

# **Pricing of Variable Annuities**

## **Incorporation of Policyholder Behavior**

### **Zusammenfassung der Masterarbeit an der Technischen Universität München (Lehrstuhl für Finanzmathematik, Prof. Dr. Rudi Zagst)**

Franz Hubert Ramsauer

#### **Einführende Problemstellung und Ziel der Masterarbeit**

Als Vertreter der fondsgebundenen Lebensversicherungen ermöglichen variable Annuitäten ihren Versicherten an positiven Marktentwicklungen (z.B. Kursrally am Aktienmarkt) zu partizipieren. Durch zusätzlich verfügbare Garantien („Guaranteed Minimum Benefits“) ist es dem Käufer und somit dem späteren Inhaber einer variablen Annuität ferner möglich sich gegen finanz- und versicherungsmathematische Risiken abzusichern. So garantieren „Guaranteed Minimum Accumulation Benefits“ (GMABs), „Guaranteed Minimum Death Benefits“ (GMDBs) und „Guaranteed Minimum Surrender Benefits“ (GMSBs) eine Mindestauszahlung am Ende der Vertragslaufzeit, im Todesfall des Versicherten bzw. im Fall der (freiwilligen) Kündigung durch den Inhaber der variablen Annuität. Die zahlreichen Vorteile und Garantien, die variable Annuitäten ihren Kunden offerieren, stellen allerdings ein nicht zu vernachlässigendes Risiko für die Anbieter von variablen Annuitäten dar. Aktuarielle Risiken, die sich beispielsweise im Hinblick auf die zu erwartende Lebenserwartung der Versicherten ergeben, lassen sich zwar über den Verkauf von vielen Kontrakten zum Teil verringern, zugleich führen aber hohe Stückzahlen bei der Vergabe von variablen Annuitäten zu einer deutlichen Erhöhung des finanzmathematischen Risikos. Falls nämlich der Wert der Garantien den Wert des zugrundeliegenden Aktienportfolios übersteigt, führt eine gesteigerte Ausgabe von variablen Annuitäten zu einem gesteigerten Verlust seitens des Versicherers (Hebel). Aus diesem Grund stellt vor allem für die Anbieter von variablen Annuitäten die Ermittlung des fairen Ausgabepreises eine wichtige Problemstellung dar.

Gemäß dem aktuellen Stand in der Fachliteratur (zumindest soweit der Verfasser diese derzeit überblickt) stellt die vorliegende Masterarbeit die erste wissenschaftliche Arbeit dar, die zur Preisermittlung von variablen Annuitäten geschlossene Approximationsformeln herleitet und dabei

neben stochastischen Zinsen und stochastischen Sterbeintensitäten auch stochastische Kündigungswahrscheinlichkeiten zulässt.

## **Modellierung von Finanzmarkt, Sterben und Kündigung**

Affin-lineare Modelle zeichnen sich unter anderem durch ihre analytische Handhabbarkeit aus, was sich in diesem Fall positiv auf die Herleitung der geschlossenen Preisapproximationsformeln auswirkt. Aus besagtem Grund wird angenommen, dass der Prozess für die momentanen Zinsen einem von Hull und White erweiterten Vasicek Modell folgt. Ferner soll der zugrundeliegende Finanzmarkt eine Aktienposition bzw. einen Fonds beinhalten, der durch eine verallgemeinerte geometrische Brownsche Bewegung (stochastischer Drift bei zugleich zeitabhängiger Volatilität) beschrieben werden kann. Die Sterblichkeit des Versicherten wird durch einen Cox-Prozess modelliert. Dabei entspricht die Zeit bis zum Ableben des Versicherten der Zeit bis zum ersten Sprung des Zählprozesses. Die dem Sprungprozess unterliegende stochastische Intensität ergibt sich aus einer deterministischen, vom Alter des Versicherten abhängigen Grundintensität (statisches Gompertz Modell) multipliziert mit einem stochastischen Faktor (Ornstein-Uhlenbeck Prozess), der die steigende Lebenserwartung unter Berücksichtigung von zufälligen Fluktuationen erfasst. Im Fall von vorzeitigen Vertragskündigungen seitens der Versicherungsnehmer wird wiederum ein Cox-Prozess verwendet, dessen Intensität einer deterministischen Funktion (s-Kurve) mit stochastischen Inputs des Finanzmarktes (Zinsen und Fondsperformance) entspricht. Durch die gewählte s-Kurven-Konstruktion können einerseits Versicherte erfasst werden, die nie ihren Vertrag vorzeitig kündigen wollen (obere Schranke). Andererseits können aber auch Versicherungsnehmer in das Bewertungsverfahren einbezogen werden, die aufgrund von privatem Konsum oder Schulden ihren Vertrag vorzeitig kündigen, obwohl dies aus Sicht der Vermögensmaximierung nicht rational wäre (untere Schranke). Zuletzt ist die vorgestellte Kündigungsmodellierung im Einklang mit Erkenntnissen aus empirischen Untersuchungen. Gemäß der sogenannten „Zinssatz-Hypothese“ ist es nämlich möglich, dass ein Anstieg des Zinsniveaus erhöhte Kündigungsraten zur Folge hat, da es wahrscheinlicher wird, dass ähnliche variable Annuitäten oder andere Kapitalmarktprodukte mit besseren Konditionen (z.B. höheren Garantieleistungen) am Markt verfügbar sind bzw. die gleichen Produkte zu

einem günstigeren Preis nachgekauft werden können. Ferner wird in Form eines weiterführenden Beispiels aufgezeigt, wie das bestehende Kündigungsmodell modifiziert werden kann, sodass dieses auch die sogenannte „Notfall-Hypothese“ einschließt.

## **Bewertete variable Annuitäten**

Die vorliegende Arbeit zielt auf die Bewertung von variablen Annuitäten ab, die ihren Versicherten garantierte Mindestrückzahlungen am Ende der Vertragslaufzeit in Form von GMABs, im Todesfall des Versicherten mittels GMDBs sowie im Fall von vorzeitiger Kündigung seitens des Versicherten durch GMSBs bieten. Neben der GMAB-Komponente, die als Basisprodukt angesehen werden kann, bleibt es dem Versicherten aber beim Kauf der variablen Annuität freigestellt, ob er auch die optional verfügbaren GMDB- und GMSB-Komponenten hinzufügt. Da die Ereignisse „Vertrag ist in Kraft bis zum Laufzeitende“, „Kunde stirbt vor dem Laufzeitende, hat aber bis zu dessen Tod nicht gekündigt“ sowie „Kunde kündigt den bestehenden Vertrag vor Laufzeitende, was er aber nur kann solange er am Leben ist“ paarweise disjunkt sind, können mit Hilfe von risikoneutralen Bewertungsverfahren die fairen Preise von GMABs, GMDBs und GMSBs einzeln bestimmt und anschließend addiert werden.

## **Kalibrierung des Finanz-, Sterbe- und Kündigungsmodells**

Da – zumindest aus Anbietersicht – variable Annuitäten einem gewissen Risiko unterliegen, wird das vorgestellte Finanzmarktmodell mit Hilfe von möglichst liquiden Kapitalmarktprodukten kalibriert um die Ermittlung und anschließende Umsetzung von notwendigen Hedging-Maßnahmen zu erleichtern. Daher werden die Zinssatzparameter aus Quotierungen für Swaps und Caps / Floors (6M-EURIBOR als Basiswert) geschätzt. Bzgl. den Fonds- bzw. Aktienparametern werden europäische DAX-Optionen verwendet. Als vereinfachende Annahme wird die Korrelation zwischen den Wienerprozessen, die den Zins- und Fondsprozess treiben, durch die historische Korrelation zwischen den täglichen DAX-Renditen und den 6M-EURIBOR-Renditen ersetzt. Die Kalibrierung des Sterbemodells erfolgt in zwei Schritten unter dem echten und dem risikoneutralen Maß. Dabei werden zunächst mit Hilfe von öffentlich verfügbaren Sterbetafeln das statische Gompertz Modell und der Prozess, der die zunehmende

Lebenserwartung abbildet, kalibriert. Danach wird unter Einbezug der geschätzten realen Sterbeparameter aus durchschnittlichen, am Markt angebotenen Annuitätenraten die von den Versicherern eingepreiste Risikoprämie ermittelt. Aus Mangel an geeigneten Kündigungsdaten zu den betrachteten variablen Annuitäten (Versicherungen stufen diese Daten nämlich als vertraulich ein) wird das Modell auf Basis von Daten, die in der Literatur verfügbar sind, kalibriert um die anzuwendende Methodik vorzustellen. Für Vertreter aus der Praxis sollte diese beispielhafte Kalibrierung allerdings keine Einschränkung darstellen, da diese im Allgemeinen über die notwendigen Inputdaten verfügen.

### **Wesentliche Erkenntnisse dieser Arbeit**

Durch die Wahl geeigneter Modelle für den zugrundeliegenden Finanzmarkt, die Sterblichkeit sowie das Kündigungsverhalten der Versicherten ist es trotz der gegebenen Stochastik noch immer möglich für GMABs, GMDBs und GMSBs geschlossene Approximationen herzuleiten. Im Vergleich zu gängigen Simulationsverfahren sind diese äußerst schnell in der Preisbestimmung ohne sich dabei auf restriktive Annahmen wie z.B. konstante Kündigungsraten oder Zinsen, beschränken zu müssen.