^1} \left((r - \delta_1) dt + \sigma_1 dW_t \right) + \frac{\sigma_1^2}{S_t^1} dt \\ d\left(\frac{1}{S_t^1}\right) &= \frac{1}{S_t^1} (\sigma_1^2 - (r - \delta_1)) dt - \frac{\sigma_1}{S_t^1} dW_t. \end{aligned} \quad (2.37)$$

La covariation entre $\frac{1}{S_t^1}$ et S_t^2 s'écrit :

$$d\left[\frac{1}{S_t^1}, S_t^2\right] = -\rho\sigma_1\sigma_2 \frac{S_t^2}{S_t^1} dt.$$

L'équation différentielle stochastique vérifiée par S^2/S^1 s'en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{d(S_t^2/S_t^1)}{S_{t^-}^2/S_{t^-}^1} &= \frac{S_{t^-}^1}{S_{t^-}^2} \left(S_{t^-}^2 d\left(\frac{1}{S_t^1}\right) + \frac{1}{S_t^1} dS_t^2 + d\left[\frac{1}{S_t^1}, S_t^2\right] \right) \\ &= S_{t^-}^1 d\left(\frac{1}{S_t^1}\right) + \frac{dS_t^2}{S_{t^-}^2} + \frac{S_{t^-}^1}{S_{t^-}^2} d\left[\frac{1}{S_t^1}, S_t^2\right] \\ &= (\sigma_1^2 - (r - \delta_1)) dt - \sigma_1 dW_t \\ &\quad + (r - \delta_2 - \lambda\kappa_2) dt + \rho\sigma_2 dW_t + \sigma_2\sqrt{1 - \rho^2} dZ_t + \frac{\Delta S_t^2}{S_{t^-}^2} dN_t \\ &\quad - \rho\sigma_1\sigma_2 dt \\ \frac{d(S_t^2/S_t^1)}{S_{t^-}^2/S_{t^-}^1} &= \left((\delta_1 - \delta_2) + \sigma_1^2 - \lambda\kappa_2 - \rho\sigma_1\sigma_2 \right) dt \end{aligned}$$

$$+ (\rho\sigma_2 - \sigma_1)dW_t + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}dZ_t + (Y_2 - 1)dN_t. \quad (2.38)$$

Le lemme d'Itô permet alors de retrouver la dynamique de S^2/S^1 sous Q :

$$\frac{S_t^2}{S_t^1} = \frac{S_0^2}{S_0^1} e^{((\delta_1 - \delta_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - \lambda\kappa_2)t + (\rho\sigma_2 - \sigma_1)W_t + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}Z_t + \sum_{i=1}^{N_t} \ln((Y_2)_i)}. \quad (2.39)$$

La dynamique de S^1 s'écrit par ailleurs comme

$$S_t^1 = S_0^1 e^{(r - \delta_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)t + \sigma_1 W_t}, \quad (2.40)$$

tandis que celle de S^2 s'écrit :

$$S_t^2 = S_0^2 e^{(r - \delta_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2 - \lambda\kappa_2)t + \rho\sigma_2 W_t + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}Z_t + \sum_{i=1}^{N_t} \ln((Y_2)_i)}. \quad (2.41)$$

Pour tenir compte des dividendes, le changement de probabilité (2.26a) associé au numéraire S^1 devient ici :

$$\frac{dQ_{S^1}}{dQ} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \frac{S_T^1}{S_0^1} e^{-(r - \delta_1)T}$$

ce qui donne :

$$\frac{dQ_{S^1}}{dQ} \Big|_{\mathcal{F}_T} = e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 T + \sigma_1 W_T} = L_T^1,$$

où L^1 est solution de l'équation différentielle stochastique

$$\frac{dL_t^1}{L_t^1} = \sigma_1 dW_t.$$

D'après le théorème de Girsanov, seul le processus W change sous la nouvelle mesure Q_{S^1} tel que $W'_t = W_t - \sigma_1 t$ est un mouvement brownien standard sous Q_{S^1} . La dynamique de S^2/S^1 s'écrit alors sous la mesure associée au numéraire S^1 :

$$\frac{S_t^2}{S_t^1} = \frac{S_0^2}{S_0^1} e^{((\delta_1 - \delta_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - \lambda\kappa_2)t + (\rho\sigma_2 - \sigma_1)(W'_t + \sigma_1 t) + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}Z_t + \sum_{i=1}^{N_t} \ln((Y_2)_i)}$$

$$= \frac{S_0^2}{S_0^1} e^{((\delta_1 - \delta_2) + \rho\sigma_1\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \lambda\kappa_2)t + (\rho\sigma_2 - \sigma_1)W_t' + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}Z_t + \sum_{i=1}^{N_t} \ln((Y_2)_i)}$$

et en posant $\tilde{\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$:

$$\frac{S_t^2}{S_t^1} = \frac{S_0^2}{S_0^1} e^{((\delta_1 - \delta_2) - \lambda\kappa_2 - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)t + \tilde{\sigma}\tilde{W}_t + \sum_{i=1}^{N_t} \ln((Y_2)_i)} \quad (2.42)$$

où \tilde{W} est un mouvement brownien standard sous Q_{S^1} .

Le changement de numéraire (2.26b) associé à S^2 s'écrit en tenant compte des dividendes :

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{S^2}}{dQ} \Big|_{\mathcal{F}_T} &= \frac{S_T^2}{S_0^2} e^{-(r-\delta_2)T} \\ &= e^{(-\frac{1}{2}\sigma_2^2 - \lambda\kappa_2)T + \rho\sigma_2 W_T + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}Z_T + \sum_{i=1}^{N_T} \ln((Y_2)_i)} \\ &= e^{-\frac{1}{2}\sigma_2^2 T + \rho\sigma_2 W_T + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}Z_T} e^{\sum_{i=1}^{N_T} \ln((Y_2)_i) - \lambda\kappa_2 T} \\ \frac{dQ_{S^2}}{dQ} \Big|_{\mathcal{F}_T} &= e^{-\frac{1}{2}\sigma_2^2 T + \rho\sigma_2 W_T + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}Z_T} e^{R_T}, \end{aligned}$$

où R_T est l'exposant de l'exponentielle de droite.

Cette fois-ci, le calcul de l'exposant de Laplace de la partie exponentielle de la dynamique (2.39) sous Q_{S^2} va nous permettre de retrouver ses caractéristiques sous cette nouvelle mesure.

Ainsi, en notant l'exposant de cette partie exponentielle par

$$\begin{aligned} L_t &= \left((\delta_1 - \delta_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - \lambda\kappa_2 \right) t + (\rho\sigma_2 - \sigma_1)W_t + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}Z_t \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_t} \ln((Y_2)_i), \end{aligned}$$

lequel peut se réécrire

$$L_t = \left((\delta_1 - \delta_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \right) t + (\rho\sigma_2 - \sigma_1)W_t + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}Z_t + R_t,$$

il vient :

$$E_{Q_{S^2}}[e^{sL_t}] = E_Q \left[\frac{dQ_{S^2}}{dQ} \Big|_{\mathcal{F}_t} e^{sL_t} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= E_Q \left[e^{-\frac{1}{2}\sigma_2^2 t + \rho\sigma_2 W_t + \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} Z_t} e^{Rt} e^{sL_t} \right] \\
 &= E_Q \left[e^{s(\delta_1 - \delta_2)t + \frac{1}{2}s(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)t - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t + [(s+1)\rho\sigma_2 - s\sigma_1]W_t + (s+1)\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} Z_t} \right] \\
 &\quad \times E_Q \left[e^{(s+1)Rt} \right] \\
 &= e^{t\left((\delta_1 - \delta_2)s + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)s + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)s^2\right)} E_Q \left[e^{(s+1)Rt} \right] \\
 E_{Q_{S^2}} \left[e^{sL_t} \right] &= e^{t\left((\delta_1 - \delta_2)s + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 s + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 s^2\right)} e^{t\psi_R(s+1)}, \tag{2.43}
 \end{aligned}$$

où, pour rappel, $\tilde{\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$ et $\psi_R(s)$ est l'exposant de Laplace sous Q de la composante de sauts.

2.3.2.2 Approche probabiliste

À l'instant $t = 0$, l'équation (2.19) se ramène à :

$$C_0(S_0^1, S_0^2) = E_Q[e^{-r\tau}(S_T^2 - S_T^1)^+].$$

Les changements de numéraire qui précèdent permettent de trouver la formule d'évaluation suivante, à comparer avec la formule (2.25) qui ne tient pas compte des dividendes :

$$C_0(S_0^1, S_0^2) = S_0^2 e^{-\delta_2\tau} Q_{S^2}(S_T^2 > S_T^1) - S_0^1 e^{-\delta_1\tau} Q_{S^1}(S_T^2 > S_T^1). \tag{2.44}$$

Sauts gaussiens

Dans le cas où la taille des sauts $J_2 = \ln(Y_2)$ suit une loi gaussienne de moyenne μ_J et de variance σ_J^2 , l'exposant de Laplace de la composante de sauts R_t s'écrit

$$\psi_R(s) = -\lambda\kappa_2 s + \lambda \left(e^{\mu_J s + \frac{1}{2}\sigma_J^2 s^2} - 1 \right),$$

où, pour rappel, $\kappa_2 = E(Y_2 - 1) = e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1 = e^\gamma - 1$.

Cela nous permet de trouver les caractéristiques de la dynamique de sauts sous Q_{S^2} . En effet,

$$\begin{aligned}
 \psi_R(s+1) &= -\lambda\kappa_2(s+1) + \lambda \left(e^{\mu_J(s+1) + \frac{1}{2}\sigma_J^2(s+1)^2} - 1 \right) \\
 &= -\lambda\kappa_2(s+1) + \lambda \left(e^{(\mu_J + \sigma_J^2)s + \frac{1}{2}\sigma_J^2 s^2} e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1 \right) \\
 &= -\lambda\kappa_2(s+1) + \lambda \left(e^{(\mu_J + \sigma_J^2)s + \frac{1}{2}\sigma_J^2 s^2} (1 + \kappa_2) - 1 \right)
 \end{aligned}$$

$$\psi_R(s+1) = -\lambda\kappa_2 s + \hat{\lambda} \left(e^{\hat{\mu}_J s + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_J^2 s^2} - 1 \right), \quad (2.45)$$

où $\hat{\lambda} = \lambda(1 + \kappa_2)$ est l'intensité du processus de Poisson N sous la nouvelle mesure, la taille des sauts suivant toujours une loi gaussienne avec la même variance $\hat{\sigma}_J^2 = \sigma_J^2$ mais de moyenne $\hat{\mu}_J = \mu_J + \sigma_J^2$.

Le premier terme de la formule d'évaluation de l'option d'échange s'écrit :

$$\begin{aligned} S_0^2 e^{-\delta_2 \tau} Q_{S^2}(S_T^2 > S_T^1) &= S_0^2 e^{-\delta_2 \tau} Q_{S^2} \left(\frac{S_0^2}{S_0^1} e^{L_T} > 1 \right) \\ &= S_0^2 e^{-\delta_2 \tau} Q_{S^2} \left(L_T > \ln \left(\frac{S_0^1}{S_0^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Or, il est facile d'établir avec les équations (2.43) et (2.45) que sous la mesure Q_{S^2} ,

$$L_T = \left((\delta_1 - \delta_2) - \lambda\kappa_2 + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 \right) T + \tilde{\sigma} \tilde{W}_T + \sum_{i=1}^{N_T} \hat{J}_i$$

où $\tilde{\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$, \tilde{W} est un mouvement brownien standard sous Q_{S^2} , N est un processus de Poisson d'intensité $\hat{\lambda} = \lambda(1 + \kappa_2)$ et la taille des sauts \hat{J}_i suit une loi gaussienne de moyenne $\hat{\mu}_J$ et de variance σ_J^2 .

Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned} Q_{S^2}(S_T^2 > S_T^1) &= Q_{S^2} \left(\left[(\delta_1 - \delta_2) - \lambda\kappa_2 + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 \right] T + \tilde{\sigma} \tilde{W}_T + \sum_{i=1}^{N_T} \hat{J}_i > \ln \left(\frac{S_0^1}{S_0^2} \right) \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} Q_{S^2}(N_T = n) Q_{S^2} \left(\left[(\delta_1 - \delta_2) - \lambda\kappa_2 + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 \right] T + \tilde{\sigma} \tilde{W}_T + \sum_{i=1}^n \hat{J}_i > \ln \left(\frac{S_0^1}{S_0^2} \right) \right) \end{aligned}$$

Et puisque $\sum_{i=1}^n \hat{J}_i$ suit une loi gaussienne d'espérance $n\hat{\mu}_J$ et de variance totale $n\sigma_J^2$:

$$\begin{aligned} Q_{S^2}(S_T^2 > S_T^1) &= \sum_{n \geq 0} e^{-\hat{\lambda} T} \frac{\hat{\lambda}^n}{n!} Q_{S^2} \left(\left[(\delta_1 - \delta_2) - \lambda\kappa_2 + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 \right] T + n\hat{\mu}_J + \tilde{\sigma}_n \tilde{W}_T > \ln \left(\frac{S_0^1}{S_0^2} \right) \right) \end{aligned}$$

où $\tilde{\sigma}_n^2 = \tilde{\sigma}^2 + n \frac{\sigma_J^2}{T}$

$$= \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda T} \frac{\lambda^n}{n!} Q_{S^2} \left(\left(\frac{n}{T} (\mu_J + \frac{1}{2} \sigma_J^2) + (\delta_1 - \delta_2) - \lambda \kappa_2 + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_n^2 \right) T + \tilde{\sigma}_n \tilde{W}_T > \ln \left(\frac{S_0^1}{S_0^2} \right) \right).$$

En posant

$$\tilde{d}_n = \frac{1}{\tilde{\sigma}_n \sqrt{T}} \left(\ln \left(\frac{S_0^2}{S_0^1} \right) + \left(\frac{n\gamma}{T} + (\delta_1 - \delta_2) - \lambda \kappa_2 + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_n^2 \right) T \right) \quad (2.46)$$

où, pour rappel, $\gamma = \mu_J + \frac{1}{2} \sigma_J^2$, le terme de gauche de la formule d'évaluation s'écrit

$$S_0^2 e^{-\delta_2 T} Q_{S^2}(S_T^2 > S_T^1) = S_0^2 e^{-\delta_2 T} \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda T} \frac{\lambda^n}{n!} N(\tilde{d}_n) \quad (2.47)$$

où N est la fonction de répartition d'une loi gaussienne centrée réduite.

Pour le deuxième terme, l'équation (2.42) nous donne directement les caractéristiques de L_T sous la mesure Q_{S^1} . En effet,

$$L_T = [(\delta_1 - \delta_2) - \lambda \kappa_2 - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2] T + \tilde{\sigma} \tilde{W}_t + \sum_{i=1}^{N_T} J_i$$

où $\tilde{\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$, \tilde{W} est un mouvement brownien standard sous Q_{S^1} , N est un processus de Poisson d'intensité λ et la taille des sauts J_i suit une loi gaussienne de moyenne μ_J et de variance σ_J^2 .

Il en découle que :

$$\begin{aligned} Q_{S^1}(S_T^2 > S_T^1) &= Q_{S^1} \left(\left[(\delta_1 - \delta_2) - \lambda \kappa_2 - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 \right] T + \tilde{\sigma} \tilde{W}_T + \sum_{i=1}^{N_T} J_i > \ln \left(\frac{S_0^1}{S_0^2} \right) \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} Q_{S^1}(N_T = n) Q_{S^1} \left(\left[(\delta_1 - \delta_2) - \lambda \kappa_2 - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 \right] T + \tilde{\sigma} \tilde{W}_T + \sum_{i=1}^n J_i > \ln \left(\frac{S_0^1}{S_0^2} \right) \right) \end{aligned}$$

Comme $\sum_{i=1}^n J_i$ suit une loi gaussienne de moyenne $n\mu_J$ et de variance $n\sigma_J^2$:

$$\begin{aligned} Q_{S^1}(S_T^2 > S_T^1) &= \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda T} \frac{\lambda^n}{n!} Q_{S^1} \left(\left[(\delta_1 - \delta_2) - \lambda \kappa_2 - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 \right] T + n\mu_J + \tilde{\sigma}_n \tilde{W}_T > \ln \left(\frac{S_0^1}{S_0^2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda T} \frac{\lambda^n}{n!} Q_{S^1} \left(\left(\frac{n}{T} (\mu_J + \frac{1}{2} \sigma_J^2) + (\delta_1 - \delta_2) - \lambda \kappa_2 + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_n^2 \right) T + \tilde{\sigma}_n \tilde{W}_T > \ln \left(\frac{S_0^1}{S_0^2} \right) \right).$$

Le terme de droite de la formule d'évaluation devient alors :

$$S_0^1 e^{-\delta_1 \tau} Q_{S^1} (S_T^2 > S_T^1) = S_0^1 e^{-\delta_1 \tau} \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda T} \frac{\lambda^n}{n!} N(\tilde{d}_n - \tilde{\sigma}_n \sqrt{T}). \quad (2.48)$$

En regroupant les équations (2.47) et (2.48), nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} C_0(S_0^1, S_0^2) &= S_0^2 e^{-\delta_2 \tau} \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda T} \frac{\lambda^n}{n!} N(\tilde{d}_n) - S_0^1 e^{-\delta_1 \tau} \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda T} \frac{\lambda^n}{n!} N(\tilde{d}_n - \tilde{\sigma}_n \sqrt{T}) \\ &= \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda T} \frac{\lambda^n}{n!} \left(S_0^2 e^{-\delta_2 \tau} N(\tilde{d}_n) - S_0^1 e^{-\delta_1 \tau} e^{\lambda \kappa_2 T} e^{-n\gamma} N(\tilde{d}_n - \tilde{\sigma}_n \sqrt{T}) \right) \\ C_0(S_0^1, S_0^2) &= \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda T} \frac{\lambda^n}{n!} C(S_0^2, S_0^1, T, \delta_1 - \lambda \kappa_2 + \frac{n\gamma}{T}, \delta_2, \tilde{\sigma}_n^2), \end{aligned} \quad (2.49)$$

où $C(S, K, \tau, r, \delta, \sigma^2)$ est le prix Black et Scholes d'une option européenne d'achat sur un sous-jacent de valeur S , distribuant des dividendes avec un taux δ et de volatilité σ , avec un prix d'exercice K et un temps restant avant échéance τ .

Dans le cas où les deux sous-jacents ne distribuent pas de dividendes sur la durée de vie de l'option, il est à remarquer avec l'équation (2.49) que le prix de l'option d'échange d'un sous-jacent brownien contre un sous-jacent diffusif avec sauts gaussiens est égal au prix d'une option européenne d'achat dans le modèle de Merton avec la valeur du sous-jacent brownien S_0^1 comme prix d'exercice, et en prenant un taux d'intérêt nul et une volatilité $\tilde{\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$ (cf. équation (1.14) au chapitre 1).

Sauts exponentiels doubles

La taille des sauts $J_2 = \ln(Y_2)$ suit ici une loi exponentielle double et l'exposant de Laplace de la composante de sauts s'écrit

$$\psi_R(s) = -\lambda \kappa_2 s + \lambda \left(\frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - s} + \frac{q\lambda_2}{\lambda_2 + s} - 1 \right),$$

où pour rappel, $\kappa_2 = E(Y_2 - 1) = \frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - 1} + \frac{q\lambda_2}{\lambda_2 + 1} - 1$, $\lambda_1 > 1$, $\lambda_2 > 0$, $p > 0$, $q > 0$ et $p + q = 1$.

Nous avons alors les caractéristiques de la composante de sauts sous Q_{S^2} grâce à l'expression de $\psi_R(s + 1)$.

En effet,

$$\begin{aligned}
 \psi_R(s+1) &= -\lambda\kappa_2(s+1) + \lambda\left(\frac{p\lambda_1}{\lambda_1-s-1} + \frac{q\lambda_2}{\lambda_2+s+1} - 1\right) \\
 &= -\lambda\kappa_2s + \lambda\left(\frac{p\lambda_1}{\lambda_1-1} \frac{\lambda_1-1}{(\lambda_1-1)-s} + \frac{q\lambda_2}{\lambda_2+1} \frac{\lambda_2+1}{(\lambda_2+1)+s} - (1+\kappa_2)\right) \\
 &= -\lambda\kappa_2s + \hat{\lambda}\left(\frac{\hat{p}\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_1-s} + \frac{\hat{q}\hat{\lambda}_2}{\hat{\lambda}_2+s} - 1\right), \tag{2.50}
 \end{aligned}$$

où $\hat{\lambda} = \lambda(1+\kappa_2)$, $\hat{\lambda}_1 = \lambda_1 - 1$, $\hat{\lambda}_2 = \lambda_2 + 1$, $\hat{p} = \frac{p\lambda_1}{(1+\kappa_2)(\lambda_1-1)}$ et $\hat{q} = 1 - \hat{p}$.

Donc sous la nouvelle mesure Q_{S^2} , avec les équations (2.43) et (2.50), L est de nouveau un processus diffusif avec sauts exponentiels doubles. Or, comme nous l'avons rappelé avec l'équation (1.20) au chapitre précédent, les deux probabilités entrant en jeu dans la formule d'évaluation de l'option d'échange peuvent être calculées par la fonction Υ donnée par Kou (2002). Ainsi,

$$P(X_t \geq a) = \Upsilon(\gamma', \sigma, \lambda, p, \lambda_1, \lambda_2, a, t)$$

si sous la probabilité P , $X_t = \gamma't + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} J_i$ où la taille des sauts J suit une loi exponentielle double.

À partir de l'équation (2.44), il vient

$$\begin{aligned}
 C_0(S_0^1, S_0^2) &= S_0^2 e^{-\delta_2 \tau} Q_{S^2}(S_T^2 > S_T^1) - S_0^1 e^{-\delta_1 \tau} Q_{S^1}(S_T^2 > S_T^1) \\
 &= S_0^2 e^{-\delta_2 \tau} Q_{S^2}\left(\frac{S_0^2}{S_0^1} e^{L_T} > 1\right) - S_0^1 e^{-\delta_1 \tau} Q_{S^1}\left(\frac{S_0^2}{S_0^1} e^{L_T} > 1\right) \\
 &= S_0^2 e^{-\delta_2 \tau} Q_{S^2}\left(L_T > \ln\left(\frac{S_0^1}{S_0^2}\right)\right) - S_0^1 e^{-\delta_1 \tau} Q_{S^1}\left(L_T > \ln\left(\frac{S_0^1}{S_0^2}\right)\right)
 \end{aligned}$$

et en terme de fonctions Υ :

$$\begin{aligned}
 C_0(S_0^1, S_0^2) &= S_0^2 e^{-\delta_2 \tau} \Upsilon\left((\delta_1 - \delta_2) + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 - \lambda\kappa_2, \tilde{\sigma}, \hat{\lambda}, \hat{p}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ln\left(\frac{S_0^1}{S_0^2}\right), T\right) \\
 &\quad - S_0^1 e^{-\delta_1 \tau} \Upsilon\left((\delta_1 - \delta_2) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 - \lambda\kappa_2, \tilde{\sigma}, \lambda, p, \lambda_1, \lambda_2, \ln\left(\frac{S_0^1}{S_0^2}\right), T\right). \tag{2.51}
 \end{aligned}$$

La figure 2.5 compare le prix d'une option d'échange dans le cadre classique de Black et Scholes (trait continu) à celui d'une option d'échange d'un sous-jacent log-normal contre un sous-jacent dont la dynamique suit le mo-

dèle de Kou. Les mêmes paramètres que précédemment ont été conservé, mis à part l'ajout d'une composante de sauts caractérisés par une probabilité de sauts positifs $p = 0.3$, $\lambda_1 = 10$ et $\lambda_2 = 5$.

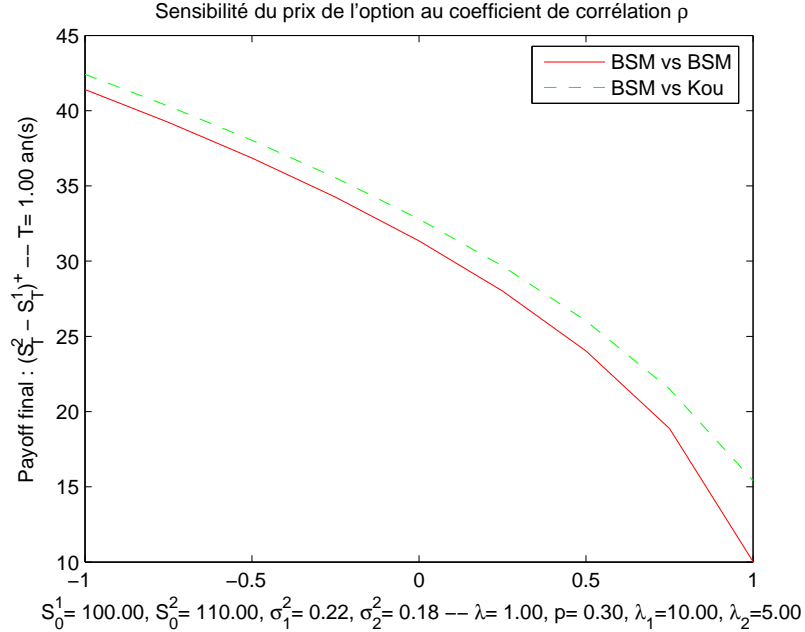


FIGURE 2.5 – Option d'échange d'un mouvement brownien contre un processus diffusif avec sauts exponentiels doubles

En rapprochant l'équation (2.51) de la formule (1.21) du chapitre 1, nous pouvons conclure que le prix de l'option d'échange d'un sous-jacent brownien contre un actif suivant un processus diffusif avec sauts de Kou est égal au prix d'une option européenne d'achat dans le modèle de Kou avec la valeur du premier sous-jacent S_0^1 comme prix d'exercice, en prenant un taux d'intérêt nul et une volatilité $\tilde{\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$ pour la partie diffusive.

Les observations effectuées dans les deux cas que nous venons d'étudier nous incitent à suivre l'approche par transformée de Fourier rapide qui va nous permettre comme dans le chapitre précédent d'améliorer le temps de calcul de ces formules d'évaluation.

2.3.2.3 Approche par transformée de Fourier généralisée

En prenant la mesure Q_{S^1} comme nouvelle mesure d'évaluation, le changement de numéraire nous donne alors :

$$\begin{aligned} C_0(S_0^1, S_0^2) &= E_Q[e^{-r\tau}(S_T^2 - S_T^1)^+] \\ &= E_{Q_{S^1}} \left[\frac{S_0^1}{S_T^1} e^{-\delta_1\tau} (S_T^2 - S_T^1)^+ \right] \\ C_0(S_0^1, S_0^2) &= S_0^1 e^{-\delta_1\tau} E_{Q_{S^1}} \left[\left(\frac{S_T^2}{S_T^1} - 1 \right)^+ \right]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

La partie sous l'espérance est un payoff de type européen, ce qui nous permet de réutiliser la machinerie mise en place dans le chapitre 1. En particulier, nous avons ici le même payoff d'une option européenne d'achat $g(X_T) = (S_0 e^{X_T} - K)^+$ avec $S_0 = \frac{S_0^2}{S_0^1}$, $X_T = L_T$ et $K = 1$.

D'après les calculs menés auparavant, la transformée de Fourier généralisée de $g(x)$ s'écrit

$$\hat{g}(u) = \frac{K e^{-iu \ln(K/S_0)}}{(-iu)(-iu+1)} = \frac{e^{-iu \ln(S_0^1/S_0^2)}}{(-iu)(-iu+1)},$$

avec la condition $\Im u = \delta < -1$.

Il vient

$$C_0(S_0^1, S_0^2) = S_0^1 e^{-\delta_1\tau} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} E_{Q_{S^1}}[e^{iuX_T}] \hat{g}(u) du.$$

L'espérance figurant sous l'intégrale s'écrit

$$E_{Q_{S^1}}[e^{iuX_T}] = E_{Q_{S^1}}[e^{iuL_T}] = e^{-T\psi(u)}$$

où $\psi(u)$ est l'exposant caractéristique sous la mesure Q_{S^1} du processus L .

Il en ressort que

$$\begin{aligned} C_0(S_0^1, S_0^2) &= S_0^1 e^{-\delta_1\tau} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{-T\psi(u)} \hat{g}(u) du \\ &= S_0^1 e^{-\delta_1\tau} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{-T\psi(u)} \frac{e^{-iu \ln(S_0^1/S_0^2)}}{(-iu)(-iu+1)} du \end{aligned}$$

$$C_0(S_0^1, S_0^2) = S_0^1 e^{-\delta_1 \tau} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{iux} \frac{e^{-T\psi(u)}}{(-iu)(-iu+1)} du, \quad (2.53)$$

où $x = \ln(S_0^2/S_0^1)$.

Le changement de variable $u \rightarrow u + i\delta$ permet d'obtenir

$$C_0(S_0^1, S_0^2) = S_0^1 e^{-\delta_1 \tau} e^{-\delta x} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} \frac{e^{-T\psi(u+i\delta)}}{(-iu+\delta)(-iu+\delta+1)} du.$$

Elle se ramène à la forme suivante qui se prête naturellement à une implémentation numérique par transformée de Fourier rapide :

$$C_0(S_0^1, S_0^2) = S_0^1 e^{-\delta_1 \tau} R(x, \delta) \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixu} \Psi(u, \delta) du$$

où $R(x, \delta) = e^{-\delta x}$ et $\Psi(u, \delta) = \frac{e^{-T\psi(u+i\delta)}}{(-iu+\delta)(-iu+\delta+1)}$.

Il reste alors à spécifier l'exposant caractéristique $\psi(u)$ selon les caractéristiques de L_T . Or, d'après l'équation (2.42), sous la mesure Q_{S^1} ,

$$L_t = ((\delta_1 - \delta_2) - \lambda\kappa_2 - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2) t + \tilde{\sigma} \tilde{W}_t + \sum_{i=1}^{N_t} (J_2)_i$$

où $\tilde{\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$ et \tilde{W} est un mouvement brownien standard sous Q_{S^1} .

Voici selon le cas l'expression de cet exposant caractéristique :

– si la taille des sauts suit une loi gaussienne,

$$\psi(u) = -i((\delta_1 - \delta_2) - \lambda\kappa_2 - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)u + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 u^2 - \lambda \left(e^{i\mu_J u - \frac{1}{2}\sigma_J^2 u^2} - 1 \right);$$

– si la taille des sauts suit une loi exponentielle double,

$$\psi(u) = -i((\delta_1 - \delta_2) - \lambda\kappa_2 - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)u + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 u^2 - \lambda \left(\frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - iu} + \frac{q\lambda_2}{\lambda_2 + iu} - 1 \right);$$

– si la taille des sauts suit une loi exponentielle multiple,

$$\psi(u) = -i((\delta_1 - \delta_2) - \lambda\kappa_2 - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)u + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 u^2 - \lambda \left(\sum_{i \in P} \frac{p_i \lambda_i}{\lambda_i - iu} + \sum_{i \in N} \frac{p_i \lambda_i}{\lambda_i + iu} - 1 \right).$$

2.3.3 Rémunération par stock options indexées

Un problème important pour une entreprise est la rémunération adéquate de ses cadres dirigeants et, en particulier, de leur performance. Un moyen généralement utilisé par les entreprises est l'octroi d'une partie en options, appelées communément *stock options*, dans leur rémunération. À part les options européennes à la monnaie classiques, Johnson et Tian (2000b) ont exploré plusieurs *stock options* moins traditionnelles ainsi que les effets incitatifs qu'elles permettent d'obtenir.

Dans cette section, nous verrons plus particulièrement les *stock options* indexées sur une valeur de référence introduites par Johnson et Tian (2000a). Par rapport aux *stock options* traditionnelles, celles-ci permettent de distinguer plus précisément la performance du cadre dirigeant de celle de la valeur de référence qui peut être calculée à partir d'un indice de marché ou d'un indice spécifique au secteur d'activité de l'entreprise.

2.3.3.1 Dynamiques suivies

Contrairement à Johnson et Tian (2000a), nous utiliserons un processus diffusif avec sauts pour modéliser la valeur de marché de l'entreprise. En effet, il nous semble plus raisonnable de prendre en compte dans le modèle l'asymétrie d'information entre l'actionnaire et son mandataire. Les éventuelles contre-performances soudaines de ce dernier seront en particulier reflétées par la composante des sauts incorporée dans le modèle. De nouveau, comme dans la section précédente, nous supposons que la mesure risque-neutre d'évaluation Q a été choisie.

L'indice de référence est supposé suivre la dynamique suivante dans l'univers risque-neutre

$$\frac{dI_t}{I_t} = (r - \delta_I) dt + \sigma_I dW_t$$

où W est un mouvement brownien standard, δ_I est son taux de dividende continu et σ_I sa volatilité instantanée.

La valeur de marché de l'entreprise S , supposée délivrer un dividende continu δ_S , obéit à l'équation différentielle stochastique suivante

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = (r - \delta_S - \lambda\kappa) dt + \rho\sigma_S dW_t + \sigma_S \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t + (Y - 1) dN_t, \quad (2.54)$$

où Z est un mouvement brownien standard indépendant de W , ρ le coeffi-

cient de corrélation entre le rendement des deux actifs et σ_S est la volatilité instantanée du rendement de l'actif S . N est un processus de Poisson d'intensité λ indépendant des deux précédents mouvements browniens. La taille des sauts est modélisée par la variable aléatoire Y indépendante des précédents processus et d'espérance $\kappa = E(Y - 1)$.

Suivant Johnson et Tian (2000a), nous utiliserons un indice de référence synthétique H par rapport à la valeur duquel la performance des dirigeants sera jugée. Il est construit à partir de l'indice de référence I comme suit :

$$H_t = S_0 \left(\frac{I_t}{I_0} \right)^\beta e^{\eta t}, \quad (2.55)$$

où $\beta = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_I}$, qui est similaire à la définition du β utilisée dans le cadre du modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF) de Sharpe (1964), Lintner (1965) et Mossin (1966), et

$$\eta = (r - \delta_S) - \beta(r - \delta_I) + \frac{1}{2}\rho\sigma_S\sigma_I(1 - \beta). \quad (2.56)$$

Le lemme d'Itô permet d'obtenir à partir de la définition (2.55) la dynamique de la valeur de référence dans l'univers risque-neutre :

$$\frac{dH_t}{H_t} = (r - \delta_S) dt + \rho\sigma_S dW_t. \quad (2.57)$$

Remarquons ici que nonobstant l'influence des sauts, le rendement espéré sur la valeur de référence est la même que celui la valeur de l'entreprise.

2.3.3.2 Évaluation des stock options indexées

La *stock option* indexée peut alors être vue comme une option d'échange : si les résultats de l'entreprise sont suffisants, le dirigeant exercera son option et recevra la différence entre la valeur de l'entreprise et la valeur de référence à l'échéance.

Formellement, la valeur à l'échéance T de la *stock option* indexée s'écrit

$$(S_T - H_T)^+.$$

Cette option s'évalue au moment de leur octroi comme les options d'échange dont nous avons vu l'évaluation dans la section précédente. Nous allons faire usage des formules (2.52) et (2.53) obtenues avec l'approche par transformée

de Fourier généralisée qui y est exposée. En particulier, la valeur de référence H se substituera à l'actif S^1 tandis que le processus de prix S remplacera dans ces formules le processus S^2 . Par ailleurs, l'exposant caractéristique qui intervient dans l'équation (2.53) s'écrit

$$\psi(u) = -i(-\lambda\kappa - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)u + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2u^2 - \lambda \left(\frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - iu} + \frac{q\lambda_2}{\lambda_2 + iu} - 1 \right)$$

avec

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma_S^2(1 - \rho^2). \quad (2.58)$$

Ni le niveau réel des taux d'intérêt ni le taux de dividende servi par la firme n'entrent plus en ligne de compte dans l'évaluation de la *stock option* indexée. Nous voyons ici que la valeur de référence synthétique H est construite de telle manière à enlever tout impact des facteurs communs sur la rétribution finale obtenue par les dirigeants grâce aux *stock options* indexées.

2.3.3.3 Analyse des résultats

La *stock option* indexée octroyée peut être exercée au bout de 10 ans. Sauf mention du contraire, la valeur initiale de la firme vaudra $S = 100$. Le cas du modèle de Black, Scholes et Merton avec les paramètres utilisés par Johnson et Tian (2000a) va nous servir de point de comparaison, à savoir une volatilité pour le rendement de la firme égale à $\sigma = 0.20$. Par ailleurs, la volatilité de l'indice de référence I est égale à $\sigma_I = 0.15$. La corrélation entre l'indice et la valeur de l'entreprise est fixée à $\rho = 0.75$ sauf mention du contraire. Ce choix de corrélation correspond à un choix du coefficient $\beta = 1$. Les taux de dividende sur la firme et l'indice sont supposés égaux à $\delta_S = \delta_I = 0.02$.

Dans le cas de la représentation du rendement de la valeur de la firme par un processus diffusif à sauts exponentiels doubles de Kou, la probabilité d'un saut vers le haut a été fixée à $p = 0.3$. Ce choix met l'accent sur une probabilité plus élevée de constater des contre-performances pour l'entreprise. Les paramètres des deux variables aléatoires de loi exponentielle représentant respectivement les sauts vers le haut et vers le bas sont respectivement de $\lambda_1 = 10$ et $\lambda_2 = 5$. La valeur de la volatilité de la partie diffusive du processus de prix de la firme a été à chaque fois choisie de manière à ce

TABLE 2.2 – Volatilité σ de la partie diffusive en fonction de l'intensité λ du processus de Poisson de la composante de sauts. La variation quadratique totale est constante et égale à celle du cas Black, Scholes et Merton.

Modèle	Taux λ	Volatilité σ
BSM	0	0.2000
	0.2	0.1661
Kou	0.3	0.1463
	0.4	0.1233
	0.5	0.0949
	0.6	0.0529

que la variation quadratique totale du processus soit égale à la variation (σ^2) du cas Black, Scholes et Merton. Le tableau 2.2 donne les valeurs de la volatilité utilisées en fonction du taux d'arrivée des sauts λ . Ainsi avec l'augmentation de la variation quadratique de la composante de sauts due à la montée du taux d'arrivée des sauts vient mécaniquement la diminution de la volatilité contribuant à la variation quadratique due à la composante diffusive du processus de Kou.

Nous montrons à la figure 2.6 la valeur de la *stock option* indexée en fonction de la corrélation entre l'indice de référence et la valeur de l'entreprise. Nous mettons aussi en exergue l'impact du choix de modèle pour la valeur de l'entreprise et, en particulier, l'influence du taux d'arrivée des sauts dans le cas du modèle diffusif et sauts. Il est à noter par ailleurs que la corrélation ρ intervient dans l'évaluation de la *stock option* indexée au travers de la quantité $\tilde{\sigma}$ définie à l'équation (2.58). La valeur de la *stock option* indexée est symétrique par rapport à la valeur maximale de la *stock option* indexée, valeur maximale obtenue quand la valeur de l'entreprise et l'indice ne sont pas corrélés. Les dirigeants ont ainsi une forte incitation à diminuer la corrélation en valeur absolue vers zéro. Rapprocher la corrélation de zéro traduit une augmentation de la performance spécifique à l'entreprise, ce qui entraîne une augmentation de la valeur de la *stock option* indexée. Comme le rappellent Johnson et Tian (2000a), une *stock option* indexée devrait inciter le dirigeant à choisir le projet qui a la plus petite corrélation avec le rendement de l'indice de référence si deux projets d'investissement par ailleurs identiques se présentaient à lui. Nous voyons ici que ce constat fait dans le

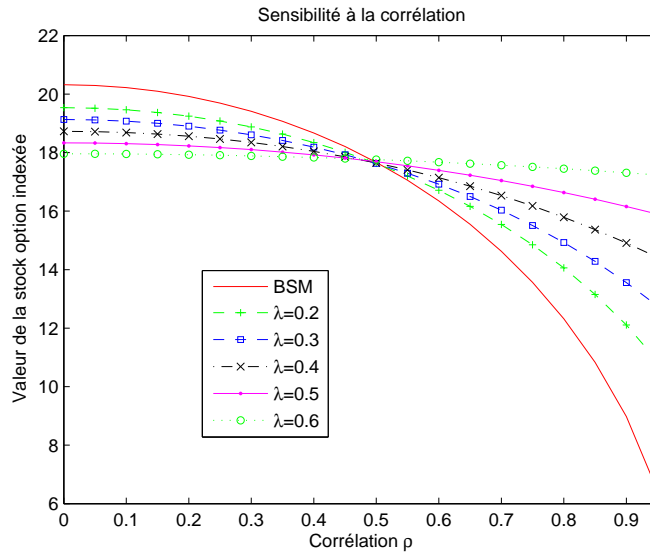


FIGURE 2.6 – Valeur de la *stock option* indexée en fonction de la corrélation ρ entre la valeur de la firme et l'indice de référence. Comparaison du cas Black, Scholes et Merton et du cas Kou pour le rendement de la firme et en faisant varier l'intensité λ du processus de Poisson de la composante de sauts.

cadre du modèle de Black, Scholes et Merton pour la valeur de l'entreprise tient encore quand nous y ajoutons une composante de sauts.

Un autre phénomène qui apparaît cependant sur la figure 2.6 est la présence de deux motifs distincts : les valeurs de la *stock option* indexée en présence de sauts sont inférieures à la valeur obtenue dans le cas diffusif uniquement pour une corrélation inférieure à 0.5 et réciproquement. Plus l'intensité du processus de Poisson qui intervient dans la composante de sauts augmente et plus ce phénomène se renforce. Si les valeurs de la *stock option* indexée restent proches pour une corrélation inférieure à 0.5, sa valeur descend très fortement par rapport aux valeurs obtenues en présence de sauts au fur et à mesure de l'augmentation de la corrélation. La présence des sauts tend à maintenir la valeur de la *stock option* indexée en dépit de la corrélation. Pour un taux d'arrivée de sauts $\lambda = 0.6$, la valeur de la *stock option* indexée a perdu peu de valeur même avec une corrélation qui s'approche de l'unité.

La figure 2.7 montre deux panneaux avec sur le panneau du haut la valeur de la *stock option* indexée en fonction de la valeur initiale de la firme

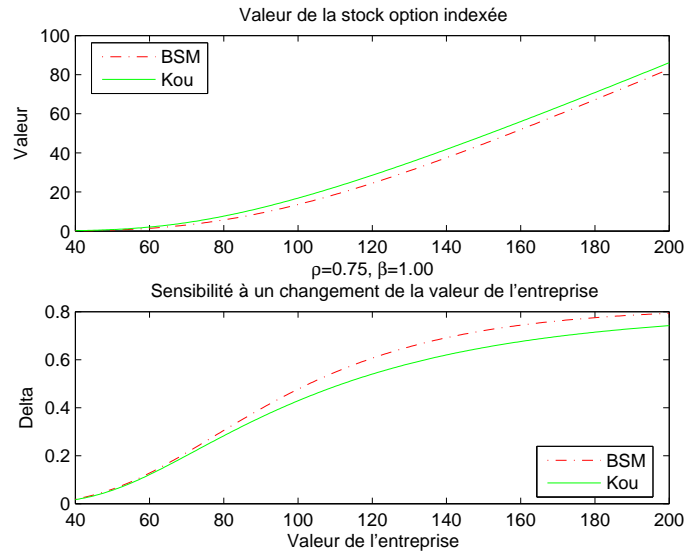


FIGURE 2.7 – Sensibilité de la *stock option* indexée à un changement de la valeur de la firme. Comparaison du cas Black, Scholes et Merton (BSM) et du cas Kou avec une intensité du processus de Poisson $\lambda = 0.5$. La valeur du delta dans le cas Kou est ajustée de manière à tenir compte de la différence entre les valeurs des *stock options* indexées dans les deux cas.

tout en maintenant la valeur initiale de la référence synthétique à $H_0 = 100$, selon le modèle diffusif classique ou le modèle mixte de Kou. La corrélation a été fixée à $\rho = 0.75$ et les variations quadratiques totales des deux modèles restent égales. Le panneau du bas compare la sensibilité au changement de la valeur de l'entreprise, notée Δ , dans les deux modèles. Dans le cas du modèle diffusif, cette sensibilité est obtenue classiquement avec une formule fermée similaire à la grecque delta des options européennes traditionnelles (voir par exemple Johnson et Tian (2000a)) tandis qu'elle a été obtenue numériquement pour le cas du modèle de Kou sur un changement de la valeur de la firme de 10 points de base. La courbe affichée dans le cas du modèle de Kou a été ajustée de manière à tenir compte de la différence des valeurs de la *stock option* indexée dans les deux cas. Le delta de la *stock option* indexée mesure l'accroissement de la richesse du dirigeant quand la valeur de l'entreprise augmente. Nous voyons que si la valeur de la *stock option* indexée est plus forte dans le cadre du modèle de Kou, le delta de l'option est par contre moins élevé. Si nous considérons le cas diffusif simple

comme l'information disponible aux actionnaires, l'effet incitatif perçu par le dirigeant peut se révéler plus faible.

Conclusion

Ce chapitre nous a permis de voir les conséquences des discontinuités dans les trajectoires de sauts sur l'évaluation des options exotiques, en particulier l'impact sur les produits financiers de défauts sur fonds propres. Nous avons aussi pu étudier en détails l'influence de la prise en compte des sauts sur la valeur des options d'échange. À notre connaissance, il n'y a aucun résultat dans ce sens dans la littérature. Ces résultats sur les options d'échange trouvent alors une application privilégiée dans le cadre du problème de l'intéressement des dirigeants par des *stock options* indexées.

Par ailleurs, les options d'échange étudiées dans ce chapitre vont nous fournir une autre application dans le cadre des produits d'assurance-vie analysés dans le prochain chapitre.

Deuxième partie

Assurance-vie et théorie de
la ruine

Chapitre 3

Évaluation de contrats d'assurance-vie

Introduction

Parmi les contrats d'assurance-vie proposés par les compagnies d'assurance figurent les contrats dits à annuités variables. Ils sont connus sous diverses appellations comme *variable annuities* aux États-Unis, *segregated funds* au Canada, *unit-linked contracts* au Royaume-Uni et contrats en unité de compte avec garantie en France. Ils sont particulièrement demandés aux États-Unis et au Royaume-Uni pour leur fiscalité privilégiée. Ces contrats se trouvent de plus en plus à la frontière entre les produits d'investissement financier purs et les contrats d'assurance classiques. Ces polices d'assurance-vie présentent une composante actuarielle et une composante financière. La première est reliée à l'aléa sur la durée de vie de l'assuré tandis que la seconde est souvent liée à l'investissement des fonds recueillis sur les marchés financiers. Ces contrats offrent généralement une protection du capital investi et une participation à la performance du marché. Ils répondent aux besoins des investisseurs d'obtenir une protection en cas de marché baissier et une participation aux bénéfices en cas de marché haussier. Une caractéristique importante est aussi qu'ils sont exempts de droits de succession. La conception de la partie financière peut être très complexe et rend ces contrats similaires à certains produits structurés vendus par les banques. Diverses polices d'assurance comportant ces caractéristiques sont proposées aux investisseurs (voir par exemple Hardy (2003) ou Milevsky (2006)).

Les contrats d'assurance-vie peuvent être classés en assurance en cas de vie et en assurance en cas de décès. Une assurance en cas de vie permet à l'assuré de recevoir une certaine somme (capital ou rente) s'il est encore en vie à l'échéance du contrat. Nous verrons un exemple de ce type de produit avec l'évaluation d'un contrat avec une garantie flexible en cas de vie (PEFG¹) plus loin dans ce chapitre. Une assurance en cas de décès garantit le versement d'un capital ou d'une rente au bénéficiaire à la mort de l'assuré. En ce sens, ce type d'assurance constitue une prévoyance décès. Un contrat particulier sera étudié ici, le contrat à bénéfice minimum garanti en cas de décès (GMDB²) émis par les compagnies d'assurance. Il fait partie de la classe des *variable annuities* aux États-Unis et y représente un marché de plusieurs milliards de dollars. Une large part de ce chapitre sera consacrée à l'étude du juste prix de la garantie incorporée dans ce contrat.

En ce qui concerne la modélisation des cours dans le domaine de l'assurance-vie, Hardy (2003) a proposé l'utilisation des modèles à changement de régime introduits par Hamilton (1989), en particulier le modèle à changement de régime log-normal. Plusieurs auteurs remettent en cause l'hypothèse gaussienne pour le rendement des actifs financiers. Ballotta (2005) a été parmi les premiers auteurs à analyser l'impact des sauts dans l'évaluation de contrats d'assurance-vie participatifs en utilisant un processus diffusif à sauts gaussiens tandis que Kassberger, Kiesel et Liebmann (2007) ont utilisé des processus NIG et de Meixner. Dans ce chapitre, nous considérerons un processus diffusif à sauts à loi exponentielle double, un processus de Kou.

Les apports de ce chapitre sont de plusieurs ordres. En assurance en cas de vie, les contrats PEFG (Pure Endowment with a Flexible Guarantee) sont évalués en tenant compte des sauts. Cette évaluation s'effectue essentiellement par l'évaluation d'une option d'échange, ce qui nous permet d'utiliser les résultats obtenus dans le chapitre précédent. En assurance en cas de décès, d'un point de vue théorique, nous proposons un cadre général d'évaluation où les sauts et les taux d'intérêts stochastiques sont pris en compte simultanément. Celui-ci prolonge et étend en cela le cadre originel utilisé par Milevsky et Posner (2001). D'un point de vue empirique, une réponse est donnée à la question de l'écart entre le juste prix des contrats

1. L'acronyme fait référence au nom anglophone du contrat : Pure Endowment with a Flexible Guarantee.

2. De la terminologie anglaise : Guaranteed Minimum Death Benefit.

GMDB (Guaranteed Minimum Death Benefit) et les frais liés au risque de mortalité pratiqués par l'industrie.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. La prochaine section introduit la notation ainsi que les modèles utilisés pour tenir compte du risque de mortalité. Une deuxième section présente l'étude et l'évaluation du contrat à garantie flexible, une police d'assurance en cas de vie. Une troisième section est consacrée à l'étude du contrat à bénéfice minimum garanti en cas de décès et du juste niveau des frais prélevés par l'assureur.

3.1 Risque de mortalité

Nous présentons dans cette section les modèles de mortalité qui vont nous permettre de tenir compte de l'aléa assuré.

3.1.1 Notation

La notation actuarielle traditionnelle est utilisée. La durée de vie résiduelle d'un souscripteur d'âge x est modélisée par la variable aléatoire T_x . La probabilité de décès avant un temps $t \geq 0$ pour un individu d'âge x est $P(T_x \leq t) = 1 - ({}_t p_x)$, ${}_t p_x$ représentant classiquement la probabilité de survie jusqu'à l'âge $x + T_x$. Si nous notons λ la force de la mortalité, nous avons

$$P(T_x \leq t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(x+s) ds\right). \quad (3.1)$$

Comme il est d'usage, nous noterons $F_x(t)$ et $f_x(t)$ respectivement la fonction de répartition et de densité de la variable aléatoire T_x . Pour rappel, ces deux fonctions sont liées par la relation suivante

$$\lambda(x+t) = \frac{f_x(t)}{1 - F_x(t)}, \quad (3.2)$$

voir par exemple Gerber (1997) ou Bowers, Gerber, Hickman, Jones et Nesbitt (1997).

3.1.2 Modèles de mortalité

Un modèle de mortalité simple de loi exponentielle peut s'obtenir avec une force de mortalité constante $\lambda(x) = \lambda$. Ainsi, en utilisant l'équation (3.1), il vient aisément $F_x(t) = P(T_x \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et $f_x(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Toutefois,

nous pouvons remarquer que la probabilité de décès demeure alors constante tout au long de la vie. Ce modèle est par conséquent trop rigide et ne permet pas de tenir compte de l'âge de l'assuré à la souscription. Il est évident que le risque de mortalité d'une personne qui approche la soixantaine est différent de celui d'une autre qui a vingt ans. Si la simplicité de ce modèle de mortalité permet d'avoir des solutions simples (voir Milevsky et Posner (2001)), nous allons plutôt nous diriger vers une famille de modèles de mortalité plus flexibles.

Deux modèles de mortalité seront essentiellement utilisés dans le reste de ce chapitre, à savoir le modèle de Gompertz et celui de Makeham. Dans le cas du modèle de mortalité de Gompertz, la force de mortalité à l'âge x est modélisée par

$$\lambda(x) = B.C^x, \quad (3.3)$$

avec les constantes $B > 0$ et $C > 1$. Une écriture alternative est

$$\lambda(x) = \frac{1}{b} \exp\left(\frac{x-m}{b}\right),$$

où $m > 0$ est le mode de la loi de Gompertz et $b > 0$ est un paramètre de dispersion. Ces deux notations sont reliées par l'équation suivante :

$$B = \frac{1}{b} e^{-\frac{m}{b}} \quad \text{et} \quad C = e^{-\frac{1}{b}}.$$

Avec les équations (3.1) et (3.2), nous obtenons la densité

$$f_x(t) = \lambda(x) e^{b\lambda(x)} e^{\frac{t}{b}} e^{-b\lambda(x)e^{\frac{t}{b}}}$$

et la fonction de répartition de la durée de vie résiduelle à l'âge x

$$F_x(t) = 1 - e^{-b\lambda(x)\left(e^{\frac{t}{b}} - 1\right)}.$$

Pour simplifier la notation, la référence à l'âge x pour la durée de vie future sera généralement omise et nous écrirons simplement T si aucune confusion n'est possible. Nous supposons qu'il y a indépendance stochastique entre les risques financiers et le risque de mortalité.

TABLE 3.1 – Paramètres de la loi de Gompertz – Milevsky et Posner (2001)

Âge (en années)	Femmes		Hommes	
	m	b	m	b
30	88.8379	9.213	84.4409	9.888
40	88.8599	9.160	84.4729	9.831
50	88.8725	9.136	84.4535	9.922
60	88.8261	9.211	84.2693	10.179
65	88.8403	9.183	84.1811	10.282

TABLE 3.2 – Paramètres des modèles de mortalité de Gompertz (G) et de Makeham (M) pour les États-Unis (US), la Suède (S) et le Japon (J) – Melnikov et Romaniuk (2006)

	A	B	C
G_{US}		6.148×10^{-5}	1.09159
M_{US}	9.566×10^{-4}	5.162×10^{-5}	1.09369
G_S		1.694×10^{-5}	1.10960
M_S	4.393×10^{-4}	1.571×10^{-5}	1.11053
G_J		2.032×10^{-5}	1.10781
M_J	5.139×10^{-4}	1.869×10^{-5}	1.10883

3.1.3 Paramètres empiriques et probabilité de survie

Dans ce chapitre, nous ferons usage de paramètres de modèle de mortalité ajustés à des tables de mortalité réelles. Les paramètres du premier modèle de Gompertz utilisé sont ceux obtenus par Milevsky et Posner (2001) à partir de l'ajustement à la table de mortalité américaine par groupe de 1994. Ils sont reportés au tableau 3.1 avec une ventilation selon l'âge et le sexe.

De leur côté, Melnikov et Romaniuk (2006) ont estimé les paramètres des modèles de mortalité de Gompertz et de Makeham à partir des tables de mortalité allant de 1959 à 1999 compilées au sein de l' « Human Mortality Database³ ». Les paramètres obtenus sont reportés dans le tableau 3.2. Comme nous pouvons le constater sur ce tableau, aucune distinction selon le sexe n'est plus effectuée. Par ailleurs, les paramètres de ces deux modèles ont été successivement ajustés pour trois pays différents : les États-Unis, la Suède et le Japon.

3. Base de données accessible au site Internet <http://www.mortality.org>

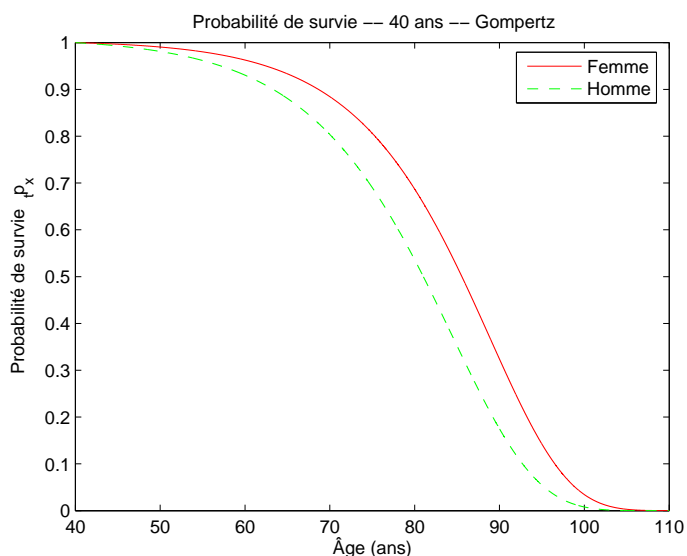


FIGURE 3.1 – Probabilité de survie d’une femme et d’un homme de 40 ans suivant le modèle de mortalité de Gompertz ajusté par Milevsky et Posner (2001).

La figure 3.1 montre la probabilité de survie d’une femme de 40 ans comparée à un homme du même âge jusqu’à l’âge de 110 ans. Elle reflète bien la différence d’espérance de vie entre un homme et une femme avec la probabilité de survie d’une femme qui reste bien supérieure à celle d’un homme, y compris à un âge avancé. La probabilité de survie d’une femme fléchit aussi beaucoup plus tard.

Les probabilités de survie prévues par les modèles de mortalité de Gompertz et de Makeham sont montrées à la figure 3.2. Elles ont été calculées jusqu’à l’âge de 75 ans pour un individu de 40 ans. La probabilité de survie obtenue avec le modèle de Gompertz est un peu plus grande que celle donnée par le modèle de mortalité de Makeham. Il est à noter cependant que la différence entre les deux probabilités de survie est assez faible.

La figure 3.3 montre la probabilité de survie selon le pays dans le modèle de mortalité de Makeham pour un individu âgé de 40 ans. Les habitants de la Suède ont la plus grande probabilité de survie, suivis de près par ceux du Japon. Les probabilités de survie prévues par ce modèle de mortalité sont beaucoup plus élevées en Suède et au Japon qu’aux États-Unis.

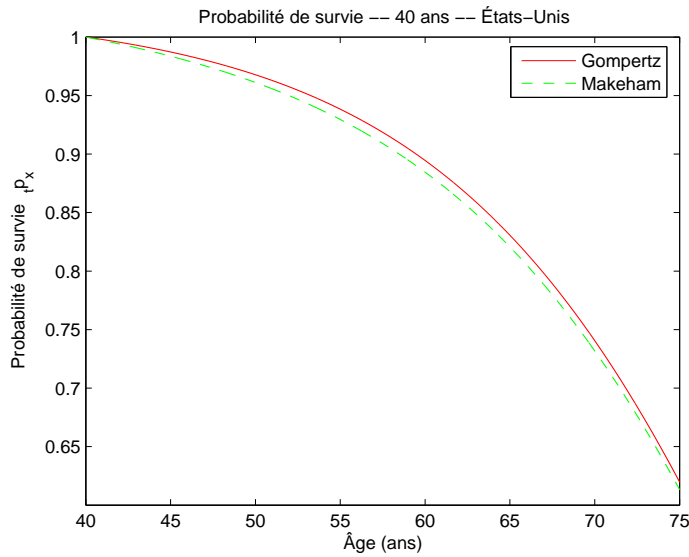


FIGURE 3.2 – Probabilité de survie d'un individu de 40 ans suivant les modèles de mortalité de Gompertz et de Makeham ajustés par Melnikov et Romaniuk (2006).

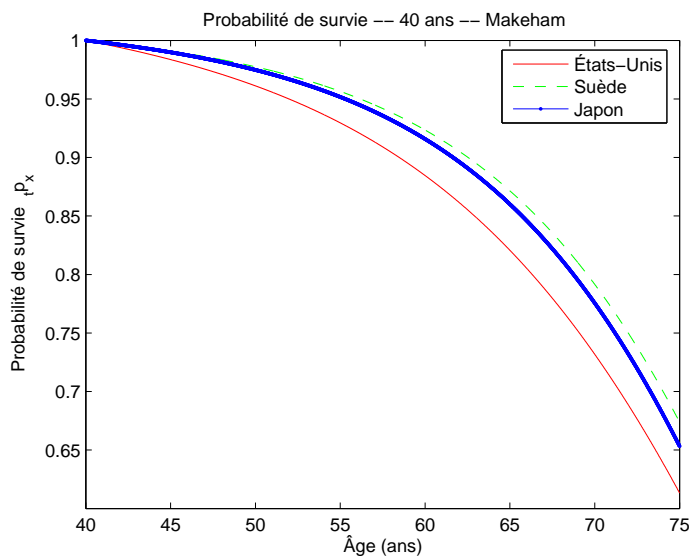


FIGURE 3.3 – Probabilité de survie selon le pays d'un individu de 40 ans suivant le modèle de mortalité de Makeham ajusté par Melnikov et Romaniuk (2006).

3.2 Assurance en cas de vie : cas du contrat à garantie flexible en cas de vie (PEFG)

Le contrat à garantie flexible en cas de vie (PEFG) verse un capital à l'échéance de la police d'assurance si l'assuré est toujours en vie. Contrairement au contrat à garantie fixe, où l'assureur verse une somme fixe prédéterminée à l'avance, le contrat PEFG verse le maximum entre la valeur à l'échéance des actifs investis et la valeur à l'échéance d'un actif de référence, qui est supposé moins risqué que le portefeuille d'actifs auquel est adossée la police d'assurance. Cet actif qui sert de garantie flexible peut par exemple être un indice représentatif du marché. La modélisation adoptée dans cette section se fait en temps continu avec une structure par termes des taux d'intérêt plate. La sous-section suivante commence par l'écriture du paiement à l'échéance du contrat et précise le modèle retenu pour les actifs dans lesquels sont investis l'apport initial de l'assuré et celui retenu pour l'actif servant de garantie minimale. Ensuite, la sous-section 3.2.2 expose comment l'évaluation du contrat PEFG est effectuée. Une troisième sous-section illustre numériquement le résultat obtenu.

3.2.1 Modélisation du contrat et des actifs sous-jacents

Notons S^2 le processus de prix du portefeuille d'actifs dans lequel l'apport initial de l'assuré, de montant S_0^2 , est investi. Le taux d'intérêt sans risque instantané est représenté par la constante r . Soit S^1 le processus de prix de l'actif risqué qui sert de garantie. Généralement, la valeur de la garantie flexible au moment de la signature de la police d'assurance ne sera pas la même que celle du portefeuille d'actifs placé sur une unité de compte. Dans ce cas, la valeur de l'actif de garantie à l'instant initial est ramenée à parité avec la valeur du portefeuille d'actifs en la multipliant par une constante. Ainsi, nous pouvons considérer que $S_0^1 = S_0^2$.

Le marché n'est pas nécessairement complet, cependant nous considérons qu'une mesure risque-neutre a été choisie. Pratiquement, celle-ci peut être obtenue du marché, comme le montre par exemple Björk (2004). L'univers risque-neutre ainsi obtenu est donné par le quadruplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}_{t, t \geq 0}, Q)$, où (Ω, \mathcal{A}, Q) est un espace de probabilité doté de la probabilité risque-neutre Q et $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ une filtration représentant l'information accumulée au cours du temps.

L'actif S^1 est supposé obéir à l'équation différentielle stochastique :

$$\frac{dS_t^1}{S_t^1} = (r - \delta_1) dt + \sigma_1 dW_t$$

où W est un mouvement brownien standard sous Q et δ_1 est son taux de dividende continu.

Le processus de prix S^2 obéit dans l'univers risque-neutre à l'équation suivante :

$$\frac{dS_t^2}{S_{t^-}^2} = (r - \delta_2 - \lambda\kappa_2) dt + \rho\sigma_2 dW_t + \sigma_2\sqrt{1 - \rho^2} dZ_t + (Y_2 - 1) dN_t,$$

où Z est un autre mouvement brownien standard tel que $d\langle W, Z \rangle_t = 0$ et N est un processus de Poisson d'intensité λ indépendant des deux mouvements browniens précédents. La constante ρ représente la corrélation instantanée entre les rendements des deux actifs. Le taux de dividende continu est noté δ_2 et la taille des sauts Y_2 est une variable aléatoire indépendante de ces processus avec $\kappa_2 = E(Y_2 - 1)$.

Notons Θ le temps restant avant l'échéance du contrat. Ainsi, un assuré d'âge x à la souscription sera âgé de $x + \Theta$ à la date d'échéance de la police d'assurance. Le paiement obtenu par le souscripteur à l'échéance s'écrit alors :

$$\max\{S_\Theta^1, S_\Theta^2\} \mathbf{1}_{\{T_x > \Theta\}} = \left(S_\Theta^1 + [S_\Theta^2 - S_\Theta^1]^+ \right) \mathbf{1}_{\{T_x > \Theta\}}. \quad (3.4)$$

Ce paiement se décompose en une position longue sur l'actif de garantie et une option d'échange entre les actifs en jeu, paiement que reçoit le souscripteur s'il est en vie à l'échéance du contrat.

3.2.2 Évaluation du contrat PEFG

L'apparition du payoff d'une option d'échange dans l'équation (3.4) permet la mise en œuvre immédiate des résultats que nous avons établis dans le chapitre précédent. Par ailleurs, l'hypothèse d'indépendance du risque de mortalité des risques financiers permet de calculer séparément l'impact de la mortalité et l'option d'échange concernée. La valeur à la souscription du

contrat PEFG s'écrit :

$$\begin{aligned} PEFG &= E_Q \left[e^{-r\Theta} \left(S_{\Theta}^1 + [S_{\Theta}^2 - S_{\Theta}^1]^+ \right) \mathbb{1}_{\{T > \Theta\}} \right] \\ PEFG &= {}_{\Theta}p_x E_Q \left[e^{-r\Theta} \left(S_{\Theta}^1 + [S_{\Theta}^2 - S_{\Theta}^1]^+ \right) \right]. \end{aligned}$$

Comme la valeur actualisée de l'actif S^1 est une martingale sous Q , la partie gauche de cette expression vaut :

$$E_Q \left[e^{-(r-\delta_1)\Theta} S_{\Theta}^1 \right] = S_0^1. \quad (3.5)$$

La partie droite se calcule comme l'option d'échange du chapitre précédent. Nous utilisons en particulier l'approche par transformée de Fourier généralisée exposée à la section 2.3.2.3. Finalement, la valeur du contrat PEFG s'écrit

$$PEFG = {}_{\Theta}p_x (S_0^1 e^{-\delta_1\Theta} + C_0(S_0^1, S_0^2)), \quad (3.6)$$

où $C_0(S_0^1, S_0^2)$ est la valeur de l'option d'échange entre les deux actifs au moment de la souscription du contrat, comme définie par les formules (2.52) et (2.53).

3.2.3 Analyse des résultats

Le contrat PEFG considéré est supposé échoir lorsque l'assuré atteint l'âge de 75 ans. Comme nous avons déjà pu le constater avec les options d'échange, le niveau réel du taux d'intérêt n'impacte pas la valeur de ce contrat. Le modèle de mortalité retenu pour l'étude numérique de cette sous-section est celui de Makeham, avec les paramètres estimés sur les données américaines tels que figurant dans le tableau 3.2.

Nous précisons maintenant les divers paramètres du portefeuille d'actifs investi et de l'actif de garantie avant de procéder à l'analyse des résultats obtenus. Leur valeur au moment de la souscription est normalisée à $S_0^1 = S_0^2 = 1$. L'actif de garantie, représenté par le processus de prix S^1 est supposé délivrer un dividende continu de $\delta_1 = 0.01$. Sa volatilité vaut $\sigma_1 = 0.20$. Le rendement du portefeuille d'actifs est supposé suivre la dynamique d'un processus de Kou avec un taux d'arrivée des sauts $\lambda = 0.5$. Les sauts sont modélisés par des variables aléatoires $J = \ln(Y)$ indépendantes

et identiquement distribuées de loi exponentielle double dont la fonction de densité s'écrit

$$f_J(y) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 y} 1_{y>0} + q\lambda_2 e^{\lambda_2 y} 1_{y\leq 0}$$

avec $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q = 1$, $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. La probabilité d'un saut vers le haut est fixée à $p = 0.4$ tandis que les paramètres des deux lois exponentielles sont fixés à $\lambda_1 = 10$ et $\lambda_2 = 5$.

Nous avons auparavant mentionné que l'actif de garantie était supposé être moins risqué que le portefeuille d'actifs investi. Pour un processus diffusion et sauts, le risque n'est pas uniquement représenté par la volatilité de la partie diffusive. Un risque spécifique aux sauts s'y ajoute et peut être mesuré par la variation quadratique de sa composante de sauts. Nous fixons alors la volatilité σ_2 de la partie diffusive du processus de prix S^2 de manière à ce que sa variation quadratique totale soit de 1.5 fois la variation quadratique du processus de prix S^1 afin de modéliser le caractère moins risqué de l'actif de garantie.

La figure 3.4 montre la sensibilité à la corrélation ρ entre le rendement des deux actifs de la valeur du contrat PEFG. Nous constatons que plus la corrélation est élevée, plus la valeur du contrat d'assurance est faible. En effet, si le portefeuille d'actifs investi dans l'unité de compte et l'actif de référence sont corrélés, une perte sur le portefeuille pourra difficilement être compensée par un gain sur la garantie flexible comme cette dernière aura vraisemblablement aussi subi une perte, ce qui réduit d'autant la valeur de la garantie proposée dans le contrat.

Par ailleurs, nous voyons aussi que de façon globale, plus la souscription a lieu tard, plus la valeur du contrat PEFG augmente. Ainsi, pour un assuré âgé de 65 ou 70 ans à la souscription de la police, la valeur du contrat est supérieure à celle qu'il a pour un assuré de 50 ou 55 ans. Ce phénomène est confirmé sur la figure 3.5 où la corrélation a été fixée à $\rho = 0.25$. La valeur du contrat PEFG augmente en fonction de l'âge. Le tableau 3.3 précise les valeurs du contrat PEFG obtenues suivant l'âge à la souscription, ainsi que la valeur de la probabilité de survie à 75 ans et la valeur de l'option d'échange incorporée dans la police.

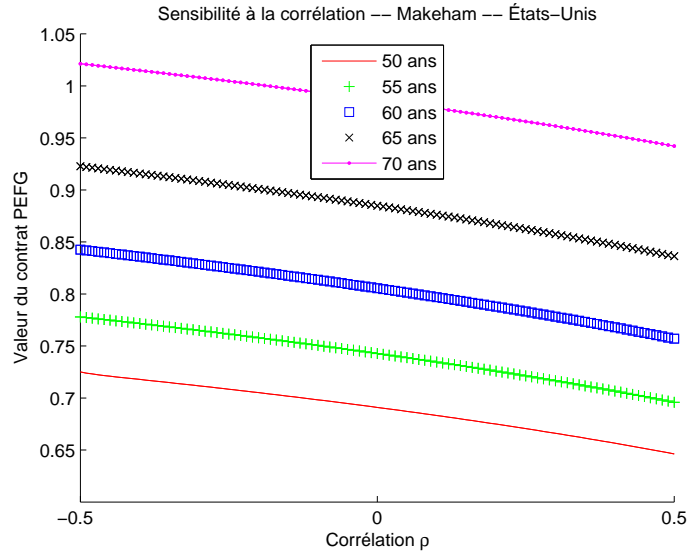


FIGURE 3.4 – Valeur du contrat PEFG en fonction de la corrélation ρ entre le portefeuille investi et l'actif servant de garantie.

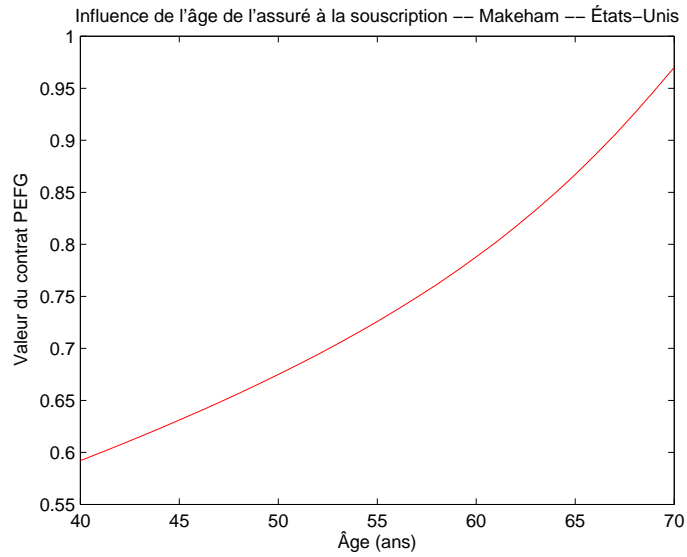


FIGURE 3.5 – Influence de l'âge sur la valeur du contrat PEFG. La corrélation ρ entre le portefeuille investi et l'actif servant de garantie est fixée à $\rho = 0.25$.

TABLE 3.3 – Influence de l'âge de l'assuré sur la valeur du contrat PEFG. Corrélation fixée à $\rho = 0.25$.

Âge (ans)	Probabilité de survie (à 75 ans)	Option d'échange	Contrat PEFG
35	0.6058	0.9127	0.5529
40	0.6133	0.9592	0.5883
45	0.6235	1.0057	0.6270
50	0.6380	1.0510	0.6706
55	0.6597	1.0933	0.7213
60	0.6933	1.1295	0.7831
65	0.7473	1.1540	0.8623
70	0.8381	1.1524	0.9658

3.3 Assurance en cas de décès : cas du contrat à bénéfice minimum garanti en cas de décès (GMDB)

Le contrat GMDB garantit le versement d'une somme spécifique à la mort de l'assuré. Il est associé à une unité de compte qui sert de support à l'investissement. La garantie peut prendre diverses formes. Une forme courante est représentée par le maximum de la valeur de l'unité de compte et de la valeur de la somme initialement investie capitalisée à un taux minimum garanti par contrat. La garantie est alors déclenchée par le décès de l'assuré et sera payée aux bénéficiaires. Les compagnies d'assurance peuvent aussi proposer des garanties plafonnées ou des polices avec des clauses à effet cliquet qui permettent de verrouiller les gains successifs éventuels. Les rachats de contrats et les sorties anticipées sont possibles mais ils sont lourdement pénalisés, soit par la compagnie d'assurance avec des frais de sortie pouvant aller jusqu'à 7 % pendant les 5 ou 8 premières années de la police (voir Milevsky et Posner (2001)), soit par la perte des avantages fiscaux rattachés au contrat. Le versement initial est effectué auprès de la compagnie d'assurance qui l'investit sur les marchés financiers à travers des fonds communs. La garantie contractée, payée seulement au décès, n'est pas offerte mais payée par l'assuré par des frais prélevés sur les actifs placés sur l'unité de compte. En pratique, ces prélèvements sont effectués sur une base périodique. Dans cette section, la modélisation se fait en temps continu et ces

paiements contractuels sont effectués instantanément. Ils seront considérés ici comme des dividendes perçus de façon continue. Ces frais sont déterminés de façon endogène et sont liés par construction au bénéfice minimum garanti en cas de décès. Ils correspondent aux frais liés au risque de mortalité.

Dans Milevsky et Posner (2001) et dans des travaux récents sur les produits structurés (voir par exemple Benet, Giannetti et Pissaris (2005) ou Wilkens et Stoimenov (2007)), il est apparu que les frais prélevés semblent surélevés. Ce chapitre revient sur cette question importante : quel devrait être le juste prix des contrats GMDB. Cette question est examinée ici dans un cadre d'évaluation plus général que celui utilisé par Milevsky et Posner (2001). Cette évaluation se fait habituellement dans le cadre de Black et Scholes : la valeur de l'unité de compte est supposée suivre un mouvement brownien géométrique et la structure par termes des taux d'intérêts est supposée constante. Cette dernière hypothèse, qui peut être acceptable pour des options à court terme, ne peut plus se justifier lorsque les contrats ont des échéances éloignées comme c'est le cas pour les produits d'assurance-vie. Nous utiliserons un modèle à un facteur de type Vasicek (1977) pour modéliser le taux d'intérêt, supposé stochastique.

Le contrat GMDB a une option incorporée qui peut être considérée comme une sorte d'option européenne avec un prix d'exercice croissant et une date d'échéance stochastique. Une partie technique de ce chapitre est consacrée à l'évaluation de cette option incorporée. Elle est effectuée en trois temps.

Dans un premier temps, conditionnellement au temps de décès du souscripteur de la police, l'option est évaluée dans le contexte du processus de Kou avec des taux d'intérêts stochastiques, sous l'hypothèse que les actifs investis dans l'unité de compte sont corrélés aux taux d'intérêts. C'est un problème non trivial dont aucune solution n'a été donnée jusqu'ici à notre connaissance. La solution proposée ici utilise une adaptation de l'approche par transformée de Fourier généralisée de Boyarchenko et Levendorskiï (2002*b*) et que nous avons aussi mise en œuvre dans les chapitres précédents dans un contexte différent, voir aussi Quittard-Pinon et Randrianarivony (2008*c*) et Quittard-Pinon et Randrianarivony (2008*d*).

Une fois cette évaluation menée, la deuxième étape consiste à effectuer une quadrature en se servant de la densité de la loi de mortalité choisie. Trois lois de mortalité seront considérées ici, à savoir une loi exponentielle, une loi

de Makeham paramétrique et une loi de Gompertz. La solution est précise et rapide bien qu'elle ne se traduise pas par une formule fermée. Le modèle mis en œuvre permet de prendre en compte simultanément les risques de marché, de sauts et de taux d'intérêts.

C'est lors de la troisième étape que s'effectue finalement le calcul du juste prix des contrats GMDB. Cela s'obtient en disant que la valeur totale du contrat GMDB au temps présent et la valeur attendue actualisée des paiements cumulés par l'assuré doivent être égales. De cette façon, les (justes) prix recherchés sont endogènes. La méthodologie proposée est aisée à implémenter et fera l'objet de plusieurs exemples illustratifs.

3.3.1 Cadre général et principales notations

Dans cette sous-section, les principales définitions et notations sont d'abord données de façon formelle. Le cadre général de l'analyse est ensuite mis en place. Dans une première sous-sous-section, les risques financiers et le risque lié à la mortalité sont considérés. Dans la sous-sous-section suivante, le contrat GMDB étudié est défini formellement. Une troisième sous-sous-section donne les équations principales du chapitre avec un rappel de la solution de Milevsky et Posner's (2001) dans la dernière sous-sous-section.

3.3.1.1 Risques financiers

Les risques financiers sont liés au risque de marché d'un côté, comme l'unité de compte a été investie dans un portefeuille d'actifs financiers ou liée à un indice et au risque de taux de l'autre côté. Notons par r le processus stochastique modélisant le taux d'intérêt sans risque instantané. La valeur du placement monétaire est

$$R_t = e^{\int_0^t r_s ds}, \quad (3.7)$$

alors que le facteur d'actualisation s'écrit

$$\delta_t = e^{-\int_0^t r_s ds}. \quad (3.8)$$

La valeur de l'unité de compte de l'assuré est modélisée par un processus stochastique S . Dans ce modèle, les frais imputés au risque de mortalité (M&E⁴) sont traduits par les coûts déduits du compte ℓ .

3.3.1.2 Flux du contrat

La compagnie d'assurance s'engage à payer au décès du souscripteur la somme contractuelle $\max\{S_0e^{gT}, S_T\}$ où g est un taux garanti. S_0 est la valeur de l'apport initial et S_T est la valeur de l'unité de compte au moment T du décès. Généralement, une date d'échéance $x + \Theta$ est aussi stipulée par contrat avec une garantie qui se déclenche uniquement au moment du décès de l'assuré. Ainsi, si l'assuré est encore en vie après Θ années, il recevra simplement la valeur de l'unité de compte à ce moment.

Pour le moment, gardons la première formulation et écrivons le paiement obtenu au moment du décès :

$$\max\{S_0e^{gT}, S_T\} = S_T + [S_0e^{gT} - S_T]^+. \quad (3.9)$$

Cette écriture fait apparaître le contrat comme une position longue sur les actifs détenus sur l'unité de compte à laquelle s'ajoute une option de vente. Deux remarques sont de mise ici : premièrement, le souscripteur obtient la même somme que s'il avait investi directement sur les marchés financiers, si nous ne tenons pas compte des frais, mais en plus il a l'assurance de gagner plus ou encore de limiter ses pertes, le cas échéant, grâce à l'option de vente incorporée dans le contrat. Deuxièmement, comme le moment T du décès est une variable aléatoire, l'option incorporée n'est pas une simple option vanille mais une option dont la date d'exercice est elle-même aléatoire. De la même manière que Milevsky et Posner, nous appelons la partie optionnelle présente dans (3.9) le payoff de l'option GMDB. En termes moins formels, cette équation peut se réécrire comme

Paiement au décès = Valeur du compte + payoff de l'option GMDB.

Dans ce contrat, le souscripteur paie cette garantie par prélèvements. Les frais payés sont imputés au risque de mortalité M&E (« Mortality And Expense fees »). Ils sont supposés être déduits de façon continue du compte de l'assuré au taux contractuel ℓ . Plus précisément, nous considérons que

4. Mortality and Expense (M&E) risk charge dans la terminologie anglophone.

dans l'intervalle $(t, t + dt)$, la compagnie d'assurance est rémunérée instantanément de $\ell S_t dt$. Nous notons par F les frais accumulés et actualisés à la signature du contrat. Ainsi, F_τ représente les frais actualisés et accumulés jusqu'à l'instant τ qui peut constituer un temps d'arrêt pour le processus de prix S de l'unité de compte.

Le contrat peut aussi être conçu de façon à avoir un plafond sur le taux garanti g . Cette clause de plafonnement se traduit généralement par la spécification d'un capital maximal M par la compagnie d'assurances, avec $M \geq S_0$. Dans ce cas, le payoff devient $[\min[M, S_0 e^{gT}] - S_T]^+$. Comme Milevsky et Posner (2001) l'ont noté, ce nouveau payoff peut encore être réécrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} (S_0 e^{gT} - S_T)^+ & \text{si } T \leq \ln[M/S_0]/g \\ (M - S_T)^+ & \text{si } T > \ln[M/S_0]/g. \end{cases}$$

3.3.1.3 Équations principales

Nous nous intéressons essentiellement dans ce chapitre à la juste valeur des frais M&E, incluant les coûts imputés au risque de mortalité . Pour ce faire, nous considérons que leur juste valeur est la valeur qui, selon la théorie de l'arbitrage, est donnée par l'espérance du payoff actualisé du contrat sous une mesure martingale équivalente à la mesure historique. De nouveau, nous n'avons pas nécessairement un marché complet ici. Comme dans la section précédente, une mesure risque-neutre, notée Q , est supposée choisie, donnant naissance à l'univers $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}_{t, t \geq 0}, Q)$. Dans cet univers, le juste prix de l'option incorporée dans le contrat GMDB s'écrit

$$G(\ell) = E_Q[\delta_T(S_0 e^{gT} - S_T)^+],$$

et conditionnellement à la durée de vie du souscripteur, nous avons

$$G(\ell) = E_Q\left[E_Q[\delta_T(S_0 e^{gT} - S_T)^+ | T = t]\right]. \quad (3.10)$$

Par ailleurs, si F_T représente la valeur actualisée de tous les frais prélevés jusqu'à l'instant T , la juste valeur de la partie M&E correspondant au risque de mortalité s'écrit

$$ME(\ell) = E_Q[F_T]$$

ce qui donne conditionnellement

$$ME(\ell) = E_Q[E_Q[F_T|T = t]]. \quad (3.11)$$

Comme la protection est seulement déclenchée en cas de décès du souscripteur, le taux d'équilibre de prélèvement des frais M&E est la solution en ℓ , si elle existe, de l'équation suivante

$$G(\ell) = ME(\ell). \quad (3.12)$$

C'est l'équation essentielle de ce chapitre. Avant de la résoudre, nous avons besoin de définir la dynamique du portefeuille d'actifs investi dans l'unité de compte et d'explicitier les hypothèses retenues pour le processus de prix S et, bien entendu, la mortalité.

3.3.1.4 La solution de Milevsky et Posner

La solution proposée par Milevsky et Posner (2001) a été obtenue en effectuant les choix d'hypothèses suivants. Dans leur article, ces auteurs supposent que ℓ est constant, que le processus de prix S suit un mouvement brownien géométrique avec une volatilité σ et la loi de mortalité suit une loi exponentielle ou est de type Gompertz. Le prix de l'option GMDB, qu'ils ont baptisé option Titanic en référence au destin tragique du paquebot du même nom, est alors donné par

$$G(\ell) = \int_0^{\Theta} f_x(t) E_Q[\delta_T (S_0 e^{gT} - S_T)^+ | T = t] dt, \quad (3.13)$$

où nous pouvons reconnaître dans l'espérance conditionnelle imbriquée le prix d'une option européenne de vente standard de Black et Scholes avec un prix d'exercice $K = S_0 e^{gT}$.

Sous l'hypothèse d'une durée de vie future exponentielle, ils ont alors obtenu un prix sous une forme explicite. Bien que ce type de modèle ne soit pas réaliste, il a l'avantage de permettre l'obtention de formules simples et en outre, il peut servir de point de référence. Ils ont aussi par ailleurs obtenu une formule semi-fermée pour la valeur actualisée des frais M&E. Pour la loi de mortalité de type Gompertz paramétrique, des méthodes numériques restent

nécessaires. Dans tous les cas, la valeur d'équilibre de ℓ peut seulement s'obtenir par un algorithme de recherche de racine.

3.3.2 Cadre d'évaluation général

Nous nous inspirons de l'approche de Milevsky et Posner (2001). Le cadre d'évaluation est très général :

1. il prend en compte des taux d'intérêt stochastiques. Un modèle de taux d'intérêt à un facteur avec une structure de volatilité exponentielle sera utilisé ;
2. le processus de prix de l'actif sous-jacent incorpore des sauts ;
3. l'impact du modèle de mortalité choisi sur le coût juste de l'option GMDB incorporée est pris en compte.

L'obligation zéro-coupon sans risque est supposé suivre l'équation différentielle stochastique suivante dans l'univers risque-neutre

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r_t dt + \sigma_P(t, T) dW_t, \quad (3.14)$$

où $P(t, T)$ est le prix à l'instant t d'une obligation zéro-coupon d'échéance $T > t$, r_t est le taux sans risque instantané, $\sigma_P(t, T)$ décrit la structure de volatilité et W est un mouvement brownien standard.

Pour prendre en compte la dépendance entre les actifs investis dans l'unité de compte et les taux d'intérêt, nous suggérons l'introduction d'une corrélation entre la partie diffusive du processus de prix de ces actifs et celle de la dynamique de l'obligation zéro-coupon. Le processus de prix S est supposé obéir à l'équation différentielle stochastique suivante sous la mesure d'évaluation équivalente Q choisie :

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = (r_t - \ell) dt + \rho\sigma dW_t + \sigma\sqrt{1 - \rho^2} dZ_t + (Y - 1) d\tilde{N}_t. \quad (3.15)$$

De nouveau, r_t représente le taux d'intérêt instantané, ℓ le coût proportionnel fixe correspondant au risque d'assurance, σ est la volatilité des actifs investis, ρ modélise la corrélation entre ces derniers et les taux d'intérêt, W et Z sont deux mouvements browniens standards indépendants et la dernière partie prend en compte les sauts impactant le processus de prix. \tilde{N} est un processus de Poisson compensé d'intensité λ . La variable aléatoire Y , indépendante des

précédents processus stochastiques, modélise le changement de prix après un saut. La taille de saut est définie par la variable aléatoire $J = \ln(Y)$.

Notons ici que le processus M défini par $dM_t = \rho\sigma dW_t + \sigma\sqrt{1-\rho^2} dZ_t + (Y-1)d\tilde{N}_t$ – donc la partie qui ne comprend pas la dérive dans (3.15) – est une martingale dans l'univers risque-neutre considéré.

3.3.2.1 Évaluation de la garantie

En notant N_t le processus de Poisson d'intensité λ et en appliquant le lemme d'Itô, la dynamique du processus de prix S s'écrit

$$S_t = S_0 e^{\int_0^t r_s ds - (\ell + \frac{1}{2}\sigma^2 + \lambda\kappa)t + \rho\sigma W_t + \sigma\sqrt{1-\rho^2} Z_t + \sum_{i=1}^{N_t} \ln((Y)_i)}, \quad (3.16)$$

où $\kappa = E(Y-1)$. Par ailleurs, le prix de l'obligation zéro-coupon obéit aux deux équations suivantes :

$$P(t, T) = P(0, T) e^{\int_0^t \sigma_P(s, T) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_P^2(s, T) ds + \int_0^t r_s ds} \quad (3.17a)$$

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} e^{\int_0^t [\sigma_P(s, T) - \sigma_P(s, t)] dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t [\sigma_P^2(s, t) - \sigma_P^2(s, T)] ds}. \quad (3.17b)$$

En divisant l'équation (3.16) par l'équation (3.17a), il vient

$$\begin{aligned} \frac{S_t}{P(t, T)} &= \frac{S_0}{P(0, T)} \exp\left(-\left(\ell + \frac{1}{2}\sigma^2 + \lambda\kappa\right)t + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_P^2(s, T) ds\right) \\ &\quad \times \exp\left(\int_0^t (\rho\sigma - \sigma_P(s, T)) dW_s + \sigma\sqrt{1-\rho^2} Z_t + \sum_{i=1}^{N_t} \ln((Y)_i)\right). \end{aligned}$$

La substitution de (3.17b) dans ce résultat donne

$$S_t = \frac{S_0}{P(0, t)} e^{-(\ell + \frac{1}{2}\sigma^2 + \lambda\kappa)t + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_P^2(s, t) ds + \int_0^t [\rho\sigma - \sigma_P(s, t)] dW_s + \sigma\sqrt{1-\rho^2} Z_t + \sum_{i=1}^{N_t} \ln((Y)_i)}.$$

Introduisons alors la mesure T -forward Q_T définie par :

$$\frac{dQ_T}{dQ} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\delta_t P(t, T)}{P(0, T)}, \quad (3.18)$$

où δ_t est le facteur d'actualisation défini à l'équation (3.8). D'après l'équation (3.17a), cette densité de Radon-Nikodym peut encore s'écrire de la façon

suivante

$$\frac{dQ_T}{dQ} \Big|_{\mathcal{F}_t} = e^{\int_0^t \sigma_P(s,T) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_P^2(s,T) ds}.$$

Le théorème de Girsanov dit alors que le processus stochastique W^T , défini par $W_t^T = W_t - \int_0^t \sigma_P(s,T) ds$, est un mouvement brownien sous la mesure Q_T . Cela permet d'obtenir la dynamique du processus de prix sous la mesure T -forward :

$$S_t = \frac{S_0}{P(0,t)} e^{X_t} \quad (3.19)$$

où X est le processus défini par

$$\begin{aligned} X_t = & -(\ell + \frac{1}{2}\sigma^2 + \lambda\kappa)t + \int_0^t \left(\sigma_P(s,T)(\rho\sigma - \sigma_P(s,t)) + \frac{1}{2}\sigma_P^2(s,t) \right) ds \\ & + \int_0^t (\rho\sigma - \sigma_P(s,t)) dW_s^T + \sigma\sqrt{1-\rho^2} Z_t + \sum_{i=1}^{N_t} \ln((Y)_i). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Remarquer que nous n'avons plus un modèle avec une exponentielle de processus de Lévy pour le sous-jacent comme X n'est plus un processus de Lévy à cause de la nature stochastique des taux d'intérêt.

Continuons par le calcul de l'espérance imbriquée dans l'équation (3.10). Conditionnellement à une durée de vie résiduelle T donnée et passant sous la mesure T -forward, l'espérance imbriquée I_T devient

$$I_T = E_Q[\delta_T(S_0 e^{gT} - S_T)^+] = P(0,T) E_{Q_T}[(K - S_T)^+].$$

Nous pouvons reconnaître le payoff d'une option de vente vanille avec un prix d'exercice de $K = S_0 e^{gT}$. Cette dernière espérance peut être réécrite à partir de l'équation (3.19) comme

$$E_{Q_T}[(K - S_T)^+] = E_{Q_T} \left[\left(K - \frac{S_0}{P(0,T)} e^{X_T} \right)^+ \right].$$

Pour simplifier la notation, la fonctionnelle du payoff sera notée h , ici

$$h(x) = \left(K - \frac{S_0}{P(0,T)} e^x \right)^+. \quad (3.21)$$

La question est maintenant comment calculer $E_{Q_T}[h(X_T)]$.

La réponse commence par la définition de la fonction ϕ_T comme l'expo-

sant de la fonction caractéristique de X_T

$$E_{Q_T}[e^{iuX_T}] = e^{\phi_T(u)},$$

d'où nous pouvons déduire la fonction de densité de la variable aléatoire X_T :

$$f_{X_T}(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-iux + \phi_T(u)} du. \quad (3.22)$$

Introduisons aussi la transformée de Fourier de la fonctionnelle du payoff

$$\hat{h}(u) = \int e^{-iux} h(x) dx \quad (3.23)$$

qui peut être étendue en une transformée de Fourier généralisée définie sur la ligne $\Im u = \Delta$ parallèle à l'axe des nombres réels dans le plan complexe, du moment que $e^{\Delta x} h(x)$ soit intégrable. En utilisant (3.21), le calcul de \hat{h} peut alors s'effectuer comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{h}(u) &= \int e^{-iux} \left(K - \frac{S_0}{P(0, T)} e^x \right)^+ dx \\ \hat{h}(u) &= \frac{S_0}{P(0, T)} \left[\frac{KP(0, T)}{S_0} \left[\frac{e^{-iux}}{-iu} \right]_{-\infty}^{\ln\left(\frac{KP(0, T)}{S_0}\right)} - \left[\frac{e^{(1-iu)x}}{1-iu} \right]_{-\infty}^{\ln\left(\frac{KP(0, T)}{S_0}\right)} \right] \end{aligned}$$

sous la condition de convergence $\Delta = \Im u > 0$. Finalement, il vient

$$\hat{h}(u) = K \frac{e^{-iu \ln\left(\frac{KP(0, T)}{S_0}\right)}}{(-iu)(-iu + 1)}. \quad (3.24)$$

Pour en revenir à l'espérance précédente :

$$\begin{aligned} E_{Q_T}[h(X_T)] &= \int h(x) f_{X_T}(x) dx && \text{par définition,} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int h(x) \int e^{-iux + \phi_T(u)} du dx && \text{d'après (3.22),} \\ E_{Q_T}[h(X_T)] &= \frac{1}{2\pi} \int \left(\int e^{-iux} h(x) dx \right) e^{\phi_T(u)} du \end{aligned}$$

par changement de l'ordre d'intégration. Nous obtenons alors d'après (3.23)

$$E_{Q_T}[h(X_T)] = \frac{1}{2\pi} \int \hat{h}(u) e^{\phi_T(u)} du \quad (3.25)$$

où la dernière intégrale est calculée sur la ligne $(\Delta) = \mathbb{R} + i\Delta$ du plan complexe.

En substituant (3.24) dans (3.25), il vient

$$\begin{aligned} E_{Q_T}[h(X_T)] &= K \frac{1}{2\pi} \int_{(\Delta)} \frac{e^{-iu \ln\left(\frac{KP(0,T)}{S_0}\right)}}{(-iu)(-iu+1)} e^{\phi_T(u)} du \\ &= K \frac{1}{2\pi} \int_{(\Delta)} e^{iu \ln(m)} \frac{e^{-iu \ln(P(0,T)) + \phi_T(u)}}{(-iu)(-iu+1)} du \end{aligned}$$

où $m = \frac{S_0}{K}$ est la distance à la monnaie,

$$E_{Q_T}[h(X_T)] = K \frac{1}{2\pi} \int_{(\Delta)} e^{iuv} \zeta(u) du$$

où v est le logarithme de la distance à la monnaie et $\zeta(u)$ est la partie fractionnelle de l'intégrande. Finalement, nous avons

$$E_{Q_T}[h(X_T)] = K e^{-\Delta v} \times \frac{1}{2\pi} \int_{(\mathbb{R})} e^{iuv} \zeta(u + i\Delta) du \quad (3.26)$$

après le changement de variable $u \rightarrow u + i\Delta$.

Le terme de droite de (3.26) est la transformée de Fourier inverse de $\zeta(u + i\Delta)$. Ce constat autorise la mise en œuvre immédiate d'un algorithme numérique très efficace, à savoir la transformée de Fourier rapide.

Il reste à calculer la fonction $\phi_T(u)$. Il se trouve qu'elle peut être calculée de façon explicite. En effet, soit $\phi_J(u)$ la fonction caractéristique des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de saut $J_i = \ln((Y)_i)$. L'équation (3.20) donne

$$\begin{aligned} E_{Q_T}[e^{iuX_T}] &= e^{\phi_T(u)} \\ &= \exp\left(-iu\ell T + iu \int_0^T \left(-\frac{1}{2}\sigma^2 + \rho\sigma\sigma_P(s,T) - \frac{1}{2}\sigma_P^2(s,T)\right) ds\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2}u^2 \int_0^T \left(\rho^2\sigma^2 - 2\rho\sigma\sigma_P(s,T) + \sigma_P^2(s,T) + \sigma^2(1-\rho^2)\right) ds\right) \\ &\times \exp\left(T[\lambda(\phi_J(u) - 1) - \lambda\kappa]\right). \end{aligned}$$

En définissant

$$\Sigma_T^2 = \int_0^T (\sigma^2 - 2\rho\sigma\sigma_P(s, T) + \sigma_P^2(s, T)) ds \quad (3.27)$$

et en remarquant que

$$\kappa = E_{Q_T}[Y - 1] = E_{Q_T}[e^J - 1] = \phi_J(-i) - 1,$$

l'exposant caractéristique ϕ_T peut s'écrire de manière explicite comme :

$$\phi_T(u) = -iu\ell T - \frac{iu}{2}\Sigma_T^2 - \frac{u^2}{2}\Sigma_T^2 + \lambda T(\phi_J(u) - \phi_J(-i)). \quad (3.28)$$

3.3.2.2 Valeur actualisée des frais d'assurance

Par définition, F_t s'écrit

$$dF_t = \delta_t \ell S_t dt.$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} d(\delta_t S_t) &= -r_t \delta_t S_t dt + \delta_t dS_t \\ &= -r_t \delta_t S_t dt + \delta_t (r_t - \ell) S_t dt + \delta_t S_t - dM_t \\ &= -dF_t + \delta_t S_t - dM_t, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de déduire

$$F_T = \int_0^T dF_t = S_0 - \delta_T S_T + \int_0^T \delta_t S_t - dM_t.$$

Sans aucune perte de généralité, nous supposons à partir de maintenant que $S_0 = 1$.

Enfin, comme le dernier terme de l'expression de F_T est une intégrale par rapport à une martingale dont l'espérance mathématique est nulle, nous retrouvons un résultat de Milevsky et Posner (2001) sur la valeur au temps présent des frais d'assurance M&E :

$$ME(\ell) = E_Q[F_T] = 1 - E_Q[\delta_T S_T]. \quad (3.29)$$

En nous basant sur les équations (3.8) et (3.16), il vient :

$$\begin{aligned} ME(\ell) &= 1 - E_Q \left[e^{-\ell T - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \rho\sigma W_T + \sigma\sqrt{1-\rho^2} Z_T + \sum_{i=1}^{N_T} \ln((Y)_i) - \lambda\kappa T} \right] \\ &= 1 - E_Q \left[E_Q [e^{-\ell T} | T = t] \right], \end{aligned}$$

en conditionnant par rapport à la durée de vie T ,

$$ME(\ell) = 1 - \int_0^\infty e^{-\ell t} f_x(t) dt \quad (3.30)$$

où f_x est la densité de probabilité de la variable aléatoire T . Une caractéristique très intéressante est que seul intervient le modèle de mortalité choisi dans le calcul de la valeur actuelle des frais d'assurance, comme nous pouvons le constater en formule (3.30).

Si nous tenons compte du temps Θ restant avant l'échéance du contrat, nous pouvons déduire pour la valeur au temps présent des frais M&E :

$$\begin{aligned} ME(\ell) &= 1 - E_Q \left[e^{-\ell \min(T, \Theta)} \right] \\ &= 1 - E_Q \left[e^{-\ell T} \mathbf{1}_{\{T < \Theta\}} + e^{-\ell \Theta} \mathbf{1}_{\{T \geq \Theta\}} \right] \\ ME(\ell) &= 1 - \int_0^\Theta e^{-\ell t} f_x(t) dt - (1 - F_x(\Theta)) e^{-\ell \Theta}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

L'intégrale figurant dans l'équation (3.31) peut maintenant être calculée

$$\begin{aligned} \int_0^\Theta e^{-\ell t} f_x(t) dt &= \lambda(x) e^{b\lambda(x)} \int_0^\Theta e^{-\ell t} e^{\frac{t}{b}} e^{-b\lambda(x)e^{\frac{t}{b}}} dt \\ &= \lambda(x) e^{b\lambda(x)} \int_1^{e^{\frac{\Theta}{b}}} u^{-\ell b} e^{-b\lambda(x)u} du \end{aligned}$$

après le changement de variable $t \rightarrow b \ln(u)$, puis

$$\int_0^\Theta e^{-\ell t} f_x(t) dt = e^{b\lambda(x)} e^{(x-m)\ell} \int_{b\lambda(x)}^{b\lambda(x)e^{\frac{\Theta}{b}}} e^{-y} y^{-\ell b} dy$$

après le changement de variable $u \rightarrow \frac{y}{b\lambda(x)}$. Finalement, nous avons :

$$\int_0^{\Theta} e^{-\ell T} f_x(t) dt = e^{b\lambda(x)} e^{(x-m)\ell} \left(\Gamma(1 - \ell b, b\lambda(x)) - \Gamma(1 - \ell b, b\lambda(x) e^{\frac{\Theta}{b}}) \right)$$

où $\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt$ est la fonction gamma incomplète supérieure et la première variable a doit être strictement positive. Cette condition entraîne une limite supérieure sur les valeurs possibles du coût fixe prélevé ℓ :

$$\ell < \frac{1}{b}. \quad (3.32)$$

Finalement, la valeur actuelle des frais d'assurance M&E cumulés dans le cas d'un modèle de mortalité de type Gompertz s'écrit

$$ME(\ell) = 1 - e^{b\lambda(x)} e^{(x-m)\ell} \left[\Gamma(1 - \ell b, b\lambda(x)) - \Gamma(1 - \ell b, b\lambda(x) e^{\frac{\Theta}{b}}) \right] - e^{b\lambda(x) \left(1 - e^{\frac{\Theta}{b}}\right)} e^{-\ell\Theta}. \quad (3.33)$$

Le modèle de mortalité de Makeham rajoute une composante indépendante de l'âge à la force de mortalité de Gompertz (3.3) comme suit :

$$\lambda(x) = A + B.C^x, \quad (3.34)$$

où $B > 0, C > 1$ et $A \geq -B$.

Dans le cas du modèle de mortalité de Makeham, la présence de la constante A ne permet pas l'obtention de formules explicites comme dans le cas précédent. Par conséquent, une quadrature numérique est nécessaire pour calculer les frais M&E.

3.3.3 Étude numérique

Cette section est consacrée à l'analyse de l'impact de la présence des sauts, de l'introduction des taux d'intérêt stochastiques et de la mortalité. Les deux premières sous-sections donnent une analyse numérique de l'effet des sauts et des taux d'intérêt stochastique pris à part. La dernière sous-section examine l'effet combiné des trois facteurs de risque. Dans toute la section, les modèles de mortalité utilisés ont été ajustés à partir de données réelles.

3.3.3.1 Impact des sauts

Dans cette sous-section, seul l'impact des sauts sur la dynamique du portefeuille d'actifs investis dans l'unité de compte est pris en compte. Ainsi, la structure par terme des taux d'intérêt est plate. L'échéance du contrat d'assurance est fixé à l'âge de 75 ans. Le modèle de mortalité choisi est celui de Gompertz. Les paramètres du modèle de Gompertz utilisés dans cette sous-section et la suivante sont ceux obtenus par Milevsky et Posner (2001) et figurant au tableau 3.1.

Pour apprécier l'impact des sauts sur la juste valeur des frais d'assurance M&E, nous verrons tour à tour le cas sans aucun saut, le modèle originel développé par Milevsky et Posner (2001) donc et deux modèles diffusifs et sauts. La volatilité dans le cas sans sauts est fixée à 20 %. Dans le cas du premier modèle diffusif et sauts, à savoir le modèle de Merton, donné ici par souci de comparaison, les sauts sont modélisés par des variables aléatoires gaussiennes indépendantes et identiquement distribuées de moyenne μ_J et d'écart-type σ_J . Nous prendrons $\mu_J = 0$ et $\sigma_J = 0.25$.

Dans le cas du modèle diffusif et sauts de Kou, les sauts $J = \ln(Y)$ sont de nouveau indépendants et identiquement distribués. Cette fois-ci, leur loi suit une exponentielle double

$$f_J(y) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 y} 1_{y>0} + q\lambda_2 e^{\lambda_2 y} 1_{y\leq 0} \quad (3.35)$$

avec $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q = 1$, $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. Les paramètres suivants serviront de paramètres de référence pour le modèle de Kou : $p = 0.4$, $\lambda_1 = 10$ et $\lambda_2 = 5$.

La figure 3.6 montre la sensibilité du coût annuel ℓ de la garantie – mesuré en points de base (bp) – du risque d'assurance au taux d'arrivée des sauts. La partie diffusie est caractérisée par une volatilité de 20 % et les paramètres de la composante de sauts sont les paramètres de référence du modèle de Kou précisés précédemment. À titre d'illustration, le cas considéré concerne une femme âgée de 50 ans à la date de la souscription. Le capital maximal que le bénéficiaire du contrat peut obtenir est plafonné à 200 % de la somme initialement investie par l'assurée.

Il apparaît que le coût du risque d'assurance croît avec le taux d'arrivée des sauts. Cette propriété vient du caractère optionnel incorporé dans le

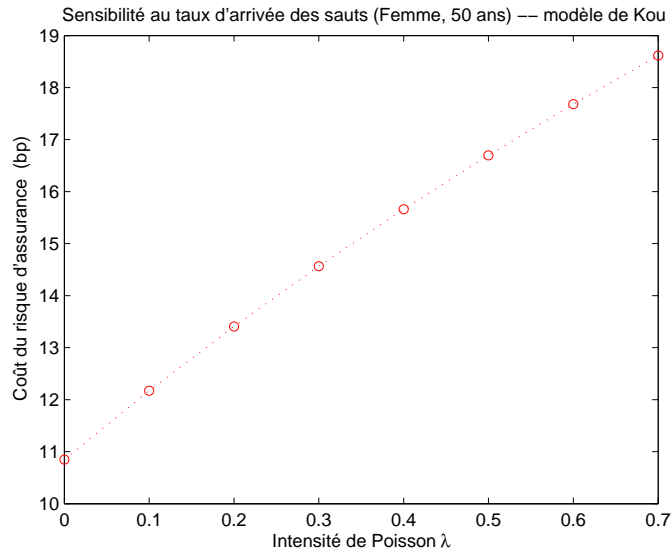


FIGURE 3.6 – Sensibilité au taux d'arrivée des sauts – $r = 6\%$, taux minimum garanti $g = 5\%$, plafond de 200%. Modèle de mortalité de Gompertz.

contrat GMDB : il y a une sensibilité positive à un accroissement général de la variation totale du processus sous-jacent.

Continuons d'explorer l'impact des sauts sur la juste valeur des frais prélevés en contrepartie du risque d'assurance. En retenant les paramètres de référence de la composante de sauts du modèle de Kou, nous gardons cette fois-ci la variation quadratique totale constante et égale à 1.5 fois la variation du cas sans sauts. En conséquence, la partie diffusive du modèle de Kou est fixée de manière à garder la variation quadratique totale du processus stochastique constante.

De façon contrastée, la figure 3.7 montre alors que le coût du risque d'assurance décroît avec le taux d'arrivée des sauts. La variation quadratique gagnée par la composante des sauts se trouve en fait compensée par la décroissance de la variation enregistrée sur la partie diffusive. Ainsi, la décroissance du coût du risque d'assurance peut s'expliquer par un effet plus prononcé du tassement de la variation de la partie diffusive.

À partir de maintenant, l'intensité du processus de Poisson sera arbitrairement fixé à $\lambda = 0.5$ dans les deux modèles diffusifs et sauts. Par ailleurs, la partie diffusive sera dans les deux cas telle que la variation quadratique

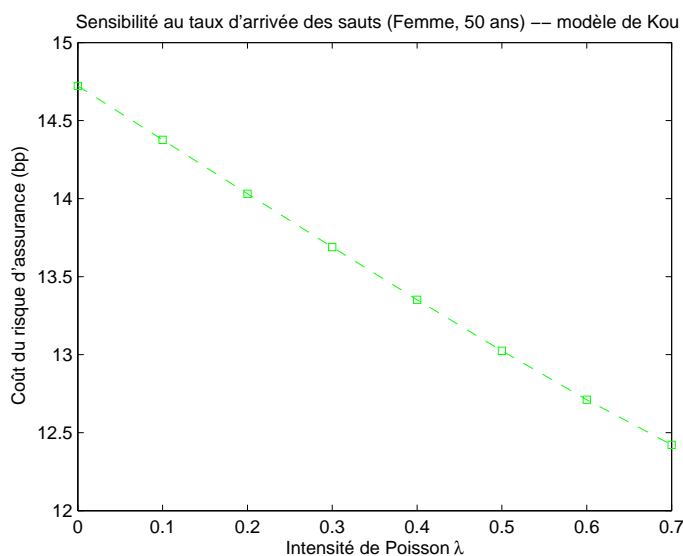


FIGURE 3.7 – Sensibilité au taux d’arrivée des sauts – $r = 6\%$, taux minimum garanti $g = 5\%$, plafond de 200%. Modèle de mortalité de Gompertz – La variation quadratique totale est gardée constante.

totale du processus restera égale à 1.5 fois la variation quadratique dans le cas sans sauts, sauf indication explicite du contraire.

Les tableaux suivants montrent le pourcentage total des frais d’assurance M&E cumulés par rapport à la somme investie dans les trois modèles, sans sauts et diffusifs avec sauts, pour la souscription d’une femme (voir le tableau 3.4) et d’un homme (voir le tableau 3.5) à divers âges lors de la souscription.

Nous pouvons constater que le coût du risque d’assurance est sensiblement le même dans les deux modèles diffusifs et sauts, leur variation quadratique totale étant la même.

3.3.3.2 Impact des taux d’intérêt stochastiques

Dans toute la suite, nous nous concentrons sur le cas du modèle diffusif et sauts de Kou. Cette sous-section porte plus particulièrement sur l’étude de l’impact de taux d’intérêts stochastiques.

La courbe initiale des rendements à l’échéance $y(0, t)$ est supposée obéir à l’équation paramétrique suivante $y(0, t) = \alpha - \beta e^{-\gamma t}$ où α, β et γ sont des constantes positives. La structure par terme des taux d’intérêt plate précédente avec un taux constant fixé à $r = 0.06$ sera aussi utilisée à titre

TABLE 3.4 – Impact des sauts – Cas d'une femme – $r = 6\%$, taux minimum garanti $g = 5\%$, plafond de 200%. Modèle de mortalité de Gompertz. Pour chaque modèle de sous-jacent, la colonne de gauche affiche l'importance relative des frais M&E cumulés via le ratio $ME(\ell)/S_0$. La colonne de droite affiche la juste valeur des frais annuels ℓ du risque d'assurance en points de base (bp).

Souscription (ans)	Cas sans sauts (%)	(bp)	Modèle de Merton (%)	(bp)	Modèle de Kou (%)	(bp)
30	0.76	1.77	1.24	2.89	1.16	2.70
40	1.47	4.45	2.18	6.61	2.04	6.19
50	2.52	10.85	3.41	14.72	3.21	13.86
60	2.99	21.58	3.75	27.24	3.55	25.74
65	2.10	22.56	2.61	28.12	2.47	26.59

TABLE 3.5 – Impact des sauts – Cas d'un homme – $r = 6\%$, taux minimum garanti $g = 5\%$, plafond de 200%. Modèle de mortalité de Gompertz. Pour chaque modèle de sous-jacent, la colonne de gauche affiche l'importance relative des frais M&E cumulés via le ratio $ME(\ell)/S_0$. La colonne de droite affiche la juste valeur des frais annuels ℓ du risque d'assurance en points de base (bp).

Souscription (ans)	Cas sans sauts (%)	(bp)	Modèle de Merton (%)	(bp)	Modèle de Kou (%)	(bp)
30	1.34	3.25	2.15	5.21	2.01	4.86
40	2.52	7.97	3.68	11.73	3.46	10.99
50	4.23	19.22	5.68	26.01	5.35	24.46
60	4.90	37.59	6.14	47.50	5.81	44.82
65	3.48	39.33	4.32	49.05	4.08	46.31

de comparaison. Le rendement à l'échéance est alors supposé converger vers r pour les maturités longues. La courbe initiale des rendements utilisée est la suivante :

$$y(0, t) = 0.0595 - 0.0195 \exp(-0.2933 t). \quad (3.36)$$

Comme annoncé précédemment, la structure de volatilité des taux d'intérêt est supposée être de forme exponentielle. Techniquement, nous pouvons l'écrire comme suit :

$$\sigma_P(s, T) = \frac{\sigma_P}{a} (1 - e^{-a(T-s)}), \quad (3.37)$$

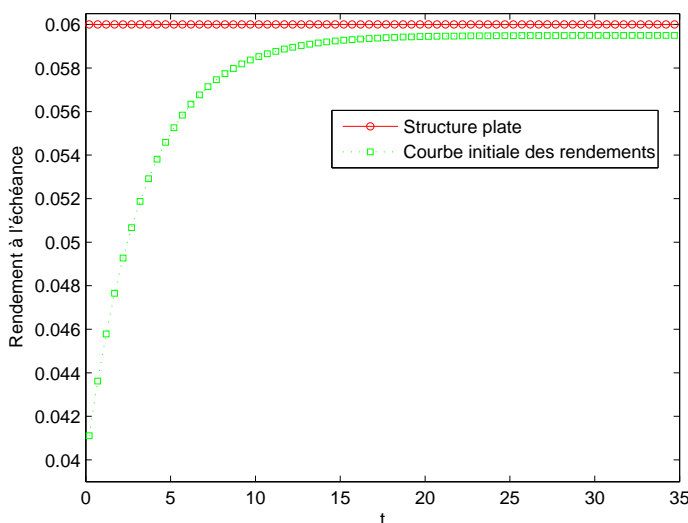


FIGURE 3.8 – Courbe initiale des rendements à l'échéance.

où $a > 0$. Dans toute la suite, nous prendrons $\sigma_P = 0.033333$, $a = 1$ et la corrélation entre le zéro-coupon et les actifs investis dans l'unité de compte sera fixée à $\rho = 0.35$.

La quantité Σ_T^2 peut alors être complètement spécifiée à partir de cette expression de la structure de volatilité. En effet, Σ_T^2 peut être calculée en introduisant (3.37) dans (3.27). D'un côté, nous avons :

$$\int_0^T \sigma_P(s, T) ds = \frac{\sigma_P}{a} \left(T - \frac{1}{a} (1 - e^{-aT}) \right)$$

et de l'autre :

$$\int_0^T \sigma_P^2(s, T) ds = \frac{\sigma_P^2}{a^2} \left(T - \frac{2}{a} (1 - e^{-aT}) + \frac{1}{2a} (1 - e^{-2aT}) \right).$$

Enfin, en combinant ces deux résultats intermédiaires, il vient

$$\Sigma_T^2 = \left(\frac{2\rho\sigma\sigma_P}{a^2} - \frac{3}{2} \frac{\sigma_P^2}{a^3} \right) + \left(\sigma^2 + \frac{\sigma_P^2}{a^2} - \frac{2\rho\sigma\sigma_P}{a} \right) T + \left(\frac{2\sigma_P^2}{a^3} - \frac{2\rho\sigma\sigma_P}{a^2} \right) e^{-aT} - \frac{\sigma_P^2}{2a^3} e^{-2aT}. \quad (3.38)$$

Les résultats rapportés dans les tableaux 3.6 et 3.7 montrent que la nature stochastique des taux d'intérêt a un impact énorme sur le juste prix du risque d'assurance que ce soit en fonction de l'âge à la souscription ou du sexe de l'assuré. Le tableau 3.7 montre que le prélèvement lié au risque

TABLE 3.6 – Impact des taux d'intérêt stochastiques – Cas d'une femme – $r = 6\%$, taux minimum garanti $g = 5\%$, plafond de 200%. Modèle de mortalité de Gompertz. Dans chaque cas, la colonne de gauche affiche l'importance relative des frais M&E cumulés via le ratio $ME(\ell)/S_0$. La colonne de droite affiche le juste coût annuel ℓ du risque d'assurance.

Souscription (ans)	Kou (structure plate) (%)	Kou (taux stochastiques) (bp)	Kou (taux stochastiques) (%)	Kou (taux stochastiques) (bp)
30	1.16	2.70	5.30	12.63
40	2.04	6.19	6.84	21.29
50	3.21	13.86	8.04	35.63
60	3.55	25.74	6.77	49.93
65	2.47	26.59	4.11	44.61

d'assurance peut être aussi élevé que 88.65 bp dans le cas d'un souscripteur de sexe masculin âgé de 60 ans au moment de la souscription dans un environnement à taux d'intérêt stochastiques.

Ainsi, l'effet dû aux taux d'intérêt stochastiques est significativement plus prononcé que l'effet des sauts. En effet, plus la maturité est longue, plus les sauts tendent à se lisser, ce qui amoindrit leur impact. De manière alternative, la nature stochastique des taux d'intérêt se fait profondément ressentir pour la durée typique des contrats d'assurance étudiés dans ce chapitre.

Dans ces deux tableaux, le coût annuel lié au risque d'assurance décroît si la souscription a lieu après 60 ans. Cette décroissance après un certain âge à la souscription sera de nouveau vérifiée dans les figures données dans la section suivante. L'approche de l'échéance contractuelle, fixée à 75 ans pour rappel, explique ce phénomène.

3.3.3.3 Impact combiné des facteurs de risque

L'impact du modèle de mortalité utilisé est combiné aux facteurs de risque étudiés précédemment dans cette sous-section. Les paramètres des modèles de mortalité de Gompertz et de Makeham estimés par Melnikov et Romaniuk (2006) que nous pouvons retrouver dans le tableau 3.2 sont utilisés à partir d'ici.

Dans toutes les figures de cette sous-section, la courbe en cercles correspond au modèle sans sauts et un taux d'intérêt constant. La courbe en croix

TABLE 3.7 – Impact des taux d'intérêt stochastiques – Cas d'un homme – $r = 6\%$, taux minimum garanti $g = 5\%$, plafond de 200%. Modèle de mortalité de Gompertz. Dans chaque cas, la colonne de gauche affiche l'importance relative des frais M&E cumulés via le ratio $ME(\ell)/S_0$. La colonne de droite affiche le juste coût annuel ℓ du risque d'assurance.

Souscription (ans)	Kou (structure plate) (%)	Kou (taux stochastiques) (bp)	Kou (taux stochastiques) (%)	Kou (taux stochastiques) (bp)
30	2.01	4.86	8.87	22.27
40	3.46	10.99	11.38	37.81
50	5.35	24.46	13.38	64.07
60	5.81	44.82	11.14	88.65
65	4.08	46.31	6.82	78.55

TABLE 3.8 – Impact combiné sur la juste valeur des frais annuels ℓ du risque d'assurance – États-Unis – $g = 5\%$, plafond de 200%.

Âge	Sans sauts	Gompertz		Makeham
		Kou (plate)	Kou (stoch.)	Kou (stoch.)
30	4.79	6.99	30.23	32.20
40	11.16	15.15	50.86	52.34
50	24.88	31.50	82.50	83.03
60	44.45	52.97	105.27	104.77
65	45.20	53.18	90.41	89.78

TABLE 3.9 – Impact combiné sur la juste valeur des frais annuels ℓ du risque d'assurance – Suède – $g = 5\%$, plafond de 200%.

Âge	Sans sauts	Gompertz		Makeham
		Kou (plate)	Kou (stoch.)	Kou (stoch.)
30	3.27	4.92	22.83	23.94
40	8.22	11.35	39.42	40.41
50	19.85	25.29	66.73	67.42
60	38.22	45.58	90.53	90.72
65	39.87	46.96	79.83	79.85

TABLE 3.10 – Impact combiné sur la juste valeur des frais annuels ℓ du risque d'assurance – Japon – $g = 5\%$, plafond de 200%.

Âge	Gompertz			Makeham
	Sans sauts	Kou (plate)	Kou (stoch.)	Kou (stoch.)
30	3.58	5.36	24.77	26.04
40	8.94	12.32	42.77	43.91
50	21.45	27.31	72.34	73.08
60	41.04	48.94	97.56	97.70
65	42.71	50.30	85.68	85.63

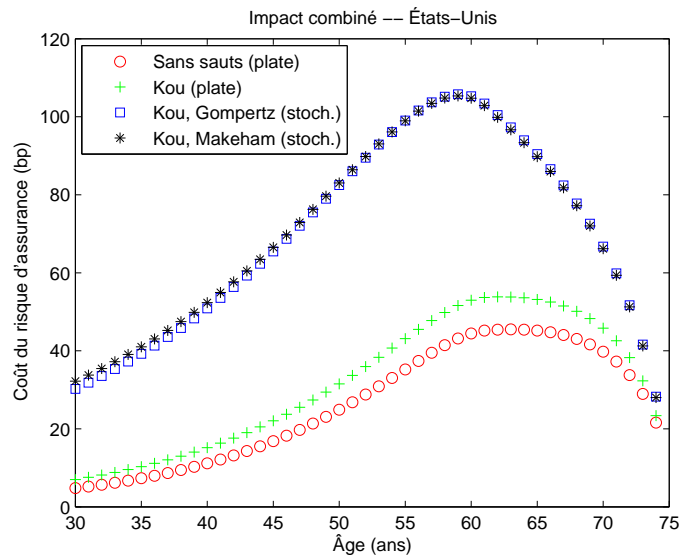


FIGURE 3.9 – Juste coût ℓ lié au risque d'assurance – États-Unis

voit l'introduction de sauts double exponentiels de Kou mais la structure par terme des taux d'intérêt reste toujours plate. La courbe composée de carrés montre l'effet combiné des sauts et des taux d'intérêt stochastiques par rapport au modèle sans sauts. Ces trois premières courbes sont construites avec un modèle de mortalité de Gompertz. La quatrième courbe, en étoiles, prend en compte sauts et taux d'intérêt stochastiques, mais cette fois-ci le modèle de mortalité est celui de Makeham.

La figure 3.9 affiche le coût ℓ du risque d'assurance en fonction de l'âge à la souscription du contrat aux États-Unis. Le coût lié au risque d'assurance croît pour tous les modèles considérés de 30 ans à la souscription jusqu'à la soixantaine environ. Le coût décroît fortement après la soixantaine comme

3.3 Contrat à bénéfice minimum garanti en cas de décès (GMDB)

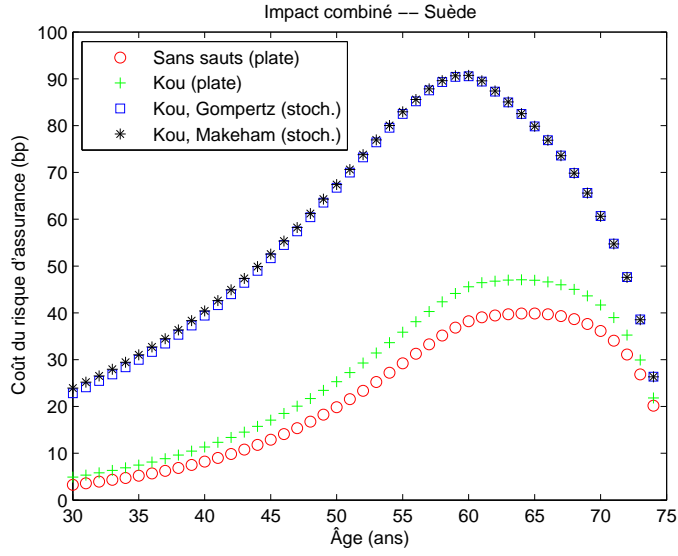


FIGURE 3.10 – Juste coût ℓ lié au risque d'assurance – Suède

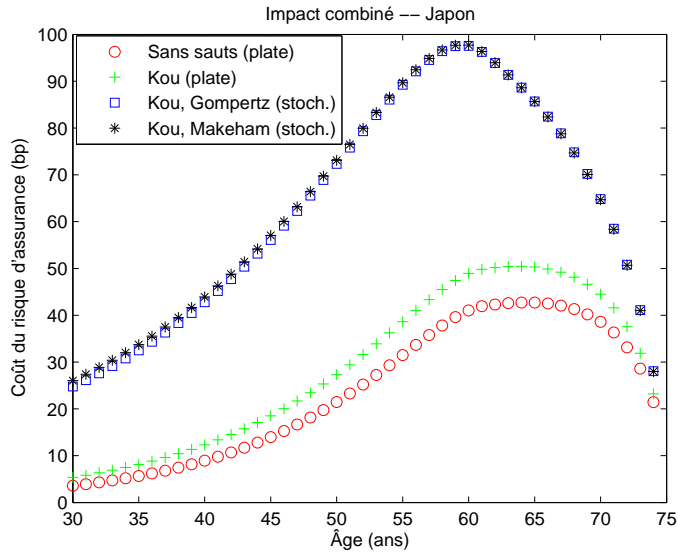


FIGURE 3.11 – Juste coût ℓ lié au risque d'assurance – Japon

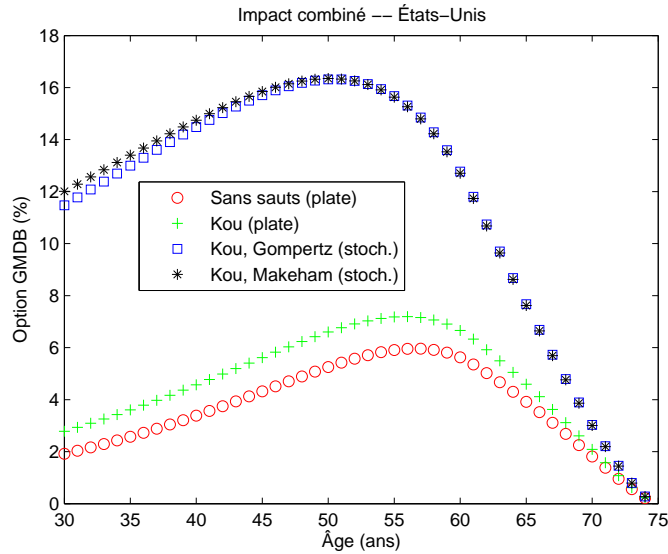


FIGURE 3.12 – Impact combiné sur la juste valeur de l'option GMDB – États-Unis

l'échéance du contrat, fixée à 75 ans, approche. Le même phénomène peut être constaté pour le cas de la Suède (figure 3.10) et du Japon (figure 3.11).

Les deux courbes les plus basses dans toutes ces figures correspondent de façon saisissante à une structure par terme des taux d'intérêt plate. L'impact dû aux sauts est moins prononcé que celui dû aux taux d'intérêt stochastiques comme le montrent les deux courbes les plus élevées qui correspondent toutes deux à un environnement avec des taux d'intérêt stochastiques. La bande étroite dans laquelle sont localisées ces deux courbes hautes montre que le changement de modèle de mortalité a un effet très amoindri par rapport à celui de la prise en compte de taux d'intérêt stochastiques.

Les valeurs de l'option GMDB correspondant aux justes coûts annuels du risque d'assurance ci-dessus ont été calculées et reportées dans la figure 3.12 pour les États-Unis, la figure 3.14 pour la Suède et la figure 3.16 pour le Japon. Bien entendu, d'après l'équation principale donnée en (3.12), chaque valeur de l'option GMDB ainsi calculée correspond aux frais cumulés M&E prélevés au taux ℓ par la compagnie d'assurance durant toute la vie de la police.

Les valeurs de l'option GMDB croissent de nouveau dans tous les modèles jusqu'à un certain âge et redescendent vers zéro au fur et à mesure

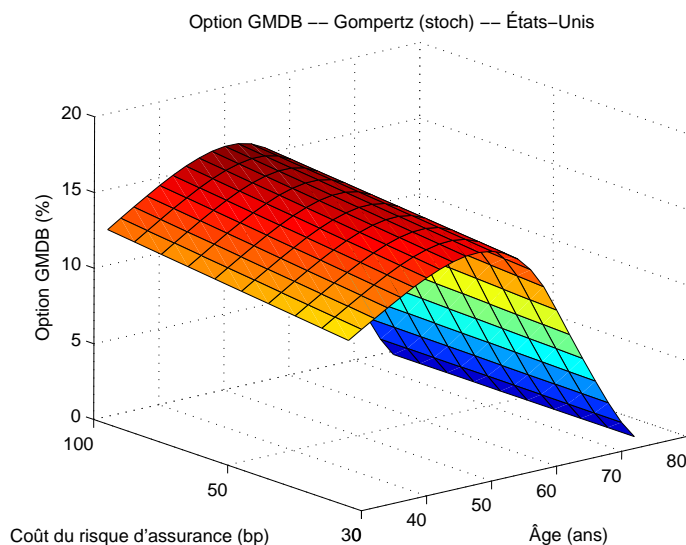


FIGURE 3.13 – Valeur de l’option GMDB en fonction du coût du risque d’assurance et de l’âge à la souscription – Impact combiné – États-Unis

que l’âge de la souscription approche de l’âge contractuel d’expiration du contrat. Dans le cas sans sauts, ce dernier phénomène peut s’expliquer techniquement par la borne supérieure de l’intégrale figurant dans l’équation (3.13) qui est le temps Θ avant la fin du contrat et qui tend alors lui-même vers zéro. De façon plus générale, la garantie octroyée par la police d’assurance a de moins en moins de valeur à mesure que l’âge de la souscription approche la date de terminaison du contrat. En effet, l’investisseur potentiel n’a aucune incitation à acheter le contrat GMDB s’il est quasiment certain qu’il ne pourra vraisemblablement pas en bénéficier dans le court laps de temps avant la fin du contrat. Bien plus, si l’horizon d’investissement est court, l’incertitude concernant les perspectives économiques est très faible et le souscripteur potentiel pourrait éventuellement mieux tirer profit de la situation en investissant directement dans une obligation d’État.

La figure 3.13 pour les États-Unis, la figure 3.15 pour la Suède et la figure 3.17 pour le Japon présentent les valeurs de l’option GMDB en fonction de l’âge à la souscription et en fonction du niveau du coût du risque d’assurance. Ces figures tiennent compte de l’impact des sauts du modèle de Kou et des taux d’intérêt stochastiques avec un modèle de mortalité de Gompertz. Le phénomène de tassement vers zéro est de nouveau observé lorsque les âges

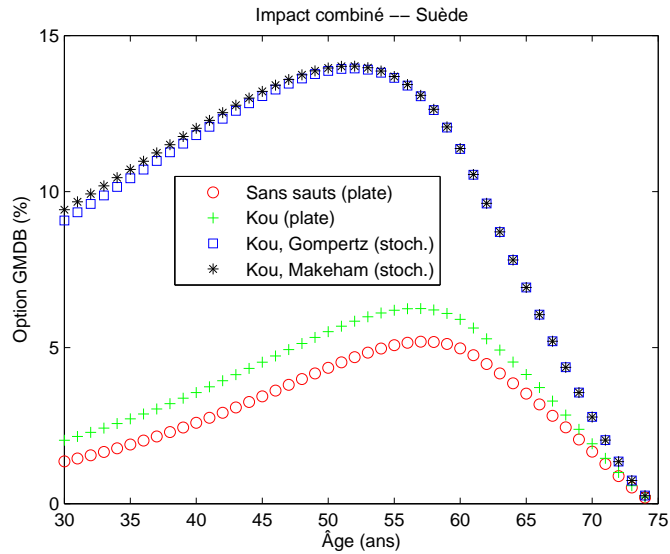


FIGURE 3.14 – Impact combiné sur la juste valeur de l’option GMDB – Suède

à la souscription sont élevés. Pour des souscripteurs jeunes, la valeur de l’option GMDB augmente naturellement avec le niveau du prélèvement lié au risque d’assurance.

Cette sous-section est la plus complète car y ont été pris en compte les sauts et les taux d’intérêt stochastiques ainsi que l’impact de deux modèles de mortalité, qui a pu être étudié à travers leur estimation sur les trois pays développés mentionnés auparavant. Comme nous pouvons le constater sur les tableaux 3.8, 3.9, et 3.10 ainsi que sur les figures 3.9, 3.10 et 3.11, le comportement du juste coût du risque d’assurance en fonction de l’âge à la souscription est globalement du même type quel que soit le modèle considéré. Les faits suivants peuvent cependant être soulignés. Premièrement, les sauts seuls ne changent pas de beaucoup le juste taux de prélèvement alors que la prise en compte de taux d’intérêt stochastiques remonte le juste coût du risque d’assurance de façon substantielle. Deuxièmement, le changement du modèle de mortalité utilisé n’a pas eu d’impact significatif. Enfin, mentionnons la présence d’une certaine hiérarchie entre les trois pays étudiés. Dans l’ordre, le juste coût en Suède est le plus bas, suivi du Japon et des États-Unis. C’est un phénomène qui peut s’expliquer par les estimations de paramètres de modèle de mortalité reportés dans le tableau 3.2, en par-

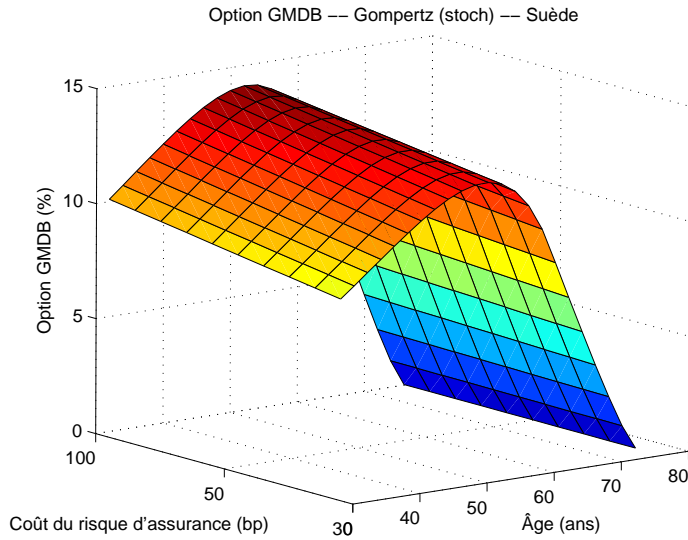


FIGURE 3.15 – Valeur de l’option GMDB en fonction du coût du risque d’assurance et de l’âge à la souscription – Impact combiné – Suède

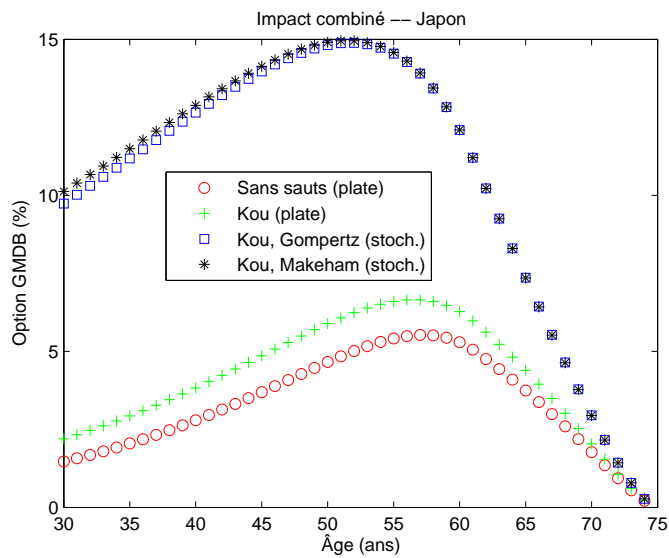


FIGURE 3.16 – Impact combiné sur la juste valeur de l’option GMDB – Japon

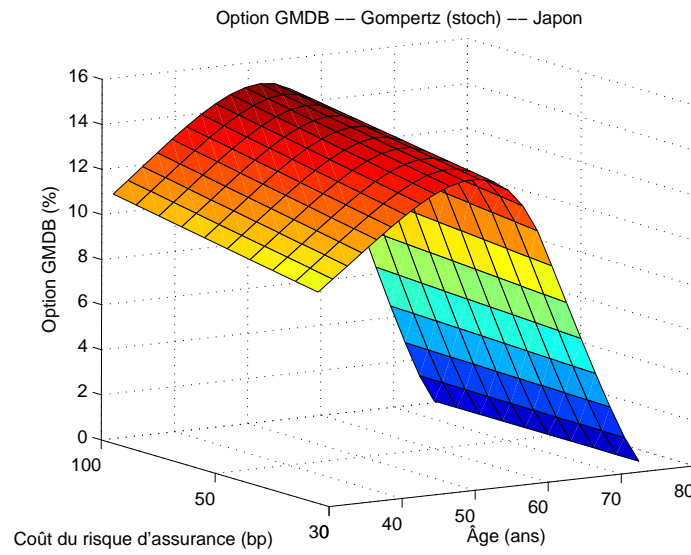


FIGURE 3.17 – Valeur de l’option GMDB en fonction du coût du risque d’assurance et de l’âge à la souscription – Impact combiné – Japon

ticulier le paramètre B . Il peut aussi être relié aux baisses des indices de mortalité mentionnées par Melnikov et Romaniuk (2006).

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré deux polices d'assurance-vie, le contrat à garantie flexible en cas de vie (PEFG) et le contrat à bénéfice minimum garanti en cas de décès (GMDB). Le contrat PEFG verse au souscripteur à l'échéance de la police, s'il est toujours en vie, le maximum entre la valeur à cet instant du portefeuille d'actifs investi et la valeur au même moment d'un actif moins risqué qui sert de garantie. La valeur de ce contrat a alors été obtenue en faisant intervenir la probabilité de survie de l'assuré à l'échéance et la valeur d'une option d'échange entre le portefeuille d'actifs et la garantie flexible.

Le contrat GMDB offre au bénéficiaire, en cas de décès de l'assuré, le maximum entre la valeur du capital initial capitalisée à un taux minimum garanti jusqu'au décès et la valeur à ce moment des investissements de la somme versée effectués sur le marché financier au travers d'une unité de compte. D'un point de vue financier, l'évaluation de ce contrat est effectuée par une analyse d'actifs contingents. Jusqu'ici, le juste prix de ce contrat a été obtenu dans le cadre de Black et Scholes comme dans Milevsky et Posner (2001) ou dans le cadre d'un modèle log-normal à changement de régime comme dans Hardy (2003).

Le cadre de Black et Scholes a alors été étendu dans ce chapitre en un cadre plus général qui permet de prendre en compte taux d'intérêt stochastiques et sauts. De façon spécifique, la valeur de marché des actifs investis via l'unité de compte est supposé suivre un processus de Lévy géométrique. Nous faisons plus particulièrement usage de la sous-classe des processus diffusifs et sauts. Par ailleurs, la mortalité est modélisée par une loi de type Gompertz ou Makeham. Une méthodologie d'évaluation complète est alors développée et illustrée par une étude numérique basée sur l'algorithme de transformée de Fourier rapide. Incidemment, ce chapitre propose une façon d'évaluer des options dans une économie non gaussienne et avec des taux stochastiques. De nouveaux résultats sont alors obtenus sur le juste prix associé au risque d'assurance des contrats GMDB.

Pour la maturité type de ces contrats, nous avons trouvé que l'introduction de sauts tout en gardant la variation quadratique totale constante dans une économie avec une structure des taux d'intérêt par terme plate ne change pas beaucoup ce juste coût. Par ailleurs, l'introduction de taux d'in-

térêt stochastiques augmente substantiellement ce juste coût. Un résultat important qui en découle est que, en contraste avec l'article de Milevsky et Posner (2001), le juste prix du risque d'assurance obtenus sont significativement plus élevés. Cependant ce juste prix demeure encore moins élevé que les frais demandés par les compagnies d'assurance même si l'écart peut être faible, en particulier pour des assurés dont l'âge au moment de la souscription est aux alentours de la soixantaine.

Chapitre 4

Retour sur la théorie de la ruine

Introduction

La théorie classique du risque depuis les travaux de Lundberg (1903) modélise les réserves d'une compagnie d'assurance par une dérive et un processus de Poisson composé. Plusieurs extensions à ce modèle ont depuis été proposées dans la littérature. Ces extensions font en général appel à des processus de la classe des processus de Lévy. Les travaux de Dufresne et Gerber (1991), de Furrer et Schmidli (1994) et de Furrer (1998) introduisent des perturbations de ces réserves par un mouvement brownien, une diffusion ou un processus de Lévy stable négatif. Une autre approche proposée dans la littérature est une modélisation directe des réserves par divers processus de Lévy. Ainsi, les travaux de Dufresne, Gerber et Shiu (1991) et de Dickson et Waters (1993) qui donnent les probabilités de ruine avec des réserves modélisées par un processus Gamma ou ceux de Klüppelberg, Kyprianou et Maller (2004) fournissant les formules asymptotiques de probabilité de ruine à l'infini avec des processus de Lévy généraux. Par contraste, ce chapitre s'attachera à obtenir les probabilités de ruine en temps fini.

Dans la lignée des chapitres précédents, le calcul de ces probabilités de ruine se fera dans un premier temps avec les processus de Kou, de la classe des processus diffusifs et sauts, où la partie sauts est un processus de Poisson composée avec une loi exponentielle double. Dans un second temps, le processus de surplus est modélisé par un processus de Lévy stable. Dans

ce modèle, le processus de surplus est impacté tant par des sauts négatifs que par des sauts positifs. La ruine survient lorsque ce processus atteint un niveau donné. Le calcul de la probabilité de ruine en temps fini se fait ainsi à partir du temps de premier passage, ou de façon équivalente, à partir de l'infimum du processus de Lévy stable. Pour y parvenir, ce chapitre présente une version étendue du cadre proposé par Rogers (2000), qui permettait le calcul de la probabilité du premier temps de passage de processus spectralement négatifs. Une application en finance a été proposée par ailleurs par Hilberink et Rogers (2002). Contrairement à ces travaux, nous avons en même temps ici des sauts positifs et négatifs pour le processus de surplus : il est raisonnable en effet de supposer que dans le monde réel, les réserves puissent être affectées tant par des sauts vers le haut que des sauts vers le bas. Le fait de modéliser le processus de surplus par un processus à sauts qui puisse incorporer des sauts tant positifs que négatifs vient du fait que le surplus, étant la différence entre les actifs et les passifs, est nécessairement impacté par les chocs subis par les actifs investis sur les marchés financiers.

Dans le cadre étendu proposé ici, le processus de surplus ne comporte plus de partie dérive. Ceci, ajouté au fait que les processus de Lévy stable considérés ici oscillent à l'infini, donne une perspective nouvelle sur la théorie de la ruine. En particulier, la probabilité de survie à l'infini devient nulle. En effet, nous soutenons que dans le monde réel, toute compagnie sera en situation de détresse sur un intervalle de temps suffisamment long. Cependant, sur un intervalle de temps fini, les probabilités de survie sont non nulles et peuvent même être très élevées : l'étude de ces probabilités constitue l'objet principal de ce chapitre.

Dans la première section, le cadre de travail est introduit, en particulier les définitions et les caractéristiques des processus utilisés sont données. Une deuxième section expose la théorie et les moyens utilisés pour calculer des probabilités de ruine en temps fini et infini avec des processus de Kou et des processus de Lévy stables. Cette section se termine avec la mise en œuvre et l'implémentation de ces modèles. Une troisième section discute les résultats numériques obtenus : d'abord, l'ajustement sur des données empiriques justifie l'intérêt de l'utilisation de ces deux classes de processus, ensuite, quelques faits stylisés du modèle stable sont avancés.

4.1 Processus de Lévy

Nous commençons par donner la caractérisation des processus qui vont servir à modéliser le surplus de la compagnie d'assurance considérée. Dans tout ce chapitre, le surplus initial sera noté par u et le processus de surplus est modélisé par $u + X$ où X est un processus de Lévy tel que $X_0 = 0$. Comme annoncé dans l'introduction, nous considérerons les cas où X est un processus diffusif à sauts doubles exponentiels et où X est un processus de Lévy stable.

4.1.1 Processus à sauts doubles exponentiels

Nous décrivons brièvement ici une classe de processus diffusifs à sauts utilisée abondamment dans la littérature en finance. Appelés processus de Kou, après l'article fondateur de Kou (2002), ces processus consistent en un mouvement brownien arithmétique auquel s'ajoute un processus de Poisson composé dont les sauts suivent une loi double exponentielle. Leur dynamique s'écrit ainsi :

$$X_t = at + \sigma z_t + \sum_{k=1}^{N_t} Y_k, \quad (4.1)$$

où z est un mouvement brownien standard, N est un processus de Poisson d'intensité constante λ et où les (Y_k) sont des variables aléatoires i.i.d supposées suivre une loi exponentielle double de densité :

$$f_Y(y) = p \lambda_1 e^{-\lambda_1 y} 1_{\{y \geq 0\}} + (1-p) \lambda_2 e^{\lambda_2 y} 1_{\{y < 0\}}$$

où λ_1 et λ_2 sont strictement positifs et $p \in [0, 1]$ est la probabilité de sauts positifs.

Noter que l'exposant de Laplace du processus de Kou est donné par :

$$G(x) = ax + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 + \lambda \left(p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - x} + (1-p) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + x} - 1 \right). \quad (4.2)$$

4.1.2 Processus stables

Les processus stables que nous considérons font partie des processus de Lévy. Leurs incréments, stationnaires et indépendants par définition, suivent une loi stable. Bien entendu, leurs lois marginales sont aussi stables.

Pour tout processus de Lévy X , la connaissance de la loi de X_1 suffit à décrire entièrement le processus. La fonction caractéristique de X_1 s'écrit :

$$E(e^{iuX_1}) = e^{i\mu u - \sigma^\alpha |u|^\alpha [1 - i\beta \epsilon(u) \tan(\frac{\pi\alpha}{2})]}$$

avec $\alpha \neq 1$ et en définissant

$$\epsilon(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \\ -1 & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

Les lois de X_t et de $X_t - X_s$ s'en déduisent aisément. Nous considérerons une paramétrisation de cette classe de processus où $\mu = 0$ et où la volatilité est normalisée de telle manière qu'en définissant

$$c = \left(1 + \beta^2 \tan^2\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)^{-1/2} \quad (4.3)$$

l'expression de l'exposant de Fourier, définie uniquement sur la ligne imaginaire dans le plan complexe, se ramène à

$$\Psi(iu) = -c|u|^\alpha \left(1 - i\beta \epsilon(u) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Ce choix correspond à la normalisation proposée par Doney (1987), où α et β sont les principaux paramètres qui décrivent le processus et qui ont besoin d'être calibrés. Le paramètre α sera pris différent de 1. Pour $0 < \alpha < 1$, le choix du paramètre β pourra être effectué dans l'intervalle $] -1, 1[$. Pour $1 < \alpha < 2$, β sera pris dans l'intervalle $[-1, 1]$. Cette paramétrisation plus restrictive est nécessaire pour les développements qui vont suivre. Elle reste cependant suffisamment riche pour décrire une large gamme de formes de loi.

Si nous comparons ces processus de Lévy stables avec les processus de Kou, ces derniers incorporent une dérive et une composante continue (le mouvement brownien) en plus de la composante purement à sauts présente dans la classe de processus stables que nous venons de décrire. Cependant, les processus de Kou ont une activité de sauts finie, contrairement aux processus de Lévy stables. Cela constitue un avantage clair pour les processus de Lévy stables. En effet, Carr et al. (2002) ont déjà relevé la pertinence des processus de Lévy à activité infinie pour modéliser des dynamiques.

4.2 Probabilités de ruine et de survie

Dans cette section, nous développons les formules de calcul des probabilités de survie et de ruine en temps fini. Nous montrons en particulier comment ces formules s'obtiennent par l'intermédiaire de transformées de Laplace simples ou doubles. Nous discutons aussi de la probabilité de ruine à l'infini dans le cas des processus stables et de Kou, du fait qu'elle soit égale à un ou non. Enfin, la mise en œuvre des formules ainsi obtenues conclura la section.

4.2.1 Factorisation de Wiener-Hopf

En guise de préliminaires, nous introduisons les outils mathématiques nécessaires à notre étude, à savoir les facteurs de Wiener-Hopf des classes de processus considérés. Dans un premier temps, d'importants résultats sur les trajectoires de processus de Lévy généraux, en particulier sur leurs fonctionnelles, sont rappelés. Pour un traitement détaillé, voir Satō (1999), Bertoin (1996) ou Bingham (1975). Dans un second temps, les facteurs de Wiener-Hopf de quelques processus sont donnés, dont ceux utilisés par ailleurs dans ce chapitre.

4.2.1.1 Fonctionnelles de processus de Lévy et factorisation

Soit $X = \{X_t \mid t \geq 0\}$ un processus de Lévy avec une valeur initiale nulle. Rappelons les définitions des diverses fonctionnelles de X suivantes :

$$S_t = \sup_{0 \leq s \leq t} X_s \quad (4.4)$$

le supremum courant,

$$I_t = \inf_{0 \leq s \leq t} X_s \quad (4.5)$$

l'infimum courant.

Par ailleurs, soit

$$R_x = \inf\{t > 0 \mid X_t < x\} \quad (4.6)$$

le premier temps de passage sous le niveau x ,

$$\Lambda_t = \inf\{s \in [0, t] \mid X_s \vee X_{s-} = S_t\} \quad (4.7)$$

le premier temps de passage au supremum et

$$\Gamma_x = x - X_{R_x} \quad (4.8)$$

le dépassement absolu sous x ou *overshoot*.

Comme il a été mentionné auparavant, la loi de l'infimum I s'avère particulièrement utile. Le franchissement du niveau de ruine correspond en effet au passage de l'infimum du processus en dessous de ce niveau. La factorisation probabiliste de Wiener-Hopf permettra d'obtenir cette loi.

L'idée sous-jacente à la factorisation de Wiener-Hopf est de décomposer une trajectoire en deux parties indépendantes (X^+, X^-) . Une première idée pourrait être de prendre à tout instant t , $X^+ = S_t$ le supremum courant, et prendre pour l'autre partie du processus la différence : $X^- = X_t - S_t$. Il est clair cependant que ces deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes. Il se trouve que cette décomposition peut être effectuée en prenant le supremum à un temps aléatoire indépendant (du processus stochastique) et exponentiel.

La factorisation de Wiener-Hopf correspond par conséquent à la décomposition $(X^+ = S_\eta, X^- = X_\eta - S_\eta)$ où η est une variable aléatoire exponentielle indépendante de paramètre $q > 0$. Il est à noter que la loi de $X_\eta - S_\eta$ est la même que celle de I_η . $S - X$ est le processus réfléchi au supremum : c'est un processus de Markov fort comme le montre Bertoin (1996).

Rappelons ici la définition des facteurs de Wiener-Hopf ψ^+ et ψ^- , introduits par ailleurs au chapitre 2 avec les équations (2.2) et (2.3) :

$$\psi^+(q, z) = E(e^{zS_\eta}) = q \int_0^{+\infty} e^{-qt} E(e^{zS_t}) dt$$

et

$$\psi^-(q, z) = E(e^{z(X_\eta - S_\eta)}) = E(e^{zI_\eta}) = q \int_0^{+\infty} e^{-qt} E(e^{zI_t}) dt.$$

Grâce à la propriété d'indépendance de X^+ et de X^- , la factorisation de Wiener-Hopf s'écrit :

$$E(e^{zX_\eta}) = E(e^{zS_\eta}) E(e^{z(X_\eta - S_\eta)}) = \psi^+(q, z)\psi^-(q, z).$$

Si l'exposant de Laplace de X est noté par $\Psi(z)$ avec

$$E(e^{zX_t}) = e^{t\Psi(z)}$$

qui existe au moins sur la ligne imaginaire, l'expression de la factorisation de Wiener-Hopf s'écrit alors

$$\frac{q}{q - \Psi(z)} = \psi^+(q, z)\psi^-(q, z). \quad (4.9)$$

En effet, pour le membre de gauche, il vient :

$$\begin{aligned} E(e^{zX_\eta}) &= q \int_0^{+\infty} e^{-qt} E(e^{zX_t}) dt \\ &= q \int_0^{+\infty} e^{-qt} e^{t\Psi(z)} dt \\ E(e^{zX_\eta}) &= \frac{q}{q - \Psi(z)}. \end{aligned}$$

Remarquons que le facteur ψ^+ est défini dans le demi-plan complexe gauche alors que ψ^- est défini dans le demi-plan droit.

Les formules générales suivantes sont les conséquences directes de la factorisation de Wiener-Hopf. Elles permettent, au moins théoriquement, d'obtenir les lois des diverses fonctionnelles de processus de Lévy rappelées en début de cette section. Ces formules suivent le développement effectué par Satō (1999), avec les termes ϕ^\pm qui correspondent à la factorisation de $\frac{q}{q - \Psi(iz)}$. Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned} q \int_0^{+\infty} e^{-qt} E\left(e^{iz_1 S_t + iz_2 (X_t - S_t) - z_3 \Lambda_t}\right) dt \\ = \phi^+(q + z_3, z_1)\phi^-(q, z_2) e^{\int_0^{+\infty} t^{-1} e^{-qt} (e^{-tz_3} - 1) P(X_t > 0) dt}. \end{aligned}$$

Pour le premier temps de passage et le dépassement du niveau x (ici

défini pour un franchissement vers le haut d'un niveau x positif) :

$$q \int_0^{+\infty} e^{-qx} E \left(e^{-\lambda R_x - v \Gamma_x} \right) dx = \frac{q}{q-v} \left(1 - \frac{\phi^+(\lambda, iq)}{\phi^+(\lambda, iv)} \right).$$

Voyons comment peuvent être obtenus les facteurs de Wiener-Hopf. Les résultats standard pour les obtenir sont les formules de Spitzer :

$$\psi^+(q, z) = e^{-\int_0^{+\infty} t^{-1} e^{-qt} dt \int_0^{+\infty} (1-e^{-zx}) P(X_t \in dx)} \quad (4.10)$$

et

$$\psi^-(q, z) = e^{-\int_0^{+\infty} t^{-1} e^{-qt} dt \int_{-\infty}^0 (1-e^{-zx}) P(X_t \in dx)} \quad (4.11)$$

Nous constatons que les facteurs de Wiener-Hopf sont en général difficiles à obtenir explicitement. La section suivante donnera les facteurs de Wiener-Hopf de quelques processus.

4.2.1.2 Facteurs de Wiener-Hopf de divers processus

Cas de base Dans le cas des mouvements browniens et avec la convention utilisée par Satō (1999), les facteurs de Wiener-Hopf s'écrivent simplement :

$$\phi_{BM}^+(q, z) = \frac{\sqrt{2q}}{\sqrt{2q} - iz}$$

et

$$\phi_{BM}^-(q, z) = \frac{\sqrt{2q}}{\sqrt{2q} + iz}.$$

La marche aléatoire de Bernoulli constitue un autre exemple où les facteurs de Wiener-Hopf ont une expression simple. Cependant, à part ces deux cas, les processus de Lévy à spectre unilatéral (uniquement positifs ou uniquement négatifs), les processus de Lévy stables et les processus de Kou ainsi que les processus *phase-type* sont les seuls autres exemples où les facteurs de Wiener-Hopf sont aisément manipulables.

Processus à spectre unilatéral Prenons l'exemple des processus à spectre négatif (SN) parmi les processus à spectre unilatéral. Ce sont des processus de Lévy qui présentent uniquement des sauts vers le bas. Leur

exposant de Laplace s'écrit :

$$\Psi(z) = \frac{\sigma^2 z^2}{2} + bz + \int_{-\infty}^0 (e^{zx} - 1 - zx \mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}}) \nu(dx)$$

où $\sigma > 0$, $b \in \mathbb{R}$, ν est une mesure sur $]-\infty, 0[$ avec $\nu(]-\infty, \epsilon]) < +\infty \forall \epsilon < 0$, et $\int_{-1}^0 x^2 \nu(dx) < +\infty$.

Ces processus ont une variation infinie. Une composante brownienne σ permet un comportement diffusif et une dérive b , qui peut être négative ou positive, apparaît également. Finalement, les bornes de l'intégrale montrent clairement que les sauts surviennent seulement vers le bas avec un taux d'arrivée ν . Les processus à spectre positif forment les autres processus à spectre unilatéral sont définis de la même manière mais cette fois-ci avec des sauts uniquement vers le haut.

Comparativement aux formules générales (4.10) et (4.11), les facteurs de Wiener-Hopf des processus à spectre négatif sont assez simples. En effet, ils s'écrivent :

$$\psi_{SN}^+(q, z) = \frac{\beta^*(q)}{\beta^*(q) - z} \quad (4.12)$$

et

$$\psi_{SN}^-(q, z) = \frac{q}{q - \Psi(z)} \frac{\beta^*(q) - z}{\beta^*(q)} \quad (4.13)$$

où $\beta^*(q)$ est la solution de l'équation $\Psi(\beta) = q$.

Processus doubles exponentiels Dans le cas de cette classe de processus, des expressions analytiques des facteurs de Wiener-Hopf sont de nouveau disponibles. En effet, comme Boyarchenko (2004) l'a remarqué, l'exposant de Laplace G défini à l'équation (4.2) peut être exprimé comme une fonction rationnelle, et de même pour $q - G(z)$. Si $\beta_{1,q}$ et $\beta_{2,q}$ sont les racines positives de l'équation $G(z) = q$, et $-\beta_{3,q}$ et $-\beta_{4,q}$ les racines négatives, les facteurs de Wiener-Hopf s'écrivent :

$$\psi_{KJ}^+(q, z) = \frac{\beta_{1,q}}{\beta_{1,q} - z} \frac{\beta_{2,q}}{\beta_{2,q} - z} \frac{\lambda_1 - z}{\lambda_1} \quad (4.14)$$

et

$$\psi_{KJ}^-(q, z) = \frac{\beta_{3,q}}{\beta_{3,q} + z} \frac{\beta_{4,q}}{\beta_{4,q} + z} \frac{\lambda_2 + z}{\lambda_2}. \quad (4.15)$$

Il est à noter que des résultats semblables peuvent être obtenus pour les processus *phase-type* que nous avons vu dans les deux premiers chapitres.

Processus stables Nous allons voir en particulier ici la solution proposée par Doney (1987) de la factorisation de Wiener-Hopf d'une sous-classe des processus de Lévy stables.

En effet, soit l'expression de l'exposant de Fourier de la loi stable suivante :

$$\Psi(iu) = -c|u|^\alpha \left(1 - i\beta\epsilon(u) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

où la normalisation de Doney est réutilisée, à savoir :

$$c = \left(1 + \beta^2 \tan^2\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)^{-1/2}. \quad (4.16)$$

Pour simplifier les calculs, Doney a utilisé $q = 1$ pour résoudre (4.9) :

$$\frac{1}{1 - \Psi(z)} = \psi_{SL}^+(1, z)\psi_{SL}^-(1, z)$$

où cette équation est valide sur la ligne imaginaire. Les solutions définies sur cette ligne, ψ_{SL}^+ et ψ_{SL}^- , sont les facteurs de Wiener-Hopf dans le cas des processus stables et peuvent être étendues analytiquement respectivement sur les demi-plans complexes gauche et droit.

Des représentations très générales ont été obtenues pour ces facteurs dans les années 50 mais elles sont encore loin d'être explicites. Pour le facteur ψ_{SL}^+ par exemple, il a été démontré que c'est l'extension sur le demi-plan complexe gauche de

$$\exp\left(-\frac{\sin(\pi\rho)}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\log(1 + (\lambda x)^\alpha)}{x^2 + 2x \cos(\pi\rho) + 1} dx\right)$$

où l'intégrale à l'intérieur de l'exponentielle est appelée intégrale de Darling (voir Darling (1956)) et où ρ est défini par

$$\rho = P(X_1 > 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\alpha} \tan^{-1}\left(\beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right).$$

Doney (1987) a obtenu des expressions plus simples des facteurs de Wiener-Hopf pour une sous-classe des processus de Lévy stables dont les

paramètres sont denses dans l'ensemble de toutes les valeurs possibles de α et β . Cette sous-classe est définie par

$$\rho + k = \frac{l}{\alpha}$$

où k et l sont des entiers, et où ρ est défini tel que précédemment.

Il a montré que ces facteurs de Wiener-Hopf s'écrivent :

$$\psi_{SL}^+(1, z) = E(e^{zS_{\lambda_1}}) = \frac{\prod_{r=0}^{k-1} ((-1)^l (-z)^\alpha + e^{i\alpha(k-1-2r)\pi})}{\prod_{r=0}^{l-1} ((-1)^{k+1} z + e^{i(l-1-2r)\pi/\alpha})} \quad (4.17)$$

et :

$$\psi_{SL}^-(1, z) = E(e^{zI_{\lambda_1}}) = \frac{\prod_{r=0}^{l-1} ((-1)^{k+1} z + e^{i(l-1-2r)\pi/\alpha})}{\prod_{r=0}^k ((-1)^l z^\alpha + e^{i\alpha(k-2r)\pi})} \quad (4.18)$$

où λ_1 fait référence à une variable aléatoire exponentielle indépendante de paramètre 1.

Nous verrons par la suite comment calculer les probabilités de ruine en temps fini à partir de ces facteurs de Wiener-Hopf, en particulier à partir de l'écriture de $\psi_{SL}^-(1, z)$ donnée par la formule (4.18).

4.2.2 Ruine et survie

Nous allons nous attacher dans cette section à obtenir une formule générale des probabilités de ruine et de survie en horizon fini. Nous montrons comment les calculer au moyen d'une simple ou d'une double transformée de Laplace inverse dans le cadre des processus de Kou et stables dans un second temps. Nous discuterons ensuite de la valeur de la probabilité de ruine dans un horizon de gestion infini. Enfin, la mise en œuvre numérique des formules ainsi obtenues est détaillée.

4.2.2.1 Formules générales

Nous partons ici du facteur de Wiener-Hopf qui donne accès à la loi du processus de l'infimum. Ainsi, d'après la section précédente, nous avons

$$\psi^-(q, z) = q \int_0^{+\infty} e^{-qt} E(e^{zI_t}) dt.$$

Le point crucial est que ce facteur de Wiener-Hopf peut être reformulé de la façon suivante :

$$\psi^-(q, z) = q \int_0^{+\infty} e^{-qt} \int_{-\infty}^0 z e^{zx} P(I_t > x) dx dt.$$

Un changement de variable ($u = -x$) donne alors :

$$\psi^-(q, z) = qz \int_0^{+\infty} e^{-qt} \int_0^{+\infty} e^{-zu} P(I_t > -u) du dt.$$

Nous avons par conséquent écrit le facteur de Wiener-Hopf ψ^- comme une transformée de Laplace double. Par la suite, les notations \mathcal{L} , $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$, \mathcal{L}^{-1} et $\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1}$ se réfèrent respectivement à une transformée de Laplace simple, double, inverse et double inverse respectivement. Avec cette convention, nous pouvons écrire :

$$\psi^-(q, z) = qz \mathcal{L}_q \otimes \mathcal{L}_z [P(I_t > -u)]. \quad (4.19)$$

Cette équation relie la probabilité que l'infimum de X – donc que le processus X lui-même – reste au-dessus d'un niveau donné (ici, $-u$) sur un horizon donné t . Étant donné que X a été défini comme un processus de Lévy démarrant à zéro et que le processus de risque est $u + X$, u fait référence à la réserve initiale de la compagnie.

Notons alors par $R(u, t)$ et $S(u, t)$ les probabilités de ruine et de survie pour un horizon fini t et une réserve initiale u . Nous supposons que la ruine survient quand le processus de risque $u + X$ franchit le niveau 0. La probabilité de survie en temps fini peut s'écrire de la façon suivante :

$$S(u, t) = P(I_t + u > 0)$$

et la probabilité de ruine en temps fini comme :

$$R(u, t) = P(I_t + u \leq 0).$$

La probabilité de survie en temps fini se déduit de l'équation (4.19) :

$$S(u, t) = P(I_t + u > 0) = \mathcal{L}_q^{-1} \otimes \mathcal{L}_z^{-1} \left[\frac{\psi^-(q, z)}{qz} \right] \quad (4.20)$$

et il vient alors :

$$R(u, t) = 1 - S(u, t) = 1 - \mathcal{L}_q^{-1} \otimes \mathcal{L}_z^{-1} \left[\frac{\psi^-(q, z)}{qz} \right]. \quad (4.21)$$

Nous allons maintenant détailler le calcul pratique de ces probabilités dans le cadre des processus doubles exponentiels, dans un premier temps et dans le cadre des processus de Lévy stables, ensuite.

4.2.2.2 Ruine et processus doubles exponentiels

Nous voyons d'abord les probabilités de ruine en temps fini avant de donner les résultats en horizon infini.

Ruine en horizon fini Nous pouvons utiliser directement les formules générales (4.20) et (4.21) puisque le facteur de Wiener-Hopf ψ^- qui intervient dans ces deux formules peut être obtenu facilement par l'équation (4.15).

Si cette approche générale nécessite une transformée de Laplace inverse double, une méthode plus aisée, accessible dans le cas présent, se base sur la transformée de Laplace inverse simple de la transformée de Laplace du temps d'atteinte d'un processus diffusif à sauts exponentiels doubles. Si nous notons le premier temps de passage du processus diffusif à sauts comme

$$\tau_b = \inf\{t \geq 0; X_t \leq b\}$$

où $b < 0$, il est possible d'exprimer la probabilité de ruine en fonction de la transformée de Laplace de ce temps de passage :

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} P(\tau_b \leq t) dt = \frac{1}{\alpha} E[e^{-\alpha \tau_b}]. \quad (4.22)$$

Par ailleurs, Kou et Wang (2003) donnent la formule suivante :

$$E[e^{-\alpha\tau_b}] = \frac{\lambda_2 - \beta_{3,\alpha}}{\lambda_2} \frac{\beta_{4,\alpha}}{\beta_{4,\alpha} - \beta_{3,\alpha}} e^{b\beta_{3,\alpha}} + \frac{\beta_{4,\alpha} - \lambda_2}{\lambda_2} \frac{\beta_{3,\alpha}}{\beta_{4,\alpha} - \beta_{3,\alpha}} e^{b\beta_{4,\alpha}}, \quad (4.23)$$

où $-\beta_{3,\alpha}$ et $-\beta_{4,\alpha}$ sont les seules racines négatives¹ de l'équation

$$G(x) = \alpha \quad (4.24)$$

avec α dans l'intervalle ouvert $(0, +\infty)$.

Il reste alors à calculer une transformée de Laplace inverse simple de l'équation (4.22) en s'aidant de la formule (4.23).

Ruine en horizon infini Nous détaillons maintenant comment obtenir la probabilité de ruine du processus à sauts exponentiels doubles de Kou sur un horizon de temps infini.

L'équation (4.22) donne la transformée de Laplace de la probabilité de ruine. L'application du théorème de la valeur finale entraîne la relation suivante

$$P(\tau_b < \infty) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} E[e^{-\alpha\tau_b}]. \quad (4.25)$$

Définissons le critère de ruine en horizon infini pour un processus à sauts

1. Les arguments suivants montrent qu'il y a effectivement deux uniques racines négatives à l'équation (4.24) avec α strictement positif.

Premièrement, l'exposant de Laplace G présente deux points de discontinuité en $x = -\lambda_2$ et $x = \lambda_1$. Nous pouvons alors étudier G sur les trois intervalles disjoints $I_g = (-\infty, -\lambda_2)$, $I_m = (-\lambda_2, \lambda_1)$, $I_d = (\lambda_1, \infty)$. Les limites aux bornes de ces intervalles sont aisées à calculer.

Sur l'intervalle de gauche I_g , nous obtenons les limites suivantes : $G(-\infty) = +\infty$ et $G(-\lambda_2^-) = -\infty$. La continuité de l'exposant de Laplace sur cet intervalle nous garantit, grâce au théorème des valeurs intermédiaires, l'existence d'un nombre $-\beta_{4,\alpha} \in I_g$ qui vérifie (4.24).

Sur l'intervalle du milieu I_m , notons la présence de 0 qui annule G . Par ailleurs, nous avons les limites $G(-\lambda_2^+) = +\infty$ et $G(\lambda_1^-) = +\infty$. De nouveau, une application directe du théorème des valeurs intermédiaires nous prouve l'existence d'une racine $-\beta_{3,\alpha}$ dans le sous-intervalle $(-\lambda_2, 0)$ et d'une autre racine, notée $\beta_{1,\alpha}$ dans le sous-intervalle $(0, \lambda_1)$ pour l'équation (4.24) étant donné que G est une fonction continue sur chacun de ces deux sous-intervalles.

Finalement, sur l'intervalle de droite I_d se trouve une autre racine de l'équation (4.24) notée $\beta_{2,\alpha}$ étant donné que $G(\lambda_1^+) = -\infty$ et que $G(+\infty) = +\infty$.

Étant donné que $G(x) = \alpha$ peut être exprimée comme une équation polynomiale de degré 4, toutes les racines de l'équation (4.24) sont les quatre racines que nous venons d'exhiber. En particulier, nous pouvons conclure que cette équation possède uniquement deux racines négatives.

exponentiels doubles par

$$\delta = G'(0) = a + \lambda \left(\frac{p}{\lambda_1} - \frac{1-p}{\lambda_2} \right). \quad (4.26)$$

Nous avons besoin dans un premier temps de calculer les racines négatives de l'équation $G(x) = 0$ avant de pouvoir passer à la limite dans la formule (4.23). Il se trouve que si $\delta < 0$, la seule racine de cette équation dans l'intervalle $(-\lambda_2, 0]$ est zéro². Si $\delta \geq 0$, à part la racine nulle, appelons $-\beta_3^*$ l'autre racine² dans l'intervalle $(-\lambda_2, 0]$. En passant à la limite, quand $\alpha \rightarrow 0$, il vient :

$$-\beta_{3,\alpha} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } \delta < 0 \\ -\beta_3^* & \text{si } \delta \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad -\beta_{4,\alpha} \rightarrow -\beta_4^*, \quad (4.27)$$

où nous notons par $-\beta_4^*$ l'unique racine de l'exposant de Laplace G dans l'intervalle $(-\infty, -\lambda_2)$. Ainsi, la probabilité de ruine en horizon infini varie selon la valeur du critère δ . Nous avons

$$P(\tau_b < \infty) = 1, \quad \text{si } \delta < 0 \quad (4.28)$$

et par ailleurs,

$$P(\tau_b < \infty) = \frac{\lambda_2 - \beta_3^*}{\lambda_2} \frac{\beta_4^*}{\beta_4^* - \beta_3^*} e^{b\beta_3^*} + \frac{\beta_4^* - \lambda_2}{\lambda_2} \frac{\beta_3^*}{\beta_4^* - \beta_3^*} e^{b\beta_4^*} < 1, \quad \text{si } \delta \geq 0. \quad (4.29)$$

En conclusion, la nature de la ruine en horizon infini dans le cadre des processus de Lévy à sauts exponentiels doubles dépend du critère δ . Si le critère δ est positif ou nul, nous retrouvons la situation standard en théorie de la ruine où la ruine n'est pas certaine, même de façon asymptotique. Quand δ est strictement négatif, la ruine est cependant certaine sur un horizon infini.

2. Nous établissons ici les limites obtenues en (4.27). Nous avons besoin des racines négatives de l'équation $G(x) = 0$. Avec les mêmes arguments que précédemment, il y a une racine unique notée $-\beta_4^*$ dans l'intervalle ouvert $I_g = (-\infty, -\lambda_2)$. Avec la définition du critère δ donnée par (4.26), la deuxième racine négative de l'exposant de Laplace G peut être aisément située. En effet, si $\delta < 0$, il y a une seule racine de $G(x) = 0$ dans le sous-intervalle $(-\lambda_2, 0]$ et c'est le nombre zéro. Si $\delta \geq 0$, les deux racines situées dans ce sous-intervalle sont 0 et $-\beta_3^*$. En passant à la limite, quand α tend vers 0, la racine négative $-\beta_{3,\alpha}$ tend alors vers $-\beta_3^*$.

4.2.2.3 Ruine et processus stables

De la même manière que pour les processus doubles exponentiels, nous voyons d'abord le calcul des probabilités de survie et de ruine en temps fini pour les processus de Lévy stables avant de donner les résultats en horizon infini.

Ruine en horizon fini Cette fois-ci, nous n'avons plus d'expression aisée de la transformée de Laplace du temps d'atteinte. Il nous faut alors recourir à l'approche générale exposée en début de section. Pour ce faire, nous avons besoin d'une forme explicite du facteur de Wiener-Hopf $\psi_{SL}^-(q, z)$ pour pouvoir calculer les formules (4.20) et (4.21).

Or, nous avons vu l'expression (4.18) donnée par Doney (1987) de $\psi_{SL}^-(1, z)$ qui s'écrit

$$\psi_{SL}^-(1, z) = E(e^{zI_{\lambda_1}}) = \frac{\prod_{r=0}^{l-1} ((-1)^{k+1} z + e^{i(l-1-2r)\pi/\alpha})}{\prod_{r=0}^k ((-1)^l z^\alpha + e^{i\alpha(k-2r)\pi})} \quad (4.30)$$

où, pour rappel, k et l sont des entiers, solutions de

$$\rho + k = \frac{l}{\alpha} \quad (4.31)$$

et avec la définition de ρ suivante :

$$\rho = P(X_1 > 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\alpha} \tan^{-1} \left(\beta \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right). \quad (4.32)$$

La relation suivante³ permet d'obtenir $\psi_{SL}^-(q, z)$ à partir de $\psi_{SL}^-(1, z)$:

$$\psi_{SL}^-(q, z) = \psi_{SL}^-\left(1, zq^{-\frac{1}{\alpha}}\right). \quad (4.33)$$

3. La relation (4.33) s'obtient aisément par le changement de variable $s = qt$ dans

$$\psi_{SL}^-(q, z) = \int_0^{+\infty} qe^{-qt} E(e^{zI_t}) dt.$$

Cela donne

$$\psi_{SL}^-(q, z) = \int_0^{+\infty} e^{-s} E(e^{zI_{s/q}}) ds.$$

La démarche pour obtenir les probabilités de ruine et de survie en temps fini avec des processus stables est alors la suivante. Choisir ou calibrer α et β . Trouver les entiers k et l solutions de l'équation (4.31). Effectuer une transformée de Laplace inverse double comme dans les formules générales (4.20) et (4.21) sur le facteur de Wiener-Hopf ψ_{SL}^- obtenu à partir des formules (4.33) et (4.30).

Cette démarche s'applique sur une caractérisation des processus par Dooney avec un paramètre de dispersion unique et normalisé. Ainsi, les processus dont nous pouvons calculer les probabilités de ruine et de survie par cette démarche sont définis uniquement par le couple de paramètres (α, β) . Nous allons maintenant étendre cette démarche pour tenir compte de processus de Lévy stables avec un paramètre de dispersion quelconque, et donc caractérisés par un triplet de paramètres (α, β, σ) .

Si nous notons ψ_σ^- un facteur de Wiener-Hopf d'un processus de Lévy stable avec un paramètre de dispersion σ quelconque, il est facile de vérifier la relation suivante $\psi_\sigma^-(q, z) = \psi^-(q, \sigma z)$. Ainsi, par exemple, une formule comme (4.20) peut être étendue simplement :

$$S_\sigma(u, t) = \mathcal{L}_q^{-1} \otimes \mathcal{L}_z^{-1} \left[\frac{\psi_{SL}^-(q, \sigma z)}{qz} \right]$$

où S_σ est la probabilité de survie d'un processus de Lévy stable caractérisé par le triplet (α, β, σ) . Une formule similaire peut être obtenue pour la probabilité de ruine. De nouveau, il nous suffit d'effectuer une transformée de Laplace inverse double.

Ruine en horizon infini Le comportement à long terme des processus de Lévy généraux peut être classifié grâce à la trichotomie de Rogozin, voir par exemple Bingham (1975). Ces processus peuvent « dériver » vers plus l'infini ($\lim_{t \rightarrow +\infty} (X_t) = +\infty$), ils peuvent « dériver » vers moins l'infini ($\lim_{t \rightarrow +\infty} (X_t) = -\infty$) ou encore osciller (de telle sorte que $\limsup_{t \rightarrow +\infty} (X_t) = +\infty$ et $\liminf_{t \rightarrow +\infty} (X_t) = -\infty$).

La propriété de changement d'échelle entraîne alors

$$\psi_{SL}^-(q, z) = \int_0^{+\infty} e^{-s} E \left(e^{zq^{-\frac{1}{\alpha}} I_s} \right) ds,$$

ce qui est exactement la relation (4.33).

Il peut être prouvé (voir par exemple le chapitre 48 de Satō (1999)) que généralement les processus de Lévy stables sont des processus qui oscillent, sauf dans des rares cas comme par exemple quand $\beta = 1$ et $0 < \alpha < 1$ qui définissent des processus stables subordinateurs. Une conséquence immédiate est que les processus stables étudiés dans ce chapitre entraînent nécessairement la ruine. Nous retrouvons ici la situation des processus exponentiels doubles de Kou quand le critère δ est strictement négatif, où la ruine est aussi certaine.

Il faut cependant noter que cette ruine peut seulement survenir à un horizon de temps très long, des milliers d'années plus tard par exemple. Nous expliquerons un plus loin pourquoi nous soutenons qu'une ruine certaine en horizon infini est convaincante et constitue une caractéristique stylisée désirable en théorie de la ruine et aussi pourquoi l'alternative généralement adoptée dans la littérature depuis Cramér (1930) et Lundberg (1903) de processus dérivant vers plus l'infini, de compagnies devenant infiniment riches sur le long terme n'est pas réaliste.

4.3 Étude numérique

Nous voyons d'abord quelques points importants de l'implémentation numérique avant de passer aux résultats obtenus proprement dits.

4.3.1 Implémentation

Nous commençons par préciser comment obtenir la spécification des processus de Lévy stables en fonction du couple d'entiers (k, l) avant de présenter tour à tour la mise en œuvre des transformées de Laplace inverses tant simples que doubles utilisées ici pour calculer les probabilités de survie et de ruine.

4.3.1.1 Obtention des paramètres k et l

Dans un premier temps, l'estimation des paramètres α et β caractérisant le processus de Lévy stable peut être effectuée comme préconisé par Paulson, Holcomb et Leitch (1975). Une fois le couple (α, β) obtenu, il reste encore à obtenir le couple d'entiers (k, l) correspondant et qui vérifie la contrainte (4.31) de Doney.

Bien que l'équation (4.31) soit simple, sa résolution n'est pas si aisée. Nous recourons à l'algorithme suivant qui consiste pour un α donné à obtenir divers β et les couples (k, l) correspondants. Plus précisément, étant donné α , l'algorithme consiste à :

- choisir un couple candidat $(k, l) \in \{1, \dots, 100\}^2$;
- calculer le paramètre ρ à partir de (4.31) ;
- vérifier que $\pi\alpha(\rho - \frac{1}{2})$ se trouve dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Si ce n'est pas le cas, écarter ce couple (k, l) ;
- calculer β à partir de l'équation (4.32) . Si le paramètre β est dans l'intervalle $[-1, 1]$, retenir β et le couple (k, l) . Si ce n'est pas le cas, les écarter ;
- recommencer avec un autre couple (k, l) .

Pour des raisons de performance, les paramètres β et les couples (k, l) ainsi retenus sont calculés une fois pour toutes et tabulés. Plusieurs tables sont ainsi construites pour diverses valeurs de α espacées de 10^{-2} . Chaque table (correspondant à un α donné) est remplie avec des valeurs très rapprochées de α (en effet, il n'est pas possible d'obtenir un très grand nombre de points β pour une valeur précise de α donnée), ainsi que les paramètres β et les couples (k, l) correspondants. Les valeurs autour de α sont choisies de telle manière que les paramètres β ne soient pas éloignés de plus de 10^{-2} entre eux. La table est ensuite triée pour une recherche de valeurs efficace lors des accès ultérieurs. Le tableau 4.1 montre en exemple quelques entrées de la table construite pour $\alpha = 1.40$.

α	β	k	l
1.4030	-0.7501	15	22
1.3960	-0.5006	23	33
1.4023	0.0001	43	61
1.4034	0.4997	26	37
1.4045	0.7001	31	44

TABLE 4.1 – Quelques couples (k, l) correspondant à $\alpha = 1.40$

En pratique donc, les couples (k, l) correspondant aux paramètres α et β du processus de Lévy stable voulu sont tirés des tables pré-calculées grâce à l'algorithme décrit auparavant.

Dans les illustrations numériques à venir, nous utiliserons les deux ensembles de paramètres donnés dans le tableau 4.2.

Cas	A	B
α	1.7961	1.8008
β	0.79983	- 0.79986
k	4	25
l	8	46

TABLE 4.2 – Deux ensembles de paramètres de processus stables

4.3.1.2 Transformée de Laplace inverse simple

Dans le cas des probabilités de ruine en horizon fini avec des processus exponentiels doubles, nous avons vu qu'on pouvait se ramener au calcul d'une transformée de Laplace inverse simple. L'algorithme de Gaver-Stehfest a alors été utilisé pour le calcul de ce type de transformée inverse. Une référence intéressante sur ce sujet est l'article d'Usabel (1999). Nous examinons rapidement ici une approximation simple de cette transformée inverse.

Soit F la transformée de Laplace de la fonction f :

$$F(s) = \mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Une approximation de la transformée de Laplace inverse est alors donnée par

$$f(t) \approx \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k} k^n}{k! (n-k)!} \alpha_{k+B}(t)$$

où

$$\alpha_k(t) = \frac{\ln(2)}{t} \frac{(2k)!}{k! (k-1)!} \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j F\left(\left(k+j\right) \frac{\ln(2)}{t}\right).$$

Le nombre entier B est un nombre arbitraire, pris égal à 2 ou 3 généralement. n est théoriquement un nombre assez grand, en pratique, il suffit de prendre n égal à 7 ou 8 pour atteindre un degré de précision raisonnable (il n'est ni utile ni raisonnable d'avoir une précision de 10 chiffres pour une probabilité de ruine).

L'avantage de cet algorithme est une mise en œuvre très rapide. Il donne en plus de bonnes approximations si, comme c'est le cas ici, nous pouvons nous contenter d'un nombre raisonnable de chiffres significatifs. Cependant,

cet algorithme ne peut pas être étendu au cas des transformées de Laplace inverses doubles pour lesquelles un autre algorithme est utilisé.

4.3.1.3 Transformée de Laplace inverse double

Nous avons vu que de façon générale, le calcul des probabilités de survie et de ruine se basent sur les formules (4.20) et (4.21) qui nécessitent une transformée de Laplace inverse double.

Nous allons utiliser pour ces transformées de Laplace inverses doubles la méthode numérique d'Abate et Whitt (1995). Pour simplifier l'exposé, nous l'explicitons dans le cas d'une transformée de Laplace inverse simple. L'extension de cet algorithme aux transformées de Laplace inverses doubles ne pose pas de problème particulier contrairement à celui de Gaver-Stehfest. Si F désigne toujours la transformée de Laplace d'une fonction f , une formule standard, appelée intégrale de Bromwich, permet de calculer sa transformée inverse :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F](t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} F(z)e^{tz} dz.$$

Cette formule exprime la transformée de Laplace inverse f comme l'intégrale de F le long de la droite imaginaire $[x_0 - i\infty, x_0 + i\infty]$. L'abscisse réelle x_0 est choisie de telle sorte que toutes les singularités de F sont à gauche de la droite d'intégration.

La méthode d'Abate et Whitt permet de calculer l'intégrale de Bromwich et ainsi, d'obtenir la fonction inverse f . Le point de départ est une discrétisation de l'intégrale par la méthode des trapèzes. Cependant, cette procédure est très lente si nous voulons obtenir un degré de précision raisonnable, quatre chiffres significatifs par exemple. Pour améliorer la vitesse de calcul, la discrétisation effectuée par Abate et Whitt est faite de façon à avoir une série quasi-alternée. La transformation d'Euler, une méthode standard pour accélérer la convergence de séries alternées, permet finalement un calcul rapide de la fonction inverse f .

Les formules (4.20) et (4.21), qui s'expriment en termes de transformées de Laplace inverses doubles, sont calculées en utilisant cette procédure.

4.3.2 Résultats

Nous allons maintenant analyser les résultats numériques obtenus dans le cadre des modèles à sauts exponentiels doubles et stable. Nous commençons par justifier la pertinence de ces deux modèles à partir de données empiriques. Ensuite, nous verrons plus particulièrement quelques faits stylisés typiques qui peuvent être obtenus avec le modèle stable. Nous étudierons en particulier l'impact de l'asymétrie, de l'épaisseur de queue ainsi que celui de la dispersion sur les probabilités de survie dans le cadre des processus de Lévy stables.

4.3.2.1 Pertinence empirique

Le but ici est de calibrer les deux types de modèles à des données réelles. Nous utilisons pour cela des probabilités de ruine tirées d'un rapport de Moody's Investors Service (2007). Ces données sont reportées au tableau 4.3, il contient les probabilités cumulées de défaut, et donc les probabilités de ruine, de compagnies américaines dans le secteur financier (sous-secteur bancaire exclu). Ce secteur de l'économie comprend les compagnies d'assurances. L'horizon considéré est de dix ans. À cause de la très faible amplitude des probabilités de défaut relevées, les quantités affichées dans le tableau 4.3 sont de fait les probabilités de ruine empiriques R observées multipliées par 100.

Année	1	2	3	4	5
100 * R	0.506	0.965	1.425	1.864	2.256
Année	6	7	8	9	10
100 * R	2.613	2.946	3.274	3.581	3.893

TABLE 4.3 – Probabilités de défaut cumulées empiriques

La figure 4.1 montre le calibrage des probabilités de ruine données par Moody's par le modèle de Lévy stable. Nous pouvons immédiatement noter que les probabilités de ruine obtenues à partir du modèle de Lévy stable ajustent les probabilités empiriques avec un bon degré de précision. Ainsi, les probabilités de survie et de ruine obtenues avec le modèle de Lévy stable sont réalistes sur des horizons de temps finis. Par conséquent, il est possible de construire un modèle qui implique des probabilités de survie nulles avec

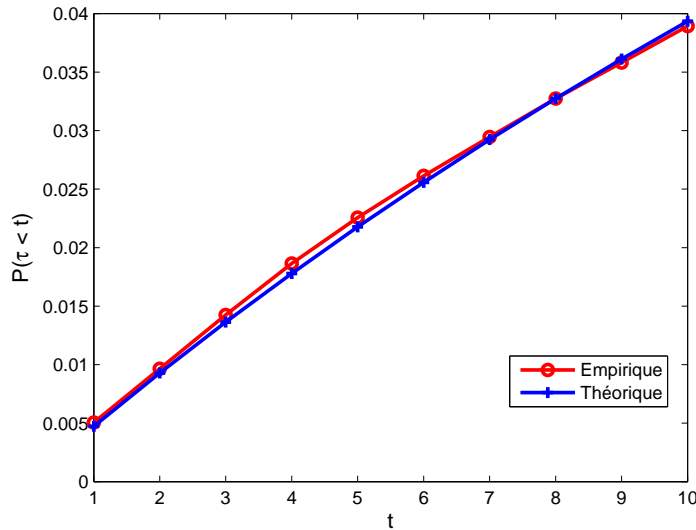


FIGURE 4.1 – Probabilités de ruine processus stables vs. empiriques

des horizons de temps infinis et qui peuvent être utilisés cependant avec un bon degré de précision pour fournir des probabilités de survie et de ruine en horizon fini.

Les paramètres du processus de Lévy stable calibrés sur les données de Moody's sont les suivants : $\alpha = 1.10011$, $\beta = -0.978134$ et $\sigma = 0.12$. Nous pouvons déduire de ces paramètres que les processus de risque qui peuvent être utilisés pour la prévision de la faillite des compagnies d'assurance américaines présentent des queues épaisses et une forte asymétrie négative. Cela implique un processus de risque caractérisé par la survenue de sauts positifs de faible amplitude et de très forts sauts négatifs.

La figure 4.2 présente le calibrage des probabilités de ruine données par Moody's par le modèle de Lévy exponentiel double. Les conclusions rejoignent celles faites sur le modèle stable, à savoir la qualité de l'ajustement et la pertinence empirique de ce type de modèle. Toutefois, une autre remarque s'impose. En effet, les paramètres ajustés sont les suivants : $\mu = 0.03034$, $\sigma = 0.01829$, $\lambda = 0.89885$, $p = 0.05428$, $\lambda_1 = 7.50043$ et $\lambda_2 = 1.65523$. À partir de ces paramètres, nous pouvons calculer le critère δ d'après la formule (4.26) : il vaut ici $\delta = -0.47672$. Or, d'après ce que nous avons vu à la sous-section 4.2.2.2, il se trouve qu'un δ strictement négatif correspond à un processus de Lévy exponentiel double qui a une probabilité

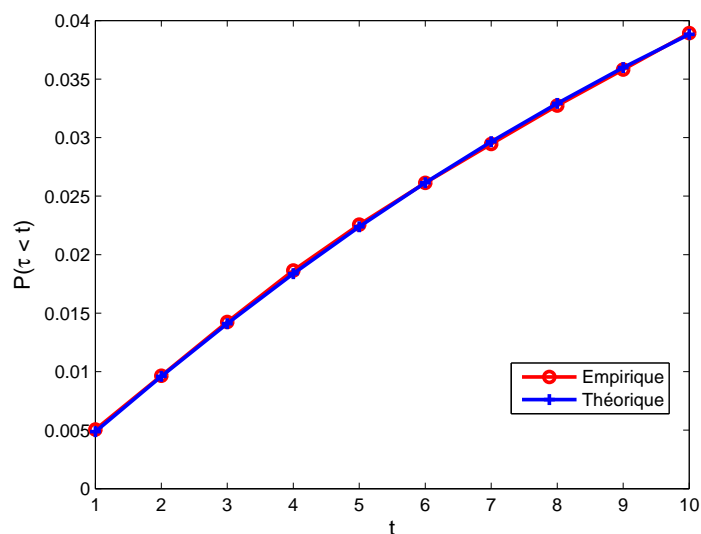


FIGURE 4.2 – Probabilités de ruine processus de Kou vs. empiriques

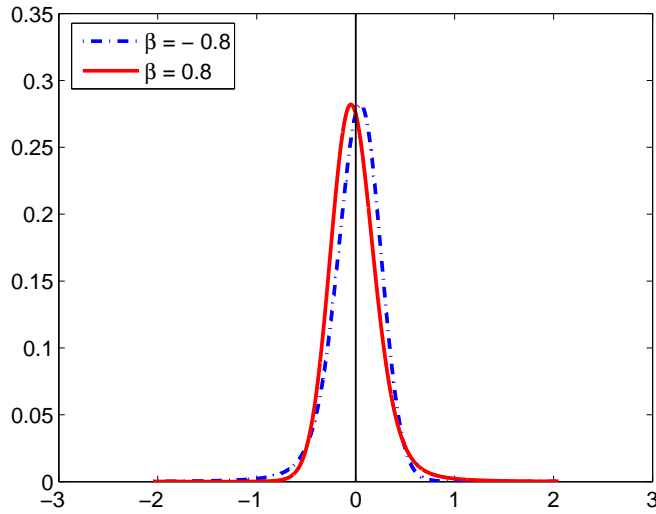
de survie ultime nulle. De même que dans le cas du modèle de Lévy stable, nous voyons de nouveau ici que notre ajustement sur des données empiriques, tirées d'une base de données de compagnies américaines, confirme qu'il est raisonnable de supposer des probabilités de survie ultimes nulles et cependant cette hypothèse n'est pas contradictoire avec des probabilités de survie et de ruine en horizon fini qui sont en ligne avec la réalité.

Par ailleurs, les paramètres ajustés obtenus pour le processus de Kou confèrent à ce dernier les mêmes qualités que celles observées avec les paramètres obtenus pour le processus de Lévy stable. Un fort λ_1 combiné à un petit p et un faible λ_2 définissent un processus avec une importante proportion de grands sauts négatifs et peu de sauts positifs.

4.3.2.2 Prédications du modèle stable

Nous menons ici une étude qualitative de la force prédictive de la classe de modèles basés sur le processus de Lévy stable.

Impact du paramètre d'asymétrie β Ce paragraphe s'attache à montrer l'impact du paramètre d'asymétrie β sur les probabilités de survie. Avant cela, nous rappelons brièvement comment densités stables et trajectoires de processus de Lévy stables dépendent de β .

FIGURE 4.3 – Densités stables ($\alpha \approx 1.8$)

Les densités de deux variables aléatoires stables avec les paramètres définis au tableau 4.2 sont dessinées sur la figure 4.3. Ainsi, dans les deux cas, la paramètre d'épaisseur de queue est le même, il vaut $\alpha \approx 1.8$, et les coefficients d'asymétrie sont importants avec $\beta \approx \pm 0.8$. Nous observons sur cette figure qu'un β positif est associé à une bosse située du côté des abscisses négatives, avec une queue épaisse qui tient compte des événements extrêmes positifs. Le phénomène inverse est constaté pour un β négatif.

La figure 4.4 illustre les trajectoires de processus de Lévy stables quand leurs accroissements ont les densités montrées à la figure 4.3. Quand β est positif, le processus est caractérisé par la survenue de grands sauts positifs et de nombreux petits sauts négatifs. De nouveau, nous constatons le contraire quand β est négatif, à savoir l'arrivée de grands sauts négatifs associée à plusieurs petits sauts positifs.

Notons que puisqu'il n'y a pas de formule explicite pour les densités de la figure 4.3, elles ont été obtenues en effectuant une transformée de Fourier rapide sur la fonction caractéristique de chaque variable aléatoire stable. Les accroissements le long des trajectoires de la figure 4.4 ont été simulés eux en suivant la méthodologie préconisée par Samorodnitsky et Taqqu (1994).

Comparons maintenant les probabilités de survie associées à deux processus stables de même paramètre α mais avec différents paramètres d'asymé-

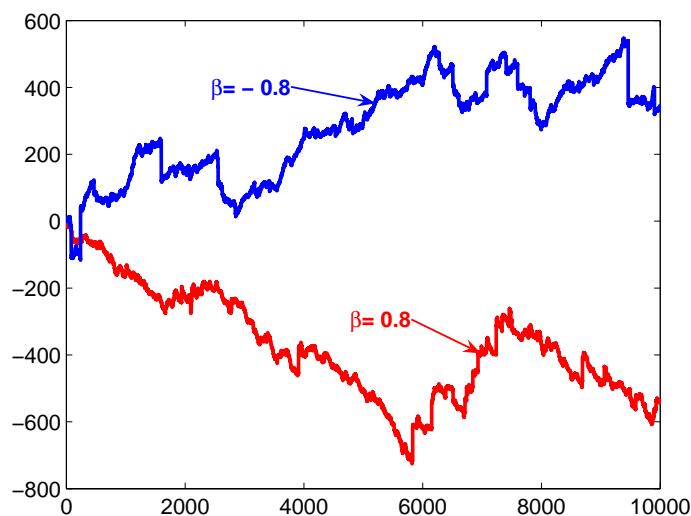


FIGURE 4.4 – Trajectoires de processus de Lévy stables

trie β . De nouveau, nous utilisons les deux ensembles de paramètres donnés dans le tableau 4.2 et étiquetés cas A et B. Un graphe des probabilités de survie en horizon fini, ici jusqu'à un horizon de 20 ans, est affiché figure 4.5. Noter que les probabilités obtenues ont été calculées avec un paramètre de réserve initiale u égal à 0.8.

Nous constatons deux périodes distinctes sur la figure 4.5. Durant la première période, couvrant approximativement les douze premières années, la probabilité de survie du cas A est supérieure à celle du cas B. Durant la deuxième période, la probabilité de survie est plus élevée dans le cas B que dans le cas A. Analysons période par période l'impact du paramètre d'asymétrie β sur la probabilité de survie.

Sur la première période, avec un horizon assez proche donc, la seule manière pour un processus de traverser une barrière basse relativement éloignée est l'arrivée d'un grand saut négatif. C'est la raison pour laquelle le processus avec un paramètre β négatif (cas B), et donc avec de grands sauts négatifs potentiels, est celui avec une plus petite probabilité de survie sur cette première période.

Pour la seconde période, les probabilités de survie dans le cas B ($\beta \approx -0.8$) sont plus élevées que dans celles du cas A. Or nous avons vu par exemple sur la figure 4.4 qu'un β négatif correspond à un mouvement ascen-

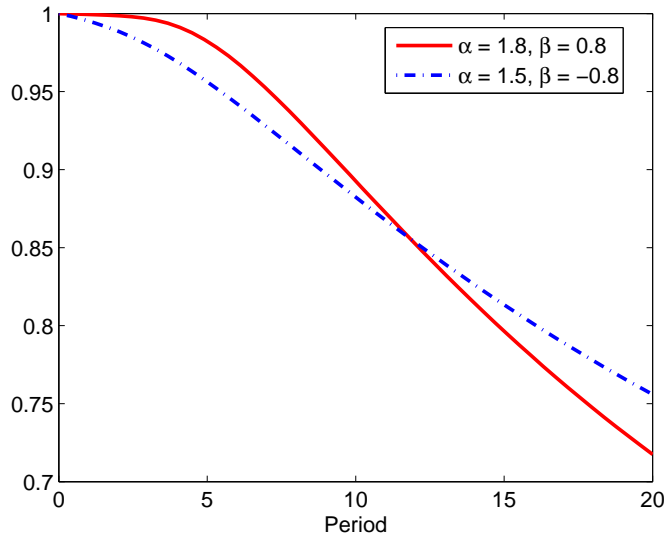
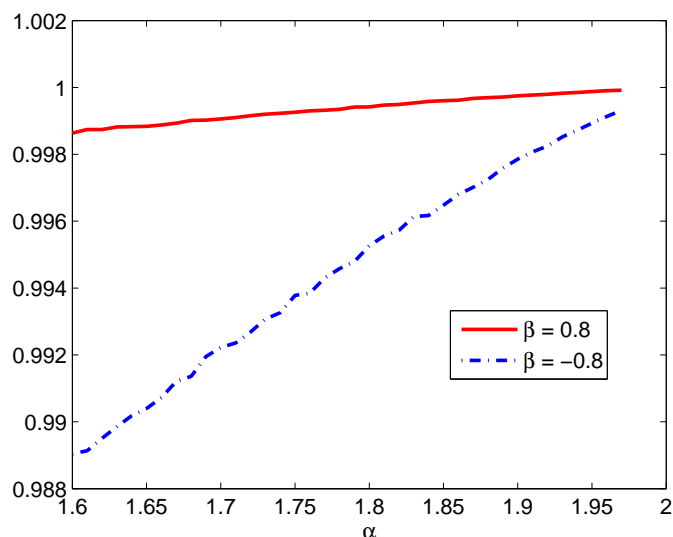


FIGURE 4.5 – Probabilités de survie dans les cas A et B du tableau 4.2

nant perturbé par quelques grands sauts négatifs. Clairement, ce processus est moins susceptible d’entraîner la ruine sur un horizon plus long que le processus du cas A ($\beta \approx 0.8$) qui a un mouvement descendant dû aux nombreux petits sauts négatifs. Ceci explique pourquoi sur le moyen-long terme, les probabilités de survie du cas B ($\beta \approx -0.8$) sont plus élevées que les probabilités de survie correspondantes dans le cas A ($\beta \approx 0.8$).

Impact du paramètre d’épaisseur de queue α Voyons maintenant l’impact du paramètre α sur les probabilités de survie. D’un point de vue statistique, le paramètre α est relié au kurtosis. D’un point de vue dynamique, α souligne l’importance des grands sauts, des évènements extrêmes.

La figure 4.6 donne alors les probabilités de survie en fonction de α pour les deux valeurs du paramètre β données dans le tableau 4.2. Les autres paramètres restent les mêmes alors que l’horizon considéré est de un an. Nous observons que quand α croît, c’est-à-dire quand l’épaisseur de queue diminue, la probabilité de survie augmente. Cette observation est cohérente avec l’intuition que nous avons : *ceteris paribus*, une quantité plus élevée de grands sauts, donc un plus grand risque induit par les sauts, a un impact négatif sur la probabilité de survie de la firme.

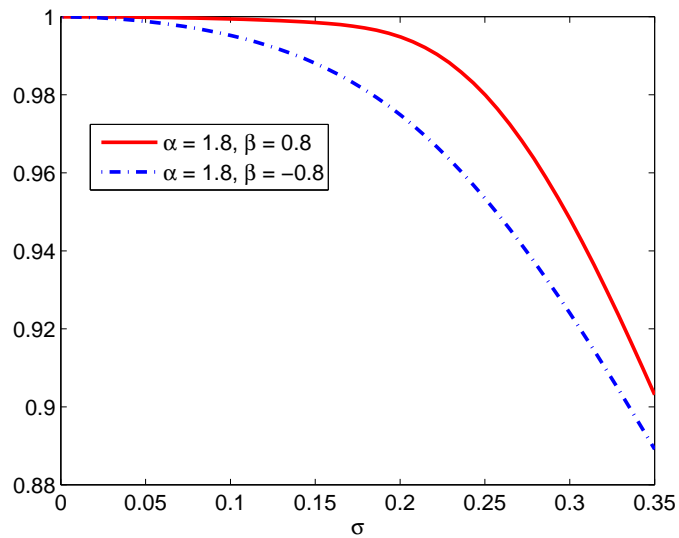
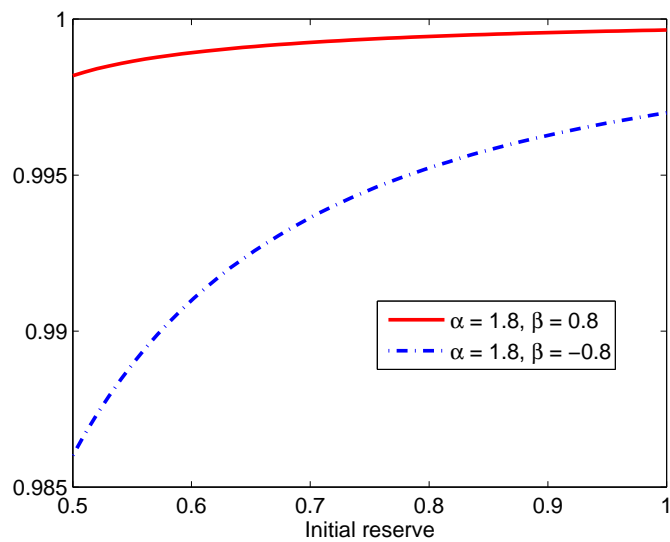
FIGURE 4.6 – Probabilités de survie dans les cas A et B en fonction de α

Impact du paramètre de dispersion σ Cette fois-ci, le paramètre α est gardé constant à 1.8, et nous faisons varier le paramètre σ . De nouveau, tous les autres paramètres sont laissés inchangés. La figure 4.7 montre que plus le paramètre σ est élevé plus la probabilité de survie est basse. Le paramètre σ représente aussi le degré de dispersion du processus stable. Il donne le niveau d'agitation totale du processus. Par conséquent, il est logique *ceteris paribus* qu'une augmentation du paramètre σ réduise la solvabilité de la firme.

Naturellement, si nous considérons le cas $\alpha = 2$, le paramètre σ devient le paramètre d'écart-type habituel d'un processus Gaussien et se prête à une interprétation simple (pour rappel, le deuxième moment d'un processus stable de paramètre $\alpha < 2$ n'existe pas).

Impact du niveau initial des réserves u Enfin, analysons la figure 4.8 où l'impact du niveau initial des réserves u sur la probabilité de survie est étudié. Nous constatons une caractéristique naturelle : une augmentation de la réserve initiale entraîne l'augmentation de la probabilité de survie de la compagnie d'assurances.

Nous avons donc pu voir que le modèle basé sur des processus de Lévy stables présente des caractéristiques stylisées cohérentes avec les faits empiriques et l'intuition. Comme la sous-section précédente le montre, tant les

FIGURE 4.7 – Probabilités de survie dans les cas A et B en fonction de σ FIGURE 4.8 – Probabilités de survie dans les cas A et B en fonction de la réserve initiale u

modèles basés sur les processus de Lévy exponentiels doubles que sur les processus de Lévy stables peuvent être utilisés avec un très grand degré de réalisme et permettent tous les deux de retrouver les probabilités de survie à horizon fini empiriques, comme celles observées par Moody's.

Conclusion

Des avancées récentes dans les théories financière et actuarielle ont vu l'utilisation de processus de Lévy généraux pour la modélisation de divers sous-jacents tels les actions, les actifs des compagnies, les taux d'intérêts, les réserves, etc. Dans le cadre spécifique de la théorie de la ruine, ce chapitre s'est attaché à montrer comment les probabilités de survie et de ruine peuvent être calculées, tant en horizon fini qu'en horizon infini, quand le processus de risque de la compagnie est modélisé soit par un processus de Kou soit par un processus de Lévy stable.

Les probabilités en horizon fini ont été obtenues en effectuant des transformées de Laplace inverses simples ou doubles et montrent un degré de précision raisonnable avec des temps de calculs quasi-instantanés. Après calibrage de ces modèles sur des données empiriques, des probabilités de survie en horizon infini sont prédites. Ce résultat asymptotique n'est pas contradictoire avec une gestion réaliste de la compagnie d'assurances et surtout n'empêche nullement l'obtention de probabilités en horizon fini tout à fait réalistes comme cette étude empirique l'illustre.

Conclusion Générale

Cette thèse nous a permis de constater, sur plusieurs aspects, la convergence entre finance et assurance. Parmi les soucis majeurs des dirigeants des compagnies d'assurance figurent l'évaluation en juste valeur des contrats qu'ils proposent et le risque global de ruine de leur compagnie. Nous pouvons retrouver ce concept de *fair value* ou de juste valeur mis en œuvre tant dans les métiers de l'assurance que de la finance. La mise en place successive des normes comptables IFRS au cours des années 2000 pour toutes les entreprises faisant appel public à l'épargne renforce la prépondérance de ce concept de la juste valeur. Par rapport aux normes comptables traditionnelles où les actifs sont par exemple inscrits à leur coût d'acquisition et où l'on ne revient sur cet enregistrement qu'au moment de la cession, la méthode de la juste valeur impose un *mark to market*, une réévaluation des bilans en fonction des prix de marché. Pour toutes les entreprises qui ont des participations financières importantes, comme les banques et les compagnies d'assurance, les dépréciations d'actifs successives peuvent rajouter de l'incertitude sur la santé financière d'un établissement et entraîner des conséquences rapidement néfastes, comme le prouve la crise majeure que le secteur financier est en train de subir. Si l'évaluation en juste valeur peut dans ce cas être source de forte volatilité, le prix de marché reste néanmoins un élément essentiel pour les agents économiques extérieurs afin d'avoir une vue synthétique de l'état financier et des perspectives futures de chaque compagnie.

La première partie de cette thèse nous a permis d'abord d'explorer l'effet de ces ruptures et sauts sur l'évaluation de produits dérivés de type européen. Cela nous a donné l'occasion de mettre en place une approche d'évaluation qui permet d'exprimer dans un cadre unifié la juste valeur de ce type de produits. Nous avons alors démontré que prendre en compte divers types

de sauts était aisé dans ce cadre en introduisant un nouveau modèle. L'introduction de produits aux paiements à l'échéance variés ne présente pas non plus de difficulté dans ce cadre. La mise en œuvre pratique de cette approche a permis de constater qu'elle était très performante. Nous avons alors retrouvé les *smiles* de volatilité observés sur le marché grâce à la prise en compte des sauts. Le premier chapitre se termine avec le calibrage des options sur les données de marché. Nous avons alors constaté que les modèles diffusifs et sauts s'ajustent mieux aux données empiriques que le modèle diffusif classique.

Le deuxième chapitre nous a amené dans un premier temps à considérer l'impact de la présence de discontinuités sur le franchissement d'une barrière, nécessaire pour pouvoir évaluer certaines options exotiques comme les options à barrière. Nous nous sommes alors intéressés à l'évaluation d'un contrat protégeant contre le « défaut » sur fonds propres d'une entreprise, le défaut sur fonds propre étant plus facile à observer sur les marchés que les événements de crédit constituant l'évènement de défaut classique. Nous avons discuté de la forte volatilité induite par l'évaluation en juste valeur entraînée par l'application des normes IFRS. Si le défaut sur fonds propres est caractérisé par une chute d'un certain pourcentage de la valeur du cours de l'entreprise considérée par rapport à sa valeur à la signature du contrat, il est naturel de se poser la question d'un déclenchement prématuré de la protection pour son vendeur en cas de crise systémique. L'étude de la couverture d'une telle position nous paraît une piste de recherche intéressante.

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés dans ce deuxième chapitre aux options d'échange et à leur application dans le cadre de la rémunération complémentaire des dirigeants. Des résultats nouveaux ont été obtenus pour l'évaluation des options d'échange entre deux actifs, en particulier l'échange d'un actif de type diffusif classique contre un actif de type diffusif et sauts. Notre prochaine étape sera l'évaluation d'une option d'échange entre deux actifs de type diffusif et sauts. Par ailleurs, dans un contexte où les parachutes dorés négociés par certains dirigeants sont mal acceptés par la société, la question de la rémunération complémentaire des dirigeants doit concilier des effets incitatifs suffisants avec les intérêts des mandataires. La rémunération par *stock option* indexée nous paraît être un début de réponse allant dans ce sens. Si une nouvelle réglementation venait à être adoptée, par exemple avec l'institution de plafond sur le bonus total

perçu, il serait intéressant d'étudier l'impact de ce type de contraintes sur la rémunération complémentaire.

La deuxième partie porte sur l'effet de ces discontinuités dans le domaine de l'assurance, en particulier. Le troisième chapitre est consacré à l'étude de contrats proposés par les compagnies d'assurance-vie, en particulier un contrat à garantie flexible en cas de vie et un contrat à bénéfice minimum garanti en cas de vie. Nous y avons réutilisé des techniques développées dans la première partie. Nous avons par exemple pu reconnaître le flux correspondant à une option d'échange dans le contrat d'assurance à garantie flexible en cas de vie. Dans le cas du contrat en cas de décès, nous avons en particulier montré que la prise en compte simultanée des sauts et de la nature stochastique des taux d'intérêt augmente significativement le juste taux de frais d'assurance à prélever. Ce résultat nous semble être un début de réponse au constat sur le taux élevé des frais pratiqués par les compagnies d'assurance relevé par plusieurs auteurs. Plusieurs pistes de réflexion peuvent être poursuivies à partir de ce travail. Parmi celles-ci figurent l'évaluation de nouveaux produits d'assurance-vie comme les contrats à montant de retraite garanti tout au long de la vie dans ce cadre général où présence de discontinuités, risque de taux et risque de mortalité sont pris en compte simultanément ainsi que leur couverture.

Le quatrième chapitre est consacré au risque de ruine d'une compagnie d'assurance. L'approche actuarielle classique veut que les processus de risque utilisés augmentent indéfiniment quand les horizons de temps considérés tendent vers l'infini. Cela exclut ainsi quasiment toute faillite ultérieure de la compagnie d'assurance du moment qu'elle ait survécu durant ses premières années d'opération. Nous pensons que cette hypothèse est trop restrictive et, en tout cas, discutable. Nous nous en affranchissons dans ce quatrième chapitre et montrons sur des données empiriques que les probabilités de ruine en horizon fini prédites par les deux modèles qui y sont utilisés sont tout à fait comparables. Nous comptons valider plus en avant les modèles proposés dans ces travaux avec les nouvelles données empiriques qui proviennent des événements récents.

La frontière entre les mondes de la finance et de l'assurance s'estompe. Par les produits proposés d'abord : les banquiers ont depuis quelques années proposé des polices d'assurance-vie, notamment dans le cadre de leur métier de gestion de patrimoine. Avec le concept de bancassurance, ils ont étendu

leur offre commerciale avec d'autres produits d'assurance classique, en assurance dommages (habitation, automobile, etc.), et même en assurance santé. De leur côté, les compagnies d'assurance ont commencé à se diversifier pour proposer des services bancaires (tenue de compte, crédits, etc.). En outre, les produits qu'elles proposent ont de plus en plus une importante composante financière. Sur le plan théorique, au niveau des outils de modélisation utilisés, ensuite : si les processus tenant en compte les sauts ont été depuis les débuts prépondérants en assurance, nous avons vu que la finance ne peut plus faire l'impasse dessus. Nous avons montré ici que tenir compte des ruptures et des discontinuités de trajectoires de cours peut être fait tout en mettant à profit la performance des méthodologies d'évaluation proposées dans ce travail. Réciproquement, nous pensons que les compagnies d'assurance ne peuvent plus se contenter dans leur gestion de la seule approche actuarielle. Vu le montant considérable des actifs sous leur responsabilité, les assureurs sont conduits à utiliser au mieux les approches de la finance moderne.

La législation a commencé à prendre acte de la convergence des pratiques du monde bancaire et de l'assurance, notamment en France avec la loi de Sécurité Financière de 2003 qui met par exemple les contrats d'assurance-vie sous la supervision directe de l'Autorité des marchés financiers et aux États-Unis avec la loi Gramm-Leach-Bliley Act de 1999 qui, renversant les dispositions de la loi Glass-Steagall Act de 1933, autorise un établissement financier à proposer tous les services financiers allant de la banque à l'assurance en passant par l'émission de titres. Actuellement, les deux activités, bancaire et d'assurance, restent soumises à des règles prudentielles distinctes. La suite logique serait la création d'une autorité de tutelle unique.

À notre sens, la recherche d'un cadre de modélisation unifié aux deux métiers doit cependant être menée préalablement. Ce cadre unifié doit couvrir les produits qui relèvent des deux secteurs simultanément. Il doit aussi permettre l'étude du risque de ruine des établissements qui proposent une palette complète de services financiers et font appel aux marchés financiers pour gérer leurs actifs. Nous pensons que les approches et les outils techniques proposés dans cette thèse peuvent trouver leur utilité dans un tel contexte.

Bibliographie

- Abate, J. et Whitt, W. (1995), ‘Numerical Inversion of Laplace Transforms of Probability Distributions’, *ORSA Journal of Computing* **7**, 36–43.
- Abramowitz, M. et Stegun, I. A., eds (1974), *Handbook of Mathematical Functions – with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, New York. xiv+1046pp.
- Andersen, L. et Andreasen, J. (2000), ‘Jump-Diffusion Processes : Volatility Smile Fitting and Numerical Methods for Option Pricing’, *Review of Derivatives Research* **4**, 231–262.
- Asmussen, S. (2000), *Ruin Probabilities*, Vol. 2 of *Advanced Series of Statistical Science & Applied Probability*, World Scientific.
- Asmussen, S., Madan, D. B. et Pistorius, M. (2005), Pricing Equity Default Swaps under the CGMY Lévy Model. Working paper.
- Asmussen, S. et Rosinski, J. (2001), ‘Approximation of small jumps of Lévy processes with a view towards simulation’, *Journal of Applied Probability* **38**(2), 482–493.
- Aït-Sahalia, Y. (2004), ‘Disentangling Diffusion from Jumps’, *Journal of Financial Economics* **74**(3), 487–528.
- Bachelier, L. J.-B. A. (1900a), Théorie de la Spéculation, Thèse d’État, Faculté des Sciences de Paris.
- Bachelier, L. J.-B. A. (1900b), ‘Théorie de la Spéculation’, *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure* **3**(17), 21–86. Available at NUMDAM : <http://www.numdam.org>.
- Ballotta, L. (2005), ‘A Lévy Process-Based Framework for the Fair Valuation of Participating Life Insurance Contracts’, *Insurance : Mathematics and Economics* **37**(2), 173–196.

- Benet, B. A., Giannetti, A. et Pissaris, S. (2005), ‘Gains from Structured Product Markets : the Case of Reverse-Exchangeable securities (RES)’, *Journal of Banking and Finance* **30**(1), 111–132.
- Bertoin, J. (1996), *Lévy Processes*, Vol. 121 of *Cambridge Tracts in Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Bingham, N. H. (1975), ‘Fluctuation Theory in Continuous Time’, *Advances in Applied Probability* **7**, 705–766.
- Björk, T. (2004), *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford Finance Series, 2 edn, Oxford University Press.
- Black, F. et Scholes, M. (1973), ‘The Pricing of Options and Corporate Liabilities’, *Journal of Political Economy* **81**, 637–659.
- Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A. et Nesbitt, C. J. (1997), *Actuarial Mathematics*, 2 edn, The Society of Actuaries. 753pp.
- Boyarchenko, S. (2004), ‘Irreversible Decisions and Record Setting News Principles’, *American Economic Review* **94**(3), 557–568.
- Boyarchenko, S. et Levendorskiï, S. (1999), ‘Generalizations of the Black-Scholes equation for truncated Lévy processes’, *Working paper* .
- Boyarchenko, S. et Levendorskiï, S. (2000), ‘Option pricing for truncated Lévy processes’, *International Journal for Theory and Applications in Finance* **3**(3), 549–552.
- Boyarchenko, S. et Levendorskiï, S. (2002a), ‘Barrier options and touch-and-out options under regular Lévy processes of exponential type’, *Annals of Applied Probability* **12**(4), 1261–1298.
- Boyarchenko, S. et Levendorskiï, S. (2002b), *Non-Gaussian Merton-Black-Scholes Theory*, Vol. 9 of *Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability*, World Scientific, London. xxi+398pp.
- Broadie, M., Glasserman, P. et Kou, S. G. (1997), ‘A continuity correction for discrete barrier options’, *Mathematical Finance* **7**, 325–349.
- Broadie, M., Glasserman, P. et Kou, S. G. (1999), ‘Connecting discrete and continuous path-dependent options’, *Finance and Stochastics* **3**, 55–82.
- Carr, P., Geman, H., Madan, D. B. et Yor, M. (2002), ‘The Fine Structure of Asset Returns : an Empirical Investigation’, *Journal of Business* **75**(2), 305–332.

-
- Carr, P. et Madan, D. B. (1998), ‘Option Valuation using the Fast Fourier transform’, *Journal of Computational Finance* **2**, 61–73.
- Cont, R. (2001), ‘Empirical Properties of Asset Returns : Stylized Facts and Statistical Issues’, *Quantitative Finance* **1**, 223–236.
- Cont, R. et Tankov, P. (2004a), *Financial Modelling with Jump Processes*, 2 edn, Chapman & Hall/CRC Press, London.
- Cont, R. et Tankov, P. (2004b), ‘Non-Parametric Calibration of Jump-Diffusion Option Pricing Models’, *Journal of Computational Finance* **7**(3), 1–49.
- Cont, R. et Voltchkova, E. (2005), ‘A Finite Difference Scheme for Option Pricing in Jump Diffusion and Exponential Lévy Models’, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **43**(4), 1596–1626.
- Cooley, J. W. et Tukey, J. W. (1965), ‘An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series’, *Mathematics of Computation* **19**(90), 297–301.
- Cramér, H. (1930), *On the Mathematical Theory of Risk*, Skandia Jubilee Volume, Stockholm.
- Darling, D. A. (1956), ‘The Maximum of Sums of Stable Random Variables’, *Transactions of the American Mathematical Society* **83**, 164–169.
- Delbaen, F. et Schachermayer, W. (1994), ‘A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing’, *Mathematische Annalen* **300**, 463–520.
- Dickson, D. C. M. et Waters, H. R. (1993), ‘Gamma Processes and Finite Time Survival Probabilities’, *Astin Bulletin* **23**(2), 259–272.
- Doney, R. A. (1987), ‘On Wiener-Hopf Factorisation and the Distribution of Extrema for Certain Stable Processes’, *Annals of Probability* **15**(4), 1352–1362.
- Dufresne, F. et Gerber, H. U. (1991), ‘Risk Theory for the Compound Poisson Process that is Perturbed by Diffusion’, *Insurance : Mathematics and Economics* **10**, 51–59.
- Dufresne, F., Gerber, H. U. et Shiu, E. S. W. (1991), ‘Risk Theory with the Gamma Process’, *Astin Bulletin* **21**(2), 177–192.
- Fama, E. (1965), ‘The Behaviour of Stock Market Prices’, *Journal of Business* **38**(1), 34–105.

- Furrer, H. (1998), 'Risk Processes Perturbed by α -stable Lévy Motion', *Scandinavian Actuarial Journal* **1**, 59–74.
- Furrer, H. et Schmidli, H. (1994), 'Exponential Inequalities for Ruin Probabilities of Risk Processes Perturbed by Diffusion', *Insurance : Mathematics and Economics* **15**, 23–36.
- Gerber, H. U. (1997), *Life Insurance Mathematics*, 3 edn, Springer Verlag, Berlin. 217pp.
- Hamilton, J. D. (1989), 'A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle', *Econometrica* **57**(2), 357–84.
- Hardy, M. (2003), *Investment Guarantees : Modeling and Risk Management for Equity-Linked Life Insurance*, John Wiley.
- Harrison, M. et Pliska, S. (1981), 'Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading', *Stochastic Processes and their Applications* **11**, 215–260.
- He, C., Kennedy, J., Coleman, T., Forsyth, P., Li, Y. et Vetzal, K. (2006), 'Calibration and Hedging under Jump Diffusion', *Review of Derivatives Research* **9**(1), 1–35.
- Hilberink, B. et Rogers, L. C. G. (2002), 'Optimal Capital Structure and Endogenous Default', *Finance and Stochastics* **6**, 237–263.
- Johnson, S. A. et Tian, Y. S. (2000a), 'Indexed executive stock options', *Journal of Financial Economics* **57**, 35–64.
- Johnson, S. A. et Tian, Y. S. (2000b), 'The value and incentive effects of nontraditional executive stock option plans', *Journal of Financial Economics* **57**, 3–34.
- Jondeau, E., Poon, S.-H. et Rockinger, M. (2007), *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions*, Springer Finance, Springer Verlag. xviii+542pp.
- Kassberger, S., Kiesel, R. et Liebmann, T. (2007), Fair Valuation of Insurance Contracts under Lévy Process Specifications. To appear in *Insurance : Mathematics and Economics*.
- Kesten, H. (1969), *Hitting probabilities of single points for processes with stationary independent increments*, Vol. 93, Memoirs of the American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

-
- Klüppelberg, C., Kyprianou, A. E. et Maller, R. A. (2004), ‘Ruin Probabilities and Overshoots for General Lévy Insurance Risk Processes’, *Annals of Applied Probability* **14**(4), 1766–1801.
- Koponen, I. (1995), ‘Analytic Approach to the Problem of Convergence of Truncated Lévy Flights towards the Gaussian Stochastic Process’, *Physical Review* **E52**, 1197–1199.
- Kou, S. G. (2002), ‘A Jump-Diffusion Model for Option Pricing’, *Management Science* **48**, 1086–1101.
- Kou, S. G. et Wang, H. (2003), ‘First Passage Times of a Jump Diffusion Process’, *Advances in Applied Probability* **35**(9), 504–531.
- Le Courtois, O. et Quittard-Pinon, F. (2007), ‘Risk-Neutral and Actual Default Probabilities with an Endogenous Bankruptcy Jump-Diffusion Model’, *Asia-Pacific Financial Markets* **13**, 11–39.
- Le Courtois, O. et Randrianarivony, R. (2007), Ruin Theory with Stable and Double Exponential Lévy Processes, in ‘IME 2007 Conference Proceedings’, IME Athens, Greece, International Congress On Insurance : Mathematics and Economics XI.
- Lee, R. W. (2004), ‘Option Pricing by Transform Methods : Extension, Unification, and Error Control’, *Journal of Computational Finance* **7**(3), 51–86.
- Lintner, J. V. (1965), ‘The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets’, *Review of Economics and Statistics* **47**, 13–37.
- Lundberg, F. (1903), *I Approximerad Framställning av Sannolikehetsfunktionen. II Återförsäkring av Kollektivrisker*, Almqvist & Wiksell, Uppsala.
- Mandelbrot, B. (1963), ‘The Variation of Certain Speculative Prices’, *Journal of Business* **35**, 394–419.
- Margrabe, W. (1978), ‘The Value of an Option to Exchange One Asset for Another’, *Journal of Finance* **33**(1), 177–86.
- Melnikov, A. et Romaniuk, Y. (2006), ‘Evaluating the Performance of Gompertz, Makeham and Lee-Carter Mortality Models for Risk-Management with Unit-Linked Contracts’, *Insurance : Mathematics and Economics* **39**, 310–329.

- Merton, R. C. (1973), ‘Theory of Rational Option Pricing’, *Bell Journal of Economics and Management Science* **4**, 141–183.
- Merton, R. C. (1976), ‘Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous’, *Journal of Financial Economics* **3**, 125–144.
- Milevsky, M. A. (2006), *The Calculus of Retirement Income*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Milevsky, M. A. et Posner, S. E. (2001), ‘The Titanic Option : Valuation of the Guaranteed Minimum Death Benefit in Variable Annuities and Mutual Funds’, *The Journal of Risk and Insurance* **68**(1), 91–126.
- Moody’s Investors Service (2007), *Corporate Default and Recovery Rates, 1920-2006*, Special Comment.
- Mossin, J. (1966), ‘Equilibrium in a Capital Asset Market’, *Econometrica* **34**(4), 768–783.
- Naik, V. et Lee, M. (1990), ‘General Equilibrium Pricing of Options on the Market Portfolio with Discontinuous Returns’, *Review of Financial Studies* **3**(4), 493–521.
- Nguyen-Ngoc, L. (2003), Exotic options in general Lévy models, Prépublication 850, Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires, Université Paris 6.
- Nguyen-Ngoc, L. et Yor, M. (2003), Lookback and barrier options under general Lévy processes, in Y. Ait-Sahalia et L.-P. Hansen, eds, ‘Handbook of Financial Econometrics’, Amsterdam, North-Holland. Forthcoming.
- Paulson, A., Holcomb, E. et Leitch, R. (1975), ‘The Estimation of the Parameters of the Stable Laws’, *Biometrika* **62**(1), 163–170.
- Quittard-Pinon, F. et Randrianarivony, R. (2008a), Impacts of Jumps and Stochastic Interest Rates on the Fair Costs of GMDB Contracts, in ‘IME 2008 Conference Proceedings’, IME Dalian, China, International Congress On Insurance : Mathematics and Economics XII.
- Quittard-Pinon, F. et Randrianarivony, R. A. (2008b), ‘Calibrage d’options pour trois modèles mixtes diffusions et sauts’, *Finance* **29**(2), 103–130.
- Quittard-Pinon, F. et Randrianarivony, R. A. (2008c), ‘How to Price Efficiently European Options in Some Geometric Lévy Processes Models?’, *International Journal of Business* **13**(4), 301–314.

- Quittard-Pinon, F. et Randrianarivony, R. A. (2008*d*), ‘Valuing Options in Jump Diffusion Models Using Generalized Fourier Analysis’, *Banque et Marchés* **97**, 6–15.
- Randrianarivony, R. (2006), Implémentation et extension de l’approche de Kou pour l’évaluation d’options, in ‘AFFI 2006 Conference Proceedings’, Association Française de Finance, International Meeting of AFFI.
- Rogers, L. C. G. (2000), ‘Evaluating First-Passage Probabilities for Spectrally One-Sided Lévy Processes’, *Journal of Applied Probability* **37**, 1173–1180.
- Samorodnitsky, G. et Taqqu, M. S. (1994), *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman and Hall.
- Samuelson, P. A. (1965), ‘Rational Theory of Warrant Pricing’, *Industrial Management Review* **6**, 13–31.
- Satō, K.-I. (1999), *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Vol. 68 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Schoutens, W. (2003), *Lévy Processes in Finance : Pricing Financial Derivatives*, Wiley, New York.
- Sharpe, W. F. (1964), ‘Capital Asset Prices : A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk’, *Journal of Finance* **19**, 425–442.
- Usabel, M. (1999), ‘Calculating Multivariate Ruin Probabilities via Gaver-Stehfest Inversion Technique’, *Insurance : Mathematics and Economics* **25**(2), 133–142.
- Vasicek, O. A. (1977), ‘An equilibrium characterization of the term structure’, *Journal of Financial Economics* **5**(2), 177–188.
- Wilkens, S. et Stoimenov, P. A. (2007), ‘The Pricing of Leverage Products : An Empirical Investigation of the German Market for ‘Long’ and ‘Short’ Stock Index Certificates’, *Journal of Banking and Finance* **31**(3), 737–750.

Table des matières

Introduction générale	1
I Méthodologies d'évaluation d'options et quelques applications en finance	7
1 Produits dérivés de type européen	9
1.1 Modèles diffusifs avec sauts	10
1.1.1 Cadre général	10
1.1.2 Le modèle à sauts gaussiens de Merton	12
1.1.3 Le modèle à sauts exponentiels doubles de Kou	18
1.1.4 Un nouveau modèle diffusif avec sauts	22
1.2 Une approche générale pour l'évaluation	23
1.2.1 Condition mesure martingale équivalente	24
1.2.2 Évaluation de produits dérivés	25
1.2.3 Implémentation numérique	29
1.2.4 Application	31
1.3 Analyse des résultats et calibrage	36
1.3.1 Discussion	36
1.3.2 Options puissance	37
1.3.3 Calibrage de modèles	39
2 Options exotiques, défaut sur fonds propres et intéressement des dirigeants	51
2.1 Perspectives	52
2.1.1 Caractéristiques de quelques produits	52
2.1.2 Méthode d'évaluation	53
2.1.3 Cas des modèles diffusifs avec sauts exponentiels	54

2.2	Prise en compte d'une barrière	54
2.2.1	Approximation des processus de Lévy	54
2.2.2	Temps de passage	57
2.2.3	Défaut sur fonds propres	62
2.3	Options d'échange	65
2.3.1	Les deux actifs ont des sauts de taille constante	65
2.3.2	Un mouvement brownien contre un processus diffusif avec sauts	72
2.3.3	Rémunération par stock options indexées	85
II	Assurance-vie et théorie de la ruine	93
3	Contrats d'assurance-vie	95
3.1	Risque de mortalité	97
3.1.1	Notation	97
3.1.2	Modèles de mortalité	97
3.1.3	Paramètres empiriques et probabilité de survie	99
3.2	Contrat à garantie flexible en cas de vie (PEFG)	102
3.2.1	Modélisation du contrat et des actifs sous-jacents . . .	102
3.2.2	Évaluation du contrat PEFG	103
3.2.3	Analyse des résultats	104
3.3	Contrat à bénéfice minimum garanti en cas de décès (GMDB)	107
3.3.1	Cadre général et principales notations	109
3.3.2	Cadre d'évaluation général	113
3.3.3	Étude numérique	120
4	Retour sur la théorie de la ruine	137
4.1	Processus de Lévy	139
4.1.1	Processus à sauts doubles exponentiels	139
4.1.2	Processus stables	139
4.2	Probabilités de ruine et de survie	141
4.2.1	Factorisation de Wiener-Hopf	141
4.2.2	Ruine et survie	147
4.3	Étude numérique	154
4.3.1	Implémentation	154
4.3.2	Résultats	158

Conclusion générale	167
Bibliographie	177
Table des matières	181

Ce document a été préparé à l'aide de l'éditeur de texte GNU Emacs et du système de composition typographique L^AT_EX 2_ε.

Résumé

Cette thèse met en lumière l'impact des discontinuités de cours financiers dans les domaines de l'assurance et de la finance. Une première partie se concentre sur l'évaluation de divers produits dérivés quand le sous-jacent présente des ruptures ou des sauts. Il y est démontré la puissance de l'approche par transformée de Fourier généralisée, tant au niveau conceptuel que numérique. Cet outil permet alors d'explorer de nouveaux produits, comme les options d'échange, en présence de discontinuités. Enfin, une protection contre une baisse soudaine des fonds propres d'une compagnie, émise sur le marché, ou encore l'impact de ces discontinuités sur l'intéressement des dirigeants sont étudiés. Une seconde partie analyse les conséquences de ces sauts sur des contrats d'assurance-vie, à garantie flexible en cas de vie et à minimum garanti en cas de décès. Elle s'intéresse aussi à la ruine des compagnies d'assurance quand les réserves de celles-ci présentent diverses ruptures.

Mots-Clés : Options d'échange, Défaut sur fonds propres, Intéressement des dirigeants, Contrats d'assurance-vie, Garantie minimum, Ruine, Discontinuités, Sauts, Ruptures, Transformée de Fourier.

TAKING INTO ACCOUNT ASSET PRICE DISCONTINUITIES IN FINANCE AND INSURANCE

Abstract

The purpose of this thesis is to shed light on the impact of asset price discontinuities in the fields of insurance and finance. The first part focuses on the pricing of diverse derivatives when the underlying incurs structural breaks and jumps. The expressive power as well as the numerical performance of the generalized Fourier transform approach is shown. The tool thus obtained allows to price other products in the presence of discontinuities, for example swap options. Protection against sudden price drops, via so-called equity default swaps and the impact of those discontinuities on managers incentives are also studied. A second part analyzes jump impacts, among other factors, on life insurance contracts, in particular pure endowments with flexible guarantee and contracts whose guarantee is only paid upon death. Insurance companies ruin is also considered when reserves face various breaks.

Keywords: Margrabe options, Equity default, Managers incentives, Life insurance contracts, Minimum guarantee, Ruin, Discontinuities, Jumps, Structural breaks, Fourier transforms.