



DÉCOMPOSITION DE FÖLLMER-SCHWEIZER
EXPLICITE D'UN PASSIF D'ASSURANCE VIE
AU MOYEN DU CALCUL DE MALLIAVIN

Mémoire présenté par Sébastien de Valeriola en vue de l'obtention du master en
sciences actuarielles (juin 2012)

Promoteur : Pierre Ars

Lecteur : Pierre Devolder

Résumé

Stratégies de couverture

Le problème de la couverture du bilan d'une compagnie "financière" fait partie des préoccupations majeures d'une large communauté scientifique depuis des décennies. Dans les cas très simples, la théorie classique décrit une méthode permettant de construire un portefeuille dynamique d'instruments financiers couvrant parfaitement le bilan. Un tel portefeuille est malheureusement inexistant dès que le cadre gagne un tant soit peu en complexité. L'enjeu est de taille, la question de la tarification des actifs financiers étant directement liée à l'existence de ces stratégies de couverture.

Le marché que nous considérons dans ce mémoire appartient à cette catégorie difficile : nous étudions la couverture du passif d'un assureur vendant des contrats d'assurance vie. Il serait vain de tenter de couvrir parfaitement ce passif avec des instruments financiers, le risque de mortalité et le risque financier étant de natures très différentes et n'étant par là même que fort peu liés.

Stratégie optimale de Föllmer-Schweizer

Parmi les nombreuses pistes de solutions proposées ces dernières années pour pallier l'incomplétude des marchés, nous considérons ici la théorie de la *stratégie optimale* de Föllmer-Schweizer. Celle-ci part de l'observation suivante : bien qu'il n'existe pas de stratégie de couverture parfaite, il est possible de sélectionner parmi toutes les stratégies de "couverture imparfaite" celle qui génère le moins de risque. L'outil central de cette théorie, la décomposition de Föllmer-Schweizer, permet de décomposer un "risque" en une partie couvrable par un portefeuille financier et une partie non couvrable. Föllmer et Schweizer ont utilisé cette décomposition pour démontrer l'existence d'une stratégie optimale pour le risque. Néanmoins, ce résultat ne donne pas l'expression de cette stratégie, il en garantit seulement l'existence.

Calcul de Malliavin

L'objet de ce travail est de calculer explicitement la stratégie optimale dans le cas d'un passif d'assurance vie. L'outil que nous utilisons à cette fin est l'un des joyaux de l'analyse stochastique, le calcul de Malliavin.

Tentons d'esquisser une intuition à propos de cette stratégie de couverture. Comment décrire le nombre d'unités de l'actif A que l'assureur doit détenir pour couvrir au mieux son passif L sur le marché? Remarquons qu'il est fortement lié à la façon dont L évolue lorsque la valeur de A change. Cette quantité correspond en fait exactement à la sensibilité des valeurs de L par rapport aux valeurs de A . Il semblerait ainsi légitime d'étudier la dérivée de L par rapport à A , si cette dérivée avait un sens quelconque. Et c'est justement là qu'intervient le calcul de Malliavin : il permet de définir – et de calculer explicitement – la dérivée d'un processus stochastique par rapport à un autre.

Principaux résultats

Le mariage de la décomposition de Föllmer-Schweizer et du calcul de Malliavin nous permet ainsi d'obtenir explicitement :

- la *stratégie optimale* de couverture pour le passif (composition du portefeuille répliquant la partie couvrable du passif, en tenant compte de l'information disponible) ;
- la *description statistique* de la partie non-couvrable du passif (distribution et donc moments, quantiles, etc.) ;
- la *fair value* du passif hors risk margin ;
- la *risk margin* liée au passif, tel que définie dans Solvency II

et ce à tout instant.

Le calcul de Malliavin constitue aussi un formidable outil pour le calcul des sensibilités (grecques). Nous profitons donc de ce cadre pour calculer la sensibilité du passif par rapport aux différents paramètres du marché qui l'influencent (paramètres de taux, paramètres de l'actif, paramètres de la mortalité, ...).

Un ensemble de simulations numériques clôt ce travail, donnant vie aux résultats théoriques évoqués ci-dessus.

Ce mémoire se concentre sur l'étude d'un passif d'assurance vie simple, mais il est possible d'étendre nos résultats à des passifs plus compliqués, aussi bien d'assurance vie que d'assurance non-vie. Le cadre calculatoire que nous présentons pourrait intéresser une large classe de professionnels du monde de l'actuariat, puisqu'il permet de maîtriser (à travers la décomposition, la modélisation et la simulation du bilan) les risques auxquels le secteur de l'assurance doit faire face.



“Je suis certain que le modèle est le meilleur ami du physicien parce qu’il est une approximation de la réalité. Je suis tout aussi certain que le modèle est le pire ennemi du physicien parce qu’il est une approximation de la réalité. De toute façon, le modèle est tout ce dont dispose le physicien.”

H. A. Lorentz

JE VOUDRAIS, comme de coutume, commencer par remercier chaleureusement Pierre Ars. Je suis venu vers lui avec l’envie d’apprendre le calcul de Malliavin et avec de sévères contraintes : “j’aimerais faire un mémoire basé sur Malliavin, très théorique, mais je ne pourrai le commencer qu’en février...” Et Pierre a accepté sans hésiter, en m’accordant toute sa confiance. Ce travail a été pour moi une formidable occasion d’appliquer des mathématiques de haut vol à un problème d’assurance terre à terre, exactement ce dont j’avais besoin. Pierre a su tempérer l’“abstracteur” qui est en moi et me ramener sur terre. La clarté de ses explications lors de nos entrevues et son enthousiasme pour les résultats que nous avons obtenus ont été un véritable moteur.

Je voudrais aussi remercier Pierre Devolder. D’abord pour avoir accepté de lire ce mémoire (dont certains passages peuvent parfois paraître un peu... hum disons... rébarbatifs), et ensuite parce que c’est lui qui m’a suggéré de commencer l’actuariat.

Un grand merci à Julie et Ludo. Julie pour son aide continue tout au long du master, sa générosité spontanée et les longues soirées de chant que nous avons partagées. Ludo, colombophile averti, pour avoir été un excellent camarade de jeu pendant ces trois années.

Enfin, je ne pourrais terminer ces remerciements sans évoquer mon Alix, qui a relu ce travail, m’a supporté – ce qui n’est pas une mince affaire – durant toute la rédaction de celui-ci et illumine ma vie un peu plus chaque jour.

Table des matières

Résumé	iii
Remerciements	v
1 Introduction et notations	1
1.1 Avertissement au lecteur	1
1.2 Analyse stochastique	2
1.3 Plan du mémoire	4
1.4 Notations	4
2 Calcul de Malliavin	7
2.1 Introduction	7
2.2 Décomposition en chaos de Wiener	7
2.3 Dérivée de Malliavin	11
2.4 Intégrale de Skorohod	17
2.5 Formule de Clark-Ocone	23
2.6 Application au calcul des grecques	26
3 Couverture financière dans des marchés incomplets	33
3.1 Intégrale stochastique générale	33
3.1.1 Martingales	33
3.1.2 Construction de l'intégrale stochastique	35
3.1.3 Décomposition de Kunita-Watanabe	37
3.2 Stratégies de couverture	38
3.3 Couverture dans des marchés incomplets	40
3.4 Approche <i>risk-minimization</i>	41
3.4.1 Cas martingale	42
3.4.2 Cas semi-martingale	44
3.5 Approche <i>mean-variance hedging</i>	48
4 Application au passif d'un assureur vie	49
4.1 Cadre de travail et expression du passif	50
4.2 Décomposition du passif	52
4.3 Mortalité stochastique	53
4.4 Actif de type action	56

4.4.1	Décomposition explicite	57
4.4.2	Vérification numérique	64
4.4.3	Calcul des grecques	68
4.5	Actif de type obligation	70
4.5.1	Décomposition explicite	72
4.5.2	Vérification numérique	78
4.5.3	Calcul des grecques	81
4.6	Bilan des hypothèses	81
4.7	Analyse succincte du risque de modèle	81
4.7.1	Calcul numérique de l'erreur commise	82
4.7.2	Borne sur l'erreur commise et calibration	82
5	Conclusion et perspectives	87
A	Résultat technique	89
B	Calibration du modèle Hull-White	91
C	Code utilisé	93
C.1	Simulations pour le premier modèle	93
C.2	Simulations pour le second modèle	97
C.3	Simulations pour le risque de modèle	102
	Liste des figures et tables	105
	Bibliographie	107

Introduction et notations

1.1	Avertissement au lecteur	1
1.2	Analyse stochastique	2
1.3	Plan du mémoire	4
1.4	Notations	4

1.1 Avertissement au lecteur

Dans ce mémoire nous nous proposons de conjuguer d'une part une théorie du calcul stochastique – le calcul de Malliavin – et d'autre part une théorie de tarification financière – le décomposition de Föllmer-Schweizer – pour les appliquer à l'étude concrète du passif d'une compagnie d'assurance. Ces deux théories font appel à des concepts mathématiques de haut vol, nécessaires à la rigueur et à la complétude de notre étude. Le lecteur ne doit cependant pas être découragé par l'aspect technique de ce mémoire. Il serait dommage de se laisser arrêter par le formalisme abstrait des premiers chapitres et de passer ainsi à côté des résultats (très palpables quant à eux) que nous démontrons plus loin.

Les chapitres 2 et 3 plantent le décor nécessaire à la réalisation de nos objectifs. On pourra sans problème – à condition d'admettre une série de résultats théoriques – les passer en première lecture et sauter directement aux résultats concrets du chapitre 4, où la machinerie technique introduite dans les deux chapitres précédents est appliquée au problème pratique qui nous occupe. Les décompositions explicites obtenues dans les théorèmes 4.4 et 4.10 pourraient elles aussi décourager le lecteur, mais l'intérêt tangible de ces deux résultats techniques – sans doute plus facile à appréhender – est donné respectivement par les corollaires 4.5 et 4.11. Le lecteur non-technicien y trouvera un bon résumé de nos résultats de décomposition.

1.2 Analyse stochastique

Jusqu'à la fin du XIX^e siècle, il était entendu que toute fonction continue était forcément régulière en "la plupart" des points de son domaine. Les seuls points de non-dérivabilité étaient supposés être des points angulaires, isolés, autour desquels la fonction se comportait de manière similaire à $f(x) = |x|$ autour 0. C'est en 1861 que le mathématicien allemand Weierstrass donna le premier exemple de fonction continue partout mais dérivable nulle part (parfois appelée le "monstre de Weierstrass"). La nouvelle de l'existence d'une telle fonction eut un impact retentissant, montrant qu'il existait une classe de fonctions continues pour laquelle le calcul différentiel et intégral développé jusqu'alors était inadapté. Par exemple, le "théorème fondamental" (liant une fonction à l'intégrale de sa dérivée) s'avère faux lorsqu'il s'applique à une fonction qui n'est dérivable nulle part.

Un tel phénomène d'oscillation sauvage, qu'on pourrait considérer comme pathologique de prime abord, n'est pourtant pas un non-sens d'abstraction. En fait, un demi-siècle avant le monstre de Weierstrass, le botaniste anglais Brown avait observé au microscope la trajectoire d'un grain de pollen, trajectoire qui peut être modélisée par un *mouvement brownien*, une fonction continue partout mais dérivable nulle part¹. Au début du XX^e siècle, une grande communauté de physiciens, incluant Einstein, modélisa le mouvement des particules quantiques à l'aide du mouvement brownien. Presque simultanément, Bachelier proposait dans sa thèse de doctorat l'utilisation de celui-ci pour la modélisation financière.

Cependant, il fallut encore presque un demi-siècle pour qu'on donne un sens à la notion d'intégrale le long d'une courbe si peu régulière. Presque tous les résultats connus alors suggéraient qu'une telle définition était impossible. Il est en effet sans espoir de tenter de construire une intégrale de type Riemann-Stieltjes de la forme $\int f dg$ lorsque g est à variation non bornée (propriété dont jouit le mouvement brownien). C'est le mathématicien japonais Ito qui, au milieu du XX^e siècle, démontra qu'une telle intégrale pouvait être définie à condition de considérer son existence en un sens probabiliste. L'enthousiasme de la communauté scientifique fut à son comble lorsqu'il obtint le théorème de représentation martingale, qui s'énonce grossièrement comme suit : si F est une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable et W est un mouvement brownien standard, alors il existe un processus φ^F de carré intégrable tel que

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T \varphi_t^F dW_t.$$

Parmi l'extraordinaire diversité des possibilités qu'offre ce résultat, on a commencé à réaliser les services que le calcul stochastique pouvait rendre à l'analyse déterministe (comme par exemple la possibilité de s'en servir pour calculer les solutions de certaines équations aux dérivées partielles à l'aide du théorème de Feynman-Kac).

1. Plus rigoureusement, le mouvement brownien est un processus dont on peut choisir une modification à trajectoires continues.

Une question naturelle à se poser est alors la suivante : est-il possible de caractériser le processus φ_F dont l'existence est prédite par le théorème de représentation martingale ? Une réponse positive fut apportée à cette question dans les années 1970 via le calcul de Malliavin. Malliavin avait introduit un nouveau concept de dérivée d'un processus "dans la direction d'un mouvement brownien" dans un but totalement autre : prouver la régularité de la fonction de densité d'une variable aléatoire. C'est cette dérivée au sens de Malliavin qui fut exploitée par Clark, Haussman et Ocone dans la formule du même nom qui, sous des hypothèses sur la variable aléatoire F , permet d'écrire

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T \mathbb{E}[D_t F | \mathcal{F}_t] dW_t.$$

Cette égalité généralise – en un sens – le théorème fondamental de l'analyse (déterministe) à l'intégrale stochastique. On peut en effet, dans le cas d'un processus F très simple et sans accorder d'attention aux détails ni aux abus de notation, la réexprimer comme

$$F = \mathbb{E}[F] + \int \frac{dF}{dW} dW.$$

Le calcul de Malliavin, aussi appelé calcul stochastique des variations, est en réalité une théorie de calcul différentiel et intégral sur un espace de dimension infinie, l'espace de Wiener (l'espace des trajectoires du mouvement brownien). Il connut un engouement majeur dans le monde des mathématiques financières lorsque, dans les années 1990, Fournié, Lasry, Lebuchoux, Lions et Touzi montrèrent qu'il procurait une méthode très efficace de calcul des grecques (les sensibilités des prix d'options par rapport à leurs différents paramètres).

Il permet en outre de définir, comme opérateur adjoint de la dérivée, une intégrale plus générale que l'intégrale d'Ito : l'intégrale de Skorohod est une intégrale stochastique qui a un sens pour des processus non nécessairement adaptés. Sans entrer dans des détails techniques, il existe un autre type de généralisation de l'intégrale d'Ito. Plutôt que de définir l'intégrale d'une variable aléatoire par rapport à un mouvement brownien, Meyer et Jacod – parmi de nombreux autres – ont montré qu'il est possible de la définir par rapport à une martingale quelconque (suffisamment régulière). Kunita et Watanabe s'appuyèrent sur cette intégrale pour démontrer une décomposition généralisant la décomposition martingale d'Ito, décomposition elle-même appliquée à la couverture d'actifs contingents par Föllmer, Sondermann et Schweizer.

Lorsque le marché ne présente pas d'opportunité d'arbitrage, on peut prouver l'existence d'une *mesure martingale* (qui est équivalente à la mesure de probabilité réelle et sous laquelle un actif donné est une martingale). Si le marché est de plus complet (c'est à dire que tous les actifs conditionnels sont atteignables), cette mesure est unique et permet alors la tarification des produits dérivés, d'après la théorie initiée par Black, Scholes et Merton dans les années 1970 puis étoffée par une importante communauté dans les décennies qui ont suivi. Si par contre

le marché est incomplet, le problème est plus délicat : l'unicité de cette mesure n'est plus vérifiée et il faut établir des critères pour *désigner* un prix adéquat pour l'actif en question, parmi tous les prix différents donnés par les multiples mesures martingales. C'est ce qu'ont fait Föllmer et Schweizer dans les années 1990.

1.3 Plan du mémoire

Dans ce mémoire, après avoir établi les outils techniques nécessaires, nous appliquons la décomposition de Föllmer-Schweizer au passif d'une compagnie d'assurance vie, puis calculons les termes de celle-ci à l'aide du calcul de Malliavin.

Le chapitre 2 jette les bases du calcul de Malliavin, tandis que le chapitre 3 expose le problème de la couverture des actifs contingents dans des marchés incomplets et la décomposition de Föllmer-Schweizer. Dans le chapitre 4, nous obtenons la décomposition explicite du passif (selon différents modèles), et donc une stratégie de couverture optimale pour ce passif. Nous proposons ensuite un ensemble de perspectives et de développements potentiels de nos résultats. Enfin, l'appendice contient des résultats techniques et le code utilisé pour les simulations.

1.4 Notations

Tout au long de ce mémoire, nous considérons un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Les processus stochastiques que nous manipulons sont définis sur $[0, T] \times \Omega$, pour un $T > 0$ fixé. W , W^1 et W^2 sont des mouvements browniens unidimensionnels standards sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $(\mathcal{F}_t)_{(0 \leq t \leq T)}$ la filtration engendrée par les valeurs du mouvement brownien contextuel. Plus précisément,

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\{W_s : s \in [0, t]\})$$

dans les chapitres 2 et 3, tandis que

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\{W_s^1 : s \in [0, t]\} \cup \{W_s^2 : s \in [0, t]\})$$

dans le chapitre 4. Il est standard de montrer que \mathcal{F}_t est continue à droite (c'est à dire telle que $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ pour tout t) et telle que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ (voir par exemple Karatzas & Shreve (1988)). On note aussi

$$L^2(\Omega) = \{u \text{ variable aléatoire (v.a.)} : \mathbb{E}[u^2] < \infty\}.$$

Nous utilisons une notation fonctionnelle pour les fonctions déterministes et une notation indicielle pour les processus, c'est à dire que nous notons $f(t)$ pour la valeur de f en t si f est déterministe alors que nous écrivons f_t si f est un processus stochastique.

Nous notons $\mathbf{1}_A$ la fonction caractéristique de l'ensemble A . Les fonction de densité et fonction de répartition de la loi normale sont notées φ et Φ : pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y) dy.$$

Clarifions les différentes notions de mesurabilité qui sont utilisées. Un processus X est

- *mesurable* si l'application

$$X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} : (t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$$

est mesurable pour $\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}$ (où \mathcal{B} est la σ -algèbre des boréliens) ;

- *adapté* si X_t est mesurable pour \mathcal{F}_t pour tout $t \in [0, T]$;
- *progressivement mesurable* si pour tout $t \in [0, T]$, l'application

$$X : [0, t] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} : (s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$$

est mesurable pour $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}$;

- *prévisible* si X_t est mesurable pour \mathcal{F}_{t-} pour tout $t \in [0, T]$.

Calcul de Malliavin

2.1	Introduction	7
2.2	Décomposition en chaos de Wiener	7
2.3	Dérivée de Malliavin	11
2.4	Intégrale de Skorohod	17
2.5	Formule de Clark-Ocone	23
2.6	Application au calcul des grecques	26

2.1 Introduction

Il existe dans la littérature deux philosophies différentes pour considérer et définir les opérateurs de Malliavin. La première, utilisée notamment par Nualart (1995), Bally (2009) et Solé (2005), définit la dérivée de Malliavin pour des variables aléatoires très simples puis étend cette définition par densité. La deuxième, présentée par Malliavin (1978)¹ et Friz (2005) entre autres, définit celle-ci comme une dérivée de Fréchet sur l'espace de Wiener. Nous avons choisi de suivre ici l'approche de Øksendal (1997), qui participe de ces deux philosophies, en variant toutefois la présentation de certains résultats et définitions. Mentionnons qu'il existe aussi une troisième construction de ce calcul des variations à partir de l'opérateur de Ornstein-Uhlenbeck, mais elle fait appel à des résultats non triviaux de la théorie des semigroupes et est donc plus technique.

2.2 Décomposition en chaos de Wiener

La décomposition en chaos de Wiener-Ito est fondamentale en analyse stochastique, et joue un rôle crucial dans le calcul de Malliavin. Elle fut introduite en 1938 par Wiener, puis, en 1951, Ito démontra qu'on pouvait l'exprimer en termes d'intégrales d'Ito itérées.

1. L'article original.

Définition 2.1. Soit l'ensemble ordonné

$$S_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in [0, T]^n : 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n\}.$$

Pour une fonction $f \in L^2(S_n)$, on définit l'intégrale d'Ito n fois itérée par

$$J_n(f) = \int_0^T \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} f(t_1, \dots, t_n) dW_{t_1} \dots dW_{t_n}.$$

Cette définition a du sens puisque à chaque itération i , l'intégrand

$$\int_0^{t_i} \dots \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} f(t_1, \dots, t_{i-1}) dW_{t_1} \dots dW_{t_{i-1}}$$

est un processus stochastique \mathcal{F}_t -adapté en la variable $t_i \in [0, t_{i+1}]$, où $t_{n+1} = T$. Ce processus est de plus de carré sommable pour la mesure $d\mathbb{P} \otimes dt_i$.

L'isométrie d'Ito permet de prouver le résultat suivant.

Lemme 2.2. Soient $f, g \in L^2(S_n)$ et $m, n \in \mathbb{N}$. On alors

$$\mathbb{E}[J_m(g)J_n(h)] = \delta_{m,n}(n!)^2(g, h)_{L^2(S_n)}.$$

Ito (1951) donne une formule utile pour calculer ces intégrales itérées au moyen des polynômes de Hermite. Les polynômes de Hermite sont les fonctions $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$h_n(x) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{1}{2}x^2} \right),$$

dont les premiers représentants sont

$$\begin{aligned} h_0(x) &= 1, & h_1(x) &= x, & h_2(x) &= x^2 - 1, \\ h_3(x) &= x^3 - 3x, & h_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3, & h_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x. \end{aligned}$$

Théorème 2.3. Soient $g \in L^2([0, T])$ et $G = g^{\otimes n}$. On a alors

$$n!J_n(G) = \|g\|_{L^2([0, T])}^n h_n \left(\frac{\int_0^T g(t) dW_t}{\|g\|_{L^2([0, T])}} \right).$$

Remarque 2.4. La notation tensorielle utilisée dans l'énoncé du théorème s'explique comme suit : $g^{\otimes n} = g \otimes \dots \otimes g$ est une fonction de n variables telle que

$$g^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n) = g(x_1) \dots g(x_n).$$

Exemple 2.5. On calcule ainsi, en choisissant $g \equiv 1$ et $n = 3$,

$$6 \int_0^T \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} dW_{t_1} dW_{t_2} dW_{t_3} = T^{3/2} h_3 \left(\frac{W_T}{T^{1/2}} \right) = W_T^3 - 3TW_T.$$

Sans entrer dans des arguments abstraits qui n'ont pas leur place ici, précisons que le sous-espace de $L^2(\Omega)$ engendré par les v.a. de la forme du terme de droite du théorème précédent est appelé le chaos de Wiener d'ordre n .

Le résultat suivant donne la décomposition en chaos de Wiener.

Théorème 2.6. *Soit $\varphi \in L^2(\Omega)$ une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable. Il existe une unique suite de fonctions déterministes $(f_n) \subset L^2(S_n)$ telle que*

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(f_n).$$

De plus on a l'isométrie

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{L^2(S_n)}^2.$$

Remarque 2.7. Dans l'énoncé de ce théorème,

- $f_0 = \mathbb{E}[\varphi]$ et J_0 est l'application identité;
- l'égalité entre la v.a. et sa décomposition est à comprendre au sens $L^2(\Omega)$.

Le lien entre les chaos de Wiener et la calcul de Malliavin est plus direct lorsqu'on le formule en termes de décomposition symétrique plutôt qu'en termes de décomposition ordonnée dans le temps comme énoncé ci-dessus.

Définition 2.8. Une fonction $f : [0, T]^n \rightarrow \mathbb{R}$ est *symétrique* si

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

pour tout $\sigma \in \Sigma_n = \{\text{permutations de } \{1, \dots, n\}\}$. L'ensemble des fonctions symétriques de carré sommable sur $[0, T]^n$ sera noté $L_s^2([0, T]^n)$.

La *symétrisation* d'une fonction $f : [0, T]^n \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Notons que $f = \hat{f}$ si et seulement si f est symétrique.

Exemple 2.9. La symétrisation de la fonction

$$f(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 + x_2$$

est ainsi la fonction

$$\hat{f}(x_1, x_2) = 1 + \frac{1}{2} (x_1 + x_1^2 + x_2 + x_2^2).$$

Informellement, on peut dire que toute l'information d'une fonction $f \in L_s^2([0, T]^n)$ est contenue dans ses valeurs sur S_n . La mesure de cet ensemble valant $1/n!$ la mesure de $[0, T]^n$, on a

$$\|f\|_{L^2([0, T]^n)}^2 = n! \|f\|_{L^2(S_n)}^2.$$

Définition 2.10. Pour une fonction $f \in L^2_s([0, T]^n)$, on définit l'intégrale d'Ito n fois itérée par

$$I_n(f) = \int_{[0, T]^n} f dW^{\otimes n} = n! J_n(f).$$

Le lemme 2.2 et le théorème 2.3 s'adaptent facilement à I . Formulons le théorème de décomposition *symétrique* en chaos de Wiener.

Théorème 2.11. Soit $\varphi \in L^2(\Omega)$ une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable. Il existe une unique suite de fonctions déterministes $f_n \in L^2_s(S_n)$ telle que

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n).$$

De plus on a l'isométrie

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|f_n\|_{L^2([0, T]^n)}^2. \quad (2.1)$$

Idée de la démonstration. Par le théorème de représentation d'Ito, il existe un processus \mathcal{F}_t -adapté φ_1 tel que

$$\varphi(w) = \mathbb{E}[\varphi] + \int_0^T \varphi_1(t_1, w) dW_{t_1}.$$

De la même façon, pour chaque $t_1 \in [0, T]$ il existe un deuxième processus \mathcal{F}_t -adapté φ_2 tel que

$$\varphi_1(t_1, w) = \mathbb{E}[\varphi(t_1, \cdot)] + \int_0^{t_1} \varphi_2(t_2, t_1, w) dW_{t_2},$$

qui, injecté dans l'équation précédente, donne

$$\varphi(w) = \mathbb{E}[\varphi] + \int_0^T \mathbb{E}[\varphi(t_1, \cdot)] dW_{t_1} + \int_0^T \int_0^{t_1} \varphi_2(t_2, t_1, w) dW_{t_2} dW_{t_1}.$$

La fonction $f_1(t_1) = \mathbb{E}[\varphi(t_1, \cdot)]$ est déterministe, et son intégrale constitue le premier terme de la décomposition. En itérant ce raisonnement et en symétrisant les fonctions obtenues, on obtient tous les autres termes. Il suffit alors de montrer que la suite constituant le "reste" converge dans $L^2(\Omega)$ vers 0. \square

Exemple 2.12. Calculons les décompositions de $\varphi_t = W_t(W_T - W_t)$. Il est clair que

$$\begin{aligned} W_t(W_T - W_t) &= W_t \int_t^T dW_{t_2} \\ &= \int_t^T \int_0^t dW_{t_1} dW_{t_2} \end{aligned}$$

$$= \int_0^T \int_0^{t_2} \mathbf{1}_{\{t_1 < t < t_2\}} dW_{t_1} dW_{t_2},$$

d'où $\varphi_t = J_2(\mathbf{1}_{\{t_1 < t < t_2\}})$. Pour la décomposition symétrique, il suffit de calculer la symétrisée de $\mathbf{1}_{\{t_1 < t < t_2\}}$:

$$\varphi_t = I_2 \left(\frac{1}{2} (\mathbf{1}_{\{t_1 < t < t_2\}} + \mathbf{1}_{\{t_2 < t < t_1\}}) \right).$$

2.3 Dérivée de Malliavin

Avant de nous lancer dans le calcul de Malliavin proprement dit, rappelons quelques éléments d'analyse fonctionnelle.

Définition 2.13. Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $U \subset X$ un ouvert et $F : U \rightarrow \mathbb{R}$.

1. F est dérivable au sens de Gâteaux en $x \in U$ dans la direction $y \in X$ si

$$D_y F(x) = \left. \frac{d}{d\epsilon} F(x + \epsilon y) \right|_{\epsilon=0}$$

existe.

2. F est dérivable au sens de Fréchet en $x \in U$ s'il existe une application linéaire continue $A : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in X}} \frac{|f(x+h) - f(x) - A(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Ces concepts correspondent respectivement à l'existence d'une dérivée partielle (ou directionnelle) et à la différentiabilité dans le cas où $X = \mathbb{R}^m$. Le résultat suivant est fondamental en dimension finie et peut être facilement généralisé en dimension infinie.

Proposition 2.14. Soit $f : U \subset X \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Si f est dérivable au sens de Fréchet en x , alors elle est dérivable au sens de Gâteaux en x dans toutes les directions.
2. Si f est dérivable au sens de Gâteaux en x dans toutes les directions et que l'application $y \mapsto D_y f(x)$ est continue pour tout $x \in U$, alors il existe un élément $\nabla f(x) \in X$ tel que

$$D_y f(x) = \langle \nabla f(x), y \rangle.$$

Si $x \mapsto \nabla f(x)$ est continue dans U , alors f est dérivable au sens de Fréchet.

Abordons maintenant le cadre dans lequel le calcul de Malliavin va être développé. Considérons, pour un élément $w \in \Omega$ fixé, une trajectoire

$$t \rightarrow W_t(w)$$

du mouvement brownien standard sur $[0, T]$. C'est une fonction continue (rappelons qu'on a choisi une modification continue du brownien) définie sur $[0, T]$ et qui s'annule en 0, donc un élément de l'espace de Wiener, $C_0([0, T])$. Il est ainsi tout naturel d'identifier la valeur du mouvement brownien au temps t avec la valeur d'une fonction $w \in C_0([0, T])$:

$$W_t(w) = w(t).$$

Selon cette façon de voir les choses, le mouvement brownien devient simplement l'espace de Wiener $\Omega = C_0([0, T])$ et la loi de probabilité \mathbb{P} du mouvement brownien devient la *mesure de Wiener* μ définie sur les sous-ensembles cylindriques de Ω par

$$\begin{aligned} \mu(\{w : w(t_1) \in F_1, \dots, w(t_k) \in F_k\}) &= \mathbb{P}[W_{t_1} \in F_1, \dots, W_{t_k} \in F_k] \\ &= \int_{F_1 \times \dots \times F_k} \rho(t_1, 0, x_1) \rho(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots \rho(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_1 \dots dx_k, \end{aligned}$$

où $F_i \subset \mathbb{R}$, $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$ et

$$\rho : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (t, x, y) \mapsto \rho(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2}|x-y|^2}.$$

Dans la suite de ce chapitre, nous identifierons aussi $L^2(\Omega)$ et $L^2(\mu)$, ainsi que $L^2([0, T] \times \Omega)$ et $L^2(dt \times \mu)$. Nous avons maintenant à notre disposition les outils nécessaires pour définir la dérivée de Malliavin. Comme nous allons le voir, il s'agit d'une dérivée de Fréchet sur l'espace de Wiener, à ceci près que toutes les directions ne sont pas considérées.

Définition 2.15. L'espace de Cameron-Martin est défini comme

$$H = \left\{ \gamma \in \Omega : \exists g \in L^2([0, T]) : \gamma(t) = \int_0^t g(s) ds \right\}.$$

Soit $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une v.a. qui a des dérivées au sens de Gâteaux dans toutes les directions $\gamma \in H$ au sens fort, c'est à dire que la limite

$$\mathfrak{D}_\gamma F(w) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(w + \epsilon\gamma) - F(w)}{\epsilon}$$

existe dans $L^2(\Omega)$.

F est dérivable au sens de Malliavin s'il existe un processus $\psi \in L^2([0, T] \times \Omega)$ tel que

$$\mathfrak{D}_\gamma F(w) = \int_0^T \psi_t(w) g(t) dt.$$

On pose alors

$$\mathfrak{D}_t F(w) = \psi_t(w).$$

Le processus $\mathfrak{D}.F(\cdot) \in L^2([0, T] \times \Omega)$ est appelé la dérivée de Malliavin de F . L'ensemble de toutes les v.a. dérivables au sens de Malliavin est noté $\mathcal{D}^{1,2}$.

Il est important de se forger une intuition à propos de la dérivée de Malliavin, qui a été définie d'une manière plutôt formelle. D'après la définition que nous venons de donner, c'est la dérivée d'une fonctionnelle (identifiée avec la v.a.) dans un espace de Banach (identifié avec les trajectoires du mouvement brownien). En considérant la v.a. F comme une fonction du mouvement brownien W , $\mathfrak{D}_t F(w)$ correspond donc intuitivement à la dérivée de F selon les valeurs W_t . L'exemple suivant nous le montre.

Exemple 2.16. Prenons $F(w) = \int_0^T f(s) dW_s(w) = \int_0^T f(s) dw(s)$, avec $f \in L^2([0, T])$. Alors pour $\gamma(t) = \int_0^t g(s) ds$,

$$F(w + \epsilon\gamma) = \int_0^T f(t) (dw(t) + \epsilon d\gamma(t)) = \int_0^T f(t) dw(t) + \epsilon \int_0^T f(t)g(t) dt$$

et ainsi $\mathfrak{D}_t F = f(t)$.

En particulier, si on prend $f = \mathbf{1}_{[0, t_1]}$, on a

$$F(w) = \int_0^T \mathbf{1}_{[0, t_1]}(s) dW_s = W_{t_1}(w),$$

et donc

$$\mathfrak{D}_t(W_{t_1}(w)) = \mathbf{1}_{[0, t_1]}(t).$$

Pour manipuler l'espace $\mathcal{D}^{1,2}$ et y prouver des résultats intéressants, il nous manque un élément fondamental : une norme.

Définition 2.17. On munit l'espace $\mathcal{D}^{1,2}$ de la norme suivante :

$$\|F\|_{1,2} = \left(\|F\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathfrak{D}F\|_{L^2([0, T] \times \Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad \text{pour } F \in \mathcal{D}^{1,2}.$$

Malheureusement, l'espace $\mathcal{D}^{1,2}$ n'est pas fermé pour cette norme, ce n'est pas un espace de Banach. On va donc considérer un nouvel espace, qui sera la complétion d'un sous-espace de $\mathcal{D}^{1,2}$ pour la norme $\|\cdot\|_{1,2}$.

Définition 2.18. Un polynôme de Wiener est une v.a. $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$F(w) = \varphi(\theta_1, \dots, \theta_n), \tag{2.2}$$

où φ est un polynôme à n variables et

$$\theta_i = \int_0^T f_i(t) dW_t \quad \text{avec } f_i \in L^2([0, T]).$$

L'ensemble des polynômes de Wiener sera noté \mathcal{P} . On peut vérifier qu'il est dense dans $L^2(\Omega)$.

La dérivée de Malliavin des éléments de \mathcal{P} est facile à calculer.

Lemme 2.19. *Soit $F \in \mathbb{P}$ de la même forme qu'en (2.2). Alors $F \in \mathcal{D}^{1,2}$ et*

$$\mathfrak{D}_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\theta_1, \dots, \theta_n) f_i(t).$$

Ce lemme se prouve facilement, en utilisant la définition de la dérivée et le calcul de l'exemple 2.16.

Définition 2.20. L'espace $\mathbb{D}^{1,2}$ est la fermeture de $\mathcal{D}^{1,2}$ pour la norme $\|\cdot\|_{1,2}$. Cela signifie que $F \in L^2(\Omega)$ appartient à $\mathbb{D}^{1,2}$ si et seulement si il existe une suite $(F_n) \subset \mathcal{P}$ telle que

$$\begin{cases} F_n \rightarrow F & \text{dans } L^2(\Omega), \\ \mathfrak{D}F_n \text{ converge} & \text{dans } L^2([0, T] \times \Omega). \end{cases}$$

Il est maintenant tentant de définir, pour un élément $F \in \mathbb{D}^{1,2}$,

$$DF = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{D}F_n,$$

mais rien ne nous assure que cette définition est bien posée. Il faut pour cela un résultat qui garantit que, si $(G_n) \subset \mathcal{P}$ est une autre suite telle que $G_n \rightarrow F$ et $\mathfrak{D}G_n$ converge, on a bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{D}F_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{D}G_n.$$

C'est le but du théorème de fermeture suivant.

Théorème 2.21. *Soit $(H_n) \subset \mathcal{P}$ une suite telle que*

$$\begin{aligned} H_n &\rightarrow 0 && \text{dans } L^2(\Omega) \\ \mathfrak{D}H_n &\text{ converge} && \text{dans } L^2([0, T] \times \Omega). \end{aligned}$$

Alors

$$\mathfrak{D}H_n \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2([0, T] \times \Omega).$$

La preuve de ce théorème de fermeture est basée sur une formule qui correspond à l'intégration par parties.

Lemme 2.22. *Soient $F, \varphi \in \mathcal{D}^{1,2}$ et $\gamma = \int_0^\cdot g(s) ds \in H$. Alors*

$$\mathbb{E}[\mathfrak{D}_\gamma F \cdot \varphi] = \mathbb{E}\left[F \varphi \int_0^T g(s) dW_s\right] - \mathbb{E}[F \mathfrak{D}_\gamma \varphi].$$

Démonstration du lemme. Soit $\gamma = \int_0^\cdot g(s) ds$. Le théorème de Girsanov (voir par exemple Øksendal (2003)) implique que pour tout ϵ

$$\mathbb{E}[F(w + \epsilon\gamma)\varphi(w)] = \mathbb{E}[F(w)\varphi(w - \epsilon\gamma)\mathcal{E}_T(\epsilon g)],$$

avec la notation

$$\mathcal{E}_T(\epsilon g) = \exp\left(\epsilon \int_0^T g(s) dW_s - \frac{1}{2}\epsilon^2 \int_0^T g^2(s) ds\right).$$

En utilisant la définition de la dérivée directionnelle on calcule

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathfrak{D}_\gamma F(w)\varphi(w)] &= \mathbb{E}\left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(w + \epsilon\gamma) - F(w)}{\epsilon} \varphi(w)\right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E}[(F(w + \epsilon\gamma) - F(w))\varphi(w)] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E}[F(w)(\varphi(w - \epsilon\gamma)\mathcal{E}_T(\epsilon g) - \varphi(w))] \\ &= \mathbb{E}\left[F(w) \frac{d}{d\epsilon} (\varphi(w - \epsilon\gamma)\mathcal{E}_T(\epsilon g)) \Big|_{\epsilon=0}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[F(w)\varphi(w) \int_0^T g dW\right] - \mathbb{E}[F(w)\mathfrak{D}_\gamma \varphi(w)]. \end{aligned}$$

□

Démonstration du théorème. En utilisant le lemme on obtient, pour tout $\varphi \in \mathcal{P}$,

$$\mathbb{E}[\mathfrak{D}_\gamma H_n \varphi] = \mathbb{E}\left[H_n \varphi \int_0^T g dW\right] - \mathbb{E}[H_n \mathfrak{D}_\gamma \varphi] \rightarrow 0.$$

Puisque $\mathfrak{D}_\gamma H_n$ converge dans $L^2(\Omega)$ et que \mathcal{P} est dense dans $L^2(\Omega)$, on conclut $\mathfrak{D}_\gamma H_n \rightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)$. Comme γ est arbitraire, on a aussi $\mathfrak{D}H_n \rightarrow 0$ dans $L^2([0, T] \times \Omega)$. □

On dispose enfin d'une définition claire et non ambiguë pour la dérivée de Malliavin, que nous rappelons.

Définition 2.23. Soit $\mathbb{D}^{1,2}$ la fermeture de \mathcal{P} pour la norme $\|\cdot\|_{1,2}$, consistant donc en l'ensemble des v.a. $F \in L^2(\Omega)$ telles qu'il existe $(F_n) \subset \mathcal{P}$ avec

$$\begin{aligned} F_n &\rightarrow F \quad \text{dans } L^2(\Omega) \\ \mathfrak{D}F_n &\text{ converge dans } L^2([0, T] \times \Omega). \end{aligned}$$

La dérivée de Malliavin de F est alors la limite

$$DF = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{D}F_n,$$

et

$$D_\gamma F = \int_0^T D_t F g(t) dt \quad \text{pour tout } \gamma = \int_0^\cdot g(s) ds.$$

Nous avons introduit deux concepts différents de dérivée au sens de Malliavin :

1. $\mathfrak{D}F$ pour $F \in \mathcal{D}^{1,2}$;
2. DF pour $F \in \mathbb{D}^{1,2}$.

En fait les deux concepts de dérivée coïncident sur l'intersection de ces deux espaces.

Lemme 2.24. *Soit $F \in \mathcal{D}^{1,2} \cap \mathbb{D}^{1,2}$. Alors on a*

$$\mathfrak{D}F = DF.$$

Dans la suite de ce mémoire, nous utiliserons le même symbole DF pour la dérivée des éléments de $\mathcal{D}^{1,2} \cup \mathbb{D}^{1,2}$.

Il est temps de montrer que la formule de dérivation d'une fonction composée du lemme 2.19 valide pour les polynômes de Wiener est aussi vraie pour des fonctions plus générales.

Théorème 2.25. *Soient $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe lipschitzienne et $F = (F_1, \dots, F_n)$ un vecteur aléatoire tel que $F_i \in \mathbb{D}^{1,2} \forall i$. Alors $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$ et il existe un vecteur aléatoire $G = (G_1, \dots, G_n)$ borné par la constante de Lipschitz de φ et tel que*

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^n G_i DF_i.$$

De plus, si la loi de F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n , alors

$$G_i = \partial_i \varphi(F).$$

Remarque 2.26. On pourrait s'interroger sur le sens de $\partial_i \varphi$ lorsque φ n'est que lipschitzienne. Il est possible de montrer que toute fonction lipschitzienne est dérivable presque partout. La dérivée $\partial_i \varphi$ n'existe donc que presque sûrement, comme toutes les v.a. que nous manipulons.

Idée de la démonstration. Ce résultat s'obtient du lemme 2.19 par un argument de densité. \square

Puisque tout élément de $L^2(\Omega)$ possède une décomposition en chaos de Wiener, il est naturel de se demander si l'on peut exprimer la dérivée des éléments de $\mathbb{D}^{1,2}$ en chaos de Wiener.

Lemme 2.27. *Soit $f_n \in L^2_s([0, T]^n)$. Alors $I_n(f_n) \in \mathbb{D}^{1,2}$ et*

$$D_t (I_n(f_n)) = n I_{n-1}(f_n(\cdot, t)),$$

où le terme de droite est une notation pour l'intégrale d'Ito $(n-1)$ fois itérée par rapport aux $n-1$ premières variables t_1, \dots, t_{n-1} de $f(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t)$ (la variable t n'est donc pas intégrée).

Idée de la démonstration. On montre d'abord le résultat pour des fonctions du type $f_n = f^{\otimes n}$ en utilisant le théorème 2.3. On passe ensuite à la limite par densité. \square

Théorème 2.28. *Soit $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \in L^2(\Omega)$. Alors $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ si et seulement si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} nn! \|f_n\|_{L^2([0,T]^n)}^2 < \infty$$

et dans ce cas-là on a

$$D_t F = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(f_n(\cdot, t)).$$

Idée de la démonstration. On considère les sommes partielles $F_m = \sum_{n=0}^m I_n(f_n)$. Un calcul direct montre que

$$\begin{aligned} \|DF_m - DF_k\|_{L^2([0,T] \times \Omega)}^2 &= \left\| \sum_{n=k+1}^m n I_{n-1}(f_n(\cdot, \cdot)) \right\|_{L^2([0,T] \times \Omega)}^2 \\ &= \sum_{n=k+1}^m nn! \|f_n\|_{L^2([0,T]^n)}^2 \end{aligned}$$

par le lemme 2.2 et l'isométrie (2.1). Pour la condition suffisante, le passage à la limite se fait sans problème. La condition nécessaire se prouve en considérant d'abord des polynômes de Wiener puis en passant à la limite. \square

2.4 Intégrale de Skorohod

Rappelons que l'intégrale d'Ito est définie comme la limite (dans $L^2(\Omega)$) de sommes de Riemann : pour un processus élémentaire adapté de la forme

$$u_t = \sum_{i=0}^k F_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$$

(où F_i est \mathcal{F}_{t_i} -adapté, $t_0 = 0$ et $t_{k+1} = T$), on pose

$$\int_0^T u_t dW_t = \sum_{i=0}^k F_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

L'ensemble des processus élémentaires adaptés étant dense dans

$$L_a^2([0, T] \times \Omega) = \{u \in L^2([0, T] \times \Omega) : u \text{ est adapté}\},$$

il suffit de passer à la limite pour obtenir une définition valide dans cet espace tout entier.

On peut suivre un raisonnement similaire pour les processus non adaptés. Un tel processus u est approximable par

$$\hat{u}_t = \sum_{i=0}^k \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E} [u_s | \mathcal{F}_{[0, t_i] \cup (t_{i+1}, T]}] ds \right) \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t),$$

(en notant $\mathcal{F}_{[0, t_i] \cup (t_{i+1}, T]}$ la σ -algèbre engendrée par les valeurs de W sur $[0, t_i] \cup (t_{i+1}, T]$ seulement) à l'aide duquel on définit les sommes de Riemann suivantes

$$\begin{aligned} \int_0^T \hat{u}_t \delta W_t &= \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E} [u_s | \mathcal{F}_{[0, t_i] \cup (t_{i+1}, T]}] ds \right) (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Si ces sommes convergent dans $L^2(\Omega)$ quand l'épaisseur de la partition de $[0, T]$ tend vers 0, la limite est appelée *intégrale de Skorohod* de u et notée $\int u \delta W$.

Mais cette définition est évidemment peu agréable! L'intégrale de Skorohod peut être définie plus proprement comme l'opérateur adjoint de la dérivée de Malliavin.

Définition 2.29. Sur le domaine

$$\text{dom}(\delta) = \left\{ u \in L^2([0, T] \times \Omega) : \text{il existe } c(u) : \left| \mathbb{E} \left[\int_0^T u_t D_t F dt \right] \right| \leq c(u) \|F\|_{L^2(\Omega)} \forall F \in \mathbb{D}^{1,2} \right\},$$

on définit l'opérateur $\delta : \text{dom}(\delta) \rightarrow L^2(\Omega)$ par

$$\mathbb{E} [\delta(u) F] = \mathbb{E} \left[\int_0^T u_t D_t F dt \right]$$

c'est à dire en termes de produits scalaires

$$(\delta(u), F)_{L^2(\Omega)} = (u, DF)_{L^2([0, T] \times \Omega)}. \quad (2.4)$$

Remarque 2.30. La littérature présente souvent l'opérateur δ sous le nom de *divergence*, par analogie avec la formule d'intégration par parties en dimension finie. En effet, si on remplace l'espérance \mathbb{E} par l'intégration sur un ouvert $O \subset \mathbb{R}^n$ et qu'on considère une fonction g régulière à support compact dans O et u un champ de vecteur régulier, on a

$$\int_O (u(x), \nabla g(x))_{\mathbb{R}^n} dx = \int_O (-\text{div } u(x)) g(x) dx.$$

Il est possible de montrer que la limite définie en (2.3) existe si et seulement si $u \in \text{dom}(\delta)$ et que dans ce cas là,

$$\delta(u) = \int_0^T u_t \delta W_t.$$

On peut de plus prouver le résultat suivant.

Proposition 2.31. *Soit $u \in L_a^2([0, T] \times \Omega)$. Alors $u \in \text{dom}(\delta)$ et*

$$\int_0^T u_t \delta W_t = \int_0^T u_t dW_t,$$

où le terme de droite est une intégrale d'Ito.

Ce résultat montre que l'intégrale de Skorohod des processus adaptés est bien connue. Donnons une règle de calcul très utile pour calculer l'intégrale de Skorohod d'un processus non nécessairement adapté.

Proposition 2.32. *Soient $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ et $u \in \text{dom}(\delta)$ tels que $Fu \in L^2([0, T] \times \Omega)$. Alors on a $Fu \in \text{dom}(\delta)$ et*

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \int_0^T D_t F u_t dt.$$

Idée de la démonstration. Il suffit d'utiliser la formule de la dérivée d'un produit et la relation de dualité (2.4) : pour une v.a. régulière G ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[GF\delta(u)] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T D_t(GF)u_t dt\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T (D_t G)Fu_t dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T (D_t F)Gu_t dt\right] \\ &= \mathbb{E}[G\delta(Fu)] + \mathbb{E}\left[G\int_0^T D_t F u_t dt\right]. \end{aligned}$$

On conclut ensuite par densité. \square

Exemple 2.33. Voici un exemple de processus pour lequel l'intégrale de Skorohod n'est pas l'intégrale d'Ito : W_T n'est pas adapté, donc la proposition 2.31 ne s'applique pas. Il est naturel de définir

$$\int_0^T W_T dW_t = W_T \int_0^T dW_t$$

qui entraîne

$$\int_0^T W_T dW_t = W_T^2$$

alors que, par la proposition 2.32,

$$\delta(W_T) = W_T \delta(1) - \int_0^T D_s W_T dt = W_T^2 - \int_0^T \mathbf{1}_{t \leq T} dt = W_T^2 - T.$$

Comme pour la dérivée de Malliavin, on peut exprimer l'intégrale de Skorohod en termes de la décomposition en chaos de Wiener.

Supposons que f est une fonction de $(n+1)$ variables symétrique en les n premières :

$$f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, x_{n+1}) \quad \forall \sigma \in \Sigma_n.$$

Sa symétrisée comme fonction de $(n+1)$ variables est définie par

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} f(x_1, \dots, x_{n+1}, \dots, x_n, x_i).$$

Théorème 2.34. Soit $u \in L_a^2([0, T] \times \Omega)$ dont la décomposition en chaos de Wiener est donnée par

$$u_t = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(\cdot, t))$$

en explicitant la dépendance en t de chaque f_n avec une notation fonctionnelle. Alors on a

$$\delta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n).$$

Idée de la démonstration. La clé de voûte de la preuve est d'établir que pour un processus $u \in L^2([0, T] \times \Omega)$, u est adapté si et seulement si pour tout n

$$f_n(t_1, \dots, t_n, t) = 0 \quad \text{si } t < \max_{1 \leq i \leq n} t_i.$$

□

Nous avons vu dans l'exemple 2.16 que lorsqu'on calcule la dérivée de Malliavin de l'intégrale d'Ito d'une fonction déterministe, on retrouve cette fonction déterministe. Qu'en est-il de la dérivée de l'intégrale d'Ito d'un processus ? L'intégrale de Skorohod permet de répondre à cette question. On s'attend bien sûr à un terme supplémentaire dans le cas d'un processus non déterministe (le terme de la dérivée du processus lui-même). C'est le sujet du théorème suivant.

Théorème 2.35. Soit $u \in L^2([0, T] \times \Omega)$ un processus tel que

1. $u_t \in \mathbb{D}^{1,2}$ pour tout $t \in [0, T]$;
2. $D_s u_t \in \text{dom}(\delta)$ pour tout $s \in [0, T]$;
3. $\delta(D_s u) \in L^2([0, T] \times \Omega)$.

Alors $\delta(u) \in \mathbb{D}^{1,2}$ et

$$D_s \delta(u) = u_s + \delta(D_s u).$$

Idée de la démonstration. En appliquant les théorèmes 2.28 et 2.34 à la décomposition en chaos de Wiener de u on obtient

$$\begin{aligned} D_s \delta(u) &= D_s \delta \left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(\cdot, t)) \right) \\ &= D_s \left(\sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) I_n(\tilde{f}_n(\cdot, s)). \end{aligned}$$

D'autre part on calcule

$$\begin{aligned} \delta(D_s u) &= \delta \left(D_s \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(\cdot, t)) \right) \\ &= \delta \left(\sum_{n=0}^{\infty} n I_{n-1}(f_n(\cdot, s, t)) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n I_n(\tilde{f}_n(\cdot, s, \cdot)). \end{aligned}$$

Il suffit dès lors de remarquer que le positionnement de la variable supplémentaire s parmi les autres variables t_1, \dots, t_n n'a pas d'importance dans la symétrisation de f_n pour conclure. \square

Notons qu'on peut voir ce résultat comme une expression pour le commutateur des deux opérateurs D et δ . Il est donc possible de le prouver à l'aide de théorèmes d'analyse fonctionnelle abstraite.

Cette relation est plus qu'un résultat purement abstrait, c'est un outil formidable pour calculer explicitement la dérivée de certains processus. Lorsqu'on dispose d'un certain type d'équation différentielle stochastique pour le processus (en fait lorsque le processus est un *processus de diffusion*), on a une formule simple pour sa dérivée.

Théorème 2.36. *Soient b et σ des processus suffisamment réguliers¹ pour qu'il existe une unique solution au problème*

$$\begin{cases} du_t = b(t, u_t) dt + \sigma(t, u_t) dW_t, \\ u_0 = x \end{cases} \quad (\text{où } x \in \mathbb{R})$$

et u cette solution. Alors on a

$$D_s u_t = \sigma(s, u_s) \exp \left(\int_s^t \left(b'(z, u_z) - \frac{1}{2} \sigma'(z, u_z) \right) dz + \int_s^t \sigma'(z, u_z) dW_z \right), \quad (2.5)$$

où b' et σ' désignent la dérivée de b et σ par rapport à la deuxième variable.

Démonstration. Remarquons d'abord que dans le cas où u est \mathcal{F}_s -adapté, le résultat précédent se réécrit

$$D_s \int_0^T u_t dW_t = u_s + \int_s^T D_s u_t dW_t.$$

On calcule donc, pour $s \leq t$,

$$\begin{aligned} D_s u_t &= D_s \left(u_0 + \int_0^t b(z, u_z) dz + \int_0^t \sigma(z, u_z) dW_z \right) \\ &= D_s \int_0^t b(z, u_z) dz + D_s \int_0^t \sigma(z, u_z) dW_z \\ &= \int_s^t b'(z, u_z) D_s u_z dz + \sigma(s, u_s) + \int_s^t \sigma'(z, u_z) D_s u_z dW_z \end{aligned}$$

c'est à dire que la dérivée satisfait

$$\begin{cases} dD_s u_t = b'(t, u_t) D_s u_t dt + \sigma'(t, u_t) D_s u_t dW_t \\ D_s u_s = \sigma(s, u_s) \end{cases}$$

dont la solution est donnée par (2.5). \square

Remarque 2.37. Il est standard de formuler ce résultat en termes du *processus des variations premières* associé à u : on définit v comme l'unique solution du problème

$$\begin{cases} dv_t = b'(t, v_t) v_t dt + \sigma'(t, v_t) v_t dW_t, \\ v_0 = 1. \end{cases}$$

La dérivée de u s'écrit alors

$$D_s u_t = \frac{v_t}{v_s} \sigma(s, u_s) \mathbf{1}_{\{s \leq t\}}.$$

Exemple 2.38. Ce résultat nous permet de calculer la dérivée de processus très utilisés dans les modèles financiers.

1. Cas de l'actif dans le modèle Black-Scholes : $b(t, X) = r(t)X$ et $\sigma(t, X) = \sigma(t)X$ où $r, \sigma \in L^2([0, T])$ sont déterministes. Alors

$$\begin{cases} du_t = r(t)u_t dt + \sigma(t)u_t dW_t, \\ u_0 = x, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dv_t = r(t)v_t dt + \sigma(t)v_t dW_t, \\ v_0 = 1, \end{cases}$$

c'est à dire

$$v_t = \frac{u_t}{x}.$$

1. C'est à dire lipschitziens en la deuxième variable et ne croissant pas trop vite (voir par exemple Øksendal (2003)).

Donc

$$D_s u_t = \frac{u_t}{u_s} \sigma(s) u_s \mathbf{1}_{\{s \leq t\}} = u_t \sigma(s) \mathbf{1}_{\{s \leq t\}}.$$

2. Cas du taux dans le modèle Hull-White à un facteur : $b(t, X) = k(\theta(t) - X)$ et $\sigma(t, X) = \sigma$ où $\theta \in L^2([0, T])$ est déterministe et $k \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$\begin{cases} du_t = k(\theta(t) - u_t) dt + \sigma dW_t, \\ u_0 = x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dv_t = -kv_t dt, \\ v_0 = 1, \end{cases}$$

c'est à dire

$$v_t = e^{-kt}.$$

Donc

$$D_s u_t = e^{-k(t-s)} \sigma \mathbf{1}_{\{s \leq t\}}.$$

3. Cas du taux dans le modèle Cox-Ingersoll-Ross : $b(t, X) = k(\theta - kX)$ et $\sigma(t, X) = \sigma\sqrt{X}$ où $\theta, k \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$\begin{cases} du_t = k(\theta - u_t) dt + \sigma\sqrt{u_t} dW_t, \\ u_0 = x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dv_t = -kv_t dt + \frac{\sigma}{2\sqrt{u_t}} v_t dW_t, \\ v_0 = 1. \end{cases}$$

Donc²

$$D_s u_t = \sigma\sqrt{u_s} \exp\left(-\int_s^t \left(k + \frac{\sigma^2}{4u_z}\right) dz + \frac{1}{2} \int_s^t \frac{\sigma}{\sqrt{u_z}} dW_z\right).$$

2.5 Formule de Clark-Ocone

Dans les cas très simple on peut parfois calculer le processus donné par le théorème de représentation d'Ito grâce à l'unicité de la décomposition en Wiener chaos. Considérons par exemple $F = W_T^2$; nous allons identifier le processus φ tel que

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T \varphi_s dW_s.$$

La formule d'Ito donne

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2}(W_T^2 - T)$$

et donc

$$F = W_T^2 = T + 2 \int_0^T W_t dW_t,$$

c'est à dire $\mathbb{E}[F] = T$ et $\varphi_t = 2W_t$.

² Bien que La fonction $\sqrt{\cdot}$ ne soit pas lipschitzienne en 0, il existe un argument (plus lourd et donc non présenté ici) permettant d'appliquer la formule du théorème précédent.

Cependant, dès que la v.a. est un peu plus compliquée, il est impossible de “deviner” ainsi le processus φ . Le calcul de Malliavin va permettre d’identifier celui-ci dans le cas où la v.a. est un élément de $\mathbb{D}^{1,2}$. Puisqu’intuitivement, la dérivée de Malliavin correspond à une dérivée par le mouvement brownien, il serait légitime de s’attendre à une formule correspondant au théorème fondamental de l’analyse : pour une fonction déterministe $f \in C^1(\mathbb{R})$, on a

$$f(x) = f(y) + \int_y^x \frac{df}{dz} dz.$$

L’équivalent dans le cadre stochastique, guidé par le théorème de représentation d’Ito, serait une formule du genre

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T \frac{dF}{dW} dW(t) = \mathbb{E}[F] + \int_0^T D_t F dW(t). \quad (2.6)$$

Un obstacle se dresse immédiatement devant nous : cette formule ne signifie pas grand chose puisque rien ne nous garantit que $D_t F$ est \mathcal{F}_t -adapté et donc que l’intégrale d’Ito dans (2.6) a du sens. Il s’agirait donc d’effectuer une projection du processus sur la sigma-algèbre des \mathcal{F}_t -mesurables. Une telle projection est donnée par l’espérance conditionnelle. En remplaçant $D_t F$ par $\mathbb{E}[D_t F | \mathcal{F}_t]$ dans l’idée intuitive de formule (2.6), on obtient exactement la vraie formule de Clark-Ocone. Ce que nous venons de faire n’est bien sûr qu’une dérivation grossière, mais il est possible de la rendre rigoureuse.

Théorème 2.39. *Soit $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ une v.a. \mathcal{F}_T -mesurable. Alors*

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T \mathbb{E}[D_t F | \mathcal{F}_t] dW_t.$$

Idée de la démonstration. La v.a. possède un développement en chaos de Wiener : $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ avec $f_n \in L_s^2([0, T]^n)$. On écrit alors

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathbb{E}[D_t F | \mathcal{F}_t] dW_t &= \int_0^T \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(f_n(\cdot, t)) | \mathcal{F}_t \right] dW_t \\ &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{E}[I_{n-1}(f_n(\cdot, t)) | \mathcal{F}_t] dW_t. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Deux lemmes techniques, que nous ne prouverons pas mais dont l’idée se comprend aisément, sont utilisés ici :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_n(f_n) | \mathcal{F}_t] &= I_n \left(f_n \mathbf{1}_{[0, t]^{\otimes n}} \right), \\ \int_0^T J_{n-1} \left(f_n(\cdot, t) \mathbf{1}_{[0, t]^{\otimes(n-1)}}(\cdot) \right) dW_t &= J_n(f_n). \end{aligned}$$

En les injectant successivement dans (2.7), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^T \mathbb{E}[D_t F | \mathcal{F}_t] dW_t &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1} \left(f_n(\cdot, t) \mathbf{1}_{[0,t]}^{\otimes(n-1)}(\cdot) \right) dW_t \\
&= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)! J_{n-1} \left(f_n(\cdot, t) \mathbf{1}_{[0,t]}^{\otimes(n-1)}(\cdot) \right) dW_t \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n! J_n(f_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) - I_0(f_0) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) - \mathbb{E}[F].
\end{aligned}$$

□

Les applications financières de la formule de Clark-Ocone sont nombreuses, comme nous le verrons dans les chapitres suivants. La technique de changement de mesure (et le théorème de Girsanov qui décrit les effets de ce changement de mesure sur le mouvement brownien) est un outil fondamental des mathématiques financières. Il est donc naturel de voir comment se transforme le théorème 2.39 lors de la transformation du mouvement brownien. Karatzas & Ocone (1991) répondent à cette question.

On pose

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s ds,$$

où θ est un processus stochastique \mathcal{F}_s -adapté. Le théorème de Girsanov nous assure que \tilde{W} est un mouvement brownien standard sous la mesure Q définie par

$$dQ = \mathcal{E}_T dP,$$

où

$$\mathcal{E}_T = \exp \left(- \int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right).$$

Remarque 2.40. On pourrait tout d'abord croire qu'il suffit d'appliquer la formule de Clark-Ocone classique à F sous la mesure Q (et le processus \tilde{W}). Ce n'est malheureusement pas aussi simple. En effet, rien ne nous garantit que F est mesurable pour la σ -algèbre engendrée par les valeurs de \tilde{W} .

Théorème 2.41. *Soit $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ une v.a. \mathcal{F}_T -mesurable telle que*

$$\mathbb{E}_Q[|F|] < \infty,$$

$$\mathbb{E}_Q \left[\int_0^T |D_t F|^2 dt \right] < \infty,$$

$$\mathbb{E}_Q \left[|F| \int_0^T \left(\int_0^T D_t \theta_s dW_s + \int_0^T \theta_s D_t \theta_s ds \right)^2 dt \right] < \infty.$$

Alors

$$F = \mathbb{E}_Q [F] + \int_0^T \mathbb{E}_Q \left[D_t F - F \int_t^T D_t \theta_s d\tilde{W}_s \middle| \mathcal{F}_t \right] d\tilde{W}_t.$$

Idée de la démonstration. La preuve est un petit peu technique mais pas conceptuellement compliquée. Elle repose principalement sur l'application du théorème 2.35 à $F\mathcal{E}_T$, où \mathcal{E}_T est une exponentielle de Doléans. \square

2.6 Application au calcul des grecques

Tout agent économique qui gère un portefeuille se doit de contrôler son exposition au risque. Il est donc tout naturel pour lui de déterminer les sensibilités des valeurs de son portefeuille par rapport, par exemple, à une variation du cours des actions ou encore une déformation de la courbe des taux. Les sensibilités du prix des actifs optionnels sont appelées les *grecques*, les plus courantes étant la sensibilité de l'option par rapport au cours du sous-jacent (Δ), par rapport à la volatilité du sous-jacent (vega, qui s'écrit ν) et la sensibilité d'ordre deux de l'option par rapport au cours du sous-jacent (Γ).

Le calcul de ces grecques présente donc un intérêt majeur, mais il y a malheureusement peu de modèles pour lesquels une formule fermée de calcul des grecques existe. On a donc recours au calcul numérique. Puisque les grecques sont les dérivées du prix de l'option P par rapport à différents paramètres, la méthode des *différences finies* a souvent été employée. Elle consiste à approximer la dérivée de P par rapport à un paramètre par la valeur (avant passage à la limite) du quotient différentiel correspondant³ :

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda} \approx \frac{P(\lambda + \epsilon) - P(\lambda)}{\epsilon} \quad (\epsilon > 0).$$

Cette méthode présente de gros désavantages, notamment parce qu'elle cumule plusieurs facteurs d'approximation : d'abord la simulation Monte-Carlo nécessaire au calcul de $P(\lambda + \epsilon)$ et $P(\lambda)$, qui sont exprimés comme des espérances sous la mesure risque neutre. Ensuite, le choix du paramètre ϵ est souvent délicat : le prendre trop grand entraîne une mauvaise approximation de la dérivée (et donc un grand biais), le prendre trop petit fait souvent exploser violemment la

3. Il est possible de calculer les différences finies de plusieurs manières, notamment en considérant plutôt $P(\lambda + \epsilon) - P(\lambda - \epsilon)$ ou $P(\lambda) - P(\lambda - \epsilon)$ dans le quotient.

variance de l'estimateur (c'est à dire augmente sa volatilité) et donc la qualité des simulations Monte-Carlo.

Nous allons voir que le calcul de Malliavin permet, dans beaucoup de cas, de réduire l'estimation de chaque grecque à un unique calcul d'espérance (c'est à dire à une simulation Monte-Carlo). C'est Fournié *et al.* (1999) qui développèrent les applications numériques du calcul de Malliavin à la finance que nous présentons ici. Depuis lors, l'intérêt du monde des mathématiques financières pour ces techniques n'a pas cessé de croître.

Avant de rentrer dans ces détails, fixons notre intuition sur un cas idéal. Supposons que le taux d'intérêt est nul et que l'actif sous-jacent de l'option suit la dynamique

$$dS_t = b(S_t) dt + \sigma(S_t) dW_t,$$

où b et σ satisfont les conditions habituelles. Le prix d'une option générale *path-dependent* (mais pas de type américain) est donné par

$$P = \mathbb{E}[\varphi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})],$$

pour une certaine fonction de pay-off φ (l'espérance est prise sous la mesure risque neutre). Supposons connue la densité jointe de $(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) : f_\lambda(t_1, \dots, t_n)$, dépendant du paramètre λ (qui peut, en fonction du modèle, représenter la valeur initiale S_0 , la volatilité constante σ , ...). On a alors

$$\mathbb{E}_\lambda[\varphi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})] = \int \varphi(x_1, \dots, x_n) f_\lambda(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Sans nous soucier de la rigueur, dérivons cette expression sous le signe intégral :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbb{E}_\lambda[\varphi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})] \\ &= \int \varphi(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial \lambda} f_\lambda(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int \varphi(x_1, \dots, x_n) \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln f_\lambda(x_1, \dots, x_n) \right) f_\lambda(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ &= \mathbb{E}_\lambda[\varphi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) \pi_0] \end{aligned}$$

en notant

$$\pi_0 = \pi_0(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln f_\lambda(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}).$$

Le facteur π_0 que nous avons obtenu est un poids aléatoire. Le point le plus important à propos de ce poids est qu'il est universel : il ne dépend pas de la fonction de pay-off φ !

Remarque 2.42. De plus, π_0 n'est pas unique : tout autre poids π tel que

$$\mathbb{E}[\pi | S_{t_1}, \dots, S_{t_n}] = \pi_0$$

fait l'affaire. Il est donc naturel de choisir le poids π qui minimise la variance de $\varphi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})\pi$ pour que les simulations Monte-Carlo convergent plus vite.

Ce que nous venons de faire présente bien évidemment un problème majeur : nous avons supposé connue la densité f_λ . Dans la grosse majorité des modèles, ce n'est pas le cas et il faut procéder autrement. Le calcul de Malliavin va permettre de mener un tel raisonnement avec rigueur même dans les cas où f_λ n'est pas connue, en donnant une formule de calcul des grecques comme une espérance pondérée de la fonction de pay-off.

Nous allons calculer la dérivée de Malliavin de $\varphi(S)$, nous supposons donc que φ est lipschitzienne et que $S \in \mathbb{D}^{1,2}$. En notations allégées, nous voulons calculer l'espérance

$$\mathbb{E}[\varphi'(S)\partial_\lambda S],$$

où $\partial_\lambda S$ est le processus de perturbation⁴ du processus S par rapport à λ : $(S_\lambda - S)/\lambda \rightarrow \partial_\lambda S$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$ (par exemple lorsque $\lambda = S_0$, $\partial_\lambda S$ est le processus des variations premières défini plus haut). Pour tout processus $h \in L^2([0, T] \times \Omega)$, on écrit

$$\partial_\lambda S h_s D_s(\varphi(S)) = \partial_\lambda S h_s \varphi'(S) D_s S$$

qui donne après intégration

$$\int_0^T \partial_\lambda S h_s D_s(\varphi(S)) ds = \partial_\lambda S \varphi'(S) \int_0^T h_s D_s S ds$$

ou encore

$$\partial_\lambda S \varphi'(S) = \frac{\int_0^T \partial_\lambda S h_s D_s(\varphi(S)) ds}{\int_0^T h_s D_s S ds}.$$

On introduit le *générateur* du schéma pondéré de Malliavin :

$$u_s = \frac{\partial_\lambda S h_s}{\int_0^T h_s D_s S ds} \quad (2.8)$$

qui permet d'obtenir par définition de l'intégrale de Skorohod (voir la relation de dualité (2.4))

$$\mathbb{E}[\varphi'(S)\partial_\lambda S] = \mathbb{E}\left[\int_0^T D_s(\varphi(S))u_s ds\right] = \mathbb{E}[\varphi(S)\delta(u)] = \mathbb{E}[\varphi(S)\pi].$$

Le poids π est donc l'intégrale de Skorohod d'un processus bien choisi. Le fait que le poids est effectivement l'intégrale de Skorohod d'un processus est en réalité la clé de voûte de cette méthode de calcul. Le résultat suivant nous renseigne les cas où cela se produit en donnant une condition de compatibilité.

4. Il est clair que ce formalisme n'est ni précis ni rigoureux mais il permet de s'épargner beaucoup de technique. En fait la formalisation de cette perturbation se fait généralement paramètre par paramètre (c'est à dire en fixant une fois pour toute $\lambda = S_0$ ou $\lambda = \sigma, \dots$). Il existe une formalisation générale très lourde techniquement (voir Ben-Hamou (2000) par exemple), qui n'a pas sa place ici.

Proposition 2.43. *Le poids π défini par*

$$\mathbb{E}[\varphi'(S)\partial_\lambda S] = \mathbb{E}[\varphi(S)\pi]$$

est l'intégrale de Skorohod $\pi = \delta(u)$ d'un processus $u \in \text{dom}(\delta)$ si et seulement si

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T D_t S u_t dt \middle| S\right] = \mathbb{E}[\partial_\lambda S | S].$$

La remarque 2.42 est aussi valide ici. La proposition suivante répond à la question de l'optimalité parmi tous les poids disponibles.

Proposition 2.44. *Le poids $\pi_0 = \mathbb{E}[\pi | S]$ atteint le minimum de la fonctionnelle*

$$\pi \mapsto \mathbb{E}\left[\left(\varphi(S)\pi - \mathbb{E}[\varphi'(S)\partial_\lambda S]\right)^2\right].$$

Remarque 2.45. Ce résultat est assez intuitif. En effet, puisque la quantité estimée est l'espérance du produit du payoff – qui est mesurable pour la σ -algèbre engendrée par S – et d'un poids, il semble assez naturel que le poids optimal soit la projection du poids sur ces mesurables.

Le processus h doit être compris comme un degré de liberté de la méthode. Il faut choisir ce processus de telle sorte que les calculs – c'est à dire l'obtention de $\delta(u)$ – soient les plus simples possibles.

Exemple 2.46. Considérons un cas très simple pour illustrer la méthode des poids de Malliavin. Nous supposons que l'actif sous-jacent S suit un brownien géométrique :

$$S_T = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right).$$

Le *delta* est donné par

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial}{\partial S_0} \mathbb{E}\left[e^{-rT} \varphi(S_T)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{-rT} \varphi'(S_T) \partial_{S_0} S_T\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{-rT} \varphi'(S_T) \frac{S_T}{S_0}\right] \end{aligned}$$

en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour la permutation de la dérivée et de l'espérance. Choisissons le processus $h = 1$ dans la définition du générateur (2.8). Alors le poids vaut

$$\begin{aligned} \pi &= \delta\left(\frac{S_T}{S_0 \int_0^T D_s S_T ds}\right) \\ &= \delta\left(\frac{S_T}{S_0 \int_0^T \sigma S_T \mathbf{1}_{s \leq T} ds}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta \left(\frac{1}{S_0 T \sigma} \right) \\
&= \int_0^T \frac{1}{S_0 T \sigma} dW_s \\
&= \frac{W_T}{S_0 T \sigma}
\end{aligned}$$

puisque le processus constant $1/S_0 T \sigma$ est adapté (il est \mathcal{F}_0 -mesurable) et que donc son intégrale de Skorohod est son intégrale d'Ito. Ainsi

$$\Delta = \mathbb{E} \left[e^{-rT} \varphi(S_T) \frac{W_T}{S_0 T \sigma} \right] = \frac{e^{-rT}}{S_0 T \sigma} \mathbb{E} [\varphi(S_T) W_T].$$

Numériquement parlant, la méthode de Malliavin est plus efficace que la méthode des différences finies lorsque la fonction de pay-off est irrégulière ou lorsque l'ordre de dérivation augmente. Pour illustrer cela, comparons les variances empiriques calculées des estimateurs. Nous présentons ici des chiffres obtenus par Chorro dans le cadre d'un cours à Paris 1. Les paramètres en sont les suivants : nombre de simulations = 20000, $S_0 = 100$, $K = 100$, $\sigma = 0.15$, $r = 0.05$, $T = 1$, $K_{\min} = 95$, $K_{\max} = 105$. Nous notons R le rapport entre la variance empirique de l'estimateur lié aux différences finies et la variance empirique de l'estimateur lié au poids de Malliavin :

$$R = \frac{\hat{\sigma}^2(\text{différences finies})}{\hat{\sigma}^2(\text{poids de Malliavin})}.$$

Option	Pay-off $\varphi(S)$	R pour Δ	R pour Γ
Call	$\varphi(S) = (S - K)_+$	0.134	0.132
Put	$\varphi(S) = (K - S)_+$	0.30	1.32
Digitale	$\varphi(S) = \mathbf{1}_{S > K_{\min}}$	5.31	2354
Corridor	$\varphi(S) = \mathbf{1}_{K_{\max} > S > K_{\min}}$	134	5785

TABLE 2.1 – Comparaison des deux estimateurs pour différentes options

Il est tout de même assez impressionnant de réaliser que l'estimateur de Malliavin converge 5785 fois plus rapidement que celui des différences finies dans le cas du calcul du Γ d'une option corridor !

Notons pour clôturer ce chapitre que la méthode de Malliavin a ses limites. En effet, si la fonction de pay-off n'est pas assez régulière "au sens de Malliavin" – c'est à dire régulière en la trajectoire du brownien –, on ne peut pas appliquer celle-ci. Un exemple de telle limitation est le pay-off d'une option à barrière (le

pay-off est nul si la trajectoire de l'actif sous-jacent a franchi un certain niveau constant non aléatoire : $\varphi(S) = 0$ si $\max_{[0,T]} S \geq K$, dont la valeur dépend de manière trop irrégulière de la trajectoire du brownien.

Couverture financière dans des marchés incomplets

3.1	Intégrale stochastique générale	33
3.2	Stratégies de couverture	38
3.3	Couverture dans des marchés incomplets	40
3.4	Approche <i>risk-minimization</i>	41
3.5	Approche <i>mean-variance hedging</i>	48

Nous présentons dans ce chapitre le problème de la couverture des actifs conditionnels dans des marchés incomplets. Ce problème a été étudié par différents auteurs, entre autres Föllmer & Sondermann (1986) ainsi que Föllmer & Schweizer (1991).

Lors de l'étude des stratégies de couverture, nous serons amenés à manipuler une intégrale stochastique plus générale que l'intégrale d'Ito, une intégrale stochastique selon un processus plus général que le mouvement brownien. Il faut donc avant tout définir cet objet, ce que nous faisons dans la section suivante d'après Karatzas & Shreve (1988).

3.1 Intégrale stochastique générale

3.1.1 Martingales

Définition 3.1. Un processus X est une *sous-martingale* (respectivement une *sur-martingale*) si pour tout $0 \leq s < t \leq T$ on a

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s \quad (\text{resp. } \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s).$$

Une *martingale* est un processus qui est à la fois une sous-martingale et une sur-martingale.

Exemple 3.2. Le mouvement brownien W_t est bien sûr une martingale, de même que $W_t^2 - t$. On voit directement que W_t^2 est une sous-martingale : pour $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E} [W_t^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E} [W_t^2 - t | \mathcal{F}_s] + t = W_s^2 - s + t \geq W_s^2.$$

Il est facile de démontrer la proposition suivante à l'aide de l'inégalité de Jensen.

Proposition 3.3. *Soient X une martingale et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telles que $\mathbb{E}[\varphi(X_t)] < \infty$ pour tout $t \in [0, T]$. Alors le processus $\varphi(X)$ est une sous-martingale.*

Définition 3.4. Un processus adapté A est un processus *croissant* si

- $A_0 = 0$;
- pour presque tout w , la trajectoire $t \mapsto A_t(w)$ est croissante et continue à droite ;
- $\mathbb{E}[A_t] < \infty$ pour tout t .

Remarquons que les problèmes usuels de définition de l'intégrale stochastique (à savoir que le processus le long duquel on intègre possède une variation totale infinie) ne se présente pas dans le cas d'un processus croissant¹. On peut donc définir l'intégrale stochastique selon un processus croissant comme un intégrale de Riemann-Stieltjes usuelle.

Le théorème suivant donne la célèbre décomposition de Doob-Meyer.

Théorème 3.5. *Soit X une sous-martingale continue à droite et telle que $\mathbb{E}[X_t] < \infty$ pour tout $t \in [0, T]$. Alors X admet une unique décomposition*

$$X = M + A,$$

où M est une martingale continue à droite et A est un processus croissant prévisible.

Remarque 3.6. La propriété de prévisibilité du processus croissant est ce qui permet de garantir l'unicité de la décomposition.

Exemple 3.7. Nous avons montré plus haut que W_t^2 est une sous-martingale. Dans ce cas, la décomposition donne $W_t^2 = (W_t^2 - t) + t$, avec la martingale $M_t = W_t^2 - t$ et la fonction croissante $A_t = t$.

Définition 3.8. On définit les espaces

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2 &= \{X \text{ martingale t.q. } X_0 = 0 \text{ et } \mathbb{E}[X_t^2] < \infty \forall t \in [0, T]\}, \\ \mathcal{M}_c^2 &= \{X \in \mathcal{M}^2 \text{ et est continue}\}. \end{aligned}$$

1. On peut même aller plus loin. On sait que les trajectoires du mouvement brownien, par exemple, ne sont dérivables nulle part. Au contraire, on peut montrer que toute fonction croissante est (faiblement) dérivable presque partout.

Observons que pour tout $X \in \mathcal{M}^2$, X^2 est une sous-martingale par la proposition 3.3 et satisfait donc aux hypothèses du théorème précédent. Il existe ainsi une martingale M et un processus croissant A tels que

$$X^2 = M + A.$$

Définition 3.9. La *variation quadratique* de $X \in \mathcal{M}^2$ est le processus $\langle X \rangle = A$, où A est le processus croissant de la décomposition de Doob-Meyer de X^2 . En d'autres termes, $\langle X \rangle$ est l'unique processus adapté et croissant tel que $X^2 - \langle X \rangle$ est une martingale.

Exemple 3.10. Il est clair que $W \in \mathcal{M}^2$. Puisque $W_t^2 - t$ est une martingale, on a $\langle W \rangle_t = t$.

Exemple 3.11. Soit N un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On vérifie facilement que le processus de Poisson compensé $M_t = N_t - \lambda t$ est un élément de \mathcal{M}^2 dont la variation quadratique est $\langle M \rangle_t = \lambda t$.

La raison pour laquelle le processus $\langle X \rangle$ est appelé variation quadratique de X ne semble pas évidente. En fait, comme le montre le théorème suivant, ce concept rejoint notre intuition de variation quadratique pour les martingales continues.

Théorème 3.12. Soient $X \in \mathcal{M}_c^2$ et Π_k une suite de partitions de $[0, t]$ dont l'épaisseur tend vers 0. On a alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{[t_i, t_{i+1}] \in \Pi_k} |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|^2 = \langle X \rangle_t$$

en probabilité.

3.1.2 Construction de l'intégrale stochastique

Nous avons maintenant tous les outils pour construire l'intégrale stochastique générale selon une martingale continue $X \in \mathcal{M}_c^2$. La construction que nous allons parcourir ressemble à celle de l'intégrale d'Ito, mais quelques points demandent un peu plus de précautions.

Comme en théorie de l'intégration classique, nous allons devoir quotienter l'ensemble des candidats intégrants pour définir proprement une norme.

Définition 3.13. Sur l'espace mesuré $([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([0, \infty[) \otimes \mathcal{F})$, on définit la mesure

$$\mu_X(A) = \mathbb{E} \left[\int_0^T \mathbf{1}_A(t, \omega) d \langle X \rangle_t \right].$$

Pour un processus progressivement mesurable M , on définit la quantité

$$[M]^2 = \mathbb{E} \left[\int_0^T M_t^2 d \langle X \rangle_t \right]$$

et l'espace

$$\mathcal{L}^2 = \{M \text{ progressivement mesurable} : [M] < \infty\}.$$

Malheureusement, $[\cdot]$ n'est pas une norme sur \mathcal{L}^2 puisqu'il existe en général des éléments non nuls M tels que $[M] = 0$. L'ensemble des classes d'équivalences de processus progressivement mesurables et tels que $[M] < \infty$ pour la relation d'équivalence *égalité μ_X -presque partout* est noté $L^2(X)$. On peut aussi formaliser cette définition de la façon suivante :

$$L^2(X) = \mathcal{L}^2 / \sim \quad \text{avec } X \sim Y \Leftrightarrow X = Y \mu_X\text{-presque partout.}$$

Il est facile de vérifier que $[\cdot]$ est une norme sur $L^2(X)$ qui en fait un espace de Banach.

Cet espace de départ est suffisamment riche pour contenir un ensemble de processus simples – à partir desquels on définira l'intégrale – qui est dense dans lui.

Définition 3.14. Un processus M est *simple* s'il existe des réels $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = T$ et des variables aléatoires $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ tels que ξ_i est \mathcal{F}_{t_i} -mesurable pour tout i et pour lesquels on a

$$M_t(w) = \xi_0 \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^n \xi_i(w) \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t) \quad 0 \leq t < T, w \in \Omega.$$

L'ensemble de ces processus sera noté \mathcal{S} .

Proposition 3.15. *L'espace \mathcal{S} est dense dans $L^2(X)$.*

Définir l'intégrale sur \mathcal{S} n'est pas difficile.

Définition 3.16. Pour $M \in \mathcal{S}$, on pose $I_0(M) = 0$ et

$$I_t(M) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) + \xi_n (X_t - X_{t_n})$$

pour $t \in]0, T]$, où n est l'unique entier pour lequel $t_n < t \leq t_{n+1}$.

Les propriétés élémentaires de I sur \mathcal{S} s'obtiennent facilement.

Proposition 3.17. *Pour $M \in \mathcal{S}$ et $0 \leq s < t \leq T$ on a $I(M) \in \mathcal{M}^2$ et*

$$\mathbb{E} \left[(I_t(M) - I_s(M))^2 \mid \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[\int_s^t M_u^2 d\langle X \rangle_u \mid \mathcal{F}_s \right].$$

On aura reconnu la généralisation de l'intégrale d'Ito. Nous pouvons maintenant définir l'intégrale pour $M \in L^2(X)$ par densité.

Définition 3.18. Pour $X \in \mathcal{M}_c^2$ et $M \in L^2(X)$, l'intégrale stochastique $I(M)$ de M par rapport à X est la limite

$$I(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(M_n),$$

où $(M_n) \subset \mathcal{S}$ est une suite de processus simples telle que $[M_n - M] \rightarrow 0$.

On montre par passage à la limite que la proposition 3.17 est aussi valide pour $M \in L^2(X)$.

En réalité, la classe des processus le long desquels nous pouvons intégrer est plus étendue que simplement les martingales.

Définition 3.19. Une semi-martingale continue est un processus adapté X qui admet la décomposition

$$X = X_0 + M + B,$$

où X_0 est une constante, $M \in \mathcal{M}_c^2$ et B est la différence de deux processus adaptés, croissants et continus.

Comme la variation de la différence de deux fonctions continues croissantes est toujours localement bornée², le terme B dans la définition précédente ne pose pas de problème pour l'intégration : on peut intégrer par rapport à B en utilisant une intégrale de Riemann-Stieltjes classique. Puisque nous avons réglé le sort de l'intégrale du terme M , nous pouvons considérer l'intégrale d'une semi-martingale X .

Dans le cas où X est une semi-martingale, l'espace $L^2(X)$ est défini comme précédemment (c'est à dire par un quotient) mais avec une norme cohérente à la décomposition de la définition précédente. Formellement,

$$L^2(X) = \left\{ Y \text{ progressivement mesurables} : \mathbb{E} \left[\int_0^T Y_t^2 d\langle M \rangle_t + \left(\int_0^T |Y_t dB_t| \right)^2 \right] < \infty \right\}.$$

Remarque 3.20. Toutes ces constructions sont bien sûr généralisables à des martingales vectorielles.

3.1.3 Décomposition de Kunita-Watanabe

La décomposition de Kunita-Watanabe donne une décomposition des martingales en termes orthogonaux. Avant tout, il faut savoir ce que signifie l'orthogonalité pour des martingales.

² On peut même aller plus loin : le théorème de Jordan assure qu'une fonction appartient à l'espace $BV([a, b])$ si et seulement si elle peut être exprimée comme différence de deux fonctions croissantes sur $[a, b]$.

Définition 3.21. On définit le processus de *variation croisée* de deux martingales $X, Y \in \mathcal{M}^2$ par

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4} (\langle X + Y \rangle - \langle X - Y \rangle)$$

et on observe que $XY - \langle X, Y \rangle$ est une martingale. Deux éléments de $X, Y \in \mathcal{M}^2$ sont *orthogonaux* si $\langle X, Y \rangle = 0$. On remarque que X et Y sont orthogonaux si et seulement si XY est une martingale.

On définit aussi l'espace de toutes les intégrales stochastiques en X :

$$\mathcal{M}_X^2 = \left\{ \int_0^T M_t dX_t : M \in L^2(X) \right\}.$$

Le théorème de décomposition suivant est dû à Kunita & Watanabe (1967).

Théorème 3.22. *Pour tout $X \in \mathcal{M}^2$, il existe deux martingales $Y \in \mathcal{M}_X^2$ et $Z \in \mathcal{M}^2$ telles que Z est orthogonale à tous les éléments de \mathcal{M}_X^2 et*

$$X = Y + Z.$$

De plus cette décomposition est unique.

3.2 Stratégies de couverture

Passons maintenant à l'étude de la couverture en elle-même. Nous ne présentons ici que le cas scalaire (c'est à dire le cas où le marché ne présente qu'un seul actif risqué) par simplicité, mais tous ces résultats sont facilement extensibles au cas vectoriel.

Sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sont définis trois processus :

- $X^0 = 1$ décrivant le prix d'un actif sans risque ;
- X décrivant le prix d'un d'actif risqué ;
- H décrivant l'actif conditionnel que l'on cherche à couvrir.

Un actif conditionnel est un actif dont la valeur dépend de l'occurrence d'un événement particulier. L'exemple le plus simple d'actif conditionnel est sans doute l'option *call* européenne sur l'actif X à maturité T et de strike K . Dans ce cas, la valeur de H dépend de la valeur de l'actif en question : $H = (X(T) - K)_+$. Le point important étant que la valeur de H doit être connue en $t = T$, nous considérons donc que H est une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable.

L'un des problèmes majeurs de la finance mathématique est la tarification et la couverture de l'actif conditionnel H par le truchement d'une stratégie de trading basée sur X . Il se résume à se poser les deux questions suivantes. À quel prix doit se vendre l'actif H ? Comment le vendeur de H peut-il se couvrir contre la perte aléatoire qu'il encourra en T ?

Pour attaquer ce problème, il semble naturel de considérer un portefeuille dynamique constitué de X et X^0 . Pour formaliser, on se donne une paire de processus $(\theta_t, \eta_t)_{0 \leq t \leq T}$, où θ est prévisible et η est adapté. Pour une telle stratégie, θ_t décrit le nombre d'unités de l'actif X détenues à l'instant t et η_t est le montant investi dans l'actif X^0 en t . L'hypothèse de prédictabilité sur θ est la condition mathématique qui assure que le processus n'anticipe pas les valeurs de X . Les processus

$$V_t = \theta_t X_t + \eta_t, \quad G_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dX_s \quad \text{et} \quad C_t = V_t - \int_0^t \theta_s dX_s$$

donnent respectivement la valeur du portefeuille, les gains et les coûts accumulés par celui-ci au temps t . Pour que G soit bien défini, nous supposons que X est une semi-martingale. Une stratégie est auto-financée si le processus de coûts cumulés qui lui est associé est constant dans le temps, ou de manière équivalente si

$$V_t = V_0 + \int_0^t \theta_s dX_s \quad \text{pour tout } t \in [0, T], \quad (3.1)$$

en notant $V_0 = C_0$ la mise initiale nécessaire pour lancer la stratégie. Intuitivement, une stratégie auto-financée est telle que toute fluctuation de l'actif X peut être neutralisée en modifiant θ et η sans qu'aucun gain ou perte ne survienne. Remarquons que par (3.1), elle est complètement déterminée par V_0 et θ .

D'un point de vue économique, l'existence d'une stratégie auto-financée pour tout actif conditionnel dans un marché implique que ce marché est sans risque. Au contraire, un marché ne jouissant pas de cette propriété porte un risque intrinsèque.

Supposons que H est atteignable, c'est à dire qu'il existe une stratégie auto-financée (V_0, θ) telle que $V_T = H$ presque sûrement. S'il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage sur le marché, le prix initial de H est donné par

$$\mathbb{E}[H|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[V_T|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}\left[V_0 + \int_0^T \theta_s dX_s \middle| \mathcal{F}_0\right] = V_0.$$

C'est le cadre dans lequel on valorise le call européen dans le modèle de Black et Scholes. Une hypothèse fondamentale de ce modèle est la complétude du marché : on dira que le marché est complet si tous les actifs conditionnels sont atteignables (c'est à dire s'il existe une stratégie auto-financée atteignant chaque actif conditionnel).

Ces deux conditions sont fondamentales dans la théorie de tarification financière classique. La première hypothèse (que nous faisons ici), l'absence d'arbitrage dans le marché, assure qu'il existe une mesure martingale, c'est à dire une mesure de probabilité $\mathbb{Q} \equiv \mathbb{P}$ telle que X est une martingale locale sous \mathbb{Q} . Le point important est que cette mesure est l'élément central d'une formule de tarification, ou plus simplement d'un prix pour l'actif conditionnel.

La deuxième hypothèse, la complétude du marché, permet de prouver que la mesure martingale est unique, désignant ainsi naturellement un unique prix pour l'actif conditionnel. La complétude est une notion centrale pour l'aspect mathématique du problème comme nous venons de le voir, mais aussi pour l'aspect financier. En effet, on peut se poser la question de la signification économique réelle d'un modèle qui ne donne pas un prix unique aux actifs, mais une infinité de prix différents. Malheureusement, la complétude est une propriété délicate en ce sens qu'elle est très facilement détruite par une modification du modèle, même mineure. Par exemple, alors que le modèle de Black et Scholes est complet, l'ajout de sauts potentiels dans le processus aléatoire (c'est à dire le remplacement du mouvement brownien par un processus de Lévy plus général) ou d'une volatilité stochastique (suivant un mouvement brownien différent) le transforme en modèle incomplet. Dans ces deux cas, on peut comprendre intuitivement l'incomplétude : en plus de la source d'aléas originale, on rajoute une deuxième source d'incertitude (survenance des sauts, évolution de la volatilité), tandis qu'il n'y a toujours qu'un seul actif sur le marché pour composer des stratégies de couverture.

3.3 Couverture dans des marchés incomplets

Un autre exemple de marché incomplet est donné par le marché des assurances, qui nous occupe ici. En effet, un contrat d'assurance vie classique est en général un actif conditionnel non atteignable, les marchés financiers ne pouvant pas couvrir seuls les risques de mortalité notamment.

Nous considérons donc maintenant un marché incomplet et le problème du choix d'une méthode de tarification pour H (puisque'il existe une infinité de mesures martingales, il faut soit choisir l'une d'elles, soit trouver une autre manière de déterminer un prix). Examinons certaines des approches qui ont été développées pour répondre à cette question.

Approche de Merton. La première approche fut sans doute celle de Merton, qui introduisit des processus à sauts dans le modèle de Black et Scholes. Il considérait un actif de la forme

$$S_t = S_0 \exp \left(\mu t + W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \right),$$

où N_t est un processus de Poisson et Y_i est une normale. Comme nous l'avons mentionné plus haut, la présence de sauts rend le marché de ce modèle incomplet. Merton choisit tout simplement de sélectionner la mesure qui décale le mouvement brownien sans toucher aux sauts.

Approche de surcouverture. C'est une approche très conservative. Une stratégie auto-financée (V_0, θ) *surcouvre* l'actif conditionnel H si

$$V_T = V_0 + \int_0^T \theta_s dX_s \geq H \quad \text{p.s.}$$

L'idée est ensuite de chercher la stratégie surcouvrante qui coûte le moins cher :

$$V_0^* = \inf \left\{ V_0 : (V_0, \theta) \text{ auto-financée t.q. } \mathbb{P} \left[V_0 + \int_0^T \theta_s dX_s \geq H \right] = 1 \right\}.$$

Le vendeur de H fixe donc le prix V_0^* et applique la couverture correspondante θ^* pour générer un montant qui excède H avec probabilité 1. L'avantage principal de cette technique est qu'elle ne laisse aucun risque au vendeur puisque, après l'investissement initial, aucun capital additionnel n'est nécessaire pour payer le montant H à l'acheteur.

Approche par la fonction d'utilité. Il est aussi possible de répondre à la question à l'aide de la théorie de la fonction d'utilité. Davis (1997) utilise un argument d'utilité marginale pour définir la juste valeur de H comme celle qui rend les investisseurs neutres au choix suivant : soit ils investissent "un peu de leur richesse" dans le contrat, soit ils n'investissent pas du tout dans le contrat. Plus précisément, si on note u la fonction d'utilité, c le capital initial de l'investisseur, z le montant investi dans H et p le prix de H , on définit

$$W(z, p, c) = \sup_{\theta} \mathbb{E} \left[u \left(c - z + \frac{z}{p} H + \int_0^T \theta_s dX_s \right) \right],$$

où le supremum est pris sur toutes les couvertures θ dans un espace de processus bien choisi. Alors $W(z, p, c)$ est la meilleure espérance d'utilité que puisse obtenir un investisseur qui possède un capital initial c et qui investit dans z/p unités de l'actif H . La juste valeur de H est alors définie comme la solution implicite $p^* = p^*(c)$ de l'équation

$$\frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{(0, p^*, c)} = 0.$$

Approches quadratiques. Cette classe d'approches peut être divisée en deux sous-classes : d'un côté l'approche *risk-minimization* et de l'autre côté l'approche *mean-variance hedging*. Les deux méthodes envisagent le problème différemment. Par définition de l'incomplétude du marché, il n'existe pas de stratégie auto-financée qui atteigne la valeur de H en T . L'approche risk-minimization met l'accent sur la condition $V_T(\theta, \eta) = H$, c'est à dire qu'elle considère des stratégies qui atteignent H mais qui ne sont pas auto-financées. L'approche mean-variance hedging, au contraire, ne considère que des stratégies auto-financées et relaxe l'hypothèse $V_T(\theta, \eta) = H$. La section suivante étudie ces méthodes de manière plus détaillée.

3.4 Approche *risk-minimization*

Cette approche a été développée en deux temps : d'abord par Föllmer & Sondermann (1986) dans le cas martingale, puis elle a été généralisée au cas semi-

martingale par Schweizer (1991). Nous présentons les deux cas successivement en suivant Schweizer (2001).

3.4.1 Cas martingale

Nous faisons donc l'hypothèse que le processus décrivant l'actif X est une martingale sous \mathbb{P} , c'est à dire que $\mathbb{P} \in \mathcal{P} = \{\text{mesures équivalentes à } \mathbb{P} \text{ sous lesquelles } X \text{ est une martingale}\}$.

Définition 3.23. Soit un actif conditionnel H , c'est à dire une v.a. \mathcal{F}_T -mesurable. Une *stratégie* est une paire $\varphi = (\theta, \eta)$, où $\theta \in L^2(X)$ et η est un processus adapté, telle que le *processus valeur* $V(\varphi) = \theta X + \eta$ est continu à droite et de carré intégrable (c'est à dire $V_t(\varphi) \in L^2(\Omega)$ pour tout $t \in [0, T]$). Un stratégie est *admissible pour* H si elle satisfait $V_T(\varphi) = H$, c'est à dire si elle atteint H .

Le *processus de coût cumulé* de φ est défini par

$$C_t(\varphi) = V_t(\varphi) - \int_0^t \theta_s dX_s.$$

Le *processus de risque* de φ est défini par

$$R_t(\varphi) = \mathbb{E} [(C_T(\varphi) - C_t(\varphi))^2 | \mathcal{F}_t].$$

Comme η est adapté, il existe toujours au moins une stratégie admissible pour H : la stratégie "on attend et on paie" ($\theta = 0, \eta = H \mathbf{1}_{\{t=T\}}$). Mais en général ces stratégies admissibles ne sont pas auto-financées. En fait la relation (3.1) nous dit qu'il existe une stratégie auto-financée admissible pour H si et seulement si H admet une représentation comme somme d'une constante et d'une intégrale stochastique selon X :

$$H = V_T = V_0 + \int_0^T \theta_s dX_s = \mathbb{E}[H] + \int_0^T \theta_s dX_s.$$

Dans ce cas, le processus de coût est constant et le processus de risque est nul. Quand H n'est pas atteignable par une stratégie auto-financée, l'idée de l'approche risk-minimization est de chercher parmi toutes les stratégies admissibles pour H celle qui minimise le risque.

Définition 3.24. Une stratégie φ est *minimale pour le risque* si pour toute stratégie $\tilde{\varphi}$ telle que $V_T(\varphi) = V_T(\tilde{\varphi})$, on a

$$R_t(\varphi) \leq R_t(\tilde{\varphi}) \quad \forall t \in [0, T].$$

Même si toutes les stratégies admissibles ne sont pas auto-financées, le lemme suivant montre que les "bonnes" stratégies satisfont une propriété plus faible, mais se rapprochant de l'auto-financement.

Définition 3.25. Une stratégie est auto-financée en moyenne si son processus de coût est une martingale.

Lemme 3.26. *Toute stratégie minimale pour le risque est auto-financée en moyenne.*

Démonstration. Soit $\varphi = (\theta, \eta)$ une stratégie minimale pour le risque. On fixe $t_0 \in [0, T]$ et on définit une nouvelle stratégie $\tilde{\varphi}$ en imposant $\tilde{\theta} = \theta$ et

$$\tilde{\theta}_t X_t + \tilde{\eta}_t = V_t(\tilde{\varphi}) = V_t(\varphi) \mathbf{1}_{[0, t_0[}(t) + \mathbb{E} \left[V_T(\varphi) - \int_t^T \theta_u dX_u \middle| \mathcal{F}_t \right] \mathbf{1}_{[t_0, T]}(t).$$

Il est clair que $\tilde{\varphi}$ est une stratégie telle que $V_T(\varphi) = V_T(\tilde{\varphi})$. Puisque $C_T(\varphi) = C_T(\tilde{\varphi})$ et $C_{t_0}(\tilde{\varphi}) = \mathbb{E}[C_T(\tilde{\varphi}) | \mathcal{F}_{t_0}]$, on a

$$C_T(\varphi) - C_{t_0}(\varphi) = C_T(\tilde{\varphi}) - C_{t_0}(\tilde{\varphi}) + \mathbb{E}[C_T(\tilde{\varphi}) | \mathcal{F}_{t_0}] - C_{t_0}(\varphi)$$

qui permet de calculer

$$R_{t_0}(\varphi) = R_{t_0}(\tilde{\varphi}) + (C_{t_0}(\varphi) - \mathbb{E}[C_T(\varphi) | \mathcal{F}_{t_0}])^2.$$

Puisque φ est minimale pour le risque, on conclut que

$$C_{t_0}(\varphi) = \mathbb{E}[C_T(\varphi) | \mathcal{F}_{t_0}].$$

Le résultat suit puisque t_0 est arbitraire. \square

La décomposition de Kunita-Watanabe (théorème 3.22) est l'outil qui nous permettra de trouver des stratégies minimales pour le risque. Le résultat suivant a été prouvé par Föllmer & Sondermann (1986).

Théorème 3.27. *Pour tout actif conditionnel $H \in L^2(P)$, il existe une unique stratégie admissible pour H minimale pour le risque φ^* . En termes de la décomposition de Kunita-Watanabe de H*

$$H = \mathbb{E}[H] + \int_0^T \theta_s^H dX_s + L_T^H, \quad (3.2)$$

la stratégie $\varphi^* = (\theta^*, \eta^*)$ est donnée explicitement par

$$\begin{aligned} \theta^* &= \theta^H, \\ V_t(\varphi^*) &= \mathbb{E}[H | \mathcal{F}_t], \\ C(\varphi^*) &= \mathbb{E}[H] + L_T^H. \end{aligned}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que la stratégie φ^* donnée ci-dessus est admissible pour H . Fixons un $t \in [0, T]$ et une stratégie admissible pour H

quelconque $\tilde{\varphi}$. Le même argument que dans la démonstration du lemme précédent montre que $C_t(\tilde{\varphi}) = \mathbb{E}[C_T(\tilde{\varphi})|\mathcal{F}_t]$. On a donc

$$\begin{aligned}
C_T(\tilde{\varphi}) - C_t(\tilde{\varphi}) &= C_T(\tilde{\varphi}) - \mathbb{E}[C_T(\tilde{\varphi})|\mathcal{F}_t] \\
&= H - \int_0^T \tilde{\theta}_s dX_s + \mathbb{E}\left[H - \int_0^T \tilde{\theta}_s dX_s \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
&= H - \int_t^T \tilde{\theta}_s dX_s + \mathbb{E}\left[H \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}[H] + \int_0^T \theta_s^H dX_s + L_T^H - \int_t^T \tilde{\theta}_s dX_s \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[H] + \int_0^T \theta_s^H dX_s + L_T^H \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
&= \int_t^T \theta_s^H dX_s + L_T^H - \int_t^T \tilde{\theta}_s dX_s + \mathbb{E}\left[L_T^H \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
&= L_T^H - L_t^H + \int_t^T (\theta_s^H - \tilde{\theta}_s) dX_s
\end{aligned}$$

par (3.2) et en utilisant le fait que L^H est une martingale. On a

$$C_T(\varphi^*) - C_t(\varphi^*) = C_0(\varphi^*) + L_T^H - C_0(\varphi^*) + L_t^H = L_T^H - L_t^H$$

et donc

$$R_t(\tilde{\varphi}) = R_t(\varphi^*) + \mathbb{E}\left[\left(\int_t^T (\theta_s^H - \tilde{\theta}_s) dX_s\right)^2 \middle| \mathcal{F}_t\right] \geq R_t(\varphi^*)$$

comme L^H est orthogonal à $L^2(X)$. Donc φ^* est minimale pour le risque. Pour montrer l'unicité, on remarque que si $\tilde{\varphi}$ est une autre stratégie minimale pour le risque, alors $C(\tilde{\varphi})$ est une martingale par le lemme précédent et par le même argument que plus haut avec $t = 0$ on a

$$R_0(\tilde{\varphi}) = R_0(\varphi^*) + \mathbb{E}\left[\int_0^T |\theta_s^H - \tilde{\theta}_s|^2 dX_s \middle| \mathcal{F}_0\right]$$

par la propriété de l'intégrale stochastique donnée par la proposition 3.17. Comme $\tilde{\varphi}$ est minimale pour le risque, $\tilde{\theta} = \theta^H = \theta^*$ et $\tilde{\varphi} = \varphi^*$ puisque $C(\tilde{\varphi})$ est une martingale. \square

3.4.2 Cas semi-martingale

Nous considérons maintenant le cas général où X n'est pas une martingale sous la première mesure \mathbb{P} , mais seulement une semi-martingale : $X = X_0 + M + A$,

où $M \in \mathcal{M}^2$ et A est un processus prévisible de variation totale finie, tous deux nuls en 0. Nous supposons de plus, pour éviter des problèmes techniques, que X est continu (et donc M et A aussi).

L'espoir de trouver des stratégies admissibles pour H minimales pour le risque dans ce cadre plus général est vain : Schweizer (1988) donne un contre-exemple explicite.

Le concept de minimalité pour le risque fait place à un analogue infinitésimal, la minimalité locale pour le risque.

Définition 3.28. Une *perturbation* est une stratégie $\Delta = (\delta, \epsilon)$ telle que δ est bornée, $\int_0^T |\delta| d|A|$ est borné et $\delta_T = \epsilon_T = 0$. Une *restriction* de Δ au sous-intervalle $]s, t] \subset [0, T]$ est une perturbation

$$\Delta|_{]s, t]} = (\delta \mathbf{1}_{]s, t]}, \epsilon \mathbf{1}_{]s, t]}).$$

Pour une stratégie φ , une perturbation Δ et une partition Π de $[0, T]$, on définit

$$r^\Pi(\varphi, \Delta) = \sum_{]t_i, t_{i+1}] \in \Pi} \frac{R_{t_i}(\varphi + \Delta|_{]t_i, t_{i+1}])} - R_{t_i}(\varphi)}{\mathbb{E}[\langle M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M \rangle_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}]} \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}$$

La stratégie φ est *localement minimale pour le risque* si pour toute perturbation Δ et pour tout suite de partitions (Π_k) de $[0, T]$ dont l'épaisseur tend vers 0, on a

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} r^{\Pi_k}(\varphi, \Delta) \geq 0.$$

Cette définition traduit l'idée que dès qu'on perturbe la stratégie optimale sur un petit intervalle, le risque augmente, au moins asymptotiquement. Il est intéressant de constater que, modulo une hypothèse supplémentaire, la "localisation" du concept de minimalité ne détruit pas la propriété d'auto-financement en moyenne.

Lemme 3.29. *Si $\langle M \rangle$ est strictement croissant, tout stratégie localement minimale pour le risque est auto-financée en moyenne.*

La proposition suivante (obtenue par Schweizer (1990)) donne une condition pour avoir la réciproque du lemme précédent.

Proposition 3.30. *Soient $H \in L^2(\Omega)$ un actif conditionnel de carré intégrable (et \mathcal{F}_T -mesurable) et φ une stratégie admissible pour H . Si $\langle M \rangle$ est strictement croissant, la stratégie φ est localement minimale pour le risque si et seulement si elle est auto-financée en moyenne et la martingale $C(\varphi)$ est orthogonale à M .*

On peut alors montrer le résultat suivant, analogue au théorème 3.27 dans le cadre général.

Théorème 3.31. *Il existe une stratégie φ admissible pour $H \in L^2(\Omega)$ qui est localement minimale pour le risque si et seulement si H peut être décomposé en*

$$H = \mathbb{E}[H] + \int_0^T \xi_s^H dX_s + L_T^H, \quad (3.3)$$

où $\xi^H \in L^2(X)$ et $L^H \in \mathcal{M}^2$ est orthogonale à M . Dans ce cas, la stratégie $\varphi^* = (\theta^*, \eta^*)$ est donnée par

$$\theta^* = \xi^H$$

et

$$C_t(\varphi^*) = \mathbb{E}[H] + L_t^H.$$

Sa valeur est donnée par

$$V_t(\varphi^*) = C_t(\varphi^*) + \int_0^t \theta_s^* dX_s = \mathbb{E}[H] + \int_0^t \theta_s^* dX_s + L_t^H,$$

de telle sorte que η^* est aussi déterminé par la description ci-dessus.

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$H = V_T(\varphi) = C_T(\varphi) + \int_0^T \theta_s dX_s = C_0(\varphi) + \int_0^T \theta_s dX_s + C_T(\varphi) - C_0(\varphi)$$

et d'utiliser la proposition 3.30. □

La décomposition (3.3) est intéressante en elle-même, mis à part le contexte de couverture financière. Lorsque $A = 0$ (c'est à dire lorsque X est une martingale), c'est la décomposition de Kunita-Watanabe. Dans ce cadre général, elle est appelée *décomposition de Föllmer-Schweizer* et a été étudiée par une large communauté, qui a obtenu tout un ensemble de conditions suffisantes pour une telle décomposition (voir par exemple Monat & Stricker (1996)).

Les deux derniers résultats montrent que l'obtention de la décomposition de Föllmer-Schweizer est centrale puisqu'elle permet de trouver une stratégie localement minimale pour le risque.

Nous présentons ensuite la méthode de la mesure martingale minimale. L'idée intuitive en est la suivante. Puisque X n'est pas une martingale sous \mathbb{P} , nous allons effectuer un changement de mesure et passer à une mesure \mathbb{P}^* sous laquelle X est une martingale. Il sera alors possible d'appliquer les résultats obtenus dans le cas martingale pour obtenir la décomposition Föllmer-Schweizer.

On peut montrer que puisque X est continue, A est absolument continue par rapport à $\langle M \rangle$, c'est à dire qu'il existe un processus prévisible α tel que

$$A_t = \int_0^t \alpha_s d\langle M \rangle_s.$$

Considérons l'exponentielle de Doléans

$$Z_t = \exp \left(- \int_0^t \alpha_s dM_s - \frac{1}{2} \left\langle \int \alpha dM \right\rangle_t \right),$$

que nous supposons de carré intégrable. Il est classique de montrer que

(Z₁) ZX est une martingale sous \mathbb{P} ;

(Z₂) $Z \int \theta dX$ est une martingale sous \mathbb{P} pour tout $\theta \in L^2(X)$;

(Z₃) ZL est une martingale sous \mathbb{P} pour tout $L \in \mathcal{M}^2$ orthogonale à M .

On définit une nouvelle mesure de probabilité par

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = Z \in L^2(\Omega).$$

\mathbb{P}^* est équivalente à \mathbb{P} et appartient à \mathcal{P} par (Z₁) (c'est à dire que X est une martingale sous \mathbb{P}^*).

Par la proposition 3.30, pour une stratégie localement minimale pour le risque φ , $ZV(\varphi)$ est une martingale sous \mathbb{P} , et donc $V(\varphi)$ est une martingale sous \mathbb{P}^* :

$$V_t(\varphi) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} [H | \mathcal{F}_t] = V_t^{H,*}. \quad (3.4)$$

On peut donc écrire la décomposition de Kunita-Watanabe de V^* par rapport à X sous la mesure \mathbb{P}^* :

$$V_t^{H,*} = V_0^{H,*} + \int_0^t \xi_s^{H,*} dX_s + L_t^{H,*}$$

où $\xi^{H,*} \in L^2(X)$ et $L^{H,*}$ est une martingale nulle en 0 et orthogonale à X sous \mathbb{P}^* . En particulier, cette décomposition en $t = T$ donne une décomposition de H , puisque $L^{H,*}$ est aussi orthogonale à X sous \mathbb{P} par la continuité de X .

Nous venons donc de voir comment on peut trouver une stratégie localement minimale pour le risque en décomposant l'actif conditionnel H sous la mesure \mathbb{P}^* . En obtenant la décomposition de Föllmer-Schweizer de H grâce à la décomposition de Kunita-Watanabe de H sous \mathbb{P}^* , on a aussi obtenu par l'identité (3.4) la valeur de la stratégie localement minimale pour le risque φ correspondante. La probabilité \mathbb{P}^* est donc fortement liée à l'évaluation de H selon le critère de minimisation locale du risque. Nous allons voir qu'en fait, \mathbb{P}^* correspond avec la mesure martingale équivalente minimale.

Définition 3.32. Une mesure $\mathbb{Q} \equiv \mathbb{P}$ est minimale si toute martingale $L \in \mathcal{M}^2$ nulle en 0 orthogonale à M sous \mathbb{P} est aussi une martingale sous \mathbb{Q} .

Une mesure minimale est intuitivement une mesure qui conserve le plus possible les propriétés agréables de la mesure originale. Le résultat suivant a été prouvé par Föllmer & Schweizer (1991).

Théorème 3.33. *Il existe une unique mesure équivalente minimale. Elle correspond avec la mesure \mathbb{P}^* définie plus haut.*

Mentionnons encore le résultat suivant, qui caractérise une fois de plus la mesure \mathbb{P}^* .

Théorème 3.34. *La mesure \mathbb{P}^* minimise l'entropie relative*

$$\mathcal{H}(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = \int \log \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} d\mathbb{Q}$$

dans l'ensemble des mesures martingales équivalentes à \mathbb{P} .

3.5 Approche *mean-variance hedging*

Lorsque X est une martingale, cette approche est plutôt directe. On considère ici une stratégie auto-financée $\varphi = (V_0, \theta)$ dont la valeur finale est

$$H - V_T(V_0, \theta) = H - V_0 - \int_0^T \theta_s dX_s.$$

Si H était atteignable on aurait par définition $H = V_T(V_0, \theta)$. Mais en général on a un risque résiduel, décrit par

$$J(V_0, \theta) = \mathbb{E} \left[(H - V_T(V_0, \theta))^2 \right]$$

si on choisit une fonction de perte quadratique. L'idée de l'approche de Bouleau & Lamberton (1989) est de minimiser ce risque résiduel en (V_0, θ) . La théorie hilbertienne permet de montrer facilement que cela revient à projeter la variable aléatoire $H \in L^2(\Omega)$ sur l'espace $\mathbb{R} + L^2(X)$. C'est à nouveau la décomposition de Kunita-Watanabe qui permet de résoudre le problème. La solution est ainsi donnée par

$$V_0^* = \mathbb{E}[H] \quad \text{et} \quad \theta^* = \theta^H,$$

avec un risque résiduel égal à

$$J(V_0^*, \theta^*) = \mathbb{E} \left[(L_T^H)^2 \right] = \mathbb{V} [L_T^H].$$

Lorsque X est une semi-martingale, le problème est le même que dans la section précédente : il faut obtenir une décomposition de Föllmer-Schweizer selon X , c'est à dire une décomposition de Kunita-Watanabe généralisée au cas semi-martingale.

Application au passif d'un assureur vie

4.1	Cadre de travail et expression du passif	50
4.2	Décomposition du passif	52
4.3	Mortalité stochastique	53
4.4	Actif de type action	56
4.5	Actif de type obligation	70
4.6	Bilan des hypothèses	81
4.7	Analyse succincte du risque de modèle	81

Dans ce chapitre nous appliquons les techniques introduites aux chapitres précédents à un portefeuille de contrats d'assurance vie. Nous commençons par définir exactement le passif de l'assureur que nous considérons, puis lui appliquons la décomposition de Föllmer-Schweizer. Grâce au calcul de Malliavin (plus particulièrement grâce à la formule de Clark-Ocone), nous calculons explicitement les termes de cette décomposition.

D'un point de vue pratique, nous obtenons les résultats suivants : la fair value du passif, la stratégie de couverture optimale pour le risque (c'est à dire le nombre d'unités de chaque actif nécessaires à chaque instant pour accomplir cette stratégie), le risque résiduel lié à cette stratégie et la risk-margin liée au passif (dans le contexte de Solvency II). Nous utilisons aussi le calcul de Malliavin pour calculer la sensibilité du passif par rapport à ses différents paramètres (les grecques du passif).

Nous illustrons ensuite ces résultats par des simulations numériques.

Nous faisons certaines hypothèses au fur et à mesure de ce chapitre, lorsque celles-ci apparaissent naturellement. Le lecteur égaré pourra consulter la section 4.6 où nous rassemblons toutes les hypothèses faites tout au long du développement.

4.1 Cadre de travail et expression du passif

Nous allons étudier le passif d'une compagnie d'assurance vendant des contrats d'assurance vie, plus précisément des contrats de capital différé à un an. Nous supposons que le contrat commence en $t = 0$ et se termine en $t = 1$, en offrant à l'assuré un taux garanti i sur un capital de départ C_0 versé par celui-ci. Le capital à verser en cas de vie de l'assuré au terme du contrat est

$$C_0 e^i = C_1.$$

Les engagements de l'assureur envers l'assuré (le passif) comportent deux composantes : d'une part le *capital garanti* C_1 en cas de vie, d'autre part une *participation bénéficiaire*, l'assureur faisant profiter l'assuré d'une partie de ses bénéfices globaux¹.

Commençons par déterminer le montant que l'assureur devra déboursier en $t = 1$. La théorie classique de l'assurance vie désigne par ℓ_x la proportion d'assurés encore en vie à l'âge x parmi tous les assurés du portefeuille, qu'on supposera continu (et même de classe C^1). La *force de mortalité*, quantité plus adaptée à la modélisation, est alors définie de la manière suivante :

$$\mu_x = -\frac{\partial \ln \ell_x}{\partial x}. \quad (4.1)$$

Nous considérons des modèles à mortalité stochastique, c'est à dire tels que la mortalité évolue dans le temps de manière aléatoire : $\mu_{x+s}(s) = \mu_{x+s}(s, w)$ (avec $w \in \Omega$). C'est à la force de mortalité que nous imposerons une dynamique lorsque nous spécifierons un modèle à utiliser. La définition (4.1) nous suggère donc de considérer la proportion d'assurés d'âge x vivant au temps t donné par

$$\ell_x(t) = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}(s) ds\right).$$

Le nombre total d'assurés en vie en t dans le portefeuille est donc

$$P_t = \sum_{x=\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} N_x \ell_x(t) = \sum_{x=\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} N_x \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}(s) ds\right)$$

en notant N_x le nombre d'assurés d'âge x en 0 dans le portefeuille, ω_{\min} l'âge du cadet des assurés et ω_{\max} l'âge de l'aîné des assurés.

Si nous ne considérons pas de participation bénéficiaire, le montant à verser par l'assureur en fin d'année serait donc de

$$L_1 = P_1 C_0 e^i.$$

1. Nous considérons ici une participation purement financière, c'est à dire que le calcul des bénéfices de l'assureur se fait uniquement en regardant le rendement de ses actifs financiers. Il aurait aussi été possible d'incorporer le bénéfice de mortalité, dû à la différence entre la mortalité réellement prévue par l'assureur et la mortalité utilisée pour calculer la prime. Notre approche peut se résumer par l'hypothèse suivante : nous supposons que la prime du contrat d'assurance est calculée de la manière la plus juste possible.

Mais il nous faut ajouter la participation. Celle-ci prend la forme d'un surplus de capital, proportionnel à la différence entre les rendements générés par l'actif et les engagements de l'assureur dans le cas où cette différence est positive. L'assureur doit donc déboursier en fin d'année

$$L_1 = C_0 e^i P_1 \left(1 + \beta \left(\frac{S_1}{S_0} - \frac{P_1 e^i}{P_0} \right)_+ \right),$$

où β est le taux de PB, c'est à dire la fraction de ses bénéfices que l'assureur redistribue, et S_t désigne le cours en t de l'actif dans lequel a investi l'assureur.

Malheureusement, la pluralité des âges présents dans le portefeuille pose des problèmes techniques. Comme on pourra le voir dans la suite de ce chapitre, les modèles envisagés imposeront à $\ell_x(t)$ une distribution log-normale. Dans le cas d'un portefeuille comportant des assurés d'âges différents, nous manipulerions donc une v.a. distribuée comme une somme de log-normales, ce qui est hélas très difficile à traiter techniquement (même dans le cas d'une somme de seulement deux log-normales, il n'existe pas de formule fermée pour la distribution et l'obtention de solutions numériques efficaces de ce problème est encore au centre des intérêts de la communauté scientifique).

Nous allons donc faire l'hypothèse que l'effet du temps sur tous les âges est le même, c'est à dire qu'on peut écrire

$$\mu_{x+s}(s) = \kappa(x) + \mu_{\hat{x}+s}(s),$$

où κ est une fonction déterministe de l'âge et \hat{x} est un âge de référence choisi parmi les âges du portefeuille. On obtient alors

$$\begin{aligned} P_t &= \sum_{x=\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} N_x \exp \left(- \int_0^t \mu_{x+s}(s) ds \right) \\ &= \sum_{x=\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} N_x \exp(-t\kappa(x)) \exp \left(- \int_0^t \mu_{\hat{x}+s}(s) ds \right) \\ &= G(t) \exp \left(- \int_0^t \mu_{\hat{x}+s}(s) ds \right), \end{aligned}$$

où G est une fonction déterministe. Sous le même genre de modèle pour la mortalité μ , on obtiendra avec notre nouvelle hypothèse une distribution log-normale (plutôt qu'une somme de log-normales) pour P_t . Il est évident que si le portefeuille ne contient qu'un seul âge x , il suffit de prendre $\kappa \equiv 0$ et $\hat{x} = x$. Si on choisit $\kappa \equiv 0$, \hat{x} est alors vraiment l'âge à indice de survie moyen :

$$\sum_{x=\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} N_x \exp \left(- \int_0^t \mu_{x+s}(s) ds \right) = \sum_{x=\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} N_x \exp \left(- \int_0^t \mu_{\hat{x}+s}(s) ds \right)$$

d'où

$$\exp \left(- \int_0^t \mu_{\hat{x}+s}(s) ds \right) = \sum_{x=\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \frac{N_x}{\sum_x N_x} \exp \left(- \int_0^t \mu_{x+s}(s) ds \right).$$

Signalons que l'hypothèse que nous venons de faire semble inexistante dans la littérature.

4.2 Décomposition du passif

La clé de voûte de ce mémoire est la décomposition du passif qui suit. Comme annoncé plus haut (et comme le lecteur pourra s'en douter après avoir lu les deux chapitres précédents), nous allons appliquer à L_1 la théorie de Malliavin et la décomposition de Kunita-Watanabe.

Dans toute la suite de ce chapitre, nous considérons que nous avons à notre disposition une mesure bien particulière. Cette mesure est l'une des mesures martingales équivalentes², c'est à dire que l'actif – ou plutôt une certaine version de l'actif³ – est une martingale sous cette mesure : il existe un processus K et un mouvement brownien standard (peut-être multi-dimensionnel) W^S tel que

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 + \int_0^t K_u dW_u^S$$

en notant \tilde{S} la “version” de l'actif qui est une martingale.

D'une part, la décomposition de Föllmer-Schweizer (qui est en réalité la décomposition de Kunita-Watanabe puisque nous avons supposé que \tilde{S} est une martingale, voir le théorème 3.27) permet d'écrire

$$L_1 = \mathbb{E}[L_1] + \int_0^1 \tilde{\theta}_s d\tilde{S}_s + C_1 = \mathbb{E}[L_1] + \int_0^1 \theta_s dW_s^S + I_1,$$

où $\tilde{\theta} \in \mathcal{M}_{\tilde{S}}^2$, $\theta \in \mathcal{M}_{W^S}^2$ et $I_1 \in \mathcal{M}^2$ est orthogonal à toutes les intégrales de la forme $\int \theta dW^S$. Ce terme I_1 , différent de 0 uniquement lorsque le marché est incomplet (le cas qui nous occupe), représente la composante de L_1 qui est non-couvrable sur les marchés financiers (par sa propriété d'orthogonalité).

Nous faisons maintenant l'hypothèse⁴ suivante : le terme orthogonal I_1 évolue dans un univers gaussien, c'est à dire que nous supposons qu'il existe un processus ξ et un mouvement brownien standard W^I (peut-être multi-dimensionnel) tel que

$$I_1 = \int_0^1 \xi_s dW_s^I.$$

2. Dans le premier modèle ce sera la mesure risque neutre alors que dans le deuxième modèle ce sera la mesure forward neutre.

3. Dans le premier modèle il s'agira de l'actif actualisé, dans le deuxième modèle ce sera le prix forward de l'actif.

4. On peut voir cette hypothèse comme une approximation : nous projetons le terme I_1 dans un univers gaussien. Quoi qu'il en soit, il faut garder en tête le risque de modèle que cette hypothèse génère.

Nous obtenons alors une décomposition

$$L_1 = \mathbb{E}[L_1] + \int_0^1 \theta_s dW_s^S + \int_0^1 \xi_s dW_s^I. \quad (4.2)$$

D'autre part, on peut voir la v.a. L_1 comme une fonctionnelle d'un mouvement brownien n -dimensionnel $W = (W^1, \dots, W^n)$ et lui appliquer la formule de Clark-Ocone :

$$L_1 = \mathbb{E}[L_1] + \int_0^1 \mathbb{E}[D_t L_1 | \mathcal{F}_t] dW_t = \mathbb{E}[L_1] + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \mathbb{E}[D_t^i L_1 | \mathcal{F}_t] dW_t^i. \quad (4.3)$$

Par unicité de la décomposition de Kunita-Watanabe, il existe donc, modulo une renumérotation, un entier k tel que

$$\begin{cases} W^S = (W^1, \dots, W^k), \\ W^I = (W^{k+1}, \dots, W^n). \end{cases}$$

4.3 Mortalité stochastique

Les modèles de mortalité stochastique sont au centre des intérêts actuels de la communauté scientifique. Parmi les auteurs traitant le sujet, citons Dahl (2004), Denuit *et al.* (2007) et Devolder (2012).

Nous supposons que la mortalité suit la même dynamique quelle que soit la mesure. Cela signifie que nous considérons que la mortalité n'est pas affectée par les transformations du monde financier, elle reste toujours pareille, dans le monde réel, le monde risque neutre ou le monde forward neutre. Cette hypothèse semble tout à fait naturelle sur les court et moyen termes : il n'y a pas de raison que les conditions de marché influencent la vitesse à laquelle décède la population. Par contre, elle est plus discutable sur le long terme. On pourrait en effet penser qu'une forte dégradation des conditions économiques peut entraîner une dégradation de la qualité des soins de santé et donc une augmentation de la mortalité. Nous ne considérons ici que des contrats relativement courts, mais il faut garder cette limitation en tête si l'on veut généraliser notre approche à des contrats plus longs.

Nous allons maintenant imposer une dynamique à μ pour pouvoir calculer explicitement les termes de la décomposition. Le modèle que nous choisissons pour la force de mortalité est un modèle Vasicek à un facteur. Puisque \hat{x} est fixé une fois pour toutes, nous écrivons $\mu_{\hat{x}+t}(t) = \mu_t$ lorsque le contexte est clair.

— Vasicek —

$$\begin{aligned} d\mu_t &= a(\theta - \mu_t) dt + \sigma_\mu dW_t^2, \\ \mu_t &= \mu_s e^{-a(t-s)} + \theta \left(1 - e^{-a(t-s)}\right) + \sigma_\mu \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u^2, \\ \mu_t | \mu_s &\sim \mathcal{N} \left(\mu_s e^{-a(t-s)} + \theta \left(1 - e^{-a(t-s)}\right), \frac{\sigma_\mu^2}{2a} \left(1 - e^{-2a(t-s)}\right) \right), \\ \mu &\in \mathbb{D}^{1,2} \text{ et } D_s \mu_t = \sigma_\mu e^{-a(t-s)} \mathbf{1}_{s \leq t}. \end{aligned}$$

Paramètres : $\mu_0, a, \theta, \sigma_\mu > 0$.

Remarque 4.1. Exactement de la même façon que le modèle Vasicek appliqué aux taux d'intérêt génère des taux parfois négatifs, il faut garder à l'esprit que la probabilité que μ deviennent négatif est non nulle. Cela va bien sûr contre le sens commun puisque cela signifierait que le nombre d'individu en vie n'est pas une fonction décroissante ! Comme pour les taux, il est possible de calculer explicitement cette probabilité, voir par exemple Brigo & Mercurio (2001).

La quantité qui nous intéresse n'est pas tant μ_t que $\ell_t = \exp\left(-\int_0^t \mu_s ds\right)$. Le résultat suivant donne la loi de ce processus.

Lemme 4.2. On a, pour tout $0 \leq v \leq t$

$$\ell_t = \ell_v \exp\left(\frac{\mu_0 - \theta}{a}(e^{-at} - e^{-av}) - \theta(t - v)\right) \exp\left(-\sigma_\mu \int_v^t \frac{1 - e^{-a(t-u)}}{a} dW_u^2\right)$$

et donc

$$\frac{\ell_t}{\ell_v} | \ell_v \sim \log \mathcal{N} \left(\frac{\mu_0 - \theta}{a}(e^{-at} - e^{-av}) - \theta(t - v), \int_v^t \frac{\sigma_\mu^2}{a^2} \left(1 - e^{-a(t-u)}\right)^2 du \right).$$

De plus, $\ell \in \mathbb{D}^{1,2}$ et

$$D_s \ell_t = \ell_t \frac{\sigma_\mu}{a} (e^{-a(t-s)} - 1) \mathbf{1}_{s \leq t}.$$

Démonstration. On peut écrire,

$$\begin{aligned} \ell_t &= \exp\left(-\int_0^t \mu_s ds\right) \\ &= \ell_v \exp\left(-\int_v^t \mu_s ds\right) \\ &= \ell_v \exp\left(-\int_v^t (\mu_0 e^{-as} + \theta(1 - e^{-as})) ds\right) \end{aligned}$$

$$\cdot \exp\left(-\sigma_\mu \int_v^t \int_0^s e^{-a(s-u)} dW_u^2 ds\right).$$

La formule d'Ito multi-dimensionnelle d'un produit

$$X_t Y_t = X_v Y_v + \int_v^t X_s dY_s + \int_v^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t$$

appliquée aux deux processus

$$X_s = \int_0^s e^{au} dW_u^2 \quad \text{et} \quad Y_s = -\frac{e^{-as}}{a}$$

donne

$$\begin{aligned} -\frac{e^{-at}}{a} \int_0^t e^{au} dW_u^2 &= -\frac{e^{-av}}{a} \int_0^v e^{au} dW_u^2 + \int_v^t \int_0^s e^{au} dW_u^2 d\left(-\frac{e^{-as}}{a}\right) \\ &\quad - \int_v^t \frac{e^{-as}}{a} d\left(\int_0^s e^{au} dW_u^2\right) \\ &= \int_v^t \int_0^s e^{-a(s-u)} dW_u^2 ds - \int_v^t \frac{e^{-as}}{a} e^{as} dW_s^2. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \int_v^t \int_0^s e^{-a(s-u)} dW_u^2 ds &= \int_v^t \frac{1 - e^{-a(t-u)}}{a} dW_u^2 \\ &= \frac{1}{a} \left(W_t - W_v - \int_v^t e^{-a(t-u)} dW_u^2 \right) \end{aligned}$$

grâce auquel on peut écrire

$$\begin{aligned} \ell_t &= \ell_v \exp\left(\frac{\mu_0 - \theta}{a} (e^{-at} - e^{-av}) - \theta(t-v)\right) \\ &\quad \cdot \exp\left(-\sigma_\mu \int_v^t \frac{1 - e^{-a(t-u)}}{a} dW_u^2\right). \end{aligned}$$

On connaît donc la distribution de ℓ_t/ℓ_v conditionnellement à ℓ_v à chaque instant $t \geq v$

$$\frac{\ell_t}{\ell_v} \Big| \ell_v \sim \log \mathcal{N}\left(\frac{\mu_0 - \theta}{a} (e^{-at} - e^{-av}) - \theta(t-v), \int_v^t \frac{\sigma_\mu^2}{a^2} (1 - e^{-a(t-u)^2}) du\right).$$

Pour la dérivée de Malliavin, on utilise le résultat de l'exemple 2.16 (la dérivée de l'intégrale d'Ito d'une fonction déterministe) :

$$\begin{aligned} D_s^2 \left(\int_0^t (1 - e^{-a(t-u)}) dW_u^2 \right) &= D_s^2 W_t - e^{-at} D_s^2 \int_0^t e^{au} dW_u^2 \\ &= \mathbf{1}_{s \leq t} - e^{-at} e^{as} \mathbf{1}_{s \leq t}, \end{aligned}$$

d'où on obtient le résultat par le théorème 2.25. \square

4.4 Actif de type action

Dans ce premier modèle, nous travaillons à partir de la mesure risque neutre. C'est à dire que c'est la mesure "de base" est la mesure risque neutre, nous ne donnons même pas la dynamique des processus considérés sous la mesure réelle.

Nous supposons aussi que l'actif de l'assureur est de type action et suit un brownien géométrique sous la mesure risque neutre, modèle dont les caractéristiques principales sont (voir l'exemple 2.38 pour le calcul de la dérivée de Malliavin) :

— Brownien géométrique —

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma_S S_t dW_t^1, \\ S_t &= S_s \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma_S^2 \right) (t-s) + \sigma_S (W_t^1 - W_s^1) \right), \\ \frac{S_t}{S_s} \Big| S_s &\sim \log \mathcal{N} \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma_S^2 \right) (t-s), \sigma_S^2 (t-s) \right), \\ S &\in \mathbb{D}^{1,2} \text{ et } D_s S_t = \sigma_S S_t \mathbf{1}_{s \leq t}. \end{aligned}$$

Paramètres : $S_0, r, \sigma_S > 0$.

Remarquons que l'actif risqué lui-même, S , n'est évidemment pas une martingale. Le chapitre précédent traite d'une décomposition selon un processus martingale, il va donc falloir transformer notre actif en un autre processus qui, lui, est une martingale. C'est pour cette raison que nous considérons l'actualisation de S :

$$T_t = e^{-rt} S_t.$$

C'est en terme de T que nous allons travailler. Il est direct de vérifier que

$$\begin{aligned} dT_t &= \sigma_S S_t dW_t^1, \\ T_t &= T_s \exp \left(-\frac{1}{2} \sigma_S^2 (t-s) + \sigma_S (W_t^1 - W_s^1) \right), \\ \frac{T_t}{T_s} \Big| T_s &\sim \log \mathcal{N} \left(-\frac{1}{2} \sigma_S^2 (t-s), \sigma_S^2 (t-s) \right), \\ T_0 &= S_0, \\ T &\in \mathbb{D}^{1,2} \text{ et } D_s T_t = \sigma_S T_t \mathbf{1}_{s \leq t}. \end{aligned}$$

Le passif se réécrit alors

$$C_0 e^i P_1 \left(1 + \beta \left(\frac{e^r T_1}{S_0} - \frac{P_1 e^i}{P_0} \right)_+ \right).$$

Remarque 4.3. L'application du lemme 2.25 permet de voir que L_1 est un élément de $\mathbb{D}^{1,2}$.

4.4.1 Décomposition explicite

La décomposition que nous obtenons peut paraître complexe ; le lecteur la comprendra plus facilement en lisant la preuve où sont introduits et motivés les éléments de cette formule. Dans ce qui suit, on note \mathbb{E} l'espérance sous la mesure risque neutre \mathbb{P}^* .

Théorème 4.4. *La décomposition de Föllmer-Schweizer de L_1 s'écrit*

$$\begin{aligned}
L_1 &= \mathbb{E}[L_1] + \int_0^1 \mathbb{E}[D_s^1 L_1 | \mathcal{F}_s] dW_s^1 + \int_0^1 \mathbb{E}[D_s^2 L_1 | \mathcal{F}_s] dW_s^2 \\
&= C_0 e^i G(1) \left(\exp\left(\nu_0 + \frac{1}{2}\tau_0^2\right) \right. \\
&\quad + \beta e^r \exp\left(-\nu_0 - \frac{1}{2}\tau_0^2\right) \Phi\left(\frac{\beta_0 + \alpha_0(\nu_0 + \tau_0^2)}{\sqrt{1 + 2\alpha_0^2\tau_0^2}}\right) \\
&\quad \left. - \beta e^i \exp(-2\nu_0 - 2\tau_0^2) \Phi\left(\frac{\beta_0 + 2\alpha_0(2\nu_0 + 4\tau_0^2)}{\sqrt{1 + 32\alpha_0^2\tau_0^2}}\right) \right) \\
&\quad + \int_0^1 \left[\frac{C_0 \beta \sigma_S e^{i+r} G(1) T_s \ell_s}{S_0} \right. \\
&\quad \quad \left. \cdot \exp\left(-\nu_s - \frac{1}{2}\tau_s^2\right) \Phi\left(\frac{\beta_s + \alpha_s(\nu_s + \tau_s^2)}{\sqrt{1 + 2\alpha_s^2\tau_s^2}}\right) \right] dW_s^1 \\
&\quad + \int_0^1 \left[\frac{C_0 e^i G(1) \sigma_\mu (e^{-a(1-s)} - 1)}{a} \left(\ell_s \exp\left(\nu_s + \frac{1}{2}\tau_s^2\right) \right. \right. \\
&\quad \quad + \frac{\beta e^r T_s \ell_s}{S_0} \exp\left(-\nu_s - \frac{1}{2}\tau_s^2\right) \Phi\left(\frac{\beta_s + \alpha_s(\nu_s + \tau_s^2)}{\sqrt{1 + 2\alpha_s^2\tau_s^2}}\right) \\
&\quad \quad \left. \left. - 2\beta e^i \ell_s^2 \exp(-2\nu_s - 2\tau_s^2) \right) \right. \\
&\quad \quad \left. \cdot \Phi\left(\frac{\beta_s + 2\alpha_s(2\nu_s + 4\tau_s^2)}{\sqrt{1 + 32\alpha_s^2\tau_s^2}}\right) \right] dW_s^2,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\alpha_s &= \frac{-1}{\sigma_S \sqrt{1-s}}, \\
\beta_s &= \frac{\ln \frac{T_s}{S_0 e^{i-r} G(1) \ell_s} + \frac{\sigma_S^2}{2}(1-s)}{\sigma_S \sqrt{1-s}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu_s &= \frac{\mu_0 - \theta}{a} (e^{-a} - e^{-as}) - \theta(1 - s), \\ \tau_s^2 &= \int_s^1 \frac{\sigma_\mu^2}{a^2} (1 - e^{-a(1-u)})^2 du.\end{aligned}$$

Démonstration. Calculons les termes de la décomposition un à un. Le passif L_1 peut être considéré comme une fonctionnelle des deux mouvements browniens W^1 et W^2 , on aura donc deux dérivées de Malliavin dans des “directions” différentes.

Dérivée selon W^1 . La fonction $x \mapsto (x - K)_+$ étant lipschtzienne, le théorème 2.25 permet de calculer

$$\begin{aligned}D_s^1 L_1 &= D_s^1 \left(C_0 e^i P_1 \left(1 + \beta \left(\frac{e^r T_1}{S_0} - \frac{P_1 e^i}{P_0} \right)_+ \right) \right) \\ &= C_0 e^i P_1 \beta D_s^1 \left(\frac{e^r T_1}{S_0} - \frac{P_1 e^i}{P_0} \right)_+ \\ &= \frac{C_0 e^i P_1 \beta e^r}{S_0} \mathbf{1}_M D_s^1 T_1 \\ &= \frac{C_0 e^i P_1 \beta e^r}{S_0} \mathbf{1}_M \sigma_S T_1 \mathbf{1}_{s \leq 1}\end{aligned}$$

en notant $M = \{T_1 \geq S_0 P_1 e^{i-r}\}$. Soit $s \leq 1$. C'est l'espérance conditionnelle de cette dérivée qui apparaît dans la formule de Clark-Ocone :

$$\mathbb{E} [D_s^1 L_1 | \mathcal{F}_s] = \frac{C_0 e^i \beta \sigma_S G(1) e^r}{S_0} \mathbb{E} [\ell_1 S_1 \mathbf{1}_M | \mathcal{F}_s]. \quad (4.4)$$

Pour pouvoir traiter successivement les deux sources d'aléatoire, introduisons

$$\tilde{\mathcal{F}}_{(s,1)} = \sigma (\{W_t^1 : t \in [0, s]\} \cup \{W_t^2 : t \in [0, 1]\}).$$

Cette nouvelle σ -algèbre représente l'information disponible à propos de W^1 jusque $t = s$ et l'information disponible à propos de W^2 jusque $t = 1$. Par la loi des espérances itérées on a, puisque $\mathcal{F}_s \subset \tilde{\mathcal{F}}_{(s,1)}$,

$$\mathbb{E} [D_s^1 L_1 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} [D_s^1 L_1 | \tilde{\mathcal{F}}_{(s,1)}] | \mathcal{F}_s \right]. \quad (4.5)$$

Considérons donc d'abord l'espérance par rapport à la nouvelle filtration. Le point important est bien évidemment que P_1 est $\tilde{\mathcal{F}}_{(s,1)}$ -mesurable :

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [D_s^1 L_1 | \tilde{\mathcal{F}}_{(s,1)}] &= \mathbb{E} \left[\frac{C_0 e^i P_1 \beta}{S_0} \mathbf{1}_M \sigma_S e^r T_1 | \tilde{\mathcal{F}}_{(s,1)} \right] \\ &= \frac{C_0 e^i P_1 \beta \sigma_S e^r}{S_0} \mathbb{E} [\mathbf{1}_M T_1 | \tilde{\mathcal{F}}_{(s,1)}].\end{aligned} \quad (4.6)$$

En nous inspirant de la dérivation de la formule de Black et Scholes (voir par exemple le théorème 3.1.1 de Musiela & Rutkowski (2005)), nous introduisons une mesure auxiliaire sur (Ω, \mathcal{F}) définie par la densité de Radon-Nikodym

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}^*} = \lambda_1,$$

où le processus λ est défini par

$$\lambda_s = \exp\left(-\frac{\sigma_S^2}{2}s + \sigma_S W_s^1\right).$$

Par le théorème de Girsanov, le processus

$$\tilde{W}_t^1 = W_t^1 - \sigma_S t$$

est un mouvement brownien standard sous la nouvelle mesure $\tilde{\mathbb{P}}$. Remarquons que la dynamique de l'actif devient alors

$$dT_t = T_t \left(\sigma_S^2 dt + \sigma_S d\tilde{W}_t^1 \right),$$

c'est à dire

$$T_t = T_s \exp\left(\frac{\sigma_S^2}{2}(t-s) + \sigma_S(\tilde{W}_t^1 - \tilde{W}_s^1)\right). \quad (4.7)$$

On peut alors calculer l'espérance conditionnelle :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[T_1 \mathbf{1}_M | \tilde{\mathcal{F}}_{(s,1)} \right] &= \mathbb{E} \left[T_s \exp\left(-\frac{\sigma_S^2}{2}(1-s) + \sigma_S(W_1^1 - W_s^1)\right) \mathbf{1}_M | \tilde{\mathcal{F}}_{(s,1)} \right] \\ &= T_s \mathbb{E} \left[\exp\left(-\frac{\sigma_S^2}{2}(1-s) + \sigma_S W_{1-s}^1\right) \mathbf{1}_M | \tilde{\mathcal{F}}_{(s,1)} \right] \\ &= T_s \mathbb{E} \left[\lambda_1 \lambda_s^{-1} \mathbf{1}_M | \tilde{\mathcal{F}}_{(s,1)} \right] \\ &= T_s \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[\mathbf{1}_M | \tilde{\mathcal{F}}_{(s,1)} \right] \\ &= T_s \tilde{\mathbb{P}} \left[T_1 \geq S_0 P_1 e^{i-r} | T_s, P_1 \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

puisque le théorème de Bayes implique (voir par exemple le lemme 9.6.2 de Musiela & Rutkowski (2005))

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left[\lambda_1 \lambda_s^{-1} \mathbf{1}_M | \tilde{\mathcal{F}}_{(s,1)} \right] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left[\mathbf{1}_M \lambda_1 | \tilde{\mathcal{F}}_{(s,1)} \right]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left[\lambda_1 | \tilde{\mathcal{F}}_{(s,1)} \right]} = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[\mathbf{1}_M | \tilde{\mathcal{F}}_{(s,1)} \right].$$

Il suffit dès lors d'utiliser la dynamique de S sous $\tilde{\mathbb{P}}$ donnée par (4.7) :

$$\tilde{\mathbb{P}} \left[T_1 \geq S_0 P_1 e^{i-r} | T_s, P_1 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{\mathbb{P}} \left[T_s \exp \left(\frac{\sigma_S^2}{2}(1-s) + \sigma_S(\tilde{W}_1^1 - \tilde{W}_s^1) \right) \geq S_0 P_1 e^{i-r} \middle| T_s, P_1 \right] \\
&= \tilde{\mathbb{P}} \left[\frac{\tilde{W}_{1-s}^1}{\sqrt{1-s}} \geq \frac{\ln \frac{S_0 P_1 e^{i-r}}{T_s} - \frac{\sigma_S^2}{2}(1-s)}{\sigma_S \sqrt{1-s}} \middle| T_s, P_1 \right] \\
&= 1 - \Phi \left(\frac{\ln \frac{S_0 P_1 e^{i-r}}{T_s} - \frac{\sigma_S^2}{2}(1-s)}{\sigma_S \sqrt{1-s}} \right) \\
&= \Phi \left(\frac{\ln \frac{T_s}{S_0 P_1 e^{i-r}} + \frac{\sigma_S^2}{2}(1-s)}{\sigma_S \sqrt{1-s}} \right),
\end{aligned}$$

puisque \tilde{W}_1^1 est un brownien standard sous $\tilde{\mathbb{P}}$. En rassemblant (4.6), (4.8) et la dernière égalité, on obtient

$$\mathbb{E} \left[D_s^1 L_1 \middle| \tilde{\mathcal{F}}_{(s,1)} \right] = \frac{C_0 e^i P_1 \beta \sigma_S T_s e^r}{S_0} \Phi \left(\frac{\ln \frac{T_s}{S_0 P_1 e^{i-r}} + \frac{\sigma_S^2}{2}(1-s)}{\sigma_S \sqrt{1-s}} \right).$$

Revenons à l'espérance conditionnelle par rapport à \mathcal{F}_s avec (4.5) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[D_s^1 L_1 \middle| \mathcal{F}_s \right] &= \mathbb{E} \left[\frac{C_0 e^i P_1 \beta \sigma_S T_s e^r}{S_0} \Phi \left(\frac{\ln \frac{T_s}{S_0 P_1 e^{i-r}} + \frac{\sigma_S^2}{2}(1-s)}{\sigma_S \sqrt{1-s}} \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= \frac{C_0 e^i \beta \sigma_S T_s e^r}{S_0} \mathbb{E} \left[P_1 \Phi \left(\frac{\ln \frac{T_s}{S_0 P_1 e^{i-r}} + \frac{\sigma_S^2}{2}(1-s)}{\sigma_S \sqrt{1-s}} \right) \middle| \mathcal{F}_s \right].
\end{aligned}$$

Réexprimons cette espérance

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[P_1 \Phi \left(\frac{\ln \frac{T_s}{S_0 P_1 e^{i-r}} + \frac{\sigma_S^2}{2}(1-s)}{\sigma_S \sqrt{1-s}} \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= G(1) \ell_s \mathbb{E} \left[\frac{\ell_1}{\ell_s} \Phi \left(\frac{-1}{\sigma_S \sqrt{1-s}} \ln \left(\frac{\ell_1}{\ell_s} \right) + \frac{\ln \frac{T_s}{S_0 P_1 e^{i-r} G(1) \ell_s} + \frac{\sigma_S^2}{2}(1-s)}{\sigma_S \sqrt{1-s}} \right) \middle| \mathcal{F}_s \right].
\end{aligned}$$

Le lemme 4.2 assure que ℓ_1/ℓ_s est distribué log-normalement conditionnellement à ℓ_s . Nous sommes donc amenés à calculer une expression de la forme

$$\mathbb{E} [R\Phi(\alpha \ln R + \beta)], \quad (4.9)$$

où R est distribuée selon une log-normale et où $\alpha, \beta > 0$. L'application du lemme A.1 permet d'obtenir une formule fermée pour cette espérance. En rassemblant tous les facteurs, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [D_s^1 L_1 | \mathcal{F}_s] &= \frac{C_0 e^i \beta \sigma_S e^r G(1) T_s \ell_s}{S_0} \\ &\quad \cdot \exp \left(-\nu_s - \frac{1}{2} \tau_s^2 \right) \Phi \left(\frac{\beta_s + \alpha_s (\nu_s + \tau_s^2)}{\sqrt{1 + 2\alpha_s^2 \tau_s^2}} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dérivée selon W^2 . La fonction $x \mapsto (K - x)_+$ étant lipschtzienne, le théorème 2.25 permet de calculer

$$\begin{aligned} D_s^2 L_1 &= C_0 e^i D_s^2 \left(P_1 \left(1 + \beta \left(\frac{e^r T_1}{S_0} - \frac{P_1 e^i}{P_0} \right)_+ \right) \right) \\ &= C_0 e^i \left(D_s^2(P_1) \left(1 + \beta \left(\frac{e^r T_1}{S_0} - \frac{P_1 e^i}{P_0} \right)_+ \right) - \frac{P_1 \beta e^i D_s^2(P_1) \mathbf{1}_M}{P_0} \right) \\ &= C_0 e^i D_s^2(P_1) \left(1 + \beta \left(\frac{e^r T_1}{S_0} - \frac{P_1 e^i}{P_0} \right)_+ - \frac{P_1 \beta e^i \mathbf{1}_M}{P_0} \right) \\ &= C_0 e^i D_s^2(P_1) \left(1 + \beta \left(\frac{e^r T_1}{S_0} - \frac{P_1 e^i}{P_0} \right)_+ - \frac{P_1 \beta e^i \mathbf{1}_M}{P_0} \right) \\ &= \frac{C_0 e^i G(1) \sigma_\mu (e^{-a(1-s)} - 1)}{a} \ell_1 \left(1 + \beta \left(\frac{e^r T_1}{S_0} - 2\ell_1 e^i \right) \mathbf{1}_M \right) \\ &= \frac{C_0 e^i G(1) \sigma_\mu (e^{-a(1-s)} - 1)}{a} \left(\ell_1 + e^r \ell_1 T_1 \frac{\beta}{S_0} \mathbf{1}_M - 2\beta e^i \ell_1^2 \mathbf{1}_M \right) \\ &= \frac{C_0 e^i G(1) \sigma_\mu (e^{-a(1-s)} - 1)}{a} (A + B - C). \end{aligned}$$

Calculons successivement l'espérance conditionnelle des trois termes non déterministes.

Le premier ne pose pas de problème puisqu'il s'agit simplement de l'espérance d'une v.a. log-normale :

$$\mathbb{E} [A | \mathcal{F}_s] = \ell_s \mathbb{E} \left[\frac{\ell_1}{\ell_s} | \mathcal{F}_s \right] = \ell_s \exp \left(\nu_s + \frac{1}{2} \tau_s^2 \right).$$

Le deuxième se ramène au calcul déjà effectué pour la dérivée selon W^1 (voir l'expression (4.4)) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [B | \mathcal{F}_s] &= \frac{\beta e^r}{S_0} \mathbb{E} [\ell_1 T_1 \mathbf{1}_M | \mathcal{F}_s] \\ &= \frac{\beta e^r T_s \ell_s}{S_0} \exp \left(-\nu_s - \frac{1}{2} \tau_s^2 \right) \Phi \left(\frac{\beta_s + \alpha_s (\nu_s + \tau_s^2)}{\sqrt{1 + 2\alpha_s^2 \tau_s^2}} \right). \end{aligned}$$

Le troisième terme se traite d'une manière semblable à la dérivée selon W^1 , à savoir en utilisant la loi des espérances itérées puis le lemme technique de

l'appendice. On écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C|\mathcal{F}_s] &= 2\beta e^i \ell_s^2 \mathbb{E}\left[\left(\frac{\ell_1}{\ell_s}\right)^2 \mathbf{1}_M \middle| \mathcal{F}_s\right] \\ &= 2\beta e^i \ell_s^2 \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(\frac{\ell_1}{\ell_s}\right)^2 \mathbf{1}_M \middle| \tilde{\mathcal{F}}_{(s,1)}\right] \middle| \mathcal{F}_s\right].\end{aligned}$$

Considérons l'espérance par rapport à la σ -algèbre "partielle" $\tilde{\mathcal{F}}_{(s,1)}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\frac{\ell_1}{\ell_s}\right)^2 \mathbf{1}_M \middle| \tilde{\mathcal{F}}_{(s,1)}\right] &= \left(\frac{\ell_1}{\ell_s}\right)^2 \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_M \middle| \tilde{\mathcal{F}}_{(s,1)}\right] \\ &= \left(\frac{\ell_1}{\ell_s}\right)^2 \mathbb{P}\left[T_1 \geq S_0 e^{i-r} P_1 \middle| T_s, P_1\right] \\ &= \left(\frac{\ell_1}{\ell_s}\right)^2 \mathbb{P}\left[\frac{W_{1-s}^1}{\sqrt{1-s}} \geq \frac{\ln \frac{S_0 P_1 e^{i-r}}{T_s} + \frac{\sigma_S^2}{2}(1-s)}{\sigma_S \sqrt{1-s}} \middle| T_s, P_1\right] \\ &= \left(\frac{\ell_1}{\ell_s}\right)^2 \Phi\left(\frac{\ln \frac{T_s}{S_0 P_1 e^{i-r}} - \frac{\sigma_S^2}{2}(1-s)}{\sigma_S \sqrt{1-s}}\right).\end{aligned}$$

L'espérance par rapport à \mathcal{F}_s donne donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(\frac{\ell_1}{\ell_s}\right)^2 \mathbf{1}_M \middle| \tilde{\mathcal{F}}_{(s,1)}\right] \middle| \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{\ell_1}{\ell_s}\right)^2 \Phi\left(\frac{\ln \frac{T_s}{S_0 P_1 e^{i-r}} - \frac{\sigma_S^2}{2}(1-s)}{\sigma_S \sqrt{1-s}}\right) \middle| \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{\ell_1}{\ell_s}\right)^2 \Phi\left(\frac{-1}{2\sigma_S \sqrt{1-s}} \ln \left(\frac{\ell_1}{\ell_s}\right)^2 + \frac{\ln \frac{T_s}{S_0 e^{i-r} G(1)\ell_s} - \frac{\sigma_S^2}{2}(1-s)}{\sigma_S \sqrt{1-s}}\right) \middle| \mathcal{F}_s\right].\end{aligned}$$

Puisque ℓ_1/ℓ_s est distribué selon une log-normale, $(\ell_1/\ell_s)^2$ aussi (de moyenne $2\nu_s$ et de variance $4\tau_s^2$). Cette expression est donc de la forme (4.9), et on peut lui appliquer le lemme A.1 :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(\frac{\ell_1}{\ell_s}\right)^2 \mathbf{1}_M \middle| \tilde{\mathcal{F}}_{(s,1)}\right] \middle| \mathcal{F}_s\right] &= \exp(-2\nu_s - 2\tau_s^2) \Phi\left(\frac{\beta_s + 2\alpha_s(2\nu_s + 4\tau_s^2)}{\sqrt{1 + 32\alpha_s^2\tau_s^2}}\right) \quad (4.11)\end{aligned}$$

avec les mêmes notations que précédemment.

En rassemblant les trois espérance conditionnelles, nous obtenons celle de la dérivée de Malliavin :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [D_s^2 L_1 | \mathcal{F}_s] &= \frac{C_0 e^i G(1) \sigma_\mu (e^{-a(1-s)} - 1)}{a} \left\{ \ell_s \exp \left(\nu_s + \frac{1}{2} \tau_s^2 \right) \right. \\ &\quad + \frac{\beta e^r T_s \ell_s}{S_0} \exp \left(-\nu_s - \frac{1}{2} \tau_s^2 \right) \Phi \left(\frac{\beta_s + \alpha_s (\nu_s + \tau_s^2)}{\sqrt{1 + 2\alpha_s^2 \tau_s^2}} \right) \\ &\quad \left. + 2\beta e^i \ell_s^2 \exp \left(-2\nu_s - 2\tau_s^2 \right) \Phi \left(\frac{\beta_s + 2\alpha_s (2\nu_s + 4\tau_s^2)}{\sqrt{1 + 32\alpha_s^2 \tau_s^2}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Espérance.

Remarquons tout d'abord qu'en conjuguant (4.10) et (4.4), nous avons démontré que

$$\mathbb{E} [\ell_1 T_1 \mathbf{1}_M | \mathcal{F}_s] = T_s \ell_s \exp \left(-\nu_s - \frac{1}{2} \tau_s^2 \right) \Phi \left(\frac{\beta_s + \alpha_s (\nu_s + \tau_s^2)}{\sqrt{1 + 2\alpha_s^2 \tau_s^2}} \right). \quad (4.12)$$

Calculons l'espérance de L_1 :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [L_1] &= \mathbb{E} \left[C_0 e^i P_1 \left(1 + \beta \left(\frac{e^r T_1}{S_0} - \frac{P_1 e^i}{P_0} \right)_+ \right) \right] \\ &= C_0 e^i G(1) \mathbb{E} \left[\ell_1 \left(1 + \beta \left(\frac{e^r T_1}{S_0} - \ell_1 e^i \right)_+ \right) \right] \\ &= C_0 e^i G(1) \left(\mathbb{E} [\ell_1] + \frac{\beta e^r}{S_0} \mathbb{E} [\ell_1 T_1 \mathbf{1}_M] - \beta e^i \mathbb{E} [\ell_1^2 \mathbf{1}_M] \right). \end{aligned}$$

La première espérance est facile à calculer, c'est celle d'une v.a. log-normale. Les calculs de la deuxième et de la troisième se réduisent à prendre $s = 0$ dans (4.12) et (4.11) respectivement. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [L_1] &= C_0 e^i G(1) \left(\exp \left(\nu_0 + \frac{1}{2} \tau_0^2 \right) \right. \\ &\quad + \frac{\beta}{S_0} e^r S_0 \exp \left(-\nu_0 - \frac{1}{2} \tau_0^2 \right) \Phi \left(\frac{\beta_0 + \alpha_0 (\nu_0 + \tau_0^2)}{\sqrt{1 + 2\alpha_0^2 \tau_0^2}} \right) \\ &\quad \left. - \beta e^i \exp \left(-2\nu_0 - 2\tau_0^2 \right) \Phi \left(\frac{\beta_0 + 2\alpha_0 (2\nu_0 + 4\tau_0^2)}{\sqrt{1 + 32\alpha_0^2 \tau_0^2}} \right) \right). \end{aligned}$$

□

Le résultat précédent étant assez technique, il est nécessaire de bien souligner son intérêt pratique.

Corollaire 4.5. Soient $g = g(W^1, W^2)$ et $h = h(W^1, W^2)$ les deux intégrants du théorème précédent, c'est à dire que L_1 se décompose

$$L_1 = \mathbb{E}[L_1] + \int_0^1 g_s dW_s^1 + \int_0^1 h_s dW_s^2.$$

L'unique stratégie $\varphi^* = (\theta^*, \eta^*)$ admissible pour L_1 et minimale pour le risque est donnée par

$$\begin{aligned} \theta_t^* &= \frac{e^{2rt} g_t}{\sigma_S S_t}, \\ \eta_t^* &= e^{-rt} (V_t(\varphi^*) - \theta_t^* S_t), \\ V_t(\varphi^*) &= \mathbb{E}[L_1] + \int_0^t g_s dW_s^1 + \int_0^t h_s dW_s^2. \end{aligned}$$

De plus le risque résiduel lié à φ^* est

$$J = \mathbb{V} \left[\int_0^1 h_s dW_s^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^1 (h_s)^2 ds \right].$$

Démonstration. Le seul point qui ne soit pas une conséquence directe des théorèmes 3.31 et 4.4 est l'expression de θ^* . Rappelons que nous avons appliqué la décomposition à la version actualisée de l'actif, c'est à dire $T_t = e^{-rt} S_t$ (puisque'il nous fallait une martingale). On a dès lors, en utilisant la dynamique de T ,

$$\int_0^1 g_s dW_s^1 = \int_0^1 \frac{g_s}{T_s \sigma_S} dT_s.$$

La quantité d'unités de T à posséder au temps s est donc

$$\frac{g_s}{\sigma_S T_s} = \frac{e^{rs} g_s}{\sigma_S S_s}, \quad \text{c'est à dire} \quad \frac{e^{2rs} g_s}{\sigma_S S_s}$$

unités de S . □

Remarque 4.6. Puisque nous avons une expression exacte pour la composante non-convable du passif, il n'est pas difficile d'obtenir la risk-margin prévue par la directive Solvency II : on pourra calculer les quantiles de cette composante par simulation Monte-Carlo, déterminer le capital de solvabilité (le SCR) puis calculer le coût de ce capital.

4.4.2 Vérification numérique

Nous avons effectué une vérification numérique de la décomposition du théorème 4.4 à l'aide de l'outil statistique R. Les paramètres que nous avons choisis sont les suivants :


```

# Paramètres contrats
C0 = 100      beta = 0.75      i = 0.06      G1 = 1
# Paramètres actif
r = 0.05      sigmaS = 0.1      S0 = 1
# Paramètres mortalité
mu0 = 0.000797 theta = 0      a = -0.051085      sigmamu=0.001343

```

Les paramètres pour μ sont tirés de Russo *et al.* (2011), où les auteurs calibrent un modèle de type Vasicek pour la force de mortalité (table 2a, page 20) à l'aide de primes d'assurance vie d'assureurs italiens. Le pas des intégrales a été choisi à $1/100$.

Présentons d'abord le résultat de deux simulations (c'est à dire deux couples de trajectoires (W^1, W^2)), l'une où la participation est nulle, l'autre où elle est non-nulle. Nous avons calculé les deux côtés de l'égalité de la décomposition à la table 4.1.

Quantité calculée	Simulation 1	Simulation 2
Membre gauche (L_1 calculé directement)	106.0980414	107.3920
Membre droit (décomposition de L_1)	104.2494689	109.4549
ℓ_1	0.9991937	0.9985033
S_1	0.9465239	1.077441
$\int \dots dW^1$	-2.9243965	2.314875
$\int \dots dW^2$	-0.0862554	-0.1200882
$PB = (1 + \beta(\dots)_+)$	0.00000000	0.01289534

TABLE 4.1 – Résultats de deux simulations pour le premier modèle

Nous avons aussi calculé l'évolution de la stratégie optimale $\varphi^* = (\theta^*, \eta^*)$ dans le cas de la simulation 2. Les résultats sont donnés à la figure 4.1, avec la trajectoire de l'actif, de la mortalité et le processus valeur V_t .

Nous présentons ensuite les résultats de 100 simulations. L'ordinateur calcule une espérance de 107.2601 (c'est le terme intervenant dans le membre de droite, c'est à dire l'espérance "théorique"). Un recalcul de la moyenne empirique de L_1 à partir des valeurs données pour le membre de gauche donne 107.0981. Nous avons aussi vérifié que la moyenne empirique des deux intégrales d'Ito était bien nulle (en tout cas très petite). Remarquons qu'il y a une source d'approximation dans les deux membres de l'égalité. Il y a en effet des intégrales stochastiques – calculées numériquement – tant à droite qu'à gauche (dans l'expression de ℓ_1). Les résultats, simulation par simulation, sont donnés à la figure 4.2.

Remarquons que nous avons effectué ces simulations sans faire attention aux trajectoires telles que $\ell_1 \geq 1$. Nous aurions pu faire le choix de rejeter ces

trajectoires-là.

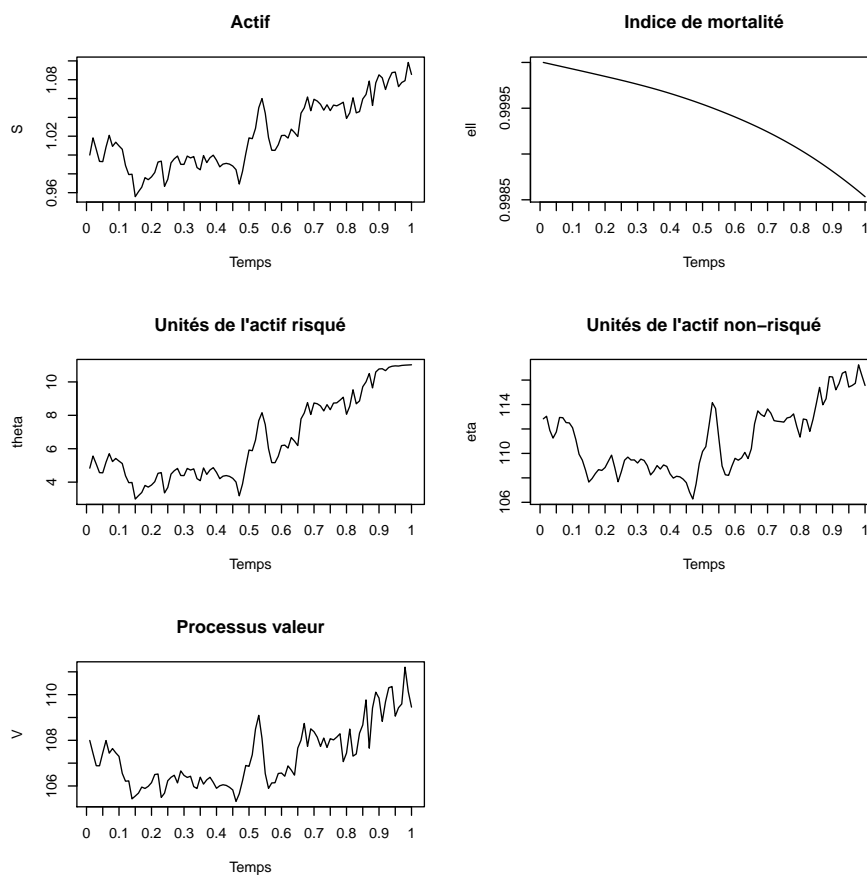


FIGURE 4.1 – Une simulation et la stratégie optimale correspondante pour le premier modèle

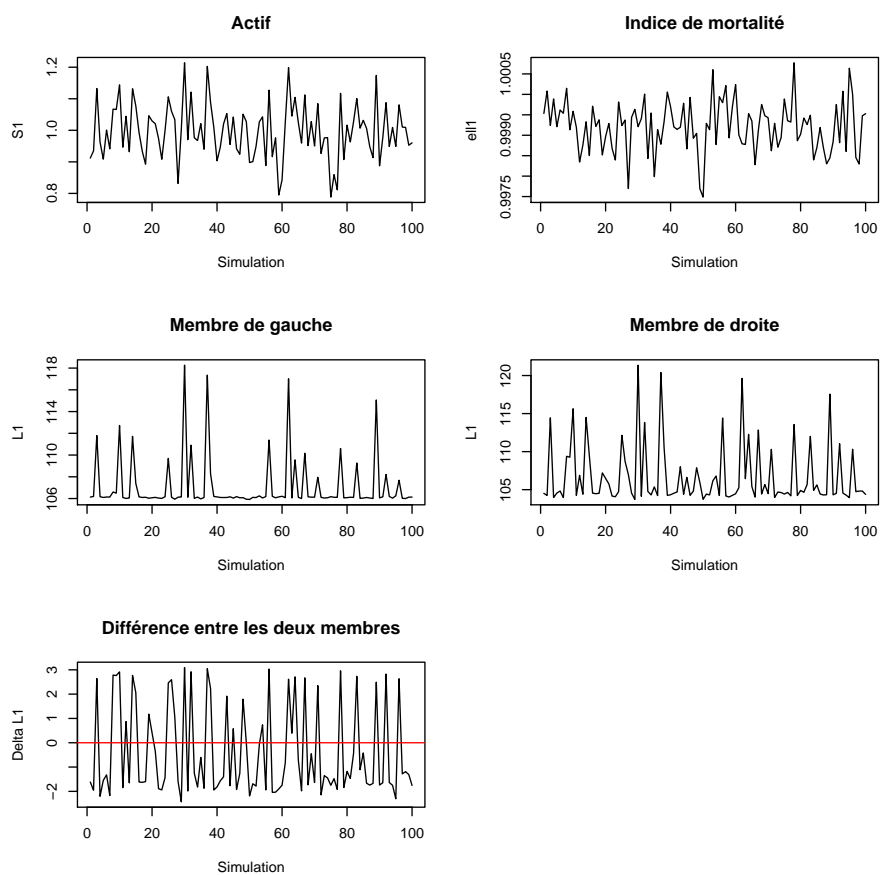


FIGURE 4.2 – Cent simulations des deux côtés de l'égalité de la décomposition dans le premier modèle

4.4.3 Calcul des grecques

Utilisons maintenant les résultats de la section 2.6 pour calculer la sensibilité de la valeur de L_1 en 0 par rapport à différents paramètres. Notons que, plutôt que de nous plier à la tradition en donnant une lettre grecque différente à chacune des sensibilités, nous avons préféré utiliser la notation suivante, plus claire : Δ_λ est la sensibilité d'ordre 1 de L_1 par rapport au paramètre λ et Δ_λ^2 en est la sensibilité d'ordre deux.

Le calcul des grecques liées à l'actif S existe dans la littérature. Dans tous nos calculs nous avons choisi $h \equiv 1$ (voir l'expression (2.8)).

Théorème 4.7. *Les grecques de L_1 sont données par*

$$\begin{aligned}\Delta_{S_0} &= 0, \\ \Delta_{\sigma_S} &= \mathbb{E} \left[L_1(S_1, \ell_1) \left(\frac{(W_1^1)^2}{\sigma_S} - W_1^1 - \frac{1}{\sigma_S} \right) \right], \\ \Delta_r &= \frac{1}{\sigma_S} \mathbb{E} [L_1(S_1, \ell_1) W_1^1], \\ \Delta_{\mu_0} &= \frac{a(e^{-a} - 1)}{\sigma_\mu(-e^{-a} - a + 1)} \mathbb{E} [L_1(S_1, \ell_1) W_1^2], \\ \Delta_{\sigma_\mu} &= \frac{a}{\sigma_\mu(-e^{-a} - a + 1)}, \\ &\quad \cdot \mathbb{E} \left[L_1(S_1, \ell_1) \left(W_1^2 \int_0^1 e^{-a(1-u)} dW_u^2 - (W_1^2)^2 \frac{e^{-a} + a - 1}{a} \right) \right].\end{aligned}$$

Démonstration. Calculons les sensibilités l'une après l'autre :

- Sensibilité par rapport à S_0 . La quantité qui intervient dans L_1 est S_1/S_0 , dans lequel S_0 n'apparaît pas : c'est le rendement des actifs qui nous intéresse, donc la valeur initiale n'intervient pas. La sensibilité correspondante est donc nulle.
- Sensibilité par rapport à σ_S . Le *vega* est donné par

$$\begin{aligned}\Delta_{\sigma_S} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_S} \mathbb{E} [L_1(S_1, \ell_1)] \\ &= \mathbb{E} [\partial_1 L_1(S_1, \ell_1) \partial_{\sigma_S} S_1] \\ &= \mathbb{E} [\partial_1 L_1(S_1, \ell_1) (W_1^1 - \sigma_S) S_1].\end{aligned}$$

(2.8) devient :

$$\begin{aligned}\pi &= \delta \left(\frac{(W_1^1 - \sigma_S) S_1}{\int_0^1 D_s S_1 ds} \right) \\ &= \delta \left(\frac{(W_1^1 - \sigma_S) S_1}{\sigma_S S_1} \right) \\ &= \delta \left(\frac{W_1^1}{\sigma_S} - 1 \right)\end{aligned}$$

$$= \frac{\delta(W_1^1)}{\sigma_S} - \delta(1).$$

Or on a par la proposition 2.32 (voir exemple 2.33)

$$\delta(W_1^1) = W_1^1 \delta(1) - \int_0^1 D_t W_1^1 dt = (W_1^1)^2 - \int_0^1 \mathbf{1}_{t \leq 1} dt = (W_1^1)^2 - 1.$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{(W_1^1)^2 - 1}{\sigma_S} - W_1^1 \\ &= \frac{(W_1^1)^2}{\sigma_S} - W_1^1 - \frac{1}{\sigma_S}. \end{aligned}$$

– Sensibilité par rapport à r . Le ρ est donné par

$$\begin{aligned} \Delta_r &= \frac{\partial}{\partial r} \mathbb{E}[L_1(S_1, \ell_1)] \\ &= \mathbb{E}[\partial_1 L_1(S_1, \ell_1) \partial_r S_1] \\ &= \mathbb{E}[\partial_1 L_1(S_1, \ell_1) S_1]. \end{aligned}$$

On conclut par un calcul similaire à celui du Δ_{S_0} .

– Sensibilité par rapport à μ_0 . On calcule facilement que

$$\frac{\partial \ell_1}{\partial \mu_0} = \ell_1 \frac{e^{-a} - 1}{a},$$

d'où

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu_0} &= \frac{\partial}{\partial \mu_0} \mathbb{E}[L_1(S_1, \ell_1)] \\ &= \mathbb{E}[\partial_2 L_1(S_1, \ell_1) \partial_{\mu_0} \ell_1] \\ &= \frac{e^{-a} - 1}{a} \mathbb{E}[\partial_2 L_1(S_1, \ell_1) \ell_1]. \end{aligned}$$

Le poids est alors

$$\begin{aligned} \pi &= \delta \left(\frac{\ell_1}{\int_0^1 D_s \ell_1 ds} \right) \\ &= \delta \left(\frac{\ell_1}{\int_0^1 \ell_1 \frac{\sigma_\mu}{a} (e^{-a(1-s)} - 1) \mathbf{1}_{s \leq 1} ds} \right) \\ &= \delta \left(\frac{a^2}{\sigma_\mu (-e^{-a} - a + 1)} \right) \\ &= \frac{a^2}{\sigma_\mu (-e^{-a} - a + 1)} W_1^2. \end{aligned}$$

– Sensibilité par rapport à σ_μ . On calcule facilement que

$$\frac{\partial \ell_1}{\partial \sigma_\mu} = \ell_1 \int_0^1 \frac{e^{-a(1-u)} - 1}{a} dW_u^2,$$

d'où

$$\begin{aligned} \Delta_{\sigma_\mu} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_\mu} \mathbb{E}[L_1(S_1, \ell_1)] \\ &= \mathbb{E}[\partial_2 L_1(S_1, \ell_1) \partial_{\sigma_\mu} \ell_1] \\ &= \mathbb{E}\left[\partial_2 L_1(S_1, \ell_1) \ell_1 \int_0^1 \frac{e^{-a(1-u)} - 1}{a} dW_u^2\right]. \end{aligned}$$

Considérons d'abord l'intégrale de Skorohod

$$\begin{aligned} \delta \left(\int_0^1 e^{au} dW_u^2 \right) &= \int_0^1 e^{au} dW_u^2 \delta(1) - \int_0^1 e^{as} ds \\ &= W_1^2 \int_0^1 e^{au} dW_u^2 - \frac{e^a - 1}{a} \end{aligned}$$

par la proposition 2.32.

Le poids est alors

$$\begin{aligned} \pi &= \delta \left(\frac{\ell_1 \int_0^1 \frac{e^{-a(1-u)} - 1}{a} dW_u^2}{\int_0^1 D_s \ell_1 ds} \right) \\ &= \delta \left(\frac{\int_0^1 \frac{e^{-a(1-u)} - 1}{a} dW_u^2}{\sigma_\mu \frac{-e^{-a} - a + 1}{a^2}} \right) \\ &= \frac{a}{\sigma_\mu (-e^{-a} - a + 1)} \left(\delta \left(e^{-a} \int_0^1 e^{au} dW_u^2 \right) - \delta(W_1^2) \right) \\ &= \frac{a}{\sigma_\mu (-e^{-a} - a + 1)} \left(e^{-a} \left(W_1^2 \int_0^1 e^{au} dW_u^2 - \frac{e^a - 1}{a} \right) - (W_1^2)^2 + 1 \right). \end{aligned}$$

□

4.5 Actif de type obligation

Nous supposons maintenant que l'actif risqué disponible pour investissement est une obligation zéro-coupon, et que le taux d'intérêt suit une dynamique Hull-White à un facteur. La dynamique donnée ci-après vaut pour le monde risque neutre, même si nous allons effectuer un changement de mesure ensuite.

— Hull-White à un facteur —

$$\begin{aligned} dr_t &= b(\xi(t) - r_t) dt + \sigma_r dW_t^1, \\ r_t &= r_s e^{-b(t-s)} + b \int_0^t \xi_u e^{-b(t-u)} du + \sigma_r \int_0^t e^{-b(t-u)} dW_u^1, \\ r_t | r_s &\sim \mathcal{N} \left(r_s e^{-b(t-s)} + b \int_0^t \xi_u e^{-b(t-u)} du, \sigma_r^2 \int_0^t e^{-2b(t-u)} du \right), \end{aligned}$$

Paramètres : $r_0, b, \sigma_r > 0$ et ξ , une fonction qui permet une calibration parfaitement fidèle à la courbe initiale des taux. Brigo & Mercurio (2001) montrent que pour ce faire, il suffit de prendre

$$\xi(t) = -\frac{\partial^2 \ln P^m(0, t)}{\partial t^2} - b \frac{\partial \ln P^m(0, t)}{\partial t} + \frac{\sigma_r^2}{2b} (1 - e^{-2bt}),$$

où $P^m(0, t)$ est le prix marché initial du zéro-coupon de maturité t .

C'est le prix de l'obligation zéro-coupon qui nous intéresse. Le résultat suivant peut être trouvé dans Brigo & Mercurio (2001) à la section 3.3.2.

Lemme 4.8. *Sous le modèle Hull-White, le prix en t du zéro-coupon de maturité M est égal à*

$$S_t(M) = \exp(A(t, M) - C(t, M)r_t),$$

où

$$\begin{aligned} C(t, M) &= \frac{1}{b} \left(1 - e^{-b(M-t)} \right), \\ A(t, M) &= \ln \frac{P^m(0, M)}{P^m(0, t)} - C(t, M) \frac{\partial \ln P^m(0, t)}{\partial t} - \frac{\sigma_r^2}{4b} C^2(t, M) (1 - e^{-2bt}). \end{aligned}$$

Notons que l'obligation que nous considérons comme une opportunité d'investissement pour l'assureur vient à maturité après la fin du contrat d'assurance, c'est à dire que $1 < M$.

Il faut, pour appliquer la décomposition de Kunita-Watanabe, que l'actif risqué sous-jacent soit une martingale. Ce n'est pas le cas de S sous la mesure risque neutre. Ce sera par contre le cas du *prix forward* de S à la date 1

$$F_t(M, 1) = \frac{S_t(M)}{S_t(1)}$$

sous la *mesure forward neutre* $\bar{\mathbb{P}}$ définie par la densité de Radon-Nikodym

$$\frac{d\bar{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}^*} = \exp \left(-\sigma_r \int_0^1 C(u, 1) dW_u^1 - \frac{1}{2} \sigma_r^2 \int_0^1 C(u, 1)^2 du \right)$$

comme le montre le résultat suivant, le lemme 11.3.1 dans Musiela & Rutkowski (2005).

Lemme 4.9. *Le processus*

$$\bar{W}_t^1 = W_t^1 + \sigma_r \int_0^t C(u, 1) du$$

est un brownien standard sous la mesure forward neutre. De plus, le prix forward suit sous cette mesure la dynamique

$$dF_t(M, 1) = F_t(M, 1)\gamma(t, M, 1) d\bar{W}_t^1,$$

où

$$\gamma(t, M, 1) = \sigma_r (C(t, 1) - C(t, M)),$$

et donc

$$F_1(M, 1) = F_s(M, 1) \exp \left(- \int_s^1 \gamma(u, M, 1) d\bar{W}_u^1 - \frac{1}{2} \int_s^1 \gamma(u, M, 1)^2 du \right).$$

Puisque M est fixé une fois pour toute, nous noterons $F_t = F_t(M, 1)$ et $\gamma(t) = \gamma(t, M, 1)$ lorsque le contexte est clair.

4.5.1 Décomposition explicite

Dans ce qui suit, la dérivée de Malliavin D^1 doit être comprise comme une dérivée selon \bar{W}^1 , c'est à dire que nous quittons tout à fait le monde risque neutre pour le monde forward neutre. On note aussi \mathbb{E} pour l'espérance sous la mesure forward neutre \mathbb{P} .

Théorème 4.10. *La décomposition de Föllmer-Schweizer de L_1 est*

$$\begin{aligned} L_1 &= \mathbb{E}[L_1] + \int_0^1 \mathbb{E}[D_s^1 L_1 | \mathcal{F}_s] d\bar{W}_s^1 + \int_0^1 \mathbb{E}[D_s^2 L_1 | \mathcal{F}_s] dW_s^2 \\ &= C_0 e^i G(1) \left(\exp \left(\nu_0 + \frac{1}{2} \tau_0^2 \right) \right. \\ &\quad + \frac{\beta}{S_0(1)} \exp \left(-\nu_0 - \frac{1}{2} \tau_0^2 \right) \Phi \left(\frac{\beta_0 + \alpha_0(\nu_0 + \tau_0^2)}{\sqrt{1 + 2\alpha_0^2 \tau_0^2}} \right) \\ &\quad \left. - \beta e^i \exp(-2\nu_0 - 2\tau_0^2) \Phi \left(\frac{\beta_0 + 2\alpha_0(2\nu_0 + 4\tau_0^2)}{\sqrt{1 + 32\alpha_0^2 \tau_0^2}} \right) \right) \\ &\quad - \int_0^1 \left[\frac{C_0 e^i G(1) \gamma(s) S_s(M) \ell_s \beta}{S_0(M) S_s(1)} \right. \\ &\quad \left. \cdot \exp \left(-\nu_s - \frac{1}{2} \tau_s^2 \right) \Phi \left(\frac{\beta_s + \alpha_s(\nu_s + \tau_s^2)}{\sqrt{1 + 2\alpha_s^2 \tau_s^2}} \right) \right] d\bar{W}_s^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 \left[\frac{C_0 e^i G(1) \sigma_\mu (e^{-a(1-s)} - 1)}{a} \left(\ell_s \exp \left(\nu_s + \frac{1}{2} \tau_s^2 \right) \right. \right. \\
& \quad + \frac{\beta S_s(M) \ell_s}{S_0(M) S_s(1)} \exp \left(-\nu_s - \frac{1}{2} \tau_s^2 \right) \Phi \left(\frac{\beta_s + \alpha_s (\nu_s + \tau_s^2)}{\sqrt{1 + 2\alpha_s^2 \tau_s^2}} \right) \\
& \quad - 2\beta e^i \ell_s^2 \exp(-2\nu_s - 2\tau_s^2) \\
& \quad \left. \left. \cdot \Phi \left(\frac{\beta_s + 2\alpha_s(2\nu_s + 4\tau_s^2)}{\sqrt{1 + 32\alpha_s^2 \tau_s^2}} \right) \right) \right] dW_s^2,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\alpha_s &= \frac{-1}{\sqrt{\int_s^1 (\gamma(u))^2 du}}, \\
\beta_s &= \frac{\ln \frac{S_s(M)}{S_0(M) e^i G(1) \ell_s S_s(1)} + \frac{1}{2} \int_s^1 (\gamma(u))^2 du}{\sqrt{\int_s^1 (\gamma(u))^2 du}}, \\
\gamma_s &= \sigma_r (C(s, 1) - C(s, M)), \\
\nu_s &= \frac{\mu_0 - \theta}{a} (e^{-a} - e^{-as}) - \theta(1 - s), \\
\tau_s^2 &= \int_s^1 \frac{\sigma_\mu^2}{a^2} (1 - e^{-a(1-u)})^2 du.
\end{aligned}$$

Démonstration. À nouveau, on calcule les termes correspondant à chacune des dérivées. La preuve de ce théorème ressemblant fort à celle du théorème 4.4, nous omettrons parfois certains détails. C'est la dynamique du prix forward dont nous disposons sous la mesure forward neutre. Puisque S et F correspondent en 1, nous allons remplacer F_1 par S_1 dans l'expression du passif.

Dérivée selon \bar{W}^1 . Calculons d'abord la dérivée de Malliavin de F :

$$D_s^1 F_1 = F_1 D_s^1 \left(- \int_0^1 \gamma(u) d\bar{W}_u^1 \right) = -F_1 \gamma(s) \mathbf{1}_{s \leq 1}.$$

Dès lors

$$\begin{aligned}
D_s^1 L_1 &= D_s^1 \left(C_0 e^i P_1 \left(1 + \beta \left(\frac{F_1}{S_0(M)} - \frac{P_1 e^i}{P_0} \right)_+ \right) \right) \\
&= C_0 e^i P_1 \beta D_s^1 \left(\frac{F_1}{S_0(M)} - \frac{P_1 e^i}{P_0} \right)_+ \\
&= \frac{C_0 e^i P_1 \beta}{S_0(M)} \mathbf{1}_M D_s^1 F_1
\end{aligned}$$

$$= -\frac{C_0 e^i P_1 \beta}{S_0(M)} \mathbf{1}_M F_1 \gamma(s) \mathbf{1}_{s \leq 1}$$

en notant $M = \{F_1 \geq S_0(M) P_1 e^i\}$.

On introduit la nouvelle σ -algèbre

$$\bar{\mathcal{F}}_{(s,1)} = \sigma(\{\bar{W}_t^1 : t \in [0, s]\} \cup \{W_t^2 : t \in [0, 1]\})$$

et on calcule

$$\mathbb{E}[D_s^1 L_1 | \bar{\mathcal{F}}_{(s,1)}] = -\frac{C_0 e^i G(1) \gamma(s) \beta}{S_0(M)} \ell_1 \mathbb{E}[\mathbf{1}_M F_1 | \bar{\mathcal{F}}_{(s,1)}].$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{1}_M F_1 | \bar{\mathcal{F}}_{(s,1)}] &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_M F_s \exp\left(-\int_s^1 \gamma(u) d\bar{W}_u^1 - \frac{1}{2} \int_s^1 \gamma(u)^2 du\right) | \bar{\mathcal{F}}_{(s,1)}\right] \\ &= F_s \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}}\left[\mathbf{1}_M | \bar{\mathcal{F}}_{(s,1)}\right] \\ &= F_s \hat{\mathbb{P}}[M | \bar{\mathcal{F}}_{(s,1)}] \end{aligned}$$

en introduisant une nouvelle mesure de probabilité à l'aide de sa densité

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^1 \gamma(u) d\bar{W}_u^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \gamma(u)^2 du\right),$$

sous laquelle le processus

$$\hat{W}_t^1 = \bar{W}_t^1 + \int_0^t \gamma(u) du$$

est un brownien standard. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}[M | \bar{\mathcal{F}}_{(s,1)}] &= \hat{\mathbb{P}}[F_1 \geq S_0(M) e^i P_1 | F_s, P_1] \\ &= \hat{\mathbb{P}}\left[\frac{-\int_s^1 \gamma(u) d\hat{W}_u^1}{\sqrt{\int_s^1 \gamma(u)^2 du}} \geq \frac{\ln \frac{S_0(M) e^i P_1}{F_s} - \frac{1}{2} \int_s^1 \gamma(u)^2 du}{\sqrt{\int_s^1 \gamma(u)^2 du}} \middle| F_s, P_1\right] \\ &= \Phi\left(\frac{\ln \frac{F_s}{S_0(M) e^i P_1} + \frac{1}{2} \int_s^1 \gamma(u)^2 du}{\sqrt{\int_s^1 \gamma(u)^2 du}}\right) \end{aligned}$$

puisque, sous la mesure $\hat{\mathbb{P}}$, F_1 devient

$$F_1 = F_s \exp\left(-\int_s^1 \gamma(u, M, 1) d\hat{W}_u^1 + \frac{1}{2} \int_s^1 \gamma(u, M, 1)^2 du\right).$$

Revenons à l'espérance conditionnelle par rapport à \mathcal{F}_s :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} [D_s^1 L_1 | \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E} \left[-\frac{C_0 e^i G(1) \gamma(s) F_s \beta}{S_0(M)} \ell_1 \Phi \left(\frac{\ln \frac{F_s}{S_0(M) e^i P_1} + \frac{1}{2} \int_s^1 \gamma(u)^2 du}{\sqrt{\int_s^1 \gamma(u)^2 du}} \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= -\frac{C_0 e^i G(1) \gamma(s) F_s \beta}{S_0(M)} \mathbb{E} \left[\ell_1 \Phi \left(\frac{\ln \frac{F_s}{S_0(M) e^i P_1} + \frac{1}{2} \int_s^1 \gamma(u)^2 du}{\sqrt{\int_s^1 \gamma(u)^2 du}} \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= -\frac{C_0 e^i G(1) \gamma(s) F_s \ell_s \beta}{S_0(M)} \mathbb{E} \left[\frac{\ell_1}{\ell_s} \Phi \left(\frac{-1}{\sqrt{\int_s^1 \gamma(u)^2 du}} \ln \left(\frac{\ell_1}{\ell_s} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\ln \frac{F_s}{S_0(M) e^i G(1) \ell_s} + \frac{1}{2} \int_s^1 \gamma(u)^2 du}{\sqrt{\int_s^1 \gamma(u)^2 du}} \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= -\frac{C_0 e^i G(1) \gamma(s) F_s \ell_s \beta}{S_0(M)} \exp \left(-\nu_s - \frac{1}{2} \tau_s^2 \right) \Phi \left(\frac{\beta_s + \alpha_s (\nu_s + \tau_s^2)}{\sqrt{1 + 2\alpha_s^2 \tau_s^2}} \right)
\end{aligned}$$

grâce au lemme A.1.

Dérivée selon W^2 . De la même façon qu'à la section précédente on a

$$\begin{aligned}
D_s^2 L_1 &= C_0 e^i D_s^2 \left(P_1 \left(1 + \beta \left(\frac{F_1}{S_0(M)} - \frac{P_1 e^i}{P_0} \right)_+ \right) \right) \\
&= \frac{C_0 e^i G(1) \sigma_\mu (e^{-a(t-s)} - 1)}{a} \left(\ell_1 + \ell_1 F_1 \frac{\beta}{S_0(M)} \mathbf{1}_M - 2e^i \ell_1^2 \mathbf{1}_M \right) \\
&= \frac{C_0 e^i G(1) \sigma_\mu (e^{-a(t-s)} - 1)}{a} (A + B - C).
\end{aligned}$$

Le premier terme $\mathbb{E} [A | \mathcal{F}_s]$ est exactement le même que plus haut.

Le deuxième se ramène au calcul déjà effectué pour la dérivée selon \bar{W}^1 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [B | \mathcal{F}_s] &= \frac{\beta}{S_0(M)} \mathbb{E} [\ell_1 F_1 \mathbf{1}_M | \mathcal{F}_s] \\
&= \frac{\beta F_s \ell_s}{S_0(M)} \exp \left(-\nu_s - \frac{1}{2} \tau_s^2 \right) \Phi \left(\frac{\beta_s + \alpha_s (\nu_s + \tau_s^2)}{\sqrt{1 + 2\alpha_s^2 \tau_s^2}} \right).
\end{aligned}$$

Pour le troisième terme, on commence par calculer

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{\ell_1}{\ell_s} \right)^2 \mathbf{1}_M \middle| \bar{\mathcal{F}}_{(s,1)} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\ell_1}{\ell_s}\right)^2 \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_M \middle| \bar{\mathcal{F}}_{(s,1)} \right] \\
&= \left(\frac{\ell_1}{\ell_s}\right)^2 \mathbb{P} [F_1 \geq S_0(M)e^i P_1 | \mathcal{F}_s, P_1] \\
&= \left(\frac{\ell_1}{\ell_s}\right)^2 \mathbb{P} \left[\frac{-\int_s^1 \gamma(u) d\hat{W}_u^1}{\sqrt{\int_s^1 \gamma(u)^2 du}} \geq \frac{\ln \frac{S_0(M)e^i P_1}{F_s} + \frac{1}{2} \int_s^1 \gamma(u)^2 du}{\sqrt{\int_s^1 \gamma(u)^2 du}} \middle| \mathcal{F}_s, P_1 \right] \\
&= \left(\frac{\ell_1}{\ell_s}\right)^2 \Phi \left(\frac{\ln \frac{F_s}{S_0(M)e^i P_1} - \frac{1}{2} \int_s^1 \gamma(u)^2 du}{\sqrt{\int_s^1 \gamma(u)^2 du}} \right).
\end{aligned}$$

Puis on fait à nouveau appel au lemme A.1 :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\left(\frac{\ell_1}{\ell_s}\right)^2 \mathbf{1}_M \middle| \bar{\mathcal{F}}_{(s,1)} \right] \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\frac{\ell_1}{\ell_s}\right)^2 \Phi \left(\frac{\ln \frac{F_s}{S_0(M)e^i P_1} - \frac{1}{2} \int_s^1 \gamma(u)^2 du}{\sqrt{\int_s^1 \gamma(u)^2 du}} \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\frac{\ell_1}{\ell_s}\right)^2 \Phi \left(\frac{-1}{2\sqrt{\int_s^1 \gamma(u)^2 du}} \ln \left(\frac{\ell_1}{\ell_s}\right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\ln \frac{F_s}{S_0(M)e^i G(1)\ell_s} - \frac{1}{2} \int_s^1 \gamma(u)^2 du}{\sqrt{\int_s^1 \gamma(u)^2 du}} \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= \exp(-2\nu_s - 2\tau_s^2) \Phi \left(\frac{\beta_s + 2\alpha_s(2\nu_s + 4\tau_s^2)}{\sqrt{1 + 32\alpha_s^2\tau_s^2}} \right).
\end{aligned}$$

Espérance. Nous avons démontré plus haut que

$$\mathbb{E} [\ell_1 F_1 \mathbf{1}_M | \mathcal{F}_s] = F_s \ell_s \exp \left(-\nu_s - \frac{1}{2} \tau_s^2 \right) \Phi \left(\frac{\beta_s + \alpha_s(\nu_s + \tau_s^2)}{\sqrt{1 + 2\alpha_s^2\tau_s^2}} \right). \quad (4.13)$$

L'espérance de L_1 vaut :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [L_1] &= \mathbb{E} \left[C_0 e^i P_1 \left(1 + \beta \left(\frac{F_1}{S_0(M)} - \frac{P_1 e^i}{P_0} \right)_+ \right) \right] \\
&= C_0 e^i G(1) \mathbb{E} \left[\ell_1 \left(1 + \beta \left(\frac{F_1}{S_0(M)} - \ell_1 e^i \right)_+ \right) \right] \\
&= C_0 e^i G(1) \left(\mathbb{E} [\ell_1] + \frac{\beta}{S_0(M)} \mathbb{E} [\ell_1 F_1 \mathbf{1}_M] - \beta e^i \mathbb{E} [\ell_1^2 \mathbf{1}_M] \right).
\end{aligned}$$

La première espérance est la même que dans les calculs pour un actif de type action. Les calculs de la deuxième et de la troisième se réduisent à prendre $s = 0$ dans ce que nous venons de prouver dans cette section. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_1] &= C_0 e^i G(1) \left(\exp\left(\nu_0 + \frac{1}{2}\tau_0^2\right) \right. \\ &\quad + \frac{\beta}{S_0(M)} F_0 \exp\left(-\nu_0 - \frac{1}{2}\tau_0^2\right) \Phi\left(\frac{\beta_0 + \alpha_0(\nu_0 + \tau_0^2)}{\sqrt{1 + 2\alpha_0^2\tau_0^2}}\right) \\ &\quad \left. - \beta e^i \exp(-2\nu_0 - 2\tau_0^2) \Phi\left(\frac{\beta_0 + 2\alpha_0(2\nu_0 + 4\tau_0^2)}{\sqrt{1 + 32\alpha_0^2\tau_0^2}}\right) \right). \end{aligned}$$

□

Résumons l'intérêt pratique de la décomposition dans le second modèle

Corollaire 4.11. *Soient g et h les deux intégrants du théorème précédent, c'est à dire que L_1 se décompose*

$$L_1 = \mathbb{E}[L_1] + \int_0^1 g_s dW_s^1 + \int_0^1 h_s dW_s^2.$$

L'unique stratégie $\varphi^* = (\theta^*, \eta^*)$ admissible pour L_1 et minimale pour le risque est donnée par

$$\begin{aligned} \theta_t^* &= \frac{S_t^2(1)g_t}{\sigma_r S_t(M)(C(t,1) - C(t,M))}, \\ \eta_t^* &= e^{-rt} \left(V_t(\varphi^*) - \theta_t^* \frac{S_t(M)}{S_t(1)} \right), \\ V_t(\varphi^*) &= \mathbb{E}[L_1] + \int_0^t g_s dW_s^1 + \int_0^t h_s dW_s^2. \end{aligned}$$

De plus le risque résiduel lié à φ^* est

$$J = \mathbb{V} \left[\int_0^1 h_s dW_s^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^1 (h_s)^2 ds \right].$$

Démonstration. Comme pour le corollaire dans le premier modèle, il nous suffit de calculer le θ^* . Par la dynamique de F_t ,

$$d\bar{W}_s^1 = \frac{1}{F_t \gamma(t)} dF_t,$$

donc il faut détenir $g_t/F_t \gamma(t)$ unités de l'actif $F = S(M)/S(1)$ au temps t . Il faut donc détenir

$$\frac{S_t(1)g_t}{F_t \gamma(t)} = \frac{S_t^2(1)g_t}{S_t(M)\gamma(t)}$$

unités de l'actif $S(M)$.

□

4.5.2 Vérification numérique

Nous avons aussi effectué une vérification numérique de la décomposition du théorème 4.10. Les résultats sont moins bons que pour le premier modèle. Nous pensons que c'est principalement dû à des difficultés numériques : les calculs se sont avérés bien plus longs, faisant appel à plus de fonctions complexes et à plus d'intégrales à calculer numériquement.

Les paramètres que nous avons choisis sont les suivants :

```
# Paramètres contrats
C0 = 100      beta = 0.75    i = 0.03      G1 = 1
# Paramètres mortalité
mu0 = 0.000797 theta = 0    a = -0.051085  sigmamu=0.001343
```

L'actif de type bon est un peu plus compliqué à calibrer. Il faut en effet déterminer les fonction A et C qui permettent d'exprimer le prix du zéro-coupon tout en reproduisant la courbe des taux initiale. Les détails de notre calibration sont données dans l'annexe B.

Les paramètres non liés à la courbe des taux initiale proviennent de Gurrieri *et al.* (2009) :

```
# Paramètres taux
b = 0.271     sigmar = 0.09952
```

Le pas des intégrales a été choisi à 1/100. Les résultats des deux premières simulations sont donnés par la table 4.2.

Quantité calculée	Simulation 1	Simulation 2
Membre gauche (L_1 directement calculé)	102.9678	102.108356897
Membre droit (décomposition de L_1)	102.1428957	101.294012366
ℓ_1	0.9992463	0.997965894
F_1	0.733284	0.676441963
$\int \dots dW^1$	-0.6035543	-0.396204350
$\int \dots dW^2$	0.003431579	-0.027138405
$PB = (1 + \beta(\dots)_+)$	0.000000	0.002904775

TABLE 4.2 – Résultats de deux simulations pour le second modèle

La stratégie optimale $\varphi^* = (\theta^*, \eta^*)$ dans le cas de la simulation 2 est donnée à la figure 4.3.

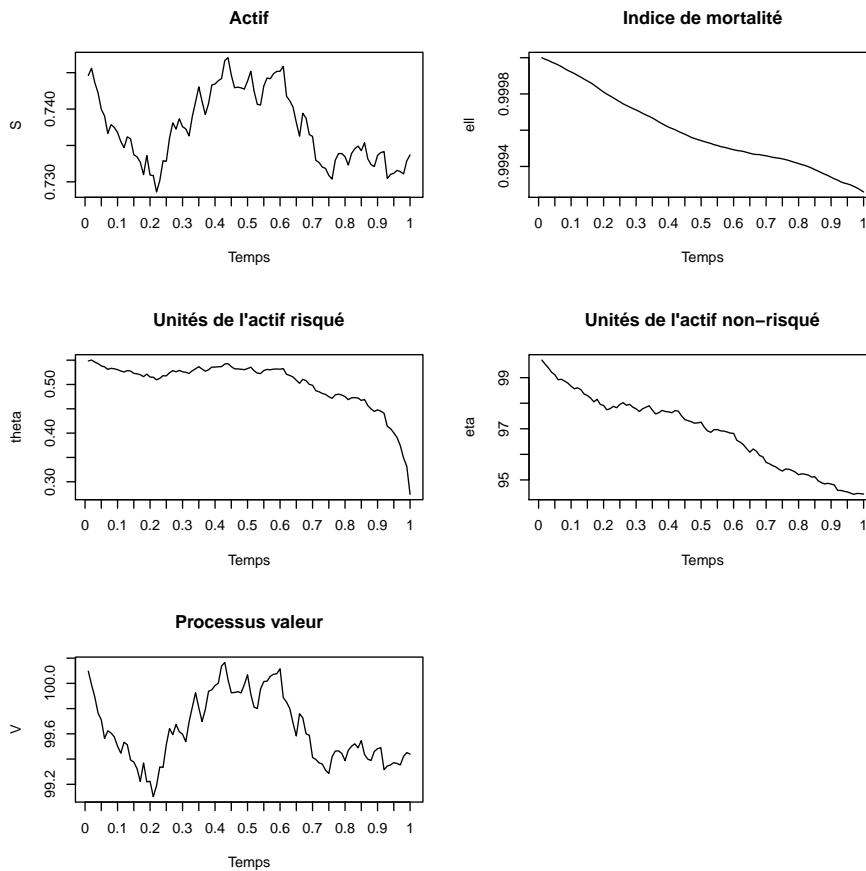


FIGURE 4.3 – Une simulation et la stratégie optimale correspondante pour le deuxième modèle

Nous présentons ensuite les résultats de 100 simulations. L'ordinateur calcule une espérance de 101.9400. Un recalcul de la moyenne empirique de L_1 à partir des valeurs données pour le membre de gauche donne 102.925414. Nous avons aussi vérifié que la moyenne empirique des deux intégrales d'Ito était bien nulle (en tout cas très petite). Les résultats, simulation par simulation, sont donnés à la figure 4.4. Au regard de celle-ci, il semble clair que le pas de l'intégrale a été choisi trop petit. L'ordinateur ayant déjà calculé pendant 4 heures pour obtenir les calculs que nous présentons, il nous a été impossible d'augmenter significativement le pas.

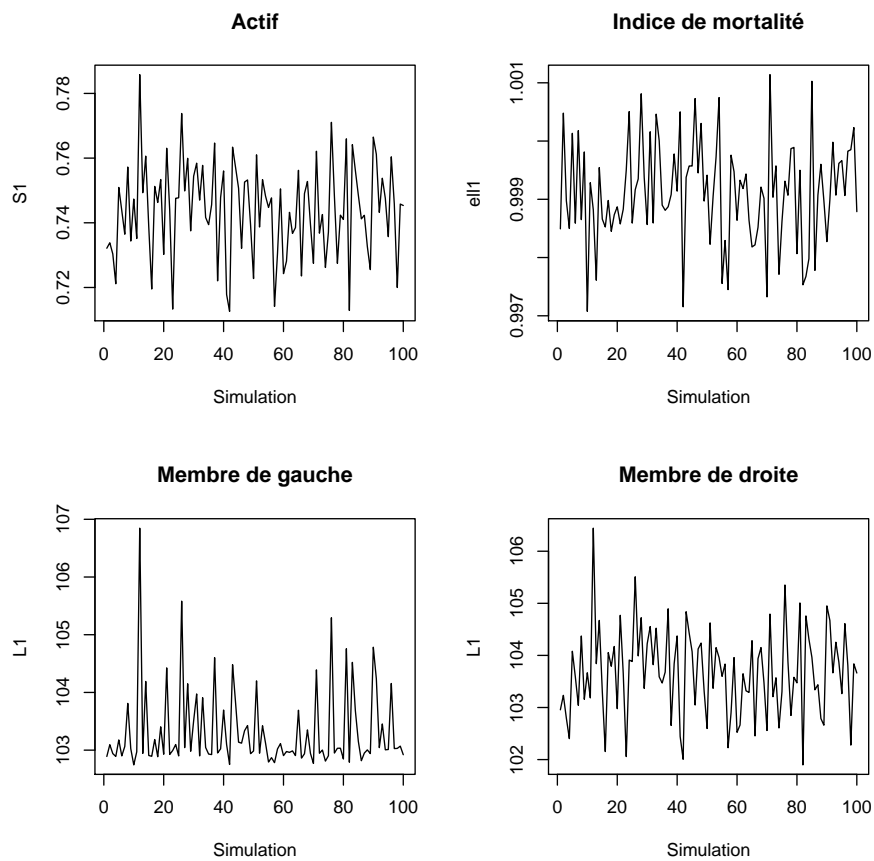


FIGURE 4.4 – Cent simulations des deux côtés de l'égalité de la décomposition dans le second modèle

4.5.3 Calcul des grecques

Les grecques par rapport aux paramètres liés à l'indice de mortalité ℓ_1 sont bien sûr les mêmes que dans la section précédente. Pour ce qui est des grecques par rapport aux paramètres du taux, ils ont une forme très compliquée et nous ne donnerons pas ici leur expression.

En effet, la quantité intervenant dans L_1 est

$$\frac{F_1}{S_0(M)} = \frac{1}{S_0(1)} \exp \left(- \int_0^1 \gamma(u, M, 1) d\bar{W}_u^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \gamma(u, M, 1)^2 du \right).$$

Les paramètres du modèle Hull-White sont r_0 , b et σ_r . Le premier n'apparaît que deux fois dans l'expression de $S_0(1)$ (dans la fonction A et dans le facteur de la fonction C), tandis que les deux autres interviennent à beaucoup d'endroits dans l'expression de $F_1/S_0(M)$.

4.6 Bilan des hypothèses

Dans l'espoir de clarifier le travail effectué dans ce chapitre, récapitulons ici les hypothèses avec lesquelles nous avons travaillé :

- (H_1) le contrat d'assurance considéré est un capital différé à un an avec participation bénéficiaire de type financier uniquement ;
- (H_2) l'indice de mortalité du portefeuille est représentable par un indice de mortalité "âge moyen" ;
- (H_3) la partie du passif impossible à couvrir sur le marché financier est gaussienne ;
- (H_4) la force de mortalité suit le même modèle Vasicek dans le monde réel, le monde risque neutre et le monde forward neutre (sa dynamique ne change pas) ;
- (H_{5a}) l'actif risqué est de type action et suit un brownien géométrique dans le monde risque neutre ;
- (H_{5b}) l'actif risqué est de type obligation zéro-coupon avec un taux d'intérêt suivant un modèle Hull-White à un facteur.

4.7 Analyse succincte du risque de modèle

Nous présentons dans cette section un début d'analyse de l'erreur commise avec l'hypothèse (H_2) ci-dessus.

4.7.1 Calcul numérique de l'erreur commise

Considérons un portefeuille constitué de trois assurés, âgés respectivement de 20, 40 et 60 ans. Russo *et al.* (2011) donnent, pour les 3 forces de mortalité, les paramètres repris dans la table 4.3.

Âge	μ_0	θ	a	σ_μ
20	0.000797	0	-0.051085	0.001343
40	0.001217	0	-0.106695	0.000199
60	0.010054	0	-0.095001	0.001071

TABLE 4.3 – Paramètres pour la force de mortalité

Nous avons, avec ces paramètres, comparé les deux variables suivantes : le nombre réel de survivants après un an (sans l'approximation (H_2))

$$\tilde{P}_1 = \sum_{x=20,40,60} \exp\left(-\int_0^1 \mu_{x+s}(s) ds\right)$$

et le nombre approximé de survivants

$$P_1 = 3 \exp\left(-\int_0^1 \mu_{40+s}(s) ds\right).$$

La figure 4.5 montre le résultat de 1000 simulations. On voit que, dans ce cas simplifié, l'erreur commise n'est pas énorme. Les deux premiers moments empiriques de cette erreurs valent

$$\hat{\mu}(\tilde{P}_1 - P_1) = -0.008355366 \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}^2(\tilde{P}_1 - P_1) = 0.00001470991.$$

La table 4.4 donne le nombre moyen de survivants d'un portefeuille de 30000 assurés (répartis uniformément entre les différents âges, c'est à dire qu'on a 10000 assurés de chacun des trois âges).

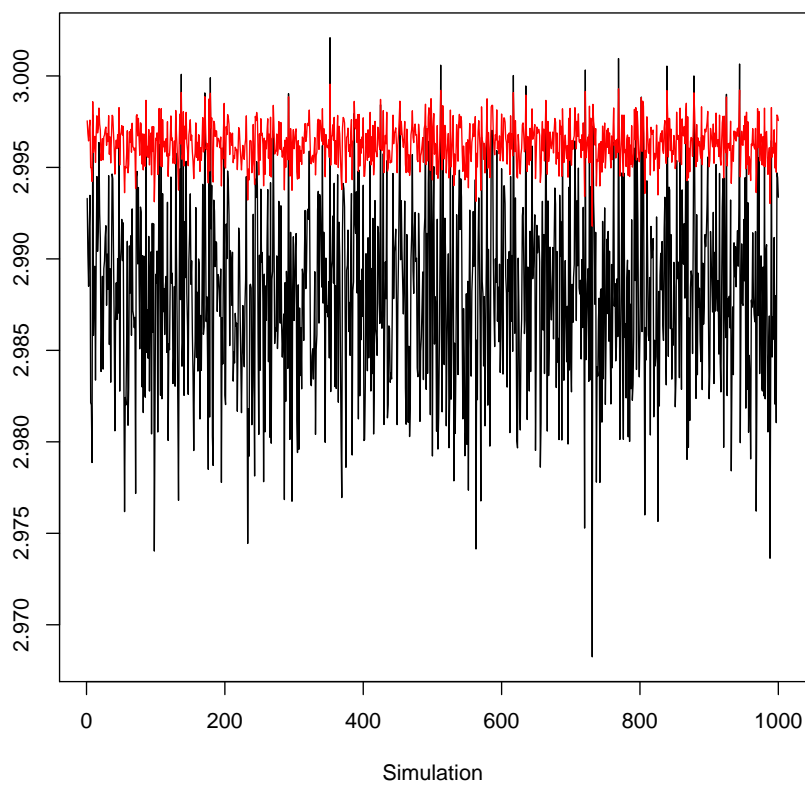
4.7.2 Borne sur l'erreur commise et calibration

Analysons l'erreur commise avec l'approximation sur la mortalité. À nouveau nous écrivons

$$\tilde{P}_1 = \sum_{x=\omega_{min}}^{\omega_{max}} N_x \exp\left(-\int_0^1 \mu_{x+s}(s) ds\right)$$

Classe	Assurés survivants	Assurés décédés
20 ans	9991	9
40 ans	9987	13
60 ans	9894	106
Total réalité	29872	128
Total approximation	29961	39

TABLE 4.4 – Nombre moyen de survivants parmi 30000 assurés

Indice de survie réel (noir) et approximé (rouge)FIGURE 4.5 – Erreur faite avec l'hypothèse (H_2)

pour la mortalité réelle (où N_x est le nombre d'assurés d'âge a présents dans le portefeuille au début du contrat) et

$$P_1 = \sum_{x=\omega_{min}}^{\omega_{max}} N_x \exp\left(-\int_0^1 \mu_{\tilde{x}+s}(s) ds\right) = N \exp\left(-\int_0^1 \mu_{\tilde{x}+s}(s) ds\right)$$

pour la mortalité approximée (où N est la taille du portefeuille tous âges confondus).

Théorème 4.12. *Supposons que l'intégrale de la force de mortalité (c'est à dire $-\ln \ell_s$) est toujours positive. Alors on a*

$$\begin{aligned} & \mathbb{V}\left[L_1(\tilde{P}_1, S_1) - L_1(P_1, S_1)\right] \\ & \leq C_0^2 e^{2i} \sum_{x=\omega_{min}}^{\omega_{max}} N_x^2 \left(\mathbb{V}\left[\beta \frac{S_1}{S_0}\right] \mathbb{V}[|m_x - m|] + \mathbb{V}\left[\beta \frac{S_1}{S_0}\right] \mathbb{E}[|m_x - m|]^2 \right. \\ & \quad \left. + \mathbb{E}\left[1 + \beta \frac{S_1}{S_0}\right]^2 \mathbb{V}[|m_x - m|] \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

où

$$m_x = \int_0^1 \mu_{x+s}(s) ds \quad \text{et} \quad m = \int_0^1 \mu_{\tilde{x}+s}(s) ds.$$

Démonstration. Remarquons avant tout que pour tous $y, m, \tilde{m} \geq 0$ on a

$$\tilde{x}(1 + (y - \tilde{x})_+) - x(1 + (y - x)_+) \leq (1 + y)|\tilde{x} - x|.$$

En effet, en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction

$$x \mapsto x(1 + (y - x)_+) = L(x, y),$$

on obtient

$$\tilde{x}(1 + (y - \tilde{x})_+) - x(1 + (y - x)_+) = \frac{\partial L}{\partial x}(z, y)|\tilde{x} - x| \leq (1 + y)|\tilde{x} - x|$$

où z est entre \tilde{x} et x .

On a ainsi pour le passif

$$\mathbb{V}\left[C_0 e^i \tilde{P}_1 \left(1 + \beta \left(\frac{S_1}{S_0} - e^i \tilde{P}_1\right)_+\right) - C_0 e^i P_1 \left(1 + \beta \left(\frac{S_1}{S_0} - e^i P_1\right)_+\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
&= C_0^2 e^{2i} \mathbb{V} \left[\tilde{P}_1 \left(1 + \beta \left(\frac{S_1}{S_0} - e^i \tilde{P}_1 \right)_+ \right) - P_1 \left(1 + \beta \left(\frac{S_1}{S_0} - e^i P_1 \right)_+ \right) \right] \\
&\leq C_0^2 e^{2i} \mathbb{V} \left[\left(1 + \beta \frac{S_1}{S_0} \right) |\tilde{P}_1 - P_1| \right] \\
&\leq C_0^2 e^{2i} \mathbb{V} \left[\sum_{x=\omega_{min}}^{\omega_{max}} N_x \left(1 + \beta \frac{S_1}{S_0} \right) |e^{-m_x} - e^{-m}| \right] \\
&\leq C_0^2 e^{2i} \mathbb{V} \left[\sum_{x=\omega_{min}}^{\omega_{max}} N_x \left(1 + \beta \frac{S_1}{S_0} \right) |m_x - m| \right]
\end{aligned}$$

en appliquant une nouvelle fois le théorème des accroissements finis, à $x \mapsto e^{-x}$ cette fois. On obtient l'inégalité voulue en appliquant les deux résultats classiques de théorie des probabilités suivants :

– pour des v.a. X_1, X_2, \dots, X_n on a

$$\mathbb{V} \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] \leq \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{V}[X_i]^{1/2} \right)^2 ;$$

– pour deux v.a. X_1, X_2 indépendantes, on a

$$\mathbb{V}[X_1 X_2] = \mathbb{V}[X_1] \mathbb{V}[X_2] + \mathbb{V}[X_1] \mathbb{E}[X_2]^2 + \mathbb{V}[X_2] \mathbb{E}[X_1]^2 .$$

□

Cette borne supérieure sur l'erreur possède un intérêt théorique, mais permet aussi d'effectuer une calibration optimale en un certain sens. En effet, afin de minimiser l'erreur commise avec l'approximation, il est possible de choisir les paramètres de la force de mortalité $\mu_{\hat{x}}$ utilisée dans les calculs des chapitres précédents de telle sorte qu'ils minimisent la borne donnée dans le résultat ci-dessus. Nous avons décidé de ne pas présenter ce calcul explicitement ici, notamment parce qu'il est long, lourd et qu'il présente peu d'intérêt conceptuel. Notons simplement que, puisque la force de mortalité suit un modèle Vasicek, $m_x - m$ est distribué selon une normale, et donc $|m_x - m|$ selon une normale repliée (*folded normal*, distribution dont les moments sont connus mais relativement compliqués).

Conclusion et perspectives

Sir Bedevere : ... and that, my Liege, is how we know the Earth to be banana shaped.

King Arthur : This new learning amazes me, Sir Bedevere. Explain again how sheep's bladders may be employed to prevent earthquakes.

Monthy Pyhton's Holy Grail

Nous avons, dans ce mémoire, exposé la possibilité de marier le calcul de Malliavin aux décompositions de Kunita-Watanabe et Föllmer-Schweizer, deux pans relativement techniques de la théorie des probabilités, pour obtenir des résultats explicites d'évaluation et de couverture dans des marchés incomplets. En particulier, nous avons appliqué ces techniques au passif d'une compagnie d'assurance vendant des contrats d'assurance vie.

Nous avons montré que ces méthodes s'appliquent à deux types de modèles différents pour l'actif. Nous sommes convaincus que ce ne sont là que des exemples de ce qu'il est possible de faire. D'autres modèles – tant pour les actifs que pour la mortalité – peuvent très certainement être considérés. On remarquera que notre preuve fonctionne tel quel pour les modèles où la mortalité et l'actif sont adaptés, distribués log-normalement et tels que la dérivée de Malliavin de leur logarithme $D \ln X = DX/X$ est une fonction déterministe.

De la même façon, il est très certainement possible de choisir des modèles différents pour la force de mortalité. Nous conjecturons que c'est faisable pour les modèles de la classe *affine term structure* – c'est à dire pour les modèles tels que la probabilité de survie est l'exponentielle d'une fonction affine de la force de mortalité – dont le modèle de Vasicek que nous avons utilisé fait partie. Le modèle Cox-Ingersoll-Ross est un autre exemple de modèle à structure affine (comme le montre Dahl (2004)). Bien que le calcul de la dérivée de Malliavin soit plus difficile (à cause de la racine carrée dans le terme de volatilité de la

dynamique), il semble tout de même possible d'effectuer le calcul grâce aux résultats obtenus par Alos & Ewald (2007) dans des cas similaires.

Il est possible d'étendre nos résultats en rajoutant une source d'aléatoire, en considérant par exemple le premier modèle que nous avons traité, mais avec un taux d'intérêt ou une volatilité stochastique. Nos tentatives dans ce sens ont donné des résultats encore plus lourds techniquement (penser à l'espérance conditionnelle des deux intégrants de la décomposition du théorème 4.4).

Dans une autre direction, il doit aussi être possible de manipuler des contrats d'assurance vie plus compliqués qu'un capital différé un an avec participation bénéficiaire. Obtenir une formule explicite pour un capital différé deux ans est déjà délicat, puisque dans ce cas le passif vaut

$$L_2 = C_0 e^{2i} P_2 \left(1 + \beta \left(\frac{S_1}{S_0} - P_1 e^i \right)_+ \right) \left(1 + \beta \left(\frac{S_2}{S_1} - \frac{P_2 e^i}{P_1} \right)_+ \right),$$

augurant des difficultés techniques. Remarquons que la décomposition de Föllmer-Schweizer – et donc bien sûr l'approche que nous avons présentée – n'est valide que pour des actifs conditionnels H effectuant un seul paiement, à la date terminale. Une extension du concept de minimalité pour le risque applicable à des flux financiers plus généraux peut être trouvée dans Møller (2001), où l'auteur applique ses résultats à des contrats d'assurance relativement complexes. Ceux-ci semblent être une bonne base de départ pour une généralisation dans cette direction.

On peut également penser à quitter le domaine de l'assurance vie et appliquer ces méthodes de décompositions explicites à d'autres marchés incomplets, par exemple considérer des contrats d'assurance dommages en tenant compte de l'inflation. Une autre idée serait d'intégrer des sources non-hedgeables, comme un actif de type CDS par exemple.

Les possibilités d'extension et de généralisation de ces résultats qui s'offrent à nous sont nombreuses, toutes plus intéressante les unes que les autres. Nous espérons vivement pouvoir nous pencher sur certaines d'entre elles dans les années à venir...

Résultat technique

Lemme A.1. Soit $N \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Alors on a, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[\exp(N)\Phi(\alpha N + \beta)] = \exp\left(-\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \Phi\left(\frac{\beta + \alpha(\mu + \sigma^2)}{\sqrt{1 + 2\alpha^2\sigma^2}}\right).$$

La preuve de ce lemme technique repose sur le résultat suivant de Gradshteyn et Ryzhik (égalité 8.259.1 page 891 de Gradshteyn & Ryzhik (2007)) : pour tous $p > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-px^2} \Phi(a + bx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \Phi\left(\frac{a\sqrt{p}}{\sqrt{b^2 + p}}\right). \quad (\text{A.1})$$

Démonstration. On calcule

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(N)\Phi(\alpha N + \beta)] &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^x \Phi(\alpha x + \beta) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Phi(\alpha x + \beta) e^{-\frac{x^2 - 2(\mu + \sigma^2)x + \mu^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{e^{\frac{(\mu + \sigma^2)^2 - \mu^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Phi(\alpha x + \beta) e^{-\frac{(x - (\mu + \sigma^2))^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{e^{\frac{(\mu + \sigma^2)^2 - \mu^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Phi(\alpha y + \beta + \alpha(\mu + \sigma^2)) e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\ &= \frac{e^{\frac{(\mu + \sigma^2)^2 - \mu^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi\sigma^2} \Phi\left(\frac{(\beta + \alpha(\mu + \sigma^2))(2\sigma^2)^{-1}}{\sqrt{\alpha^2 + (2\sigma^2)^{-1}}}\right) \\ &= e^{-\mu - \frac{1}{2}\sigma^2} \Phi\left(\frac{\beta + \alpha(\mu + \sigma^2)}{\sqrt{1 + 2\alpha^2\sigma^2}}\right) \end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $y = x - (\mu + \sigma^2)$ puis en utilisant l'identité (A.1). \square

Calibration du modèle Hull-White

Nous calibrons ici le modèle Hull-White pour le taux d'intérêt utilisé dans le deuxième modèle. La courbe de taux zéro-coupon (à l'instant 0)

$$y^m(0, t) = -\frac{\ln P^m(0, t)}{t}$$

a été trouvée sur le site de la banque centrale européenne.

Il est nécessaire de lisser cette courbe, puisque les fonction ξ et A comprennent la dérivée de celle-ci. Nous avons utilisé un lissage de type Nelson-Siegel, c'est à dire que nous avons collé aux données une courbe du type

$$y^{\text{NS}}(0, t) = \frac{1}{t} \left(C_1 t + C_2 \frac{1 - e^{-kt}}{k} + C_3 \frac{1 - e^{-kt} - kte^{-kt}}{k^2} + C_4 \frac{1 - e^{-2kt}}{2k} + C_5 \frac{1 - e^{-3kt}}{3k} + C_6 \frac{e^{0.01kt} - 1}{0.01k} \right)$$

par la méthode des moindres carrés :

$$\min_{C_1, \dots, C_5, C_6, k} \sum_{i=1}^N (y^{\text{NS}}(0, t_i) - y^{\text{Marché}}(0, t_i))^2.$$

Les coefficients donnés par l'ordinateur sont repris à la table B.1.

La courbe initiale des taux et le lissage sont donnés à la figure B.1.

On récupère facilement la courbe des taux forward initiale

$$f(0, t) = \frac{\partial(ty^{\text{NS}}(0, t))}{\partial t} = C_1 + C_2 e^{-kt} + C_3 t e^{-kt} + C_4 e^{-2kt} + C_5 e^{-3kt} + C_6 e^{0.01kt} \quad (\text{B.1})$$

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	k
-0.0629	-0.1671	0.0146	0.2420	-0.0768	0.0860	0.1185

TABLE B.1 – Coefficients du lissage

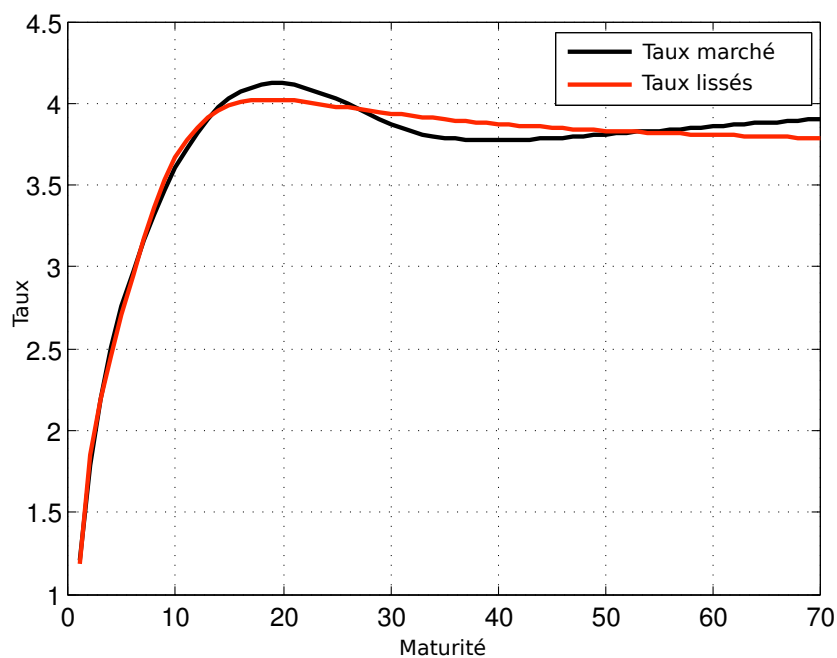


FIGURE B.1 – Courbe initiale des taux et lissage Nelson-Siegel

et donc la cible mouvante ξ :

$$\xi(t) = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + bf(0, t) + \frac{\sigma_r^2}{2b}(1 - e^{-2bt}).$$

Le calcul de la fonction A intervenant dans le prix du bon zéro-coupon n'est plus un problème.

Code utilisé

C.1	Simulations pour le premier modèle . . .	93
C.2	Simulations pour le second modèle . . .	97
C.3	Simulations pour le risque de modèle . .	102

C.1 Simulations pour le premier modèle

```
indicatrice = fonction(t){
  if(t>0){return(1)}
  if(t<=0){return(0)}
}

# Parametres contrats
C0 = 100
beta = 0.75
i = 0.06
G1 = 1

# Parametres actif equity
r = 0.05
sigmaS = 0.1
S0 = 1

# Parametres mortalité
mu0 = 0.000797
theta = 0
a = -0.051085
sigmamu=0.001343

# Parametres simulation
```

```

N = 100
dt = 1/N

dW1 = sqrt(dt)*rnorm(N)
W1 = cumsum(dW1)

dW2 = sqrt(dt)*rnorm(N)
W2 = cumsum(dW2)

#### Processus ####

ell = function(t){
  if (t<=0){return(1)}
  if (t>0){
    integrale = 0
    for (Ns in 0:(N-1)){
      s = Ns/N
      integrale = integrale+(1-exp(-a*(t-s)))*
        dW2[Ns+1]*indicatrice(t-s)
    }
    return(exp((mu0-theta)/a*(exp(-a*t)-1)-
      theta*t-sigmamu/a*integrale))
  }
}

S = function(t){
  if (t<=0){return(S0)}
  if (t>0){
    x=floor(t*N)
    gbm = exp(-0.5*sigmaS^2*t+sigmaS*W1[x])
    return(S0*gbm)
  }
}

#### Membre de gauche ####

pb = beta*max(S(1)/S0-G1*ell(1)*exp(i),0)
L = C0*exp(i)*G1*ell(1)*(1+pb)

#### Membre de droite ####

alpha = function(s){
  return(-1/(sigmaS*sqrt(1-s)))
}

fbeta = function(s){

```

```

    num = log(S(s))-log(S0*exp(i-r)*G1*ell(s))+
           0.5*sigmaS^2*(1-s)
    den = sigmaS*sqrt(1-s)
    return(num/den)
}

nu = fonction(s){
  return((mu0-theta)*(exp(-a)-exp(-a*s))/a-theta*(1-s))
}

tau = fonction(s){
  integrale = 0
  for (u in 0:(N-1)){
    x = u/N
    integrale = integrale+indicatrice(x-s)*
                (1-exp(-a*(1-x)))^2*dt
  }
  return(sigmamu^2*integrale/a^2)
}

esperance1 = exp(nu(0)+0.5*tau(0)^2)
esperance2 = beta*
              exp(r)*
              exp(-nu(0)-0.5*tau(0)^2)*
              pnorm((fbeta(0)+alpha(0)*(nu(0)+tau(0)^2))
                    /sqrt(1+2*alpha(0)^2*tau(0)^2))
esperance3 = beta*
              exp(i)*
              exp(-2*nu(0)-2*tau(0)^2)*
              pnorm((fbeta(0)+2*alpha(0)*
                    (2*nu(0)+4*tau(0)^2))
                    /sqrt(1+32*alpha(0)^2*tau(0)^2))
esperance = C0*exp(i)*G1*
            (esperance1 + esperance2 - esperance3)

integrant1 = array(0,N)
integrant2 = array(0,N)
integrale1 = array(0,N)
integrale2 = array(0,N)
D1stochint = array(0,N)
D2stochint = array(0,N)
Valeur = array(0,N)
strattheta = array(0,N)
eta = array(0,N)
actif = array(0,N)
mortalite = array(0,N)

```

```

for (Ns in 0:(N-1)){
  s = Ns/N
  # integrale stoch par rapport à W1
  integrant1[Ns+1] = S(s)*
    ell(s)*
    exp(-nu(s)-0.5*tau(s)^2)*
    pnorm((fbeta(s)+alpha(s)*
            (nu(s)+tau(s)^2))
          /sqrt(1+2*alpha(s)^2*
                tau(s)^2))
  if (Ns==0) {integrale1[Ns+1] = integrant1[Ns+1]*dW1[Ns+1]}
  if (Ns>0){integrale1[Ns+1] = integrale1[Ns]
            + integrant1[Ns+1]*dW1[Ns+1]}

  # integrale stoch par rapport à W2
  i1 = ell(s)*exp(nu(s) + 0.5*tau(s)^2)
  i2 = beta*
    exp(r)
    S(s)/S0*
    ell(s)*
    exp(-nu(s)-0.5*tau(s)^2)*
    pnorm(
      (fbeta(s)+alpha(s)*(nu(s)+tau(s)^2))
      /sqrt(1+2*alpha(s)^2*tau(s)^2))
  i3 = 2*
    beta*
    exp(i)*
    ell(s)^2*
    exp(-2*nu(s)-2*tau(s)^2)*
    pnorm(
      (fbeta(s)+2*alpha(s)*
       (2*nu(s)+4*tau(s)^2))
      /sqrt(1+32*alpha(s)^2*tau(s)^2))

  integrant2[Ns+1] = (exp(-a*(1-s))-1)*(i1+i2-i3)
  if (Ns==0) {integrale2[Ns+1] = integrant2[Ns+1]*dW2[Ns+1]}
  if (Ns>0){integrale2[Ns+1] = integrale2[Ns] +
            integrant2[Ns+1]*dW2[Ns+1]}

  D1stochint[Ns+1] = C0*exp(i)*exp(r)*beta*sigmaS*
                    G1/S0*integrale1[Ns+1]
  D2stochint[Ns+1] = C0*exp(i)*sigmamumu*G1/a*integrale2[Ns+1]

  Valeur[Ns+1] = esperance + D1stochint[Ns+1] +
                D2stochint[Ns+1]
}

```



```
strattheta[Ns+1] = exp(2*r*s)*integrant1[Ns+1]/(S(s)*sigmaS)
eta[Ns+1] = exp(-r*s)*(Valeur[Ns+1] +
                    exp(2*r*s)*integrant1[Ns+1]/sigmaS)
actif[Ns+1] = S(s)
mortalite[Ns+1] = ell(s)
}
```

C.2 Simulations pour le second modèle

```
indicatrice = fonction(t){
  if(t>0){return(1)}
  if(t<=0){return(0)}
}
```

```
# Parametres contrats
```

```
C0 = 100
```

```
beta = 0.75
```

```
i = 0.03
```

```
G1 = 1
```

```
r= 0.05
```

```
# Parametres bon ZC
```

```
M = 10
```

```
C1 = -0.0629
```

```
C2 = -0.1671
```

```
C3 = 0.0146
```

```
C4 = 0.2420
```

```
C5 = -0.0768
```

```
C6 = 0.0860
```

```
k = 0.1185
```

```
# Parametres taux
```

```
b = 0.27
```

```
sigmar = 0.09952
```

```
r0 = fm(0)
```

```
# Parametres mortalite
```

```
mu0 = 0.000797
```

```
theta = 0
```

```
a = -0.051085
```

```
sigmamu=0.001343
```

```
# Parametres simulation
```

```

N = 100
dt = 1/N

dW1 = sqrt(dt)*rnorm(100*N)
W1 = cumsum(dW1)

dW2 = sqrt(dt)*rnorm(100*N)
W2 = cumsum(dW2)

# Courbe initiale des taux forward -- fonction de base
fm = fonction(t) {
  return(C1 + C2*exp(-k*t) + C3*t*exp(-k*t) + C4*exp(-2*k*t) +
         C5*exp(-3*k*t)+ C6*exp(0.01*k*t))
}

# Dérivée de la fonction précédente
dfm = fonction(t) {
  return( ((1-k*t)*C3 - k*C2)*exp(-k*t) - 2*k*C4*exp(-2*k*t) -
         3*k*C5*exp(-3*k*t)+k*C6*0.01*exp(0.01*k*t))
}

# Prix initiaux des bons en fonction de la maturité t
Pm = fonction(t) {
  return(exp(-(C1*t+C2/k*(1-exp(-k*t))+
             C3/k^2*(1-k*t*exp(-k*t)-exp(-k*t))+
             C4/(2*k)*(1-exp(-2*k*t))+
             C5/(3*k)*(1-exp(-3*k*t))+
             C6/(0.01*k)*(exp(0.01*k*t)-1))))
}

# Cible mouvante du modele Hull et White
xi = fonction(t) {
  return(dfm(t) + b*fm(t) + sigmar/2/b*(1-exp(-2*b*t)))
}

#### Processus ####

e11 = fonction(t){
  if (t<=0){return(1)}
  if (t>0){
    integrale = 0
    for (Ns in 0:(N-1)){
      s = Ns/N
      integrale = integrale+(1-exp(-a*(t-s)))*
                    dW2[Ns+1]*indicatrice(t-s)
    }
  }
}

```

```

        return( exp((mu0-theta)/a*(exp(-a*t)-1)-
                    theta*t-sigmamu/a*integrale) )
    }
}

taux = fonction(t){
    integrale = 0
    integraleW = 0
    max = max(floor(t*N),N)
    for (Ns in 0:(max-1)){
        s = Ns/N
        integrale = integrale+xi(s)*exp(-b*(t-s))*
                    indicatrice(t-s)*dt
        integraleW = integraleW + exp(-b*(t-s))*
                    (dW1[Ns+1]-sigmar/b*
                    (1-exp(-b*(1-s)))*dt)*
                    indicatrice(t-s)
    }
    return(exp(-b*t)*r0+b*integrale+sigmar*integraleW)
}

C = fonction(t,M) {
    return(b*(1-exp(-b*(M-t))))
}

A = fonction(t,M){
    return(log(Pm(M)/Pm(t)) + C(t,M)*fm(t) -
            sigmar/(4*b)*(1-exp(-2*b*t))*C(t,M)^2 )
}

FonC = array(0,N)
for (j in 1:N){FonC[j] = C((j-1)/N,1) - C((j-1)/N,M)}

F = fonction(t){
    return(bon(t,M)/bon(t,1))
}

bon = fonction(t,M){
    return(exp(A(t,M)-C(t,M)*taux(t)))
}

#### Membre de gauche ####

pb = beta*max(F(1)/bon(0,M)-G1*ell(1)*exp(i),0)
L = C0*exp(i)*G1*ell(1)*(1+pb)

```

```

#### Membre de droite ####

intgamma = fonction(t){
  return( sigmar^2/2/b^3*(exp(-b*M)-exp(-b))^2*
          (exp(2*b)-exp(2*b*t)))
}

alpha = fonction(s){
  return(-1/(sigmar*sqrt(intgamma(s))))
}

fbeta = fonction(s){
  num = log(F(s))-log(bon(0,M)*exp(i)*G1*ell(s))+
        0.5*intgamma(s)
  den = sqrt(intgamma(s))
  return(num/den)
}

nu = fonction(s){
  return((mu0-theta)*(exp(-a)-exp(-a*s))/a-theta*(1-s))
}

tau = fonction(s){
  integrale = 0
  for (u in 0:(N-1)){
  x = u/N
  integrale = integrale+indicatrice(x-s)*(1-exp(-a*(1-x)))^2*dt
  }
  return(sigmamu^2*integrale/a^2)
}

esperance1 = exp(nu(0)+0.5*tau(0)^2)
esperance2 = beta*
              (1/bon(0,1))*
              exp(-nu(0)-0.5*tau(0)^2)*
              pnorm(
                (fbeta(0)+alpha(0)*(nu(0)+tau(0)^2))
                /sqrt(1+2*alpha(0)^2*tau(0)^2))
esperance3 = beta*
              exp(i)*
              exp(-2*nu(0)-2*tau(0)^2)*
              pnorm(
                (fbeta(0)+2*alpha(0)*
                 (2*nu(0)+4*tau(0)^2))
                /sqrt(1+32*alpha(0)^2*tau(0)^2))
esperance = C0*exp(i)*G1*

```

```

      (esperance1 + esperance2 - esperance3)

integrant1 = array(0,N)
integrant2 = array(0,N)
integrale1 = array(0,N)
integrale2 = array(0,N)
D1stochint = array(0,N)
D2stochint = array(0,N)
Valeur = array(0,N)
strattheta = array(0,N)
eta = array(0,N)
actif = array(0,N)
mortalite = array(0,N)

for (Ns in 0:(N-1)){
  s = Ns/N
  # integrale stoch par rapport à W1
  integrant1[Ns+1] = F(s)*
    ell(s)*
    sigmar*(C(s,1)-C(s,M))*
    exp(-nu(s)-0.5*tau(s)^2)*
    pnorm(
      (fbeta(s)+alpha(s)*
        (nu(s)+tau(s)^2))
      /sqrt(1+2*alpha(s)^2*
        tau(s)^2))
  if (Ns==0) {integrale1[Ns+1] = integrant1[Ns+1]*dW1[Ns+1]}
  if (Ns>0){integrale1[Ns+1] = integrale1[Ns] +
    integrant1[Ns+1]*dW1[Ns+1]}
  D1stochint[Ns+1] = C0*exp(i)*beta*G1/bon(0,M)*
    integrale1[Ns+1]

  # integrale stoch par rapport à W2
  i1 = ell(s)*
    exp(nu(s) + 0.5*tau(s)^2)
  i2 = beta*
    F(s)/bon(0,M)*
    ell(s)*
    exp(-nu(s)-0.5*tau(s)^2)*
    pnorm(
      (fbeta(s)+alpha(s)*(nu(s)+tau(s)^2))
      /sqrt(1+2*alpha(s)^2*tau(s)^2))
  i3 = 2*
    beta*
    exp(i)*
    ell(s)^2*

```

```

exp(-2*nu(s)-2*tau(s)^2)*
pnorm(
  (fbeta(s)+2*alpha(s)*
    (2*nu(s)+4*tau(s)^2))
  /sqrt(1+32*alpha(s)^2*tau(s)^2))

integrant2[Ns+1] = (exp(-a*(1-s))-1)*(i1+i2-i3)
if (Ns==0) {integrale2[Ns+1] = integrant2[Ns+1]*dW2[Ns+1]}
if (Ns>0){integrale2[Ns+1] = integrale2[Ns] +
  integrant2[Ns+1]*dW2[Ns+1]}
D2stochint[Ns+1] = C0*exp(i)*sigmamumu*G1/a*integrale2[Ns+1]

Valeur[Ns+1] = esperance + D1stochint[Ns+1] +
  D2stochint[Ns+1]
strattheta[Ns+1] = integrant1[Ns+1]*bon(s,1)^2/(bon(s,M)*
  sigmar*(C(s,1)-C(s,M)))
eta[Ns+1] = exp(-r*s)*(Valeur[Ns+1] - strattheta[Ns+1]*F(s))
actif[Ns+1] = F(s)
mortalite[Ns+1] = ell(s)
}

```

C.3 Simulations pour le risque de modèle

```

# Parametres simulations
N=100
K = 1000

# Parametres mortalite
mu020 = 0.000797
theta20 = 0
a20 = -0.051085
sigmamumu20=0.001343

mu040 = 0.001217
theta40 = 0
a40 = -0.106695
sigmamumu40=0.000199

mu060 =0.010054
theta60 = 0
a60 = -0.095001
sigmamumu60= 0.001071

ell = fonction(t,mu0,a,theta,sigmamumu){

```

```

if (t<=0){return(1)}
if (t>0){
  integrale = 0
  for (Ns in 0:(N-1)){
    s = Ns/N
    integrale = integrale+(1-exp(-a*(t-s)))*
                dW2[Ns+1]*indicatrice(t-s)
  }
  return( exp((mu0-theta)/a*(exp(-a*t)-1)-
            theta*t-sigmamu/a*integrale))
}
}

mortalite = array(0,c(K,3))

for (z in 1:K){
  dW2 = sqrt(dt)*rnorm(N) # dW[n] = W[n]-W[n-1]
  W2 = cumsum(dW2)
  mortalite[z,1] = ell(1,mu020,a20,theta20,sigmamu20)
  mortalite[z,2] = ell(1,mu040,a40,theta40,sigmamu40)
  mortalite[z,3] = ell(1,mu060,a60,theta60,sigmamu60)
  print(z)
}

moyenne= mean(mortalite[,1]+mortalite[,2]+mortalite[,3] -
              3*mortalite[,2])
variance = var(mortalite[,1]+mortalite[,2]+mortalite[,3] -
              3*mortalite[,2])

moyapprox = mean(3*mortalite[,2])
moyreel20 = mean(mortalite[,1])
moyreel40 = mean(mortalite[,2])
moyreel60 = mean(mortalite[,3])

```


Liste des figures et tables

Figures

4.1	Une simulation et la stratégie optimale correspondante pour le premier modèle	66
4.2	Cent simulations pour le premier modèle	67
4.3	Une simulation et la stratégie optimale correspondante pour le deuxième modèle	79
4.4	Cent simulations pour le second modèle	80
4.5	Erreur faite avec l'hypothèse (H_2)	83
B.1	Courbe initiale des taux et lissage Nelson-Siegel	92

Tables

2.1	Comparaison des deux estimateurs pour différentes options	30
4.1	Résultats de deux simulations pour le premier modèle	65
4.2	Résultats de deux simulations pour le second modèle	78
4.3	Paramètres pour la force de mortalité	82
4.4	Nombre moyen de survivants parmi 30000 assurés	83
B.1	Coefficients du lissage	92

Bibliographie

- ALOS, E. & EWALD, C.-O. (2007). Malliavin differentiability of the Heston volatility and applications to option pricing. *MPRA Paper* (3237).
- BALLY, V. (2009). An elementary introduction to Malliavin calculus. Rapport de recherche INRIA.
- BEN-HAMOU, E. (2000). *Application of Malliavin Calculus and Wiener Chaos to Option Pricing Theory*. Ph.D. thesis, University of London.
- BOULEAU, N. & LAMBERTON, D. (1989). Residual risks and hedging strategies in markovian markets. *Stochastic processes and their applications* **33**, 131–150.
- BRIGO, D. & MERCURIO, F. (2001). *Interest Rate Models : Theory and Practice*. Springer Finance.
- DAHL, M. (2004). Stochastic mortality in life insurance : market reserves and mortality-linked insurance contracts. *Insurance : Mathematics & Economics* **35**, 113–136.
- DAVIS, M. (1997). Option pricing in incomplete markets. *Mathematics of derivative securities* , 216–226.
- DENUIT, M., DEVOLDER, P. & GODERNIAUX, A.-C. (2007). Securitization of longevity risk : pricing survivor bonds with Wang transform in the Lee-Carter framework. *The journal of risk and insurance* **74**(1), 87–113.
- DEVOLDER, P. (2012). Stochastic finance in insurance. Notes de cours.
- FÖLLMER, H. & SONDERMANN, D. (1986). Hedging of non-redundant contingent claims. *Contributions to mathematical economics* , 205–223.
- FÖLLMER, H. & SCHWEIZER, M. (1991). Hedging of contingent claims under incomplete information. In : *Applied stochastic analysis (London, 1989)*, vol. 5 of *Stochastics Monogr*. New York : Gordon and Breach, pp. 389–414.
- FOURNIÉ, E., LASRY, J.-M., LEBUCHOUX, J. & LIONS, P.-L. (2001). Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance, ii. *Finance and statistics* (5), 201–236.

- FOURNIÉ, E., LASRY, J.-M., LEBUCHOUX, J., LIONS, P.-L. & TOUZI, N. (1999). Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance. *Finance and statistics* (3), 391–412.
- FRIZ, P. (2005). An introduction to Malliavin calculus. Notes de cours.
- GRADSHTEYN, I. & RYZHIK, I. (2007). *Table Of Integrals, Series And Products*. Elsevier.
- GURRIERI, S., NAKABAYASHI, M. & WONG, T. (2009). Calibration methods of Hull-White model. *SSRN* .
- ITO, K. (1951). Multiple Wiener integral. *J. Math. Soc. Japan* **3**(1), 157–169.
- KARATZAS, I. & Ocone, D. L. (1991). A generalized Clark representation formula, with application to optimal portfolios. *Stochastics Stochastics Rep.* **34**(3-4), 187–220.
- KARATZAS, I. & SHREVE, S. (1988). *Brownian motion and stochastic calculus*. Graduate texts in mathematics. Springer.
- KUNITA, H. & WATANABE, S. (1967). On square integrable martingales. *Nagoya Math. J.* **30**, 209–245.
- MALLIAVIN, P. (1978). Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators. *Proceedings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations* (1), 195–263.
- MØLLER, T. (2001). Risk-minimizing hedging strategies for insurance payment processes. *Finance and Stochastics* **5**(4), 419–446.
- MONAT, P. & STRICKER, C. (1996). The Föllmer-Schweizer decomposition. In : *Stochastic processes and related topics (Siegmondsberg, 1994)*, vol. 10 of *Stochastics Monogr.* Yverdon : Gordon and Breach, pp. 77–89.
- MUSIELA, M. & RUTKOWSKI, M. (2005). *Martingale methods in financial modelling*. Applications of mathematics. Springer.
- NUALART, D. (1995). *The Malliavin calculus and related topics*. Probability and its applications. Springer.
- ØKSENDAL, B. (1997). An introduction to Malliavin calculus with applications to economics. Notes de cours.
- ØKSENDAL, B. (2003). *Stochastic differential equations : an introduction with applications*. Universitext. Berlin : Springer-Verlag.
- RUSSO, V., GIACOMETTI, R., ORTOBELLI, S., RACHEV, S. & FABOZZI, F. (2011). Calibrating affine stochastic mortality models using insurance contracts premiums. *Insurance : Mathematics and Economics* **49**(1), 53–60.

-
- SCHWEIZER, M. (1988). *Hedging of options in a general semimartingale model*. Ph.D. thesis, ETH Zurich.
- SCHWEIZER, M. (1990). Risk-minimality and orthogonality of martingales. *Stochastics Stochastics Rep.* **30**(2), 123–131.
- SCHWEIZER, M. (1991). Option hedging for semimartingales. *Stochastic processes and their applications* **37**, 339–363.
- SCHWEIZER, M. (2001). A guided tour through quadratic hedging approaches. In : *Option Pricing, Interest Rates and Risk Management*, Cambridge University Press. pp. 538–574.
- SOLÉ, M. (2005). *Malliavin calculus : with applications to stochastic partial differential equations*. Fundamental sciences : Mathematics. EPFL Press.
- STROMBERG, K. (1994). *Probability for analysts*. Chapman & Hall/CRC Probability Series. Berlin : Springer-Verlag.