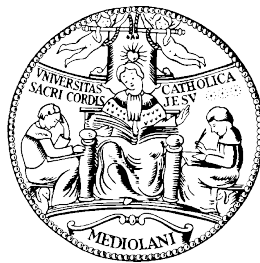


Università Cattolica del Sacro Cuore – Milano
Interfacoltà di Economia – Scienze bancarie, finanziarie ed assicurative
Corso di Laurea in Scienze statistiche, attuariali ed economiche



La modellizzazione del costo sinistri del ramo *Property* e la valutazione del *Risk capital*

Relatore:
Chiar.mo Prof. Nino Savelli

Tesi di Laurea di:
Fabio Moraldi
Matr. N. 3704672

Anno Accademico 2009-2010

Indice

Elenco delle tabelle	III
Elenco delle figure	V
Introduzione	1
1 Rischi catastrofali e assicurazione incendio	5
1.1 I rischi catastrofali e le loro cause	5
1.1.1 Aspetti peculiari della gestione dei rischi catastrofali .	7
1.1.2 L'andamento nel tempo	9
1.2 L'assicurazione incendio	14
1.2.1 L'oggetto della copertura e la polizza danni indiretti .	15
1.2.2 Statistiche del mercato italiano e di quello europeo . .	18
1.3 Presentazione del dataset di riferimento	26
2 Frequenza e intensità dei sinistri estremi	33
2.1 Processi di Poisson e tempi di arrivo dei sinistri	34
2.2 La distribuzione di Pareto	37
2.3 Elementi di Extreme Value Theory	42
2.3.1 La distribuzione generalizzata dei valori estremi	43
2.3.2 Il teorema di Fisher-Tippett	48
2.3.3 La distribuzione di Pareto generalizzata	49
2.3.4 Il teorema di Pickands-Balkema-de Haan	55
2.3.5 Code e quantili	56
2.4 Strumenti statistici per l'analisi di sinistri estremi	59
2.4.1 Rappresentazioni alternative delle distribuzioni	60
2.4.2 Metodi per la verifica dell'indipendenza	62
2.4.3 Funzione degli eccessi e Q-Q plot	64
2.4.4 Adattamento dei sinistri a funzioni parametriche . . .	68
2.5 Un'analisi congiunta di frequenza e intensità	70
2.6 Analisi del dataset	73

2.6.1	Indagini preliminari	73
2.6.2	Modelli per il numero e l'importo degli eventi	75
2.6.3	Utilizzo di strumenti di EVT	82
3	Requisiti di capitale e strategie riassicurative	89
3.1	Verso Solvency II	89
3.1.1	Architettura e finalità	90
3.1.2	La <i>Standard Formula</i> per il <i>Non-Life</i> (<i>QIS4</i> e <i>QIS5</i>)	93
3.2	Un esempio di modello interno	97
3.2.1	Ipotesi distributive alternative	97
3.2.2	Impiego del modello POT	105
3.2.3	Requisiti di capitale a confronto	108
3.2.4	<i>Internal model</i> o <i>Standard Formula</i> ?	113
3.2.5	L'andamento della <i>risk reserve</i> nel tempo	119
3.3	Impatto della riassicurazione	122
3.3.1	Riassicurazioni proporzionali	122
3.3.2	Riassicurazione <i>excess of loss</i>	124
3.3.3	Impatto delle strategie sul <i>risk capital</i>	128
4	Analisi delle dipendenze	133
4.1	Rappresentazioni alternative della dipendenza	134
4.1.1	Standardizzazione delle componenti	134
4.1.2	Coefficiente di correlazione lineare e τ di Kendall	135
4.1.3	Stima della <i>tail dependence</i>	139
4.2	Misurare la dipendenza attraverso le copule	142
4.2.1	Ellittiche: caratteristiche e problematiche	143
4.2.2	Archimediane: la copula di Gumbel	145
4.3	Aggregazione dei tre rami	147
4.3.1	Scelta di modelli distributivi opportuni	148
4.3.2	Ipotesi di dipendenza a confronto	153
	Conclusioni	163
	Bibliografia	167
	Ringraziamenti	171

Elenco delle tabelle

1.1	Catastrofi naturali e tecniche 1970-2008: un confronto	11
1.2	Catastrofi naturali e tecniche 2008: numero, vittime e perdite assicurate	12
1.3	Catastrofi tecniche 2008: cause di incendi ed esplosioni	12
1.4	Incendi danesi 1980-2002: statistiche descrittive	31
2.1	Distribuzioni dei valori estremi	43
2.2	Costanti di normalizzazione delle distribuzioni dei valori estremi	48
2.3	Distribuzioni di Pareto generalizzate	50
2.4	Funzioni quantili per GEV e GPD	59
2.5	Funzioni degli eccessi medi per le GPD	66
2.6	Test di casualità sui sinistri	74
2.7	Incendi danesi 1980: intertempi di arrivo dei sinistri	76
2.8	Incendi danesi 1980-2002: parametri della Pareto al variare delle soglie .	79
2.9	Incendi danesi 1980-2002: parametro della Pareto con lo stimatore di credibilità	82
3.1	Momenti delle <i>attritional losses</i> a confronto	101
3.2	Momenti delle <i>large losses</i>	105
3.3	Momenti dei sinistri superiori ad un milione di corone	107
3.4	Requisiti di capitale per le <i>attritional losses</i>	108
3.5	Requisiti di capitale per il costo complessivo di <i>attritional losses</i> e <i>large losses</i>	110
3.6	Due modelli per il requisito complessivo di capitale a confronto	111
3.7	Calcolo del requisito complessivo adottando la distribuzione lognormale non troncata	113
3.8	Incendi danesi 1998-2002: <i>RBC ratios</i> con tre differenti ipotesi distribu- tive	115
3.9	Alcune analisi di sensitività sul modello <i>benchmark</i>	118
3.10	Momenti della riserva di rischio su un orizzonte di 5 anni	121
3.11	Incendi danesi 1998-2002: frequenza e danno medio in un funzione del <i>layer</i> riassicurato	127

3.12	Effetto di contratti riassicurativi alternativi sulla riserva di rischio . . .	130
3.13	Effetto della clausola di <i>reinstatement</i> sulla riserva di rischio	131
4.1	Incendi danesi 1980-2002: valori standardizzati e valori originari	135
4.2	Incendi danesi 1980-2002: valori di ρ e di τ	138
4.3	Incendi danesi 1980-2002: valori di m	141
4.4	Incendi danesi 1980-2002: stime della <i>tail dependence</i>	142
4.5	<i>Tail dependence</i> fra le tre coppie di rami a confronto con la dipendenza di coda fra coppie di vettori estratti dalla copula t con matrice di correlazione lineare pari a quella empirica e con $\nu = 3$	145
4.6	Incendi danesi 1998-2002: parametri della lognormale per i tre rami . . .	150
4.7	Momenti del costo aggregato e requisiti di capitale per i tre rami	153
4.8	Calcolo del τ di Kendall parametrico e non parametrico in funzione dell'ordine di aggregazione (A =edifici-contenuti e perdite di profitto, B =edifici-perdite di profitto e contenuti, C =contenuti-perdite di profitto ed edifici)	156
4.9	Incendi danesi 1998-2002: momenti della distribuzione di costo aggregato in funzione dell'ipotesi di aggregazione (A =edifici-contenuti e perdite di profitto, B =edifici-perdite di profitto e contenuti, C =contenuti-perdite di profitto ed edifici)	157
4.10	Incendi danesi 1998-2002: sintesi dei risultati sugli <i>RBC ratios</i> derivanti da ipotesi di aggregazione alternative (aggregazione con ordine C : contenuti e perdite di profitto, poi aggregazione con ramo edifici)	160
4.11	Incendi danesi 1980-2002: momenti della distribuzione di costo aggregato in funzione dell'ipotesi di aggregazione (A =edifici-contenuti e perdite di profitto, B =edifici-perdite di profitto e contenuti, C =contenuti-perdite di profitto ed edifici)	160

Elenco delle figure

1.1	Catastrofi naturali e tecniche 1970-2008: numero di eventi	9
1.2	Catastrofi naturali e tecniche 1970-2008: perdite assicurate	10
1.3	Il ramo incendio in Italia 1998-2007: indicatori tecnici a confronto con quelli dei rami danni	21
1.4	Il ramo incendio in Italia 1998-2007: spese a confronto con quelle dei rami danni	23
1.5	Il ramo incendio in Italia 1998-2007: saldi tecnici a confronto con quelli dei rami danni	24
1.6	Il ramo <i>property</i> in Europa: raccolta premi a confronto con quella italiana	25
1.7	Il ramo <i>property</i> nel Mondo: premi ceduti in riassicurazione	26
1.8	Incendi danesi 1980-2002 in ordine cronologico	28
1.9	Incendi danesi 1980-2002: frequenza e intensità	29
1.10	Incendi danesi 1980-2002: tipologie di rischio	30
2.1	Distribuzione di Pareto: ripartizione e densità in funzione di α	38
2.2	Distribuzioni dei valori estremi	45
2.3	Distribuzione di Weibull: relazione tra parametro di forma e asimmetria	47
2.4	Esempio di applicazione del teorema di Fisher-Tippett	49
2.5	Distribuzioni Pareto generalizzate al variare di γ	52
2.6	Esempio di applicazione del teorema di Pickands-Balkema-de Haan . . .	56
2.7	Adattamento della coda di una distribuzione	58
2.8	Esempio di densità kernel	62
2.9	Incendi danesi 1980-2002: funzione di autocorrelazione campionaria . .	74
2.10	Incendi danesi 1980-2002: quantili empirici e quantili della distribuzione esponenziale	75
2.11	Incendi danesi 1980-2002: andamento del numero di eventi in funzione della soglia	77
2.12	Incendi danesi 1980-2002: andamento del danno medio	78
2.13	Incendi danesi 1980-2002: parametro della Pareto con lo stimatore di massima verosimiglianza	79
2.14	Incendi danesi 1980-2002: <i>Hill plot</i>	80

2.15	Incendi danesi 1980-2002: quantili empirici e quantili della distribuzione di Pareto	82
2.16	Incendi danesi 1980-2002: funzione degli eccessi medi	83
2.17	Incendi danesi 1980-2002: distribuzione dei massimi	84
2.18	Incendi danesi 1980-2002: approssimazione degli eccedenti con GPD . . .	86
2.19	Incendi danesi 1980-2002: adattamento della coda ($u = 10$)	87
2.20	Incendi danesi 1980-2002: approssimazione con GPD a partire da $u = 10$	87
3.1	Istogramma dei sinistri compresi fra 1 e 40 milioni	98
3.2	Incendi danesi 1980-2002: modelli per le <i>attritional losses</i>	102
3.3	Incendi danesi 1980-2002: un modello per le <i>large losses</i>	104
3.4	Incendi danesi 1980-2002: adattamento dell'intera distribuzione con una GPD	106
3.5	Incendi danesi 1998-2002: adattamento delle <i>large losses</i> con una Pareto troncata	114
3.6	<i>RBC ratios</i> : confronti fra i modelli interni e <i>Standard Formula</i>	117
3.7	Andamento della <i>risk reserve</i> su un orizzonte di 5 anni	121
3.8	Un esempio di riassicurazione per eccedente	124
3.9	Approssimazione della coda destra ai fini del <i>pricing</i> di una riassicurazione <i>XL</i>	127
3.10	Andamento della <i>risk reserve</i> su un orizzonte di 5 anni in presenza di una copertura <i>excess of loss</i> con priorità 100 milioni e portata illimitata	131
4.1	Incendi danesi 1980-2002: grafici a dispersione dei rami	137
4.2	Incendi danesi 1980-2002: <i>tail dependence</i> e bande di oscillazione in funzione di m	142
4.3	Dipendenza di coda e relative bande fra due vettori simulati da una copula gaussiana con $\rho = 0.6$	144
4.4	Dipendenza di coda e relative bande fra tre coppie di vettori simulati da una copula t con $\nu = 3$ ed R pari alla matrice di correlazione fra i rami edifici, contenuti e perdite di profitto	146
4.5	Coppie di vettori simulati e stima della dipendenza di coda in una copula di Gumbel con $\tau = 0.2086$	147
4.6	Incendi danesi 1998-2002: funzione degli eccessi medi dei tre rami in esame	148
4.7	Adattamento della distribuzione degli edifici con una GPD	149
4.8	Incendi danesi 1998-2002: istogramma dei danni agli edifici	150
4.9	Incendi danesi 1980-2002: numero di eventi suddivisi per anno di accadimento e per ramo	151
4.10	Due istogrammi del costo aggregato complessivo a confronto	158

- 4.11 Incendi danesi 1998-2002: *RCB ratios* in funzione dell'ipotesi di aggregazione (A =edifici-contenuti e perdite di profitto, B =edifici-perdite di profitto e contenuti, C =contenuti-perdite di profitto ed edifici) 159
- 4.12 Incendi danesi 1980-2002: *RCB ratios* in funzione dell'ipotesi di aggregazione (A =edifici-contenuti e perdite di profitto, B =edifici-perdite di profitto e contenuti, C =contenuti-perdite di profitto ed edifici) 161

Introduzione

“Some of our maids sitting up late last night to get things ready against our feast today, Jane called up about three in the morning, to tell us of a great fire they saw in the City. So I rose, and slipped on my night-gown and went to her window, and thought it to be on the back side of Mark Lane at the farthest; but, being unused to such fires as followed, I thought it far enough off, and so went to bed again, and to sleep. [...] By and by Jane comes and tells me that she hears that above 300 houses have been burned down tonight by the fire we saw, and that it is now burning down all Fish Street, by London Bridge. So I made myself ready presently, and walked to the Tower; and there got up upon one of the high places, [...] and there I did see the houses at the end of the bridge all on fire, and an infinite great fire on this and the other side [...] of the bridge [...]. So down, with my heart full of trouble, to the Lieutenant of the Tower, who tells me that it began this morning in the King’s baker’s house in Pudding Lane, and that it hath burned St. Magnus’s Church and most part of Fish Street already. So I rode down to the waterside, [...] and there saw a lamentable fire. [...] Everybody endeavouring to remove their goods, and flinging into the river or bringing them into lighters that lay off; poor people staying in their houses as long as till the very fire touched them, and then running into boats, or clambering from one pair of stairs by the waterside to another.”

Samuel Pepys

Sono passati quasi quattrocento anni da quando Samuel Pepys scriveva queste parole all’interno del suo diario, il 2 settembre del 1666. Il *Great Fire* di Londra, descritto con queste concitate parole dal contemporaneo scrittore inglese, ebbe significative conseguenze sul piano economico e su quello sociale, che costituirono un forte stimolo allo sviluppo delle coperture assicurative, nate proprio per far fronte ai danni derivanti dall’incendio.

I danni alla proprietà rappresentano ancora oggi una componente importante all’interno dei portafogli delle compagnie e coinvolgono il mondo assicurativo tanto quanto quello riassicurativo, a motivo soprattutto della dimensione dei danni che possono essere provocati da eventi di questa natura.

Questa tesi nasce con l'obiettivo di analizzare un dataset piuttosto conosciuto all'interno della letteratura attuariale, comprendente quasi settemila sinistri incendio che hanno colpito il portafoglio di una compagnia di riassicurazione danese (la *Copenhagen Re*) lungo l'arco temporale che va dal 1980 al 2002. I sinistri in questione sono stati resi disponibili già indicizzati a valori dell'ultimo anno di osservazione e sono ripartiti in danni ad edifici, contenuti e perdite di profitto. Tale database rappresenta un'estensione rispetto ai dati su cui hanno lavorato alcuni noti ricercatori contemporanei, tra i quali ricordiamo McNeil (1997) e Embrechts *e altri* (1997).

La finalità delle analisi svolte in precedenza ha sempre ruotato attorno all'impiego di modelli probabilistici idonei per adattare al meglio le code della distribuzione dei sinistri, ai fini soprattutto del *pricing* dei contratti riassicurativi di tipo *excess of loss*.

Dopo aver ripreso questo filone di studi, si è voluto procedere in due direzioni complementari, volte a considerare gli aspetti spesso trascurati all'interno dei lavori svolti su questa tipologia di dati.

In primis, sono stati costruiti dei modelli di teoria del rischio adatti a descrivere il costo aggregato provocato da questi eventi, separando il costo provocato dalle c.d. *attritional losses* da quello generato dalle c.d. *large losses*. È stato inoltre valutato l'effetto apportato da strategie riassicurative alternative sui capitali così individuati. I risultati ottenuti con ipotesi distributive differenti sono risultati superiori, come era prevedibile, agli attuali obblighi normativi di Solvency I e sono stati poi posti a confronto con i requisiti patrimoniali che entreranno in vigore nel prossimo futuro all'interno del progetto Solvency II.

In secundis, si è considerata la struttura multivariata del dataset in questione, aspetto che non è stato preso in considerazione nella precedente letteratura sul tema. L'obiettivo è stato quello di analizzare le dipendenze fra i tre rami disponibili, ai fini dell'individuazione di un requisito patrimoniale in linea con la struttura di dipendenza empirica, anche attraverso l'impiego delle copule. In particolare, la specificità dei sinistri danesi sta soprattutto nella pesantezza della coda della distribuzione empirica ed è stato quindi possibile utilizzare questi dati per definire e stimare la *tail dependence*.

In entrambe queste analisi l'obiettivo è stato dunque quello di costruire dei c.d. *modelli interni*, il cui impiego verrà via via incentivato all'interno del futuro sistema legislativo di Solvency II. Una delle maggiori sfide che vengono poste al mondo attuariale sta allora nella scelta di distribuzioni adeguate da porre alla base di tali modelli, e si è inoltre mostrato quali possano essere delle opportune vie per la calibrazione dei relativi parametri, la cui stima deve presentare i requisiti della validità e della continuità nel

tempo.

Presentiamo in breve la struttura del lavoro.

Nel capitolo 1 si descrive il ruolo giocato dal ramo incendio all'interno dei sinistri c.d. catastrofali, illustrando l'ampiezza della sua portata. Sono inoltre presentati il significato di polizza danni indiretti e alcune statistiche riferite al mercato italiano ed europeo, prima di una breve presentazione del dataset in questione.

Nel capitolo 2 sono introdotte le distribuzioni utili per descrivere il numero e il costo unitario dei sinistri, dando particolare risalto alla distribuzione di Pareto e al filone di studi che rientra sotto il nome di *Extreme Value Theory*, che si propone di individuare dei modelli utili alla descrizione degli eventi estremi. Si vede poi quali possano essere alcuni strumenti statistici pratici ai fini di analisi empiriche, con particolare riguardo alle rappresentazioni delle funzioni di probabilità, ai *Q-Q Plots* e alla funzione degli eccessi medi. Le nozioni affrontate in questo capitolo trovano infine applicazione sui sinistri danesi (paragrafo 2.6).

Nel capitolo 3 sono presentati diversi modelli alternativi che possono descrivere il costo aggregato provocato dai sinistri. Particolare attenzione è dedicata al controllo fra momenti empirici e teorici e all'individuazione dei requisiti patrimoniali su un orizzonte annuale attraverso una misura di tipo *VaR*, scelto un livello di confidenza del 99.5%, secondo l'approccio di Solvency II. Come si diceva, sono poi proposti dei confronti con la normativa che entrerà in vigore tra poco all'interno dell'Unione Europea, e si è visto quali possano essere delle efficaci modalità per trasferire il rischio ai riassicuratori, con particolare riguardo al *pricing* di una riassicurazione *excess of loss*.

Nel capitolo 4 si costruiscono dei modelli stocastici per il costo sinistri generato dai singoli rami, che viene successivamente aggregato secondo ipotesi differenti. Per far questo si rendono necessarie alcune premesse riguardanti la nozione di dipendenza di coda e la sua stima, nonché dei cenni alla teoria delle copule. Si giunge così a mostrare la differenza fra i requisiti patrimoniali individuati al variare della struttura di dipendenza scelta.

Capitolo 1

Rischi catastrofali e assicurazione incendio

Obiettivo di questo capitolo è presentare il significato di rischio catastrofale, analizzare le cause che possono provocarlo e vedere che impatto hanno avuto rischi di questo tipo sulle società moderne; questi argomenti saranno presentati nel paragrafo 1.1. Seguirà nel paragrafo 1.2 una presentazione dell'assicurazione incendio: oltre a descrivere l'oggetto della copertura, si mostreranno alcune statistiche di mercato che aiutano a comprendere l'impatto di questa tipologia di coperture all'interno del mondo assicurativo. Nel paragrafo 1.3 verrà poi presentato un dataset molto noto nella letteratura attuariale, contenente oltre 20 anni di registrazioni di sinistri incendio in Danimarca, ciascuno superiore alla soglia di 1 milione di corone danesi; questi dati costituiranno il punto di partenza per una serie di analisi che verranno affrontate nei capitoli successivi.

1.1 I rischi catastrofali e le loro cause

I rischi catastrofali sono legati alle catastrofi, intese come particolari eventi aleatori che di norma si verificano con una bassa frequenza, ma che, al loro verificarsi, producono danni di dimensioni molto rilevanti¹. Una distinzione molto importante va subito effettuata tra il significato di *catastrofe naturale* e quello di *catastrofe tecnica*.

Le prime sono prodotte dalle forze della natura e la loro dimensione dipende da fattori quali l'intensità delle cause scatenanti, le tecniche di co-

¹Selleri (1996)

struzione degli edifici, le misure di prevenzione adottate e altri fattori, quali l'orario in cui si verifica l'evento. Con riferimento al terremoto avvenuto in Abruzzo nell'aprile 2009, vediamo come tutti e quattro questi fattori abbiano inciso in modo determinante e come l'ultimo di essi (l'ora notturna dell'evento) abbia giocato un triste ruolo nel far lievitare l'ammontare dei danni e il numero delle vittime. Tra le cause che possono scatenare catastrofi naturali evidenziamo inondazioni, terremoti, eruzioni vulcaniche, gelo, valanghe, grandine e infine, elemento di grande interesse per il nostro lavoro, incendi.

Diverse sono le catastrofi tecniche, quelle generate dall'uomo e riconducibili alle sue attività. Possono essere provocate da tutte le forme di veicoli circolanti (auto, treni, aerei, navi), da grandi incendi o da crolli. Gli ultimi anni hanno evidenziato inoltre il peso rilevante di altre tipologie di catastrofi che possono essere generate dalla mano umana; ci si sta riferendo al ruolo degli attentati terroristici e a quello dell'inquinamento causato dalle attività industriali.

Le cause fin qui menzionate possono provocare di per sè anche sinistri di tipo non catastrofale (si pensi all'incendio scoppiato in un'azienda che coinvolge una casa adiacente di piccole dimensioni) e per questo va chiarita la differenza tra *rischi convenzionali* e *rischi catastrofali*, rispetto a due fattori: frequenza ed importanza del rischio. Caratteristica chiave dei rischi catastrofali è infatti la bassa frequenza dell'evento insieme all'ampio numero delle unità assicurate colpite al verificarsi della catastrofe. I rischi convenzionali sono invece più frequenti ma producono danni su poche unità assicurate. Questo si riflette in una maggior facilità da parte della compagnia nel riuscire a calcolare il premio in maniera adeguata; inoltre, per quest'ultima tipologia di sinistri si realizza un migliore equilibrio del portafoglio della compagnia al crescere del numero di unità assicurate. Al contrario, nel caso di catastrofi, ad esempio naturali, l'eccessiva concentrazione geografica delle unità assicurate può provocare, in caso di sinistro in quelle zone, una minaccia ancora più forte alla solvibilità dell'impresa. Questo evidenzia come i fattori necessari per poter calcolare, nell'ambito di un rischio catastrofale, la *probable maximum loss* (PML), ovvero la dimensione del sinistro che può prodursi in uno scenario particolarmente sfavorevole, siano difficili da valutare e vadano oltre i tradizionali parametri di frequenza e danno medio, in quanto risulta necessario conoscere:

- i valori esposti al rischio, suddivisi per area geografica;
- la natura del rischio;

- la particolare esposizione al rischio.

Andrà inoltre realizzato il c.d. “controllo dei cumuli”, ovvero l’analisi dell’importo totale dei valori assicurati.

Con riferimento al dataset che presenteremo nel paragrafo 1.3, vogliamo comprendere che tipo di rischio andremo a considerare. Alla luce di quanto si è detto, si tratta di un rischio convenzionale o di un rischio catastrofale? Se guardassimo i due indicatori appena presentati, potremmo dire di trovarci in una situazione intermedia e il motivo lo vediamo qui di seguito:

- *frequenza*: se è vero che il rischio incendio è un rischio piuttosto frequente, è pur vero che, nel dataset al quale si accennava nell’introduzione, sono riportati solo i sinistri superiori a 1 milione di corone danesi; è facile comprendere che per questi sinistri la frequenza di accadimento, della quale si parlerà nel capitolo 2, risulta notevolmente ridotta;
- *importanza*: il numero di unità colpite dai sinistri incendio risulta in genere limitato, in quanto in genere un incendio colpisce un solo edificio o comunque un numero ridotto di unità assicurate.

In altre parole, considerando il primo aspetto, siamo in una situazione che ci ricorda le caratteristiche delle catastrofi naturali, mentre volgendo lo sguardo al secondo vengono alla mente i tradizionali connotati dei rischi convenzionali; non va tuttavia dimenticato che, nonostante il numero delle unità colpite sia ridotto, l’impatto generato dal singolo evento, anche per come è stato costruito il dataset, risulta di notevole entità (sono le c.d. *large losses*); tanto è vero che, come vedremo nel paragrafo 1.1.2, un gran numero di catastrofi tecniche è provocato proprio dallo scoppio di grandi incendi. Vale qui la pena di ricordare che nella classificazione proposta dall’autorità di vigilanza europea nell’ambito del progetto Solvency II (vedi capitolo 3) il rischio incendio, anche per sinistri di portata elevata, rientra comunque nel modulo dell’*underwriting risk* e non in quello dei *cat risks*.

1.1.1 Aspetti peculiari della gestione dei rischi catastrofali

Dopo aver presentato il significato di rischio catastrofale, vogliamo fare un rapido cenno a due aspetti legati alla gestione assicurativa di questi rischi.

Il primo elemento su cui vogliamo soffermarci è quello del *trasferimento del rischio*. Di fronte alla minaccia dei rischi catastrofali, un numero sempre maggiore di persone riterrà necessario assicurare la propria abitazione o la propria azienda contro il rischio di eventi estremi. Tale assicurazione è

possibile e costituisce il fondamento giuridico di questo lavoro; ad esempio il Codice Civile, art. 1912, afferma: “Salvo patto contrario, l’assicuratore non è obbligato per i danni determinati da movimenti tellurici, da guerra, da insurrezione o da tumulti popolari”. Da tempo si discute in Italia circa la possibilità di rendere obbligatorie tali coperture, ma, anche in assenza di decisioni legislative in merito, l’incremento della domanda potrebbe causare la perdita dei requisiti di omogeneità, diversificazione e indipendenza per il portafoglio delle compagnie di assicurazione. La riassicurazione, operando a livello sovranazionale, si configura come la prima via di uscita a questo problema. I maggiori riassicuratori mondiali dispongono infatti di portafogli altamente diversificati che consentono di far fronte a ingenti perdite concentrate in singole aree geografiche. Sebbene questa sia la tradizionale e più diffusa metodologia di trasferimento del rischio, della quale discuteremo ampiamente nel capitolo 3, pare opportuno menzionare l’esistenza di un altro strumento offerto dai mercati alle compagnie di assicurazione: i *cat bonds*. Consistono in obbligazioni, collocate, sempre a scopo riassicurativo, dall’assicuratore sul mercato dei capitali, tramite intermediari specializzati (il c.d. *Special Purpose Vehicle*); il capitale e/o le cedole verranno liquidate in misura completa, parziale o nulla a seconda del verificarsi o meno dell’evento catastrofale; in caso si verifichi l’evento, l’eccedenza rispetto al pagamento servirà alla compagnia per l’indennizzo dei sinistri avvenuti.

Passando al secondo aspetto di interesse, esso è rappresentato dalla *riserva di equilibrio*, uno strumento a disposizione dell’impresa di assicurazione per gestire i rischi ambientali e catastrofali. Il suo fondamento legislativo è individuato nel Codice delle Assicurazioni, art. 37 comma 7, dove si parla delle riserve di perequazione, e nel Decreto Ministeriale n. 705 del 19.11.1996. Poichè per loro natura i rischi catastrofali non consentono di raggiungere l’equilibrio gestionale su un singolo esercizio, si rende necessario un accantonamento degli utili prodotti negli anni in cui non si verifica l’evento, in percentuale sui premi incassati (fissata al 3% dal suddetto Decreto Ministeriale), da utilizzare negli anni in cui l’ammontare dei sinistri supererà quello dei premi; questo perché i ricavi risultano di competenza non degli azionisti, ma della gestione. Le c.d. “condizioni di ammissibilità” sono costituite dal rapporto sinistri a premi superiore a 1 su un orizzonte temporale definito, comunque piuttosto lungo, e, nello stesso arco di tempo, da una volatilità dello stesso rapporto superiore ad una soglia prefissata.

1.1.2 L'andamento nel tempo

Volendo considerare come è variato nel tempo il rischio di fenomeni catastrofali, utilizziamo alcuni dati resi pubblicamente disponibili da Swiss Re², che offrono una visione congiunta delle catastrofi naturali e di quelle tecniche. La nozione di catastrofe qui utilizzata è che l'evento abbia generato una serie di conseguenze, riguardanti l'ammontare dei danni e il numero delle persone colpite³.

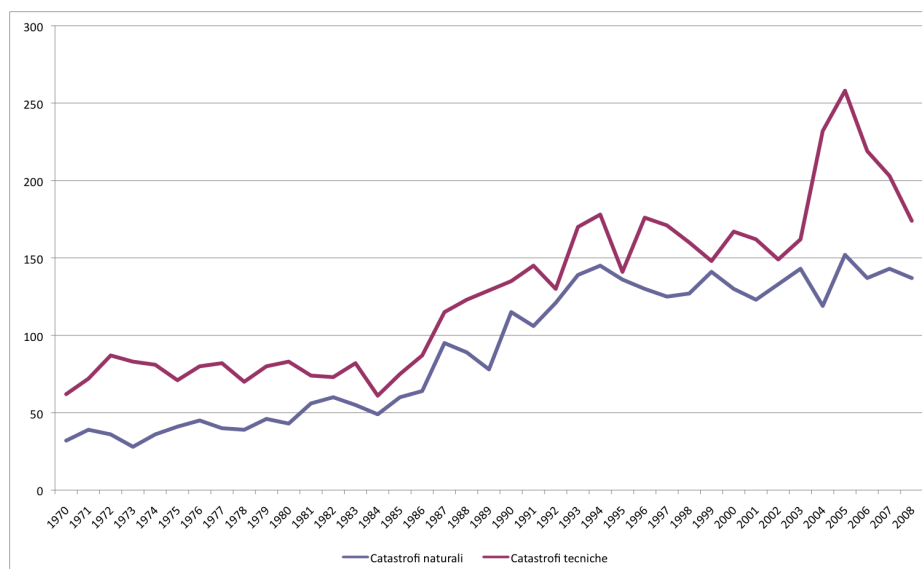


Figura 1.1: Catastrofi naturali e tecniche 1970-2008: numero di eventi

In figura 1.1 è rappresentato il numero annuo di catastrofi fra il 1970 e il 2008. L'aspetto che si vuole sottolineare è il trend crescente nel tempo del numero di eventi, sia nel caso di catastrofi naturali che di catastrofi tecniche. Notiamo inoltre che queste ultime sono sempre superiori in numero rispetto alle precedenti e che, qualora considerassimo congiuntamente le due tipologie di catastrofi, la somma complessiva si aggirerebbe, negli anni successivi al 2000, a più di 300 eventi all'anno.

Passando a considerare l'ammontare dei danni registrati durante questi eventi catastrofali, la figura 1.2 mostra l'andamento nel tempo delle perdite

²Enz e Schwarz (2009)

³Per il 2008, ad esempio, si richiedono almeno 85.4 milioni di dollari di danni complessivi oppure 20 morti o dispersi, 50 feriti e 2000 senzatetto.

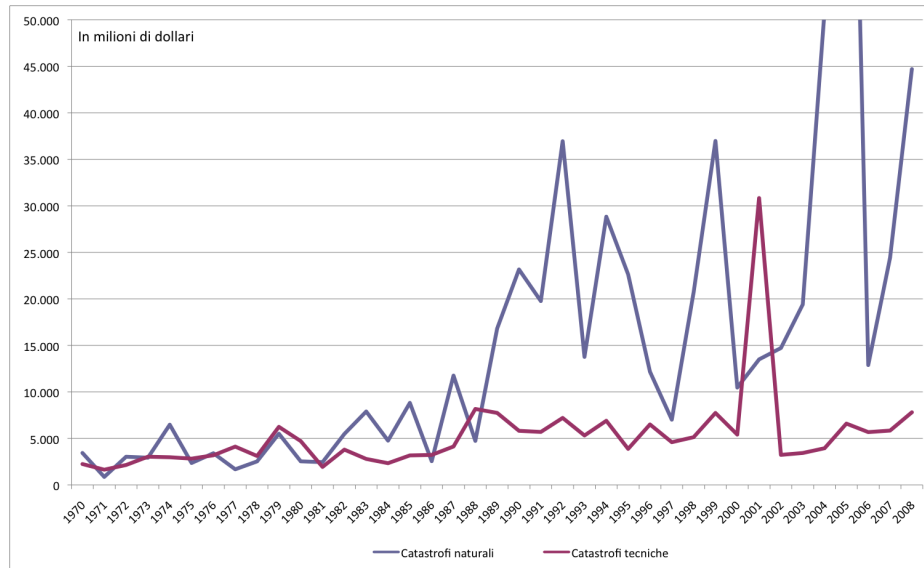


Figura 1.2: Catastrofi naturali e tecniche 1970-2008: perdite assicurate

economiche assicurate derivanti dalle catastrofi⁴. In questo caso l'impatto delle catastrofi tecniche risulta inferiore a quello delle catastrofi naturali. Nonostante molti periodi presentino danni inferiori ai 5 miliardi di dollari (comunque tutt'altro che trascurabili), si registrano numerose punte superiori ai 20 miliardi di dollari⁵. Lavorando con i dati sui sinistri assicurati, la frequenza viene analizzata congiuntamente al danno medio assicurato. Quest'ultimo dipende dall'ammontare dei valori assicurati e dalla loro composizione e, anche se disponessimo di dati sul solo trend dei danni medi assicurati, al netto dell'effetto apportato dalla frequenza, non potremmo comunque esprimerci con chiarezza circa l'eventuale aumento del danno medio. Quello che tuttavia ci interessa è l'osservazione di un fenomeno in crescita: era in crescita il numero complessivo delle catastrofi e lo stesso vale per l'ammontare *reale* dei danni. È da notare, in aggiunta alla considerazione dell'enormità di queste cifre, che le compagnie devono ovviamente rispondere per gli impegni assunti sia per le catastrofi naturali che per quelle tecniche, pari alla somma, anno per anno, delle due curve: i rischi catastrofali stanno diventando una componente sempre più importante nel contesto mondiale e

⁴I dati sono tutti indicizzati al 2008.

⁵Per una lettura più agevole del grafico, sono state tagliate le perdite registrate nel 2005, superiori ai 100 miliardi di dollari, la cui principale causa è stato l'ingente ammontare dei danni provocati dal passaggio dell'uragano Katrina sulla città di New Orleans.

il loro andamento deve necessariamente stimolare il contesto assicurativo e riassicurativo.

Volendo riassumere il significato di quanto detto, si noti la tabella 1.1 che riporta, a titolo di esempio, il confronto tra il numero di eventi e il relativo ammontare (in miliardi di dollari) per le catastrofi (naturali e tecniche) avvenute nei primi due e negli ultimi due anni registrati. Gli eventi sono triplicati, ma è l'impatto economico che ancora di più ci invita alla riflessione. Sicuramente una motivazione convincente sta nella diffusione sempre più ampia delle coperture assicurative, che si riflette in un maggiore impegno di risarcimento che si impone sulle compagnie. Altre spiegazioni riguardano l'ampliamento della gamma di rischi che si è manifestata nel tempo e che meglio considereremo nel paragrafo che farà luce sulle ragioni dell'aumento delle catastrofi.

	Numero di eventi	Perdite assicurate
1970	94	5.7
1971	111	2.5
2007	346	30.3
2008	311	52.5

Tabella 1.1: Catastrofi naturali e tecniche 1970-2008: un confronto

Prendendo come riferimento, a titolo di esempio, il 2008, vogliamo mostrare con più chiarezza il rapporto tra eventi naturali e sinistri provocati dall'uomo, per poi evidenziare l'impatto che gli incendi hanno su questo tipo di sinistri. In tabella 1.2 è mostrato l'impatto di eventi naturali ed eventi *man made*, complessivi e suddivisi per causa del danno⁶. Si vede ancora una volta come si registrino più eventi generati per mano dell'uomo, mentre maggiori danni siano provocati dalle forze naturali, per quanto, come detto, ciò dipenda anche dalla struttura del mercato assicurativo.

All'interno dei rischi catastrofali di origine naturale l'impatto dell'incendio è abbastanza contenuto: si sono verificati solo 2 eventi in tutto il 2008, con perdite assicurate di poco superiori all'1% del totale delle catastrofi naturali. Diversa è la situazione all'interno delle catastrofi tecniche, dove il rischio di incendio ed esplosioni è la causa principale delle catastrofi; esso costituisce più di un quarto del numero di eventi (26%) e, soprattutto, è di lunga la principale causa delle perdite assicurate, rappresentando il 67%

⁶Le perdite assicurate sono misurate in milioni di dollari.

	Numero di eventi	in %	Vittime	Perdite assicurate	in %
Catastrofi naturali	137	44.1%	234842	44692	85.1%
Alluvioni	44		3184	2059	
Tempeste	62		141913	39288	
Terremoti	12		87829	422	
Incendi e siccità	2		32	500	
Altre cause	17		1884	2423	
Catastrofi tecniche	174	55.9%	5618	7812	14.9%
Incendi ed esplosioni	45		454	5255	
Disastri aerei	17		496	758	
Disastri marittimi	41		1598	548	
Disastri ferroviari	6		166	0	
Incidenti minerari	15		686	476	
Collasso di edifici e ponti	6		204	0	
Scioperi, terrorismo e altre cause	44		2014	775	
Totale	311	100%	240460	52504	100%

Tabella 1.2: Catastrofi naturali e tecniche 2008: numero, vittime e perdite assicurate

delle perdite registrate. Considerando congiuntamente le perdite provocate dall'incendio all'interno degli eventi naturali e di quelli *man made*, le perdite ammontano all'11% delle perdite assicurate complessive, una cifra pari a quasi 6 miliardi di dollari nel solo 2008. Se in più teniamo conto che tali perdite si sono registrate in un numero non elevatissimo di eventi (47), si comprende come ogni sinistro abbia provocato una perdita media assicurata di 122 milioni di dollari, superiore rispetto a quella di molti altri eventi presentati in tabella, elemento che di certo stimola l'analisi di questo aspetto del contesto assicurativo.

Un'ultima analisi riguarda la descrizione delle cause che nel 2008 hanno provocato catastrofi tecniche collegate all'incendio. Uno "zoom" sulle cause dei 45 eventi *Incendi ed esplosioni* della tabella 1.2 è riportato nella tabella 1.3.

	Numero di eventi	in %	Vittime	Perdite assicurate	in %
Incendi ed esplosioni	45	100%	454	5255	100%
Industrie e magazzini	24	54%	159	2146	41%
Petrolio e gas	8	18%	100	1605	30%
Centri commerciali	1	2%	40	0	0%
Altri edifici	10	22%	126	1086	21%
Altre cause	2	4%	29	418	8%

Tabella 1.3: Catastrofi tecniche 2008: cause di incendi ed esplosioni

Quello che emerge in maniera piuttosto chiara è la predominanza di 3 cause: rischi industriali, rischi legati ad esplosioni in giacimenti petroliferi e fughe di gas e incendi di altre tipologie di edifici, tra i quali le abitazioni,

che insieme costituiscono più del 90% del numero di eventi e delle perdite assicurate. L'impatto dei restanti rischi è invece piuttosto marginale. Tra le perdite medie assicurate, predominano quelle avvenute a causa di petrolio e gas (200 milioni di dollari per evento). Inoltre, anche se nel seguito ci riferiremo essenzialmente all'impatto del singolo sinistro e alla modellizzazione delle distribuzioni adatte a descriverlo, merita un cenno l'elevato numero di vittime generato da questo tipo di calamità, che può avere risvolti nelle assicurazioni sulla vita.

Le ragioni dell'aumento

Nella sezione precedente abbiamo osservato come i dati storici mostrino una crescita netta nella frequenza e nelle perdite assicurate relative agli eventi catastrofali. Abbiamo già anticipato che, mentre la frequenza è triplicata, ancora più forte risulta l'effetto delle perdite economiche assicurate; si tratta di spiegare quali fattori impattano su questi due elementi.

Un primo aspetto è sicuramente derivante dalla *progressiva espansione delle aree metropolitane*⁷. Basti pensare che, se alla metà del secolo scorso era soltanto una città a superare i 10 milioni di abitanti, oggi il loro numero supera le venti unità, delle quali molte situate in paesi del Terzo Mondo. Questo fatto è problematico pensando alle catastrofi naturali, dal momento che alcune di queste grandi città sono costruite in aree a rischio e, in caso si verifici l'evento, i danni si estenderebbero ad un numero enorme di persone e beni (si pensi all'uragano Katrina su New Orleans). Inoltre, si accresce parallelamente il rischio di catastrofi tecniche, dal momento che l'espansione urbana si muove insieme alla crescita della produzione industriale, con i rischi ad essa connessi (vedi tabella 1.3).

L'emissione nell'area di gas è una conseguenza del primo punto, e genera il ben noto fenomeno del *riscaldamento globale*, che incide molto sull'ammontare delle precipitazioni e degli uragani. Questo aspetto, legato alle attività umane, incide sulla frequenza e sull'intensità delle catastrofi naturali.

L'*aumento della qualità della vita* è un altro fattore che spiega l'aumentare delle perdite assicurate nel tempo. Esempi di questo aspetto sono le più costose metodologie di costruzione degli edifici rispetto al passato, che si riflettono in maggiori costi di rimpiazzo, e una quantità sempre più elevata di beni elettronici all'interno di abitazioni ed industrie. In altre parole, il valore nominale dei rischi esposti, Δ_V , cresce sia per effetto dell'inflazione,

⁷Berz e altri (2000)

Δ_I , sia per effetto dell'aumento della qualità della vita, Δ_L , ovvero

$$\Delta_V = \Delta_I \cdot \Delta_L$$

Un'approssimazione dell'effetto combinato dei due fattori può essere individuato nell'andamento del PIL; tuttavia, anche qualora scontassimo l'effetto della qualità della vita, oltre che dell'inflazione (come in precedenza), attraverso il PIL, registreremmo ancora un trend rivolto verso l'alto, segno che la qualità della vita è solo uno dei fattori che può spiegare l'aumento delle perdite assicurate.

Un ultimo elemento può essere individuato nella *progressiva espansione delle coperture assicurative*, che permette di comprendere in misura ulteriore l'aumento dell'impatto di ogni singolo sinistro catastrofale sulle compagnie di assicurazione e riassicurazione. Un esempio di tale aspetto, del quale si parlerà nel paragrafo 1.2.1, è la progressiva tendenza dell'impresa ad assicurarsi contro i rischi derivanti dall'interruzione dell'attività.

1.2 L'assicurazione incendio

L'assicurazione contro il rischio di incendio è stata una delle prime coperture a svilupparsi all'interno del contesto assicurativo. Già in epoca medioevale, in Danimarca, si diffuse l'idea tra i possessori di immobili di condividere i rischi collegati alla diffusione delle fiamme che colpivano le proprietà. Qualche secolo dopo, la diffusione del commercio navale nel Mediterraneo rese necessaria la copertura ai beni sia durante la fase di trasporto che durante quella di permanenza nei porti. Il noto *Great Fire* che colpì Londra nel 1666 fu una sferzata tale al concetto di sicurezza da affrettare la necessità di porre rimedio ai possibili danni provocati dal fuoco, se si pensa che, anche a causa del diffuso utilizzo del legno nell'arte delle costruzioni, bruciarono ben 13.000 case e 87 chiese⁸.

A differenza di quanto avviene in altri rami assicurativi, come quelli di responsabilità civile, nelle assicurazioni incendio il bene assicurato è ben definito e il contratto è stipulato per porre rimedio a perdite pecunarie derivanti dal suo danneggiamento. La copertura garantita da questo ramo, tuttavia, non si arresta a questo stadio, come vedremo nel paragrafo 1.2.1. A seguire, nella sezione 1.2.2, vedremo alcune statistiche, che permettano di comprendere la diffusione e l'andamento di questo tipo di assicurazioni in Italia e in Europa.

⁸Galey e Kuhn (2009)

1.2.1 L'oggetto della copertura e la polizza danni indiretti

L'assicurazione in questione è stipulata attraverso una polizza a rischio definito, ovvero che enumera ad uno ad uno gli eventi assunti dall'assicuratore. Scopo principale dell'assicurazione incendio è quello di indennizzare l'assicurato contro il rischio di perdite pecuniarie derivanti dal *danno materiale* subito dal bene coperto dal contratto, anche se di proprietà di un terzo rispetto al contraente, danneggiamento che può avvenire a causa di incendio⁹ ma anche di altri eventi. Ne sono esempi i fulmini, le esplosioni e gli scoppi non causati da ordigni esplosivi; lo sviluppo di fumi, gas e vapori, l'anomalo funzionamento di apparecchiature elettroniche o la fuoriuscita di sostanze radioattive, quando sono conseguenze dirette di un incendio (*danni consequenziali*). Si intendono inclusi anche i rischi derivanti dall'impatto di aerei sull'edificio assicurato. Sono tipicamente coperti inoltre i danni derivanti dalle misure adottate per porre rimedio all'evento (si pensi ai liquidi usati per domare le fiamme o agli oggetti danneggiati dall'acqua usata nello spegnimento), la perdita di reddito da affitto e altri costi temporanei. Possono essere inoltre inclusi nella copertura, purchè specificati, rischi aggiuntivi rispetto a quelli basilari:

- danni derivanti da eventi naturali, come inondazioni, alluvioni, frane, eruzioni vulcaniche e terremoti;
- rischi socio-politici, come i sinistri che avvengono durante scioperi, rivolte o atti terroristici¹⁰; restano esclusi i sinistri che avvengono durante fenomeni bellici o che sono conseguenza di decisioni delle amministrazioni locali (come gli espropri);

Per fornire coperture sempre più integrali e per evitare i possibili fraintendimenti che si generano nel momento in cui è necessario specificare ogni singolo rischio assicurato, il mercato ha sviluppato sempre di più le cosiddette polizze *all risks*, nelle quali l'impresa di assicurazione interviene per ogni tipo di sinistro che colpisce il bene assicurato, fatta eccezione per quegli eventi esplicitamente esclusi.

Con riguardo al valore del bene oggetto della copertura, è bene precisare che questo tipo di copertura viene di solito richiesta, e fornita, a *valore*

⁹L'incendio viene esclusivamente inteso come luce *prodotta da fiamme*.

¹⁰La situazione socio-politica mondiale post-11 settembre ha portato sia all'aumento della domanda per la copertura da atti terroristici, sia ad un'attenta analisi delle esclusioni da parte delle compagnie.

intero, ovvero i premi sono pagati con l'intenzione di assicurare l'integralità del bene; essa può essere conclusa in due forme:

- *valore a nuovo*: si stima la spesa necessaria per la completa costruzione a nuovo del fabbricato e il rimpiazzo del contenuto;
- *stato d'uso*: si stima la spesa necessaria per la completa costruzione a nuovo del fabbricato e il rimpiazzo del contenuto, una volta decurtato un deprezzamento stabilito in relazione alla conservazione, alle tecniche di costruzione e alla destinazione.

Nel caso in cui si verifichi l'evento, si tratterà di confrontare l'ammontare della somma assicurata con il *valore di ricostruzione*, ovvero il valore reale dei beni assicurati al momento del sinistro. In caso quest'ultimo sia superiore, ci si ritrova in un caso di sottoassicurazione, con la conseguente applicazione della regola proporzionale (art. 1907 c.c.):

$$\text{indennizzo} = \text{danno effettivo} \cdot \frac{\text{valore assicurato}}{\text{valore di ricostruzione}}$$

Precisiamo che, nel caso opposto (sovra-assicurazione), l'assicuratore resta obbligato per il solo valore del bene assicurato.

Come si è già accennato, vi è una crescente tendenza da parte delle imprese ad assicurarsi non solo contro i *danni diretti* derivanti dall'incendio, ma anche contro i *danni indiretti*, essenzialmente la perdita dei profitti derivante dall'interruzione dell'attività. Presentiamo ora questo aspetto che poi incontreremo nel dataset di riferimento che verrà presentato nel paragrafo 1.3.

Tale assicurazione ha come scopo quello di risarcire l'impresa che, a seguito del danneggiamento di determinati beni, non può svolgere regolarmente la propria attività. Non può essere considerata un'assicurazione autosufficiente, perchè l'assicuratore è obbligato solo se la riduzione o la cessazione di attività sono originate da un evento coperto da un'assicurazione danni materiali diretti: tale assicurazione deve essere in vigore e deve contemplare lo stesso rischio che causa il sinistro sotto la danni indiretti¹¹.

Più in dettaglio, la copertura può essere assunta solo al verificarsi di alcune condizioni:

¹¹Chiarlo (1990)

- la perdita di profitto deve essere conseguenza della caduta del volume di affari; non sono ricomprese penalità contrattuali per ritardo verso i clienti, perdite di immagine e deprezzamento dei prodotti, che possono comunque essere assicurati con garanzie accessorie;
- per via della natura accessoria della copertura, la riduzione dei ricavi deve essere direttamente ricollegabile ad un evento che abbia colpito i beni dell'impresa e che impedisca il regolare svolgimento dell'attività; non può essere motivata dalla riduzione strutturale della domanda o da inefficienze della rete di vendita;
- il periodo di interruzione può protrarsi nel tempo e continuare oltre il momento della ricostruzione fisica degli impianti, ma non può essere illimitato;
- ad ostacolare la normale azione di ripresa delle attività non devono intervenire nuovi fatti eccezionali che alterino le condizioni interne ed esterne precedenti al sinistro.

Come si nota, il legame con l'assicurazione principale è piuttosto forte, ma vi sono alcune differenze sostanziali. In particolare, nonostante le richieste del mercato, le limitazioni della polizza danni indiretti risultano a volte più stringenti di quelle inserite nel contratto riferito all'assicurazione incendio, motivo per il quale si può verificare la situazione in cui, mentre il danno coperto da quest'ultima risulta indennizzabile, questo non succede per i sinistri che interferiscono con il regolare svolgimento dell'attività dell'impresa assicurata. Inoltre, è diverso l'approccio alla valutazione del rischio, in quanto l'assicuratore diretto valuta positivamente i sistemi di sicurezza e gli altri meccanismi di prevenzione e contenimento del rischio, mentre quello indiretto (spesso lo stesso) valuta gli stessi in maniera negativa, per i più alti costi di riparazione e sostituzione.

Va sottolineato che la penetrazione di tali polizze nel mercato italiano è piuttosto bassa; è difficile fornire una misura precisa di tale diffusione, dato che i premi confluiscono nel complesso degli introiti per la copertura delle perdite pecuniarie, ma, stando ad un'analisi svolta nel 2006¹², si stimava che solo il 10% delle imprese italiane disponesse di tale copertura; all'estero si registrano invece percentuali più consistenti, con punte molto elevate, come il 95% delle imprese tedesche.

¹²Ania (2006). Danni da interruzione di esercizio. Relazione tecnica, Ania.

Tra le innovazioni che il mercato ha proposto per soddisfare le esigenze delle imprese, sottolineiamo le seguenti forme di copertura dei danni indiretti¹³:

- per aziende poco strutturate, viene rimborsata una *percentuale prefissata*, pari al 10-20% del danno diretto;
- sempre per imprese di minori dimensioni, per ogni giorno di sospensione totale viene risarcita una *diaria giornaliera* pari all'utile lordo annuo ripartito sui giorni lavorativi;
- *loss of profit*: l'impresa viene risarcita per il calo dell'utile lordo, su un periodo che va dal giorno del sinistro a quello in cui è ripresa la produzione, e per le spese supplementari sostenute per garantire la propria sopravvivenza (coprire i c.d. costi fissi) e per evitare o ridurre la diminuzione del giro d'affari¹⁴;
- *margin di contribuzione*: nata in Italia nel 1994, risarcisce il danno provocato dalla diminuzione del margine di contribuzione causato dalla riduzione dei ricavi, a seguito dell'evento indicato nell'assicurazione principale; il margine è definito come la differenza tra i ricavi di vendita collegati all'attività industriale indicata in polizza e il costo variabile della produzione (una misura di quest'ultimo può essere ottenuta dalla differenza tra rimanenze iniziali e finali a cui vengono sommati i costi di materie prime, salari e ogni altro costo collegato alla gestione).

1.2.2 Statistiche del mercato italiano e di quello europeo

In questa sezione presentiamo alcuni dati del mercato italiano relativi al ramo incendio, che permettano di cogliere i trend e i valori in gioco. Tale tipologia di copertura costituisce, nella suddivisione italiana, il ramo VIII, denominato *Incendio ed elementi naturali*.

Con riferimento agli introiti del settore, nel 2003 è stato superato il valore di 2 miliardi di euro di premi contabilizzati, cifra che si è accresciuta negli

¹³Bagnoli R. (2005). Danni indiretti: cosa offre il mercato. *Giornale delle assicurazioni*.

¹⁴Questa tipologia ha origini piuttosto lontane, essendo stata ideata da un broker scozzese nel lontano 1899; è tuttora in uso, con alcune varianti, in gran parte del nostro continente e costituisce la forma di copertura da danni indiretti che incontreremo nel dataset.

anni successivi¹⁵. In rapporto al totale dei rami danni¹⁶, il ramo incendio risulta avere una raccolta premi piuttosto stabile, che, nell'ultimo decennio, è risultata essere compresa tra il 6 e il 7%.

Con riferimento ai sinistri, va sottolineata la maggiore velocità di liquidazione rispetto al complesso dei rami danni, anche grazie alle meno frequenti procedure legali che complicano la tempistica e l'ammontare degli indennizzi: ad esempio, per i sinistri accaduti negli anni 2003, 2004 e 2005, il 99% degli importi è stato liquidato nei primi tre anni¹⁷. In termini di costi medi, invece, i dati relativi ai sinistri con seguito pagati e riservati del periodo 2003-2007, analizzati per generazione di accadimento e opportunamente rivalutati, parlano di un valore che oscilla attorno ai 7.000 €, mediamente superiori rispetto al ramo RCA. Superiore rispetto ai valori usualmente individuabili nel ramo legato alla circolazione degli autoveicoli è anche l'incidenza della riserva premi rispetto ai premi contabilizzati, in crescita negli anni e che ha raggiunto un valore di circa il 70%¹⁸.

Passando a considerare gli indicatori tecnici riferiti all'ammontare dei sinistri e delle spese, presentiamo alcune basi teoriche per poter comprendere gli andamenti riportati in figura 1.3, dove sono confrontati alcuni indici relativi all'andamento del ramo incendio e al totale dei rami danni. Il Loss ratio è definito come

$$\text{Loss ratio} = \frac{\text{Oneri dei sinistri}}{\text{Premi di competenza}}$$

dove:

- l'onere dei sinistri è costituito dai sinistri di competenza, intesi come sinistri pagati e riservati di competenza dell'esercizio, cui viene sottratta (sommata) una quota relativa alla sufficienza (insufficienza) delle riserve sinistri accantonate negli esercizi precedenti;
- i premi di competenza vengono ottenuti sottraendo ai premi contabilizzati la riserva uscente e sommando quella entrante.

¹⁵Ania (2008)

¹⁶Per i rami danni, i premi ammontano a più di 24 miliardi di euro nel primo anno di osservazione, il 1998, e raggiungono il loro picco nell'ultimo anno considerato, il 2007 (quasi 38 miliardi).

¹⁷Isvap (2010)

¹⁸Si veda Selleri (2003) per una spiegazione sul significato delle varie tipologie di riserve tecniche.

L'Expense ratio è invece ottenuto come

$$\text{Expense ratio} = \frac{\text{Spese}}{\text{Premi contabilizzati}}$$

dove le spese sono la somma delle provvigioni (spese di acquisizione) e delle altre spese (spese di incasso e di gestione); si fa notare che in questo caso il rapporto avviene rispetto ai premi contabilizzati e non a quelli di competenza. Da ultimo, il Combined ratio viene definito come:

$$\text{Combined ratio} = \text{Loss ratio} + \text{Expense ratio}$$

Quest'ultimo indicatore, per come è stato costruito, presenta come valore critico il 100%, in quanto in tale situazione l'ammontare dei premi è inferiore agli esborsi effettuati, ed è a tale valore che facciamo riferimento commentando quanto presente in figura.

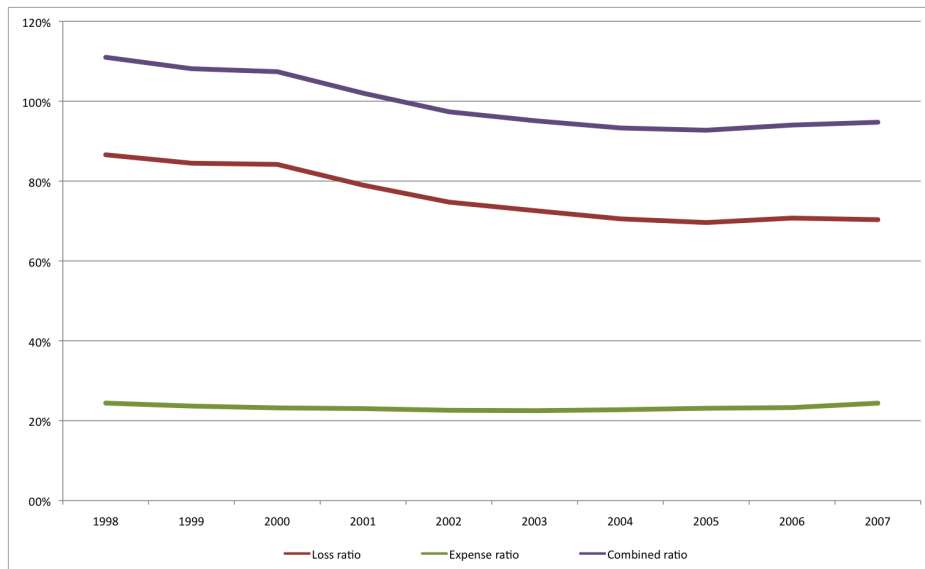
Per il ramo danni, si osserva un andamento sostanzialmente monotono decrescente per il Loss ratio e una stabilità nel tempo per l'Expense ratio, che si attesta intorno al 22-23%; di conseguenza, il Combined ratio risulta monotono decrescente. Non va dimenticato che il ramo danni ha come componente principale, che si aggira ogni anno intorno al 50% dei premi complessivi, il ramo obbligatorio della responsabilità civile degli autoveicoli; la motivazione della discesa al di sotto del 100% per il Combined ratio sta proprio nella miglior tariffazione sviluppata dalle compagnie su questa linea di prodotti.

Piuttosto diversa è invece la situazione nel ramo incendio. In particolare si verifica che:

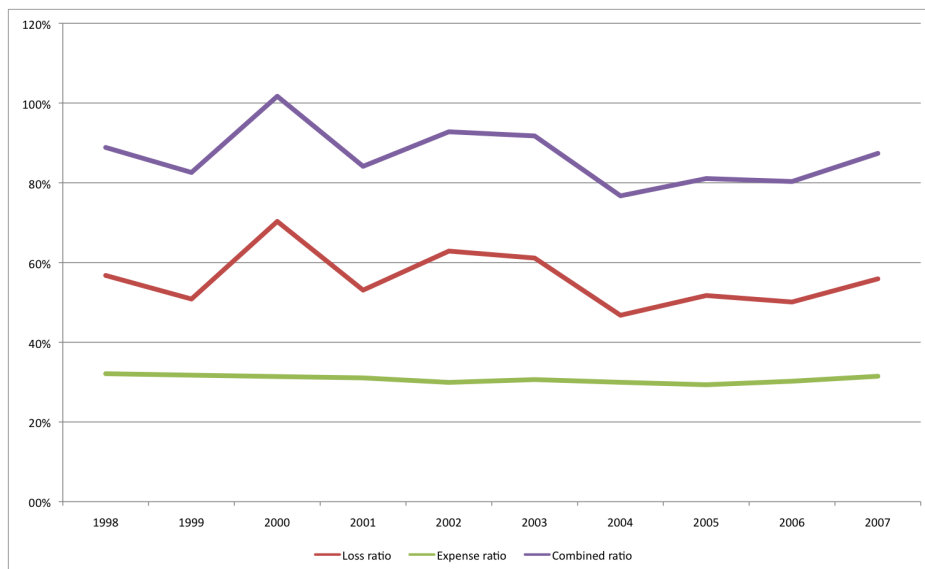
- il Loss ratio presenta un valore medio più contenuto che nel caso precedente, ma una volatilità più elevata; le motivazioni principali per quest'ultimo punto sono da ricondurre ad una minore numerosità dei sinistri attesi in questo ramo, unita ad un più elevato valore del rapporto tra variabilità del singolo sinistro e suo valore medio;
- le spese risultano più elevate, in quanto l'Expense ratio è superiore al 30%.

Con riguardo a queste ultime, ne abbiamo studiato più in dettaglio la composizione, costruendo i grafici riportati in figura 1.4¹⁹. Si nota come le

¹⁹Per una più facile confrontabilità, i due grafici sono stati costruiti usando la stessa scala.



(a) Totale dei rami danni



(b) Ramo incendio

Figura 1.3: Il ramo incendio in Italia 1998-2007: indicatori tecnici a confronto con quelli dei rami danni

spese di gestione e incasso non siano particolarmente diverse tra il totale dei rami danni ed il ramo incendio: le prime oscillano intorno al 7-8%, le seconde si attestano mediamente attorno all'8-9%, una differenza sulla quale è difficile fornire una spiegazione convincente. Quello che invece è più degno di nota è sicuramente una marcata diversità all'interno della componente provvigionale; sul totale incidono per il 15-16%, nel ramo incendio si aggirano sul 21-22%. Sicuramente la motivazione più convincente sta nell'incidenza elevata delle assicurazioni di responsabilità civile per i veicoli sul totale dei rami danni: in questo ramo *obbligatorio*, le provvigioni riconosciute agli agenti sono più contenute, in quanto essi devono persuadere i potenziali assicurati a stipulare una polizza con una determinata compagnia, ma resta inteso che l'utente dovrà assicurarsi. Diversa è la situazione su un'assicurazione come quella contro l'incendio, non obbligatoria, nel quale risulta importante incentivare gli agenti con provvigioni più elevate.

Nell'ottica di voler sottolineare la maggiore volatilità dei risultati del ramo incendio rispetto al complesso dei rami danni, già evidenziata poco fa parlando dei Loss ratios, proponiamo in figura 1.5 i saldi tecnici degli ultimi 10 anni, intendendo con quest'ultimo la seguente somma algebrica

$$(\text{premi di competenza}) - (\text{oneri sinistri}) + (\text{saldo delle altre partite}) - (\text{spese})$$

dove per saldo delle altre partite tecniche si intende il risultato di tutte le componenti di natura tecnica non incluse nelle altre voci (ad esempio la differenza fra proventi ed oneri relativi alla CID e alla CARD). L'indicatore così composto si propone di misurare il risultato tecnico dell'esercizio, senza tenere conto dei proventi (o delle perdite) derivanti dagli investimenti e dall'attività di riassicurazione. Per il ramo danni nel suo complesso, l'andamento risulta migliorato nel tempo e ne sottolineiamo la natura monotona; come si diceva, la motivazione principale è un miglioramento nei saldi tecnici del ramo RCA. Da un punto di vista strettamente numerico, i risultati del ramo incendio sono decisamente migliori, in quanto solo in un anno, il 2000, tale saldo risulta negativo, e in tutti gli anni registrati rimane comunque superiore al precedente. Quello che ci preme di più sottolineare al momento, però, è l'andamento tutt'altro che monotono: ancora una volta va evidenziata la più alta volatilità di questo ramo rispetto alla media dei rami danni.

Vogliamo ora illustrare brevemente l'impatto di questo ramo sulla raccolta premi delle assicurazioni danni in Europa. Un altro interessante spunto di ri-

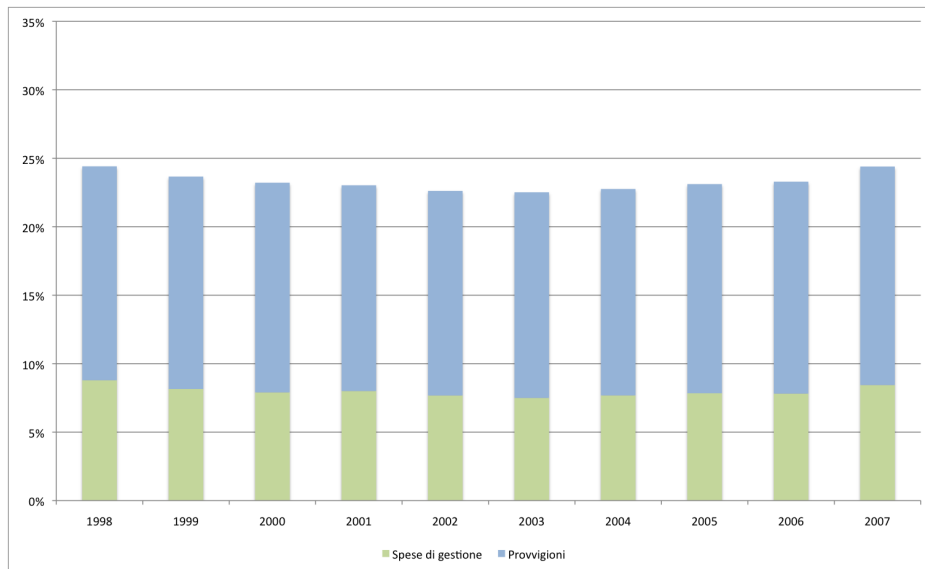
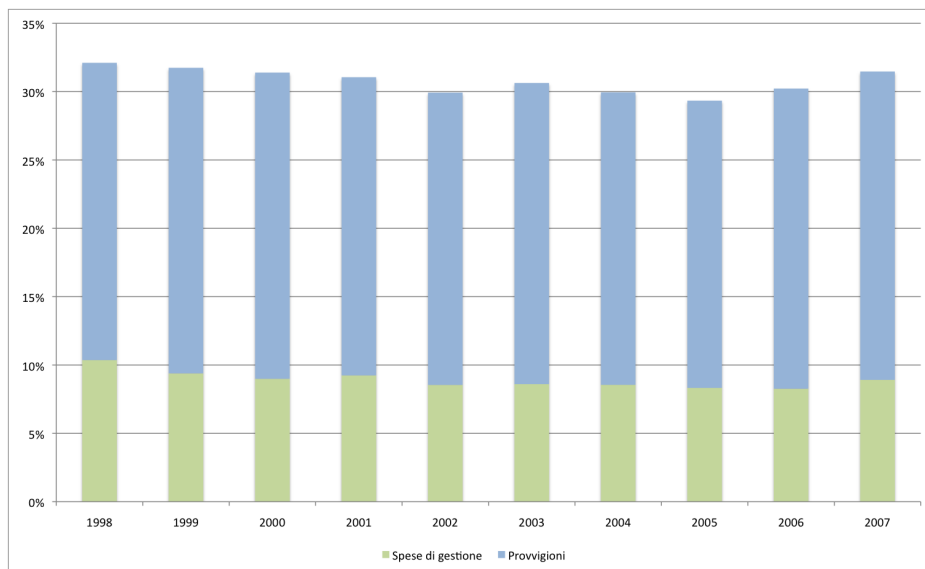
(a) *Totale dei rami danni*(b) *Ramo incendio*

Figura 1.4: Il ramo incendio in Italia 1998-2007: spese a confronto con quelle dei rami danni

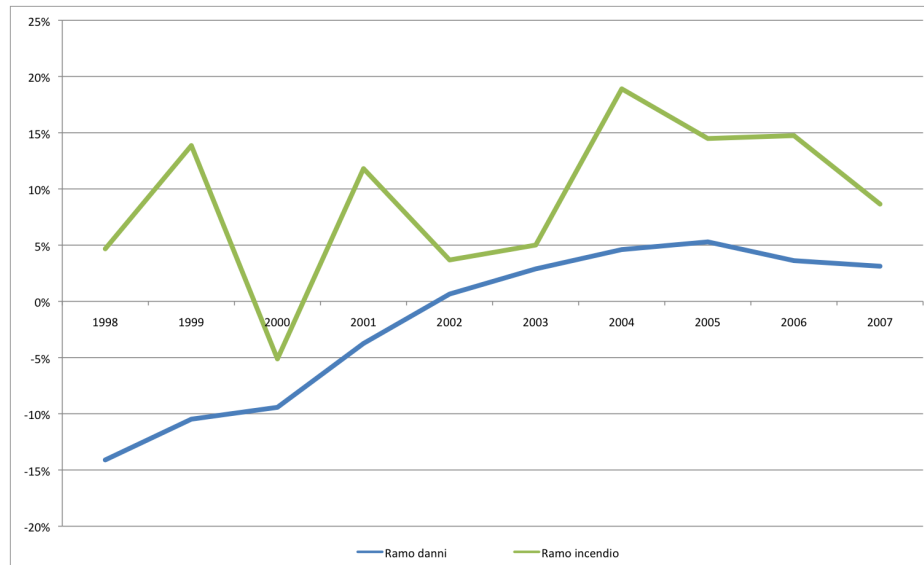


Figura 1.5: Il ramo incendio in Italia 1998-2007: saldi tecnici a confronto con quelli dei rami danni

flessione arriverà dall'analisi dei dati sulla riassicurazione di questa tipologia di assicurazioni contro i danni.

Prima di procedere è doverosa una precisazione. I dati forniti dalla CEA²⁰, l'equivalente a livello europeo dell'ANIA, sono forniti con l'obiettivo di garantire una comparabilità tra i vari paesi, paesi nei quali, tuttavia, la legislazione e la prassi del mercato assicurativo sono differenti. Per ovviare a questo inconveniente i dati sono opportunamente rielaborati. Con riferimento al ramo incendio, va detto che in non tutti i paesi tale assicurazione costituisce un ramo separato e, per questa ragione, i dati CEA che ci interessano sono quelli riferiti al ramo *property*, che, per quanto riguarda l'Italia, è ottenuto sommando i dati relativi al suddetto ramo VIII con quelli riferiti al ramo IX, denominato *Altri danni a beni* e che comprende furto, gelo, grandine e altre cause.

Con questo in mente, consideriamo quanto rappresentato nella figura 1.6, che mostra l'incidenza della raccolta premi del ramo *property* sul totale dei rami danni; viene confrontato quanto avviene in Italia, sommando i premi contabilizzati dei rami VIII e IX, con quanto succede in alcuni stati europei (in grassetto l'andamento italiano e la media dell'Unione Europea a

²⁰Cea (2009)

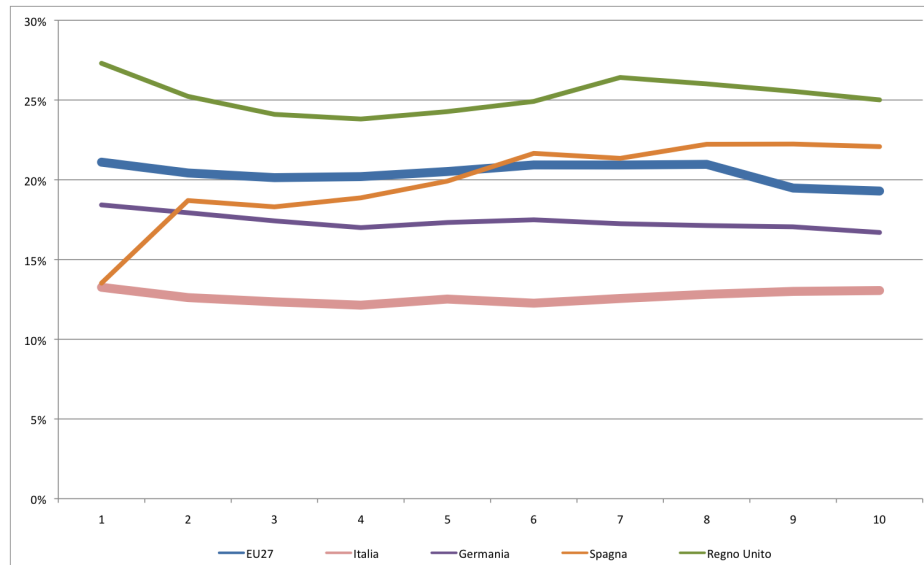


Figura 1.6: Il ramo *property* in Europa: raccolta premi a confronto con quella italiana

27 stati). I risultati sono ovunque piuttosto stabili nel tempo, fatta salva la Spagna (in aumento). L'aspetto più importante è sicuramente l'osservazione del diverso impatto che si registra in Italia e nel resto del continente: mentre nel nostro paese il contributo apportato dai rami *Incendio* e *Altri danni a beni* si aggira intorno al 12-13% della raccolta premi complessiva, tale percentuale si eleva su una media di circa il 20% nel caso della media europea. Altre verifiche sui dati considerati ci hanno permesso di rilevare come i premi raccolti nel ramo *property* europeo siano circa il 50-60% dei premi dell'assicurazione di responsabilità civile dei veicoli, una situazione ben diversa da quella italiana, che stimola ancora di più l'analisi di questo tipo di assicurazioni, ancora complessivamente poco sviluppate nel nostro paese.

Un ultimo risultato interessante che vogliamo mostrare riguarda l'attività di riassicurazione che viene sviluppata in questa tipologia di coperture assicurative. I dati che abbiamo reperito sono riferiti al mercato europeo e a quello mondiale²¹; il riferimento per il commento è la figura 1.7²². Si vede come la percentuale media dei premi ceduti in riassicurazione sia sempre superiore a quella del complesso dei rami danni: in molti stati la differenza

²¹Galey e Kuhn (2009)

²²Fonte: Galey e Kuhn (2009)

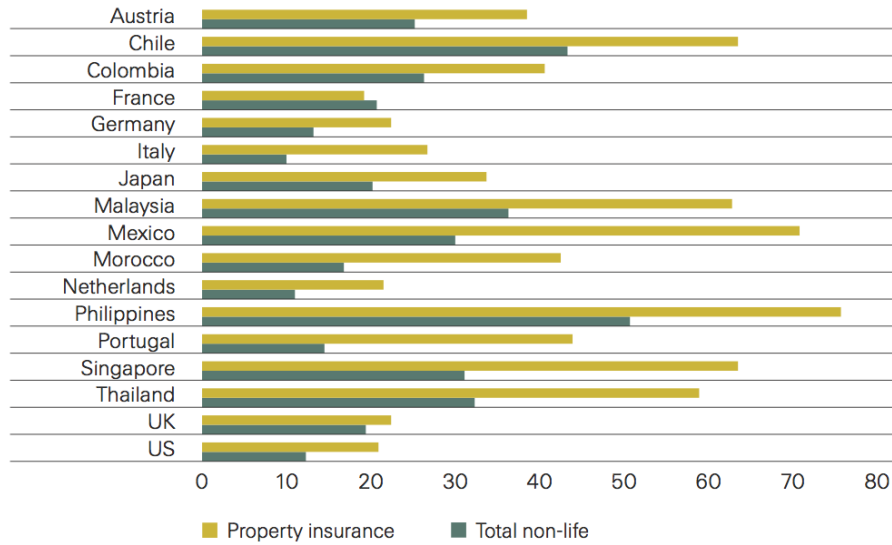


Figura 1.7: Il ramo *property* nel Mondo: premi ceduti in riassicurazione

tra le due arriva fino al 40% e in alcuni paesi extra-europei vi sono punte di premi ceduti per il ramo *property* superiori al 50%. Queste cifre sono la conseguenza della più alta volatilità di questo ramo, derivante tra le altre cose dalla copertura che esso, come si diceva, garantisce anche nei confronti di sinistri causati da eventi naturali o problematiche industriali di particolare gravità. L'Italia presenta una situazione simile a quella degli altri paesi, mentre l'unica eccezione riguarda la Francia: in questo paese prevalgono infatti le coperture di tipo non-proporzionale e, come diremo nel capitolo 3, le riassicurazioni proporzionali, primariamente quelle per eccedente, sono importanti forme di trasferimento del rischio incendio (e delle altre tipologie di danni a beni).

1.3 Presentazione del dataset di riferimento

Il dataset cui si accennava in precedenza e di cui qui cercheremo di fornire le informazioni di base e alcune statistiche descrittive, è stato messo a disposizione dalla compagnia di riassicurazione Copenhagen Re ed è stato oggetto di diverse analisi in ambito attuariale²³.

È costituito da 6870 rilevazioni di sinistri incendio avvenuti in Dani-

²³Ad esempio vedi Havning (2005) e McNeil (1997).

marca tra il 1980 e il 2002 e superiori alla soglia di 1 milione di corone danesi²⁴. Abbiamo ottenuto i dati già indicizzati al 2002 per quanto riguarda l'ammontare complessivo di ogni singolo sinistro e abbiamo provveduto a riportare i valori dell'inflazione anche sulle singole voci nelle quali risulta suddiviso il database:

- *edifici*: a seconda delle condizioni contrattuali, la copertura può comprendere o meno i sistemi di allarme e le parti comuni dei condomini, come gli ascensori; sono generalmente escluse dalla copertura di base le proprietà mobili e gli edifici in disuso e non vengono considerati come edifici le aree coperte adibite a stoccaggio;
- *contenuti*: gli oggetti situati all'interno degli edifici colpiti vengono indicati in polizza per tipologia e, a seconda che l'edificio sia ad uso abitativo, industriale o agricolo, la copertura viene rispettivamente fornita con riguardo ad arredamento, effetti personali e capi d'abbigliamento, macchinari e prodotti finiti (o semi-finiti) o bestiame e attrezzature agricole; verrà rimborsato il valore necessario al rimpiazzo dei contenuti (in caso di nuovi acquisti, bisogna verificare che, per quella *sola* tipologia di oggetto, non vi sia un caso di sottoassicurazione);
- *loss of profit*: vedi paragrafo 1.2.1.

Sottolineiamo che i dati sono stati forniti per anno di denuncia e che dunque l'ammontare riportato non tiene conto di eventuali modifiche successive; in particolare, l'importo dei sinistri non è rivisto in seguito ai processi di riservazione.

In figura 1.8 sono rappresentati i valori complessivi cui ammonta ogni singolo sinistro; in ascissa compare il numero progressivo degli eventi. Si vede che la maggior parte dei sinistri sta al di sotto dei 100 milioni di corone, nonostante alcuni risultino particolarmente gravi (il più elevato sinistro ha causato da solo oltre 400 milioni di danni). In termini più analitici, il sinistro medio ammonta a 4.6 milioni di corone danesi, mentre la deviazione standard supera i 10 milioni. Ci sono solo 9 sinistri superiori ai 100 milioni e ben 6821 (il 99.3%) sono inferiori a 50 milioni.

In figura 1.9 troviamo invece una conferma di alcune osservazioni già affrontate a proposito del complesso dei rischi catastrofali nel paragrafo 1.1.2.

²⁴Per meglio comprendere le dimensioni del problema, si consideri che tale cifra corrisponde a circa €130.000.

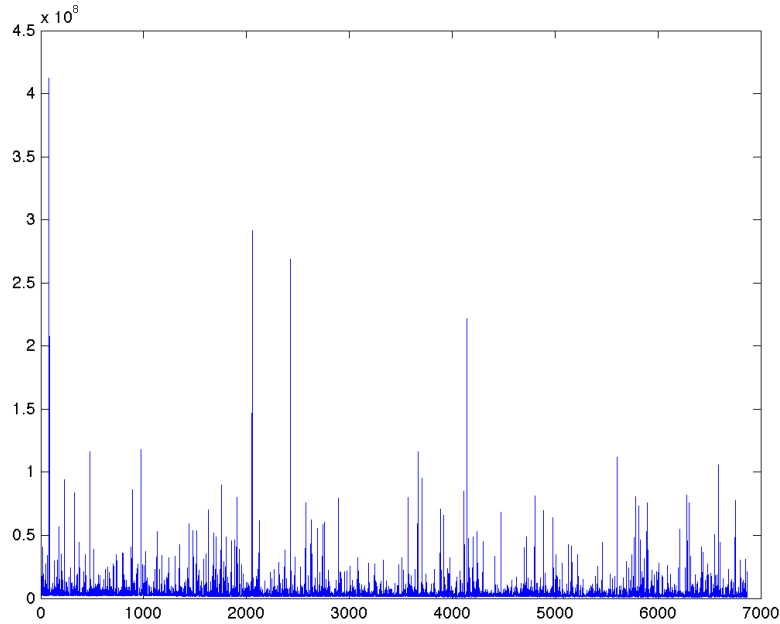


Figura 1.8: Incendi danesi 1980-2002 in ordine cronologico

Possiamo infatti osservare la crescita regolare nel tempo del numero annuo di eventi; si passa da poco più di 150 eventi all'anno nei primi anni registrati, fino a raggiungere la soglia di 447 nel 2002; se costruissimo una retta di regressione interpolante, otterremmo una pendenza significativamente positiva, con un coefficiente di adattamento superiore al 90%, a testimonianza del già evidente comportamento.

Un analogo commento va effettuato con riguardo all'ammontare annuo delle perdite assicurate. Anche se è meno marcato sia del caso precedente, sia di quanto visto parlando delle perdite assicurate all'interno dei rischi catastrofali nel paragrafo 1.1.2, rimane netto l'aumento nel tempo delle perdite annue. In termini assoluti, notiamo che gli impatti sono piuttosto forti, considerando che, per questi soli sinistri superiori ad 1 milione, l'ammontare minimo registrato in 23 anni è pari a 735 milioni di corone (circa 100 milioni di euro).

Le motivazioni più plausibili per spiegare entrambi questi comportamenti vanno ricercate all'interno di quanto già detto parlando delle ragioni dell'aumento dei danni catastrofali (principalmente l'espansione delle aree metropolitane con la conseguente comparsa di nuove tipologie di rischio).

Commentiamo ora l'impatto delle singole componenti (danni ad edifici,

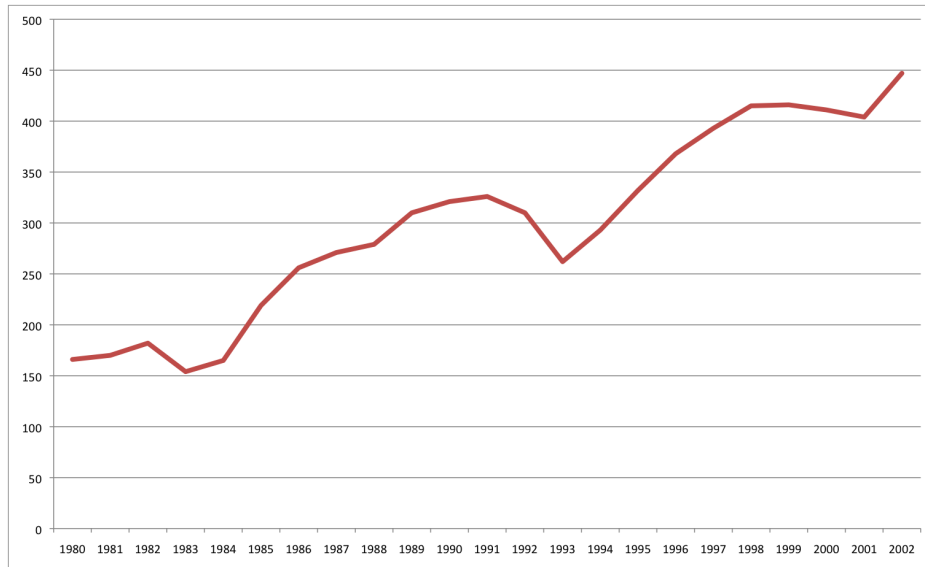
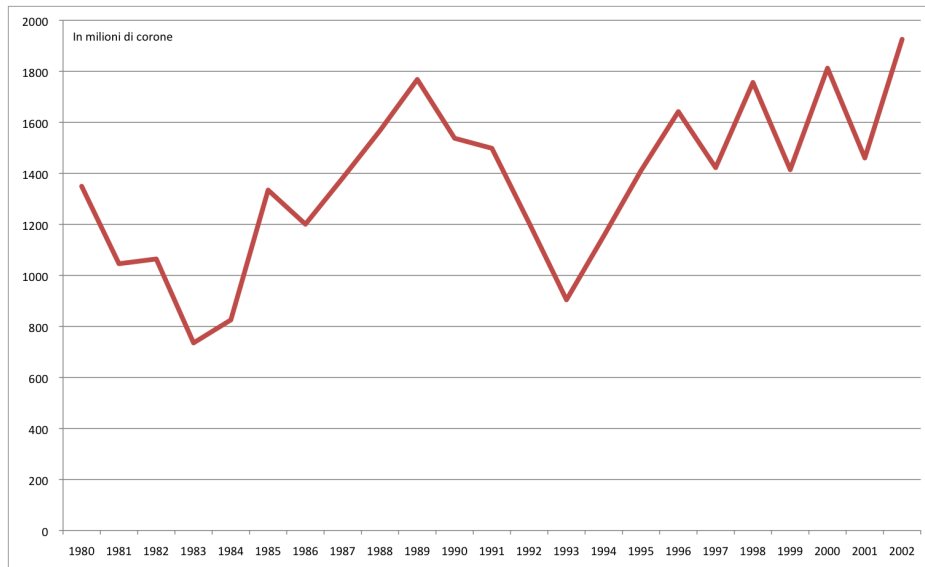
(a) *Numero annuo di eventi*(b) *Ammontare annuo complessivo dei sinistri*

Figura 1.9: Incendi danesi 1980-2002: frequenza e intensità

contenuti e perdite di profitto) sull'ammontare totale dei sinistri, mostrato in figura 1.10. Il peso diminuisce progressivamente passando dagli edifici ai contenuti e da questi alle perdite di profitto. In particolare, i danni causati dall'incendio agli edifici costituiscono, in ogni anno registrato, più del 50% dei danni complessivi. La quota di danni indiretti, derivanti da interruzione dell'attività, ha in molti anni un peso piuttosto residuale, ma in senso assoluto le cifre restano in ogni caso piuttosto elevate (in media, 105 milioni per anno). È da riscontrare, inoltre, che per questa tipologia di rischio vi è l'incremento più elevato nel tempo, anche grazie alla progressiva diffusione delle coperture assicurative: il tasso di variazione annuo medio è superiore al 20%. Per quanto riguarda le altre componenti, il tasso di variazione annuo medio è pari al 3.9% (edifici) e al 5.3% (contenuti). Il risultato positivo già osservato in figura 1.9 è quindi determinato da un trend in aumento per tutte e tre le componenti di rischio presenti.

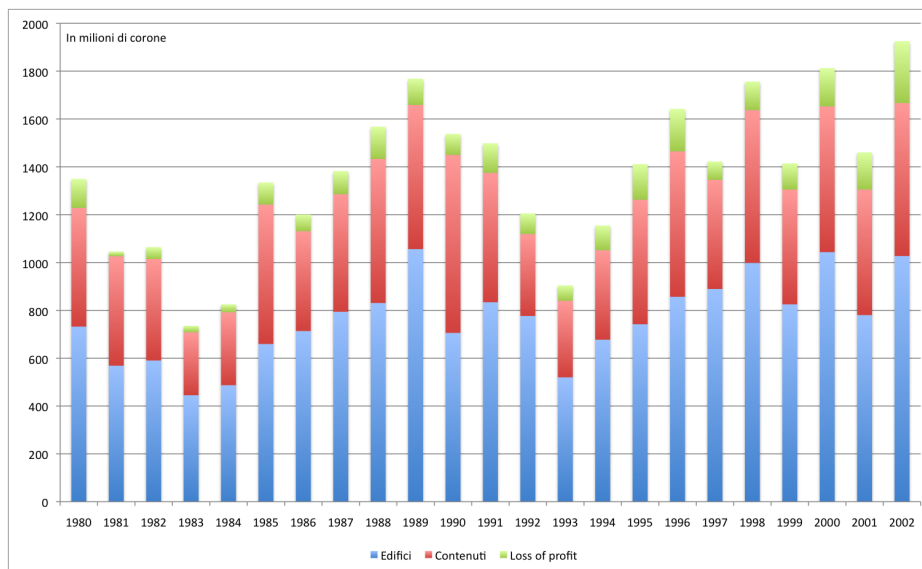


Figura 1.10: Incendi danesi 1980-2002: tipologie di rischio

Concludiamo questa presentazione presentando le principali statistiche di base per comprendere la composizione del dataset²⁵. Osservando la tabella 1.4 si nota che la stragrande maggioranza dei sinistri è inferiore ai 50 milioni di corone, tanto più se li si considera per singola tipologia di rischio, dove le percentuali sfiorano in tutti e tre i casi il 100%. Notiamo, come logico, che i

²⁵Laddove si tratti di valori monetari, essi sono espressi in milioni di corone danesi.

danni ad edifici si verificano quasi ogni volta che divampa un incendio; per i contenuti la stessa cosa vale in misura minore, mentre in meno di un terzo dei casi si registra una perdita di profitto (assicurata). Nonostante vi siano punte notevolmente elevate, già sottolineate con riferimento alla figura 1.8, la media dei singoli sinistri non arriva a 5 milioni di corone; l'effetto principale, come detto, è apportato dalle perdite per danni ad edifici. La mediana è sempre inferiore, e di molto, al valore medio, ma sorprendentemente questo succede anche per il terzo quartile: la motivazione sta negli elevatissimi valori dell'asimmetria, dovuti alla presenza di valori delle perdite davvero estremi; la distribuzione del danno è infatti asimmetrica positiva, il che vuol dire che la coda destra, quella con sinistri meno frequenti ma particolarmente elevati, è molto spessa. Considerazioni analoghe possono essere fatte con riferimento ai valori della curtosi: la distribuzione è chiaramente leptocurtica, il che implica che molti dei valori della variabile "circondano" il valore medio e che la coda è molto pesante.

	Complessivo	Edifici	Contenuti	Loss of profit
Numero di eventi	6870	6256	5316	2263
Numero di eventi < 50 milioni	6821	6248	5304	2261
% eventi < 50 milioni	99,3%	99,9%	99,8%	99,9%
Minimo	0.2	0.01	0.001	0.001
Massimo	412	291.2	245.6	101.3
Media	4.6	2.8	2.2	1.1
Deviazione standard	10.5	5.5	6.7	3.5
1° quartile	1.8	1.3	0.4	0.1
Mediana	2.4	1.9	0.7	0.3
3° quartile	4.0	2.8	1.7	0.8
Asimmetria	17.64	28.15	16.32	14.53
Curtosi	506	1272	443	331

Tabella 1.4: Incendi danesi 1980-2002: statistiche descrittive

Capitolo 2

Frequenza e intensità dei sinistri estremi

In questo capitolo verranno presentate le linee guida essenziali per poter analizzare la frequenza dei sinistri presentati nel dataset del paragrafo 1.3; inoltre, elemento che costituirà parte principale della trattazione, verrà svolta un'analisi mirata alla modellizzazione della distribuzione del costo di un singolo sinistro.

Nel paragrafo 2.1 verranno presentate alcune basi teoriche per la definizione di un processo di Poisson omogeneo. Analizzeremo poi la distribuzione di Pareto, cardine nell'analisi di sinistri ad elevato impatto unitario. Nel paragrafo 2.3, verranno descritti i principali aspetti dell'Extreme Value Theory, teoria ripresa attorno alla metà degli anni Novanta e che si è proposta di studiare accuratamente le code delle distribuzioni e di individuare modelli probabilistici adatti a descriverle. Proseguiremo, sulla scia delle riflessioni svolte nell'ambito dell'EVT, proponendo diversi strumenti statistici, soprattutto di tipo grafico, che aiutano nell'analisi di sinistri a code pesanti, e descriveremo il modello *Peaks over Threshold*, che consente una modellizzazione unica per frequenza ed intensità (paragrafo 2.5).

A seguito di quanto sarà detto, nel paragrafo 2.6 riprenderemo il dataset di riferimento, analizzando frequenza e intensità dei sinistri in esso contenuti, con l'obiettivo di comprendere meglio la struttura dei dati, in vista della costruzione di modelli attuariali utili in ambito di valutazione del rischio e di analisi di possibili coperture riassicurative, elementi rimandati ai capitoli successivi.

2.1 Processi di Poisson e tempi di arrivo dei sinistri

In questo paragrafo presentiamo alcuni concetti relativi allo studio della frequenza dei sinistri e ai loro intertempi di arrivo. Il modello tradizionalmente utilizzato è quello di Poisson e cercheremo di analizzarlo più in dettaglio con l'obiettivo di definire quando può essere considerato omogeneo, aspetto che sarà utile per alcune analisi successive.

I processi di Poisson nascono per descrivere il comportamento di punti distribuiti aleatoriamente in uno spazio di qualunque dimensione. Individuando un insieme di sottospazi fra di loro indipendenti A_i , il modello poissoniano diventa infatti il modo più semplice di contare il numero di punti che cadono in ciascun sottospazio, $N(A_i)$. Gli spazi sui quali è possibile utilizzare tale modello, come si diceva, possono essere di qualsiasi dimensione, ma di nostro particolare interesse risulta lo spazio $S = R^d$, con $d = 1, 2$ ¹; in particolare quando $d = 1$ si ha $S = R$, che può rappresentare una retta di istanti temporali, di particolare utilizzo in ambito attuariale.

La distribuzione che gioca un ruolo chiave in questi processi è logicamente quella omonima, descritta dalla funzione di probabilità

$$P(K = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

che si ricava come limite della distribuzione binomiale di parametri n, p quando, al verificarsi della condizione $n \rightarrow \infty$, si ha che $np(n) \rightarrow \lambda$.

Descritta la funzione di probabilità poissoniana, definiamo allora un processo di Poisson su uno spazio S come un sottoinsieme casuale e misurabile tale che:

- per qualunque sottospazio A_i le variabili casuali $N(A_i)$ sono indipendenti;
- $N(A)$ ha distribuzione di Poisson di parametro positivo $\mu = \mu(A)$.

Nel caso particolare, di nostro interesse, in cui $S = R^d$, il parametro è spesso chiamato intensità del processo, dove con intensità si intende una funzione λ misurabile sullo spazio S :

$$\mu(A) = \int_A \lambda(x) dx$$

¹Si veda Kingman (2002) per le estensioni su spazi multidimensionali.

con $dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_d$. Se λ è continua rispetto ad x , vale l'approssimazione

$$\mu(A) \sim \lambda(x)|A|$$

dove $|A|$ indica la misura (ad esempio se $x = t$ e $d = 1$ sarà l'ampiezza dell'intervallo temporale).

Possiamo così giungere a definire il processo di Poisson *omogeneo* come quel processo poissoniano in cui λ è costante e dunque $\mu(A) = \lambda|A|$.

Un altro modo di rileggere questo processo in $S = R$ in modo da evidenziarne l'applicabilità in ambito di analisi della frequenza, è quello di definire la funzione crescente $M(t) = \mu(0, t]$ con $\mu(0, t] = M(t) - M(0)$; quindi μ è determinata dalla funzione M e viene chiamata *misura di Stieltjes* associata alla funzione M . Tale funzione $M(t)$ può essere nuovamente espressa in termini di integrale e, nel caso di un processo di Poisson omogeneo, vale $M(t) = \lambda t$: se il processo è un processo di Poisson omogeneo, il numero atteso di sinistri in t anni sarà pari a t volte il numero di sinistri attesi su un singolo anno. Questo significa anche che, in un processo di Poisson omogeneo di intensità λ , la probabilità che il numero di eventi che si verificano fino al tempo t , $N(t)$, sia pari esattamente a k risulta²

$$P\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (2.1)$$

e quindi il numero dei tempi di arrivo $N(t)$ è una variabile casuale di Poisson di parametro λt .

Un'interessante caratteristica dei processi di Poisson omogenei è quella di poter rappresentare in forma chiusa la distribuzione di probabilità degli intertempi di arrivo dei sinistri. Infatti, dato un processo di Poisson di intensità costante λ definito su $(0, \infty)$ e disposti i punti (nel nostro caso, i sinistri) in ordine crescente, le variabili casuali

$$Y_n = X_n - X_{n-1} \quad n \geq 2$$

sono indipendenti e ciascuna ha distribuzione di probabilità

$$g(y) = \lambda e^{-\lambda y} \quad (2.2)$$

con $y > 0$, che è la funzione di densità di una distribuzione esponenziale³, avente media $E(Y) = \frac{1}{\lambda}$. Questo significa che, se possiamo supporre

²Reiss e Thomas (2007)

³Per la dimostrazione, rimandiamo nuovamente a Kingman (2002).

che i sinistri siano costanti nel tempo, ovvero ogni anno abbiamo lo stesso numero atteso di sinistri, allora i tempi tra due sinistri seguono una legge esponenziale con parametro pari al valore λ della distribuzione di Poisson⁴.

A completamento di questa presentazione sui processi di Poisson omogenei, definiamo un processo di Poisson(λ, F) come quel processo che si realizza quando:

- la sequenza dei tempi di arrivo T_i è un processo di Poisson di parametro λ ;
- i sinistri X_i sono variabili aleatorie i.i.d. con funzione di ripartizione comune F ;
- le sequenze T_i e X_i sono indipendenti.

Qualora sia presente una soglia u sopra alla quale vengono registrati i sinistri, possiamo modificare il parametro della distribuzione fin qui proposta con l'obiettivo di conoscere il numero di eventi superiori a tale valore. Risulta indispensabile un'analisi con questo approccio perché nel nostro caso vengono registrati solo i sinistri superiori ad un milione di corone danesi e non si conosce nulla per danni inferiori. Gli eccedenti y_i superiori ad u sono quei sinistri x_i con $x_i > u$, mentre gli eccessi sono dati da $y_i - u$. A questo punto, possiamo indicare con k il numero di sinistri che eccedono la soglia u e vale che, in caso di indipendenza tra le variabili aleatorie X_i , tutte con stessa funzione di distribuzione F ,

$$P(K = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

con $p = 1 - F(u) = P(X_i > u)$. Come già accennato in precedenza, tale relazione può essere riscritta sotto opportune condizioni attraverso una Poisson, poichè, indicati con $B_{n,p}$, P_{np} e A rispettivamente la distribuzione binomiale di parametri n e p , quella di Poisson di parametro np e un set di numeri interi non negativi, vale

$$|B_{n,p}(A) - P_{np}(A)| \leq p$$

⁴In realtà nel paragrafo 1.3 abbiamo già osservato come i nostri dati non sembrano supportare l'idea di una costanza nel tempo del numero atteso di sinistri. Più avanti (paragrafo 2.5) estenderemo il processo omogeneo qui presentato, costruendo un processo di Poisson *non omogeneo*, che non richiede la forte ipotesi qui formulata, ma che necessita di alcuni strumenti tecnici che affronteremo nel paragrafo 2.3.

e quindi, poichè p non è funzione di n , la distribuzione di Poisson ben approssima la distribuzione binomiale scritta sopra quando p è sufficientemente piccolo.

In particolare, è possibile dimostrare che, data una sequenza qualsiasi di v.a. con comune distribuzione di probabilità F e individuata una serie di soglie tali da assicurare l'esistenza *in media* di λ eccedenti, i processi di punti degli eccedenti convergono in probabilità, sempre, seppur debolmente, ad un processo omogeneo di Poisson con intensità λ^5 .

2.2 La distribuzione di Pareto

In questa sezione presentiamo uno dei principali modelli storicamente utilizzati per descrivere il danno provocato da un singolo sinistro, vale a dire la distribuzione di Pareto. Essa risulta fondamentale all'interno di questo lavoro perché è impiegata per fenomeni di eccezionale gravità e per questo motivo, come vedremo nel capitolo 3, è utilizzata all'interno delle coperture riassicurative di tipo Excess of Loss. Rappresenta inoltre il modello fondamentale per poter comprendere gli elementi di Extreme Value Theory presentati nel paragrafo 2.3.

La funzione di ripartizione di tale distribuzione può essere descritta in differenti modi; la notazione c.d. "europea" risulta⁶

$$F(x) = 1 - \left(\frac{c}{x}\right)^\alpha \quad x > c \quad (2.3)$$

con $\alpha, c > 0$. Il valore atteso esiste solo se $\alpha > 1$ e vale

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha - 1}c \quad (2.4)$$

mentre per l'esistenza della varianza è necessario $\alpha > 2$ e risulta

$$Var(X) = \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}c^2$$

Un altro modo in cui è possibile definire la distribuzione di Pareto è traslando la precedente scrittura attraverso il parametro l , ovvero

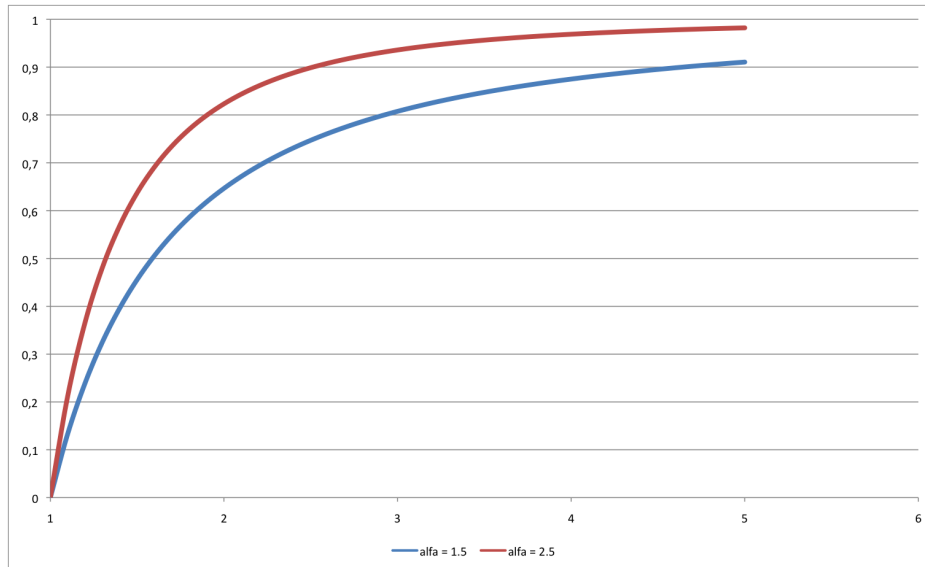
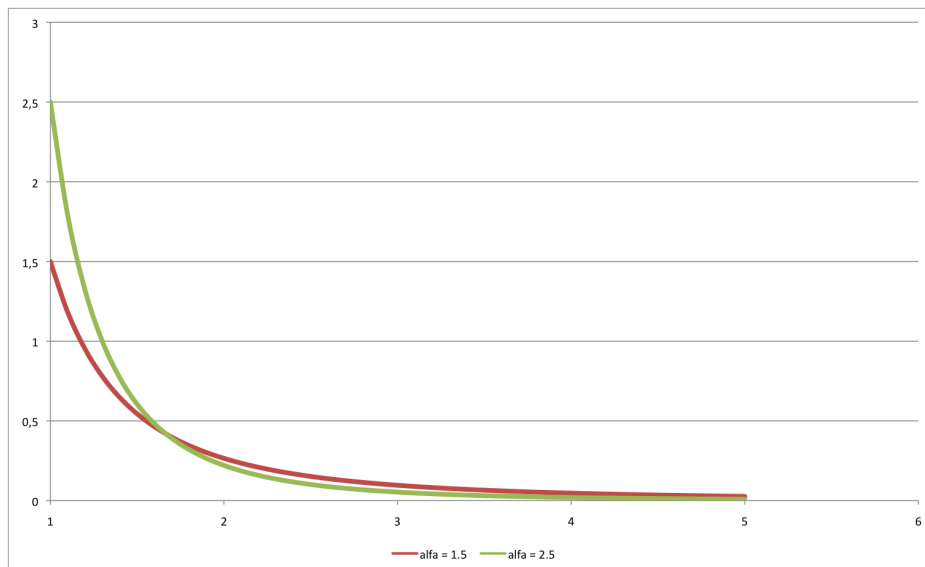
$$F(x) = 1 - \left(\frac{l + c}{l + x}\right)^\alpha \quad x > c > 0$$

Si torna evidentemente all'equazione 2.3 quando $l = 0$.

Esiste poi una terza possibile scrittura, la c.d. Pareto "americana", per la quale rimandiamo a Rytgaard (1990).

⁵Per la dimostrazione ed ulteriori dettagli si veda Embrechts e altri (1997).

⁶Rytgaard (1990)

(a) *Funzione di ripartizione*(b) *Funzione di densità*Figura 2.1: Distribuzione di Pareto: ripartizione e densità in funzione di α

Per quanto riguarda il significato dei parametri, notiamo che compaiono c , α e, nel secondo caso, $l > 0$. La presenza di quest'ultimo parametro permette, come si diceva, di ottenere una distribuzione traslata verso destra, ma in questo caso le metodologie di stima possono essere perseguite soltanto per via numerica, e non saranno quindi valide le proprietà che descriveremo tra poco. Il parametro c è invece supposto noto e coincide con il sinistro di minori dimensioni; nel nostro caso, sarà quindi pari ad un milione. L'unico parametro che si richiede quindi di stimare è α , che descrive il comportamento della coda. In particolare, dalle rappresentazioni riportate nella figura 2.1, si nota come un aumento di α porti ad assegnare un peso inferiore alla coda destra; infatti, sia la funzione di ripartizione che quella di densità mostrano come sia crescente il peso della coda al diminuire di α , in termini sia di diminuzione della funzione di ripartizione, sia di aumento della probabilità di osservare valori estremi.

Per quanto detto a proposito di l , quello che seguirà ora sarà riferito alla distribuzione di Pareto scritta secondo la notazione dell'equazione 2.3, che ha funzione di densità

$$f(x) = \alpha c^\alpha x^{-\alpha-1} \quad (2.5)$$

Date X_1, X_2, \dots, X_n v.a. indipendenti e distribuite tutte secondo una distribuzione di Pareto è possibile ottenere lo stimatore di *massima verosimiglianza* per alfa⁷

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{c}\right)} \quad (2.6)$$

Poiché il generico $\ln\left(\frac{x}{c}\right)$ ha distribuzione esponenziale di parametro alfa⁸ e la somma di n distribuzioni esponenziali fra di loro indipendenti è una distribuzione gamma, $T = \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{c}\right)$ avrà distribuzione $\Gamma(\alpha, n)$. E, dato che $\hat{\alpha} = \frac{n}{T}$, i passaggi sviluppati ci consentono di calcolare media e varianza dello stimatore ottenuto

$$E(\hat{\alpha}) = \frac{n}{n-1}\alpha$$

$$Var(\hat{\alpha}) = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\alpha^2$$

⁷A livello analitico, la stima comprende la fattorizzazione della funzione di densità per ricavare la funzione di verosimiglianza, il calcolo del suo logaritmo per ragioni di semplicità computazionale, la costruzione della derivata di quest'ultimo rispetto ad α e la ricerca del suo massimo.

⁸Per una verifica, è sufficiente porre $\ln\left(\frac{x}{c}\right) = y$, isolare $x = ce^y$ e sostituire il secondo membro di quest'ultima espressione all'interno della funzione di densità $F(x)$.

che risulta quindi essere non corretto. Di maggiore interesse risulterà allora il nuovo stimatore

$$\alpha^* = \frac{n-1}{T} \quad (2.7)$$

che risulta anche più efficiente (e in particolare si può dimostrare che è lo stimatore a varianza minima) in quanto

$$\text{Var}(\alpha^*) = \frac{1}{n-2} \alpha^2 < \text{Var}(\hat{\alpha})$$

Un'altra via per l'individuazione di uno stimatore per il parametro α è l'utilizzo del *metodo dei momenti*⁹. È tuttavia risaputo dalla teoria dell'inferenza statistica che tale metodo fornisce stimatori con probabilità statistiche subottimali rispetto a quelle fornite dalla massima verosimiglianza. Il suo utilizzo in ambito attuariale si restringe al caso in cui disponessimo del solo ammontare totale (e del numero) dei sinistri eccedenti c e non dei singoli sinistri superiori alla stessa soglia, come avviene invece nel nostro caso. Pare dunque corretto non soffermarsi su tale metodologia.

Un terzo modo adottabile per la stima del parametro della distribuzione di Pareto è quello di ponderare la stima ottenuta attraverso uno dei metodi precedenti (e, per quanto detto, la soluzione preferibile è quella ricavata con la massima verosimiglianza) con il *valore di "mercato"* della stessa; questo significa tenere in considerazione i risultati già noti per il ramo in questione, con il vantaggio di:

- migliorare l'efficienza della stima quando si è in presenza di un ristretto numero di sinistri disponibili, situazione non interessante ai nostri fini;
- evitare un impatto troppo forte dei sinistri elevati sul valore del parametro α .

A livello analitico, date X_1, X_2, \dots, X_n v.a. di Pareto i.i.d., chiamiamo

$$S_i = \ln \frac{X_i}{c}$$

e \bar{S} la sua media, che risulta essere stimatore di $\frac{1}{\alpha}$, ora v.a. denominata Θ . Per quanto già detto in precedenza, S_i ha distribuzione esponenziale di

⁹La logica è quella di uguagliare i momenti teorici a quelli empirici. Nel caso di una Pareto con valore atteso dato dalla 2.4, $\bar{X} = \frac{\alpha^0}{\alpha^0 - 1} c$, con \bar{X} media degli n sinistri eccedenti c ; attraverso dei banali passaggi algebrici, si trova che lo stimatore dei momenti risulta $\alpha^0 = \frac{\bar{X}}{\bar{X} - c}$.

media $\frac{1}{\alpha} = \theta$ e valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} E(S_i | \Theta = \theta) &= \mu(\theta) = \theta \\ \text{Var}(S_i | \Theta = \theta) &= \sigma^2(\theta) = \theta^2 \end{aligned}$$

Supponiamo che sul mercato sia noto che il livello medio per il parametro $\frac{1}{\alpha}$ sia pari a $\frac{1}{\alpha_0}$; imponiamo dunque tale uguaglianza, insieme ad una limitazione k sulla possibile variazione del valore assunto da $\frac{1}{\alpha_0}$:

$$\begin{aligned} E[\mu(\theta)] &= E(\Theta) = \frac{1}{\alpha_0} \\ \text{Var}[\mu(\theta)] &= \text{Var}(\Theta) = \frac{k}{\alpha_0^2} \end{aligned}$$

Segue che:

$$E[\sigma^2(\theta)] = E(\Theta^2) = \text{Var}(\Theta) + [E(\Theta)]^2 = \frac{k+1}{\alpha_0^2}$$

È stato dimostrato¹⁰ che la migliore approssimazione lineare per il calcolo del valore atteso $E(\mu(\theta) | S_1, S_2, \dots, S_n)$ è la relazione di credibilità

$$\begin{aligned} b\bar{S} + (1-b)E[\mu(\theta)] & \tag{2.8} \\ b &= \frac{n}{n+k} \\ k &= \frac{E[\sigma^2(\theta)]}{\text{Var}[\mu(\theta)]} \end{aligned}$$

e quindi lo stimatore $\bar{\alpha}$ che pesa le informazioni già note con la stima realizzata sui dati si ottiene uguagliando l'equazione 2.8 alla frazione $\frac{1}{\alpha}$. Nel nostro caso si tratterà di pesare lo stimatore di massima verosimiglianza con il valore registrato sul ramo incendio, che si attesta attorno ad $\alpha_0 = 1.5$ (vedi Rytgaard (1990)), una volta prefissata una soglia k di oscillazione, comunque piuttosto contenuta:

$$\frac{1}{\bar{\alpha}} = b\frac{1}{\hat{\alpha}} + (1-b)\frac{1}{\alpha_0} \tag{2.9}$$

con coefficienti ricavati dalla 2.8:

$$b = \frac{n}{n + \frac{E[\sigma^2(\theta)]}{\text{Var}[\mu(\theta)]}} = \frac{kn}{1 + k(n+1)} \tag{2.10}$$

¹⁰Buhlmann (1967)

Il significato di code pesanti

Vale qui la pena di soffermarsi brevemente sul concetto di code pesanti, che si applica sia alla distribuzione di Pareto, sia ad alcuni modelli che seguiranno. Il nostro interesse sarà costantemente rivolto alla coda destra della distribuzione, ma, come si vedrà tra poco, le definizioni proposte si applicano anche alla coda sinistra.

Una prima definizione si basa sull'analisi dei momenti della distribuzione; si parlerà di distribuzione *heavy-tailed* quando i suoi momenti (semplici) non sono tutti finiti. Per la distribuzione di Pareto, in particolare, si è visto che, già sulla media, è necessario imporre delle limitazioni sul parametro α per poter definire il valore atteso in forma chiusa.

Una seconda definizione si fonda invece sul valore assunto dall'indice di curtosi. Si richiama che, data una variabile aleatoria X e chiamata σ_X la sua standard deviation, la misura di curtosi è data dal rapporto

$$\gamma_2 = \frac{E[X - \mu_X]^4}{\sigma_X^4} - 3$$

Tale indicatore, come già si era visto nel paragrafo 1.3, risulta positivo quando la maggior parte dei dati si concentra intorno alla media e le code contengono una parte consistente dei rimanenti valori¹¹. Questo è il caso che ci si può ritrovare davanti in modelli come la Pareto o in altre distribuzioni che, in accordo con la letteratura inglese, vengono chiamate *fat-tailed*.

Un esempio di distribuzione che presenta dei momenti finiti ma che viene detto a code pesanti è il modello log-normale, proprio perchè l'indice di curtosi è positivo. Utilizzeremo più avanti questo modello, molto impiegato nella letteratura attuariale.

2.3 Elementi di Extreme Value Theory

Il nostro dataset, come dicevamo nel paragrafo 2.1, presenta una serie di sinistri y_i eccedenti la soglia di un milione di corone danesi. Possiamo interpretare questi danni come una sequenza di variabili aleatorie su cui definire

$$y_i = \max\{x_{i,1}, \dots, x_{i,m}\} \quad i = 1, \dots, n$$

ovvero, nel caso in cui i valori $x_{i,j}$ siano osservabili, possiamo estrarre i valori massimi di questa sequenza di variabili aleatorie, secondo il metodo

¹¹Talvolta il valore 3 non viene sottratto al momento del calcolo dell'indice di curtosi e risulta quindi il valore "critico" di riferimento, in sostituzione dello 0.

dei massimi annuali (o metodo di Gumbel)¹². Se le X_1, \dots, X_m sono v.a. i.i.d. con funzione F , seguirà che la funzione di ripartizione dei massimi risulta

$$P \left\{ \max_{i \leq m} X_i \leq x \right\} = P\{X_1 \leq x, \dots, X_m \leq x\} = F^m(x) \quad (2.11)$$

che presenta lo svantaggio di funzionare male in presenza di dipendenze nei dati.

Un'impostazione teorica fondamentale nello studio dei massimi così presentati è rappresentato dalla *teoria dei valori estremi*, nota in letteratura anche con l'abbreviazione EVT, che si propone di fornire strumenti adeguati per lo studio di fenomeni di impatto rilevante. In particolare, presenteremo dei modelli parametrici che, meglio di $F^m(x)$, consentono di descrivere la distribuzione dei massimi di una sequenza di variabili aleatorie. Ulteriori temi studiati dall'EVT, e che incontreremo, riguardano l'analisi dei sinistri eccedenti una determinata soglia (in generale variabile).

Nelle prossime pagine descriviamo proprio i punti fondamentali di questa teoria, che è stata ripresa e sviluppata intorno alla metà degli anni Novanta.

2.3.1 La distribuzione generalizzata dei valori estremi

Le distribuzioni dei valori estremi sono quelle rappresentate nella tabella 2.1 e definite al variare del valore attribuito al parametro α di forma¹³. Come

Distribuzione	Ripartizione	Supporto
Gumbel (EV0)	$G_0(x) = \exp(-e^{-x})$	$\forall x$
Fréchet (EV1)	$G_{1,\alpha>0}(x) = \exp(-x^{-\alpha})$	$x \geq 0$
Weibull (EV2)	$G_{2,\alpha<0}(x) = \exp(-(-x)^{-\alpha})$	$x \leq 0$

Tabella 2.1: Distribuzioni dei valori estremi

è logico attendersi, la distribuzione di Fréchet vale 0 per $x < 0$, mentre quella di Weibull vale 1 quando $x > 0$. Quest'ultima risulta di particolare flessibilità, in quanto può rappresentare fenomeni unimodali con simmetria dipendente dal valore del parametro¹⁴:

¹²Reiss e Thomas (2007)

¹³Rispetto a quelle proposte, aggiungiamo una variante della Weibull

$$\tilde{G}_{2,\alpha}(x) = 1 - \exp(-x^{-\alpha}) \quad (2.12)$$

valida quando $\alpha < 0$ e $x > 0$, che possiamo chiamare distribuzione di Weibull "ribaltata".

¹⁴Gli altri due modelli presentano invece sempre un'asimmetria verso destra.

- simmetria a sinistra, per $\alpha > -3.6$ (accentrata intorno allo 0 quando $\alpha > -1$);
- simmetrica, quando α si avvicina a -3.6 ;
- simmetria a destra, per $\alpha < -3.6$.

Il modello può essere reso maggiormente flessibile introducendo un parametro di posizione ed uno di scala, denominati rispettivamente, in accordo con la letteratura, μ e σ , ottenendo, in modo compatto¹⁵,

$$G_{i,\alpha,\mu,\sigma}(x) = G_{i,\alpha}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad i = 0, 1, 2 \quad (2.13)$$

Ma la famiglia delle distribuzioni dei valori estremi può essere anche scritta attraverso un'unica parametrizzazione, che sintetizza tutti i possibili modelli e che dipende da un parametro di forma, che, secondo la rappresentazione di von Mises, vale $\gamma = \frac{1}{\alpha}$; i parametri di posizione e scala vengono inoltre presi diversi rispettivamente da 0 e 1. Tale scrittura è nota come la distribuzione generalizzata dei valori estremi (GEV)¹⁶ e risulta:

$$G_\gamma(x) = \begin{cases} \exp\left\{-(1+\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}\right\} & \text{se } \gamma \neq 0 \\ \exp(-e^{-x}) & \text{se } \gamma = 0 \end{cases}$$

dove γ è il parametro di forma e x deve essere tale per cui $1 + \gamma x > 0$. Risulta inoltre utile sottolineare, all'interno di questa riparametrizzazione, che è possibile identificare un estremo destro per la Weibull, pari a $\frac{1}{|\gamma|}$ e uno sinistro per la Fréchet, pari a $-\frac{1}{\gamma}$. La riscrittura compatta con i parametri di posizione e scala, scritta in funzione di α , purchè sia $\gamma \neq 0$, vale

$$G_\gamma = G_{i,\alpha,-\alpha,|\alpha|}$$

dove $i = 1$ implica $\gamma > 0$ e $i = 2$ se $\gamma < 0$ (e quindi rispettivamente Fréchet e Weibull).

Le densità possono essere ottenute in funzione delle corrispondenti ripartizioni, semplicemente come:

$$g_\gamma(x) = \begin{cases} G_\gamma(x)(1+\gamma x)^{-(1+1/\gamma)} & \text{se } \gamma \neq 0 \\ G_0(x)e^{-x} & \text{se } \gamma = 0 \end{cases}$$

A sintesi di quanto detto, riportiamo in figura 2.2 proprio la funzione di densità delle principali distribuzioni dei valori estremi per alcuni valori

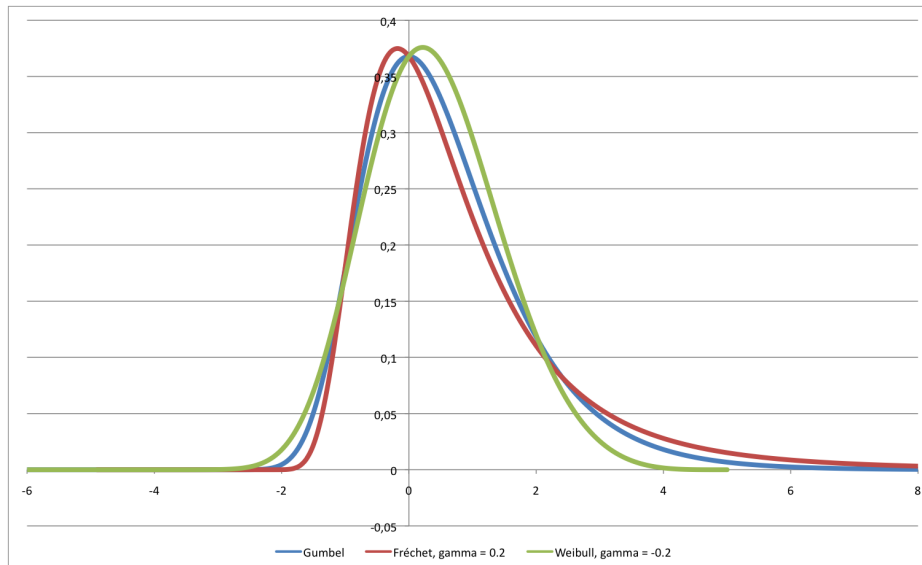


Figura 2.2: Distribuzioni dei valori estremi

casualmente scelti dei rispettivi parametri. Si nota che, per i parametri scelti, la Fréchet e la Weibull hanno come limiti rispettivamente -5 e 5 , mentre la Gumbel risulta illimitata. Inoltre, poichè $\gamma = -0.2$ nel caso della Weibull, risulta $\alpha = -5$ e quindi la distribuzione è simmetrica verso destra. La Fréchet è sicuramente la distribuzione con maggiore simmetria, mentre i valori della curtosi (non riportati) mostrano valori positivi e simili per Fréchet e Gumbel, di segno opposto la tendenza della Weibull. Quest'ultimo modello risulta quindi a code non pesanti e dunque mal si applica, anche nella versione “ribaltata”, alla nostra situazione.

Momenti delle distribuzioni dei valori estremi

In questa sezione presentiamo alcune relazioni utili ai fini del calcolo dei più importanti momenti delle distribuzioni dei valori estremi.

Il momento di ordine j per la distribuzione G viene definito come:

$$m_{j,G} = E(X^j) = \int x^j dG(x)$$

¹⁵Si noti che in realtà G_0 non dipende da α .

¹⁶McNeil (1997)

Richiamata la funzione Γ

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} e^{-x} dx \quad \lambda > 0$$

i momenti possono essere riscritti come funzione di quest'ultima, come segue:

$$\begin{aligned} m_{j,G_{1,\alpha}} &= \Gamma(1 - j/\alpha) & \alpha > j \\ m_{j,G_{2,\alpha}} &= (-1)^j \Gamma(1 - j/\alpha) \end{aligned}$$

Si noti che quando $\alpha \leq j$ la Fréchet possiede dei momenti infiniti. Per il calcolo della media, è sufficiente operare con $j = 1$ ¹⁷.

Con riferimento ai momenti centrali, nell'ottica di individuare una relazione chiusa in particolar modo per la varianza, è noto che

$$E[(X - E(X))^j] = \int (x - m_1)^j dG(x)$$

dalla quale segue che

$$Var_{G_{i,\alpha}} = \Gamma(1 - 2/\alpha) - \Gamma^2(1 - 1/\alpha) \quad 1/\alpha < 1/2$$

Le relazioni di media e varianza possono essere riscritte attraverso la riparametrizzazione in γ , dalle quali, facendo tendere a 0 quest'ultimo, si ricavano media e varianza per la Gumbel:

$$\begin{aligned} m_{G_0} &= \lambda = 0.577216... \\ Var_{G_0} &= \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

Infine, l'espressione per il coefficiente di asimmetria risulta

$$\gamma_G = \frac{E[X - E(X)]^3}{Var_G^{3/2}} = \frac{m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3}{\sigma^3} \quad (2.14)$$

Utilizzando l'ultima relazione scritta, in figura 2.3 è stato verificato il legame che esiste fra il parametro $\alpha < 0$ della distribuzione di Weibull (in ascissa) e l'indice di asimmetria (in ordinata). Come già avevamo anticipato, la distribuzione di Weibull ha un'asimmetria dipendente, anche nel segno, dal valore del parametro di forma e il valore critico di tale dipendenza, come si vede nel grafico, si aggira attorno a -3.6 . La funzione asimmetria, come si nota, risulta strettamente decrescente al crescere di α .

È possibile, ma viene qui omesso, anche il calcolo in forma chiusa delle mode delle distribuzioni dei valori estremi¹⁸.

¹⁷Da notare che la media della Fréchet è infinita ogni qual volta sia $0 < \alpha \leq 1$.

¹⁸Reiss e Thomas (2007)

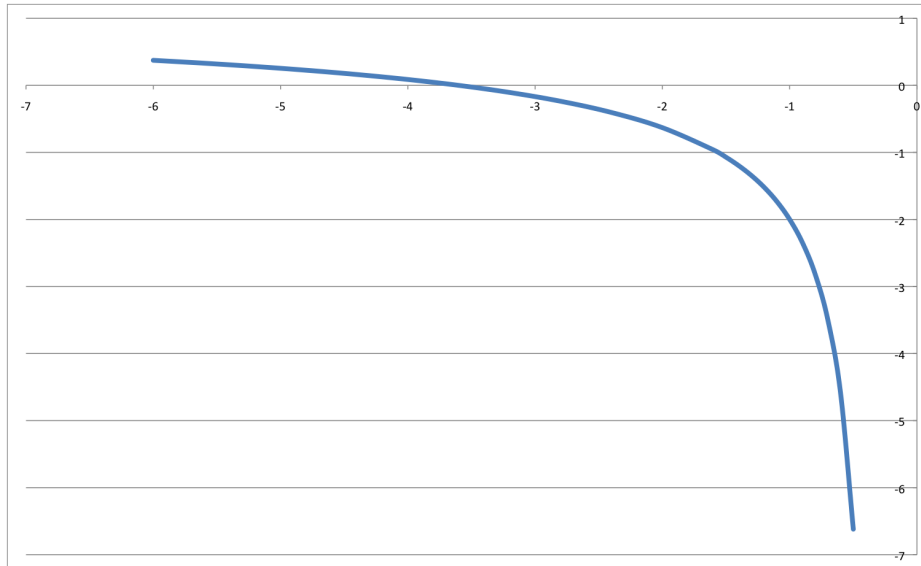


Figura 2.3: Distribuzione di Weibull: relazione tra parametro di forma e asimmetria

La stima dei parametri

Come mostrato nella sezione 2.3.2, le distribuzioni dei valori estremi sono un modello probabilistico utile per descrivere il comportamento dei massimi di variabili aleatorie. Per riuscire nell'adattamento, risulta quindi opportuno stimare nel miglior modo possibile i parametri γ , μ e σ .

Sotto l'ipotesi di variabili casuali i.i.d., la teoria dell'inferenza offre l'opportunità di adottare il metodo della massima verosimiglianza. Indicati con $\theta = (\gamma, \mu, \sigma)$ i parametri da stimare, con $L(\theta, \mathbf{x})$ la funzione di verosimiglianza e con $l(\theta, \mathbf{x}) = \ln L(\theta, \mathbf{x})$ il suo logaritmo, si ricerca lo stimatore di verosimiglianza $\hat{\theta}_n$ come:

$$\hat{\theta}_n = \max_{\theta \in \Theta} l(\theta, \mathbf{x})$$

È possibile dimostrare che nel nostro caso non esistono soluzioni esplicite alle equazioni risolutive¹⁹. Tuttavia le soluzioni numeriche individuabili non pongono in generale problemi specifici, salvo nei casi in cui il supporto della distribuzione sottostante dipenda dai parametri ignoti; in particolare, esse godono delle proprietà ottimali note per gli stimatori di verosimiglianza. In generale, la consistenza e l'ottimalità asintotica sono verificate ogni qual volta sia $\gamma > -1/2$ e, poiché la nostra distribuzione avrà supporto illimitato a

¹⁹Embrechts e altri (1997)

destra, possibile solo quando γ è positivo, questo indica che possiamo ritenere affidabili i risultati di verosimiglianza ottenuti dalla procedura numerica, restituita, ad esempio, come output di *Matlab*.

2.3.2 Il teorema di Fisher-Tippett

Il ruolo chiave svolto dalle distribuzioni dei valori estremi emerge con chiarezza dal teorema di Fisher-Tippett²⁰.

Ricordando l'equazione 2.11, si consideri il seguente enunciato, che costituisce il teorema di Fisher-Tippett:

Se $F^n(b_n + a_n x)$ ha come limite una funzione di distribuzione non degenera quando $n \rightarrow \infty$ con costanti b_n e $a_n > 0$, allora vale che

$$|F^n(x) - G[(x - \mu_n)/\sigma_n]| \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \quad (2.15)$$

per qualche distribuzione dei valori estremi $G = G_\gamma$ e parametri di posizione e scala μ_n e $\sigma_n > 0$.

Si dice allora che F appartiene al massimo dominio di attrazione di G , ovvero $F \in MDA(G)$. Le costanti b_n e a_n dipendono dal tipo di distribuzione scelta. Per le distribuzioni presentate nel paragrafo 2.3.1, i parametri

Distribuzione	b_n	a_n
Gumbel, G_0	$\log n$	1
Fréchet, $G_{1,\alpha>0}$	0	$n^{\frac{1}{\alpha}}$
Weibull, $G_{2,\alpha<0}$	0	$n^{\frac{1}{\alpha}}$

Tabella 2.2: Costanti di normalizzazione delle distribuzioni dei valori estremi

sono quelli riportati nella tabella 2.2. Si noti che, nonostante le a_n sembrino uguali per la Weibull e la Fréchet, in realtà differiranno sempre poichè nei due modelli è diverso il segno del parametro di forma.

Il teorema, quindi, fornisce la base teorica per modellizzare la distribuzione dei massimi attraverso le distribuzioni dei valori estremi. A titolo di esempio, nella figura 2.4 si è approssimata la distribuzione del massimo di variabili esponenziali, su un campione di dimensione $n = 50$, con la distribuzione di Gumbel; per quanto detto, i parametri di posizione e scala saranno

²⁰Verranno qui presentate le linee generali del risultato individuato dai due ricercatori. Il lettore interessato può rivolgersi all'articolo Fisher, R.; Tippett, L. (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Cambridge Philosophical Society 24*, dove, insieme ad ulteriori dettagli, viene fornita la dimostrazione (suddivisa in tre differenti casi a seconda del valore di a_n e b_n).

$\mu_n = \log 50$ e $\sigma_n = 1$. Per l'esponenziale, invece, si ha $F^n(x) = (1 - e^{-x})^{50}$ e dunque si è rappresentata la funzione di densità

$$f(x) = 50(1 - e^{-x})^{49} e^{-x}$$

Il risultato ottenuto conferma empiricamente l'enunciato del teorema, in

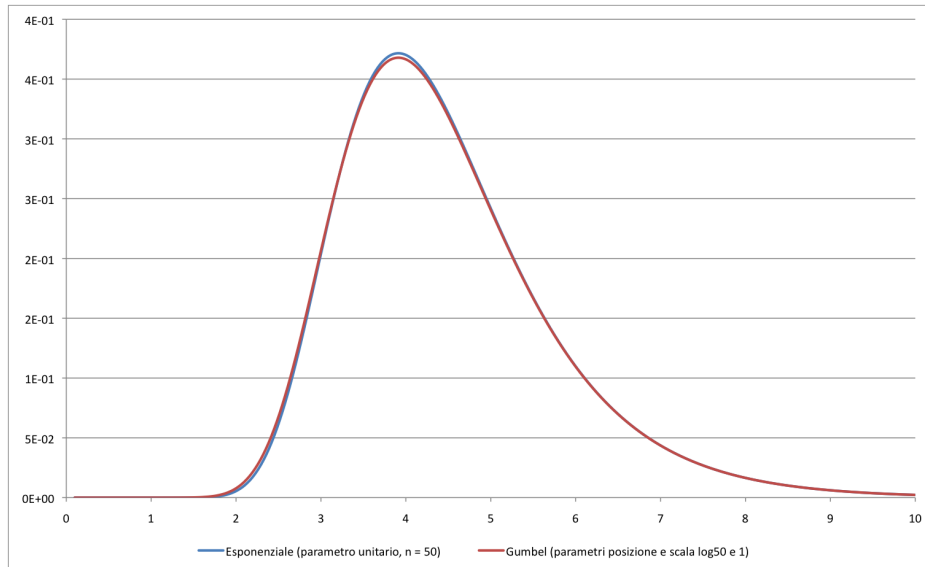


Figura 2.4: Esempio di applicazione del teorema di Fisher-Tippett

quanto l'approssimazione risulta davvero molto buona.

Si noti che la condizione espressa in precedenza può essere anche riscritta come

$$n\bar{F}(b_n + a_n x) \rightarrow -\log G(x) \quad n \rightarrow \infty \quad (2.16)$$

dove si vede che dipende dal numero medio di eccedenti sopra la soglia $u(n) = \mu_n + \sigma_n x$ (vedi paragrafo 2.1).

Le costanti definite nella tabella 2.2 possiedono un'ulteriore proprietà; sono infatti le opportune costanti di normalizzazione che intervengono nella nozione di distribuzione max-stabile, ovvero una distribuzione per cui vale

$$F^n(b_n + a_n x) = F(x) \quad (2.17)$$

il che implica che il massimo standardizzato sotto la distribuzione F è distribuito secondo F .

2.3.3 La distribuzione di Pareto generalizzata

Il modello di Pareto generalizzato che presenteremo in questo paragrafo costituisce il modello più adeguato per rappresentare i valori eccedenti una

Distribuzione	Ripartizione	Supporto
Esponenziale (GP0)	$W_0(x) = 1 - e^{-x}$	$x \geq 0$
Pareto (GP1)	$W_{1,\alpha>0} = 1 - x^{-\alpha}$	$x \geq 1$
Beta (GP2)	$W_{2,\alpha<0} = 1 - (-x)^{-\alpha}$	$-1 \leq x \leq 0$

Tabella 2.3: Distribuzioni di Pareto generalizzate

certa soglia u . Se sul numero atteso degli eccedenti si è già detto nel paragrafo 2.1, qui l'obiettivo sarà quello di valutare l'impatto generato dagli eccedenti, una volta che l'evento si è verificato.

Se la soglia u è più piccola dell'estremo superiore del supporto di F , $\omega(F) = \sup\{x : F(x) < 1\} \leq \infty$, allora, quando u si avvicina all'estremo destro $\omega(F)$, diciamo che la soglia u è elevata e $p = 1 - F(u)$ è una probabilità piccola: il processo è allora una v.a. di Poisson. Con riferimento ora all'ammontare del danno provocato, questo risulta condizionato al verificarsi dell'evento appena descritto; la funzione di distribuzione degli eccedenti ad u , $F^{[u]}$, è definita allora come segue:

$$\begin{aligned}
 F^{[u]}(x) &= P(X \leq x \mid X > u) \\
 &= \frac{P(X \leq x, X > u)}{P(X > u)} \\
 &= \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)} \quad x \geq u
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ovviamente, l'estremo sinistro di questa funzione coincide con la soglia u .

Come si diceva e come motiveremo nel paragrafo 2.3.4, la distribuzione di Pareto generalizzata W , indicata in letteratura con GPD, *Generalized Pareto Distribution*, costituisce lo strumento parametrico adatto a rappresentare gli eccedenti sopra una certa soglia u . Ed è ottenuta come funzionale delle già incontrate distribuzioni dei valori estremi:

$$W(x) = 1 + \log G(x) \quad \log G(x) > -1 \tag{2.19}$$

In analogia con quanto visto in precedenza, anche per la distribuzione di Pareto generalizzata esistono differenti parametrizzazioni, che conducono a modelli differenti, che possono poi essere riuniti in un'unica espressione. Nella tabella 2.3 sono indicate le distribuzioni in dipendenza del parametro scelto. La distribuzione GP1 è del tipo di quella dell'equazione 2.3, dove è $c = 1$. Ancora una volta, è possibile aggiungere un parametro di posizione e uno di scala, μ e $\sigma > 0$, ottenendo i modelli completi di Pareto generalizzate. Ad esempio, per la distribuzione di Pareto (GP1), vale

$$W_{1,\alpha,\mu,\sigma}(x) = W_{1,\alpha}((x - \mu)/\sigma)$$

che ha la caratteristica di avere estremo sinistro pari $\mu + \sigma$.

La riparametrizzazione in γ viene identificata scegliendo ancora una volta $\gamma = 1/\alpha$ e parametri di posizione e scala come visto a proposito delle distribuzioni dei valori estremi. Si ottiene dunque

$$W_\gamma(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \gamma x)^{-1/\gamma} & \text{se } \gamma \neq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{se } \gamma = 0 \end{cases}$$

dove per $W_0(x)$ il supporto è dato da $x > 0$, mentre:

- per $\gamma > 0$, il supporto è dato da $x > 0$;
- per $\gamma < 0$, il supporto è dato da $0 < x < 1/|\gamma|$.

Sempre in analogia con quanto già visto nel paragrafo 2.3.1, quando $\gamma = 1/\alpha \neq 0$, si ha

$$W_\gamma = W_{i,\alpha,-\alpha,|\alpha|}$$

È da notare che l'estremo sinistro di W_γ è uguale a 0 qualunque sia il valore di γ ; questo elemento risulta confermato dalle scritture delle distribuzioni di Pareto non generalizzate del paragrafo 2.2.

Ad esemplificazione, si consideri la figura 2.5, dove sono rappresentate diverse distribuzioni Pareto generalizzate, nella parametrizzazione in γ , al variare dello stesso parametro di forma. Si vede come al suo aumentare la funzione di ripartizione tenda ad abbassarsi, il che implica che valori di γ via via più elevati fanno aumentare il peso della coda destra. Inserendo anche dei parametri di posizione e scala μ e σ , l'effetto è il seguente: la distribuzione ha come limite inferiore non più lo 0 ma il parametro di posizione e si registra un abbassamento della funzione di distribuzione, motivato dall'aumento della volatilità.

Per quanto riguarda le funzioni di densità, sono ottenute come consuetudine dalla derivata delle ripartizioni scritte sopra e risultano:

$$w_\gamma(x) = \begin{cases} (1 + \gamma x)^{-(1+1/\gamma)} & \text{se } \gamma \neq 0 \\ e^{-x} & \text{se } \gamma = 0 \end{cases}$$

Una delle principali e più utili proprietà della distribuzione di Pareto generalizzata è data dalla cosiddetta POT-stability, dove POT è acronimo per *Peaks Over Threshold*. Tale proprietà è espressa dalla relazione

$$F^{[u]}(b_u + a_u x) = F(x)$$

e, in particolare, risulta verificata nei seguenti tre esempi:

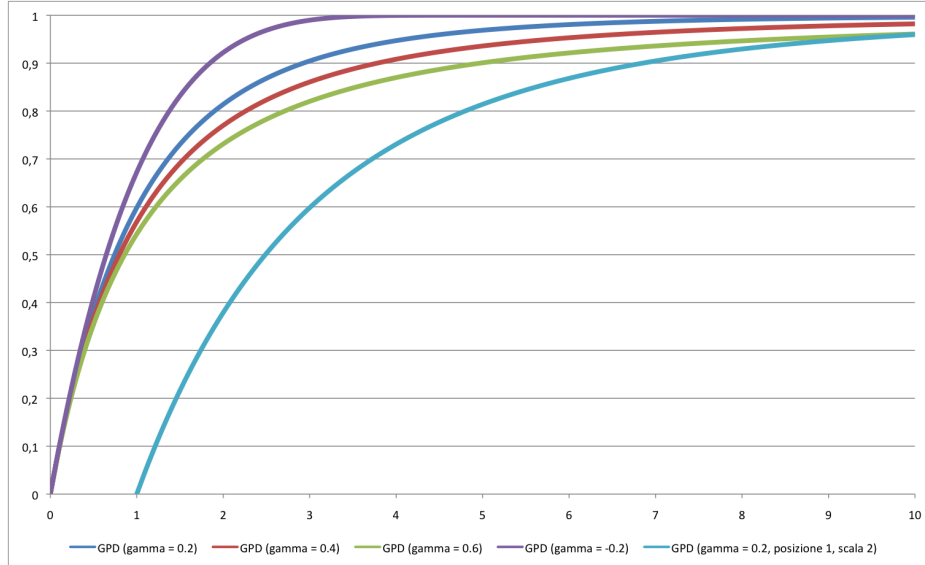


Figura 2.5: Distribuzioni Pareto generalizzate al variare di γ

- per distribuzioni esponenziali con estremo sinistro uguale a 0: $W_{0,0,\sigma}^{[u]} = W_{0,\mu,\sigma}$;
- per distribuzioni di Pareto nella parametrizzazione in α , con $\mu + \sigma < u$: $W_{1,\alpha,\mu,\sigma}^{[u]} = W_{1,\alpha,\mu,u-\mu}$;
- per distribuzioni GPD nella parametrizzazione in γ , con $\mu < u$ e $\sigma + \gamma(u - \mu) > 0$: $W_{\gamma,\mu,\sigma}^{[u]} = W_{\gamma,u,\sigma+\gamma(u-\mu)}$.

Di cruciale importanza ai nostri fini, per come è stato costruito il dataset e per le analisi che possono essere condotte alzando la soglia u , risulta quindi la proprietà per la quale la distribuzione di Pareto generalizzata troncata sulla coda è ancora una GPD.

Momenti della distribuzione di Pareto generalizzata

Procedendo in un modo simile a quello del paragrafo 2.3.1, e definendo il momento j -esimo di una distribuzione di Pareto generalizzata come

$$m_{j,W} = E(X^j) = \int x^j dW(x) = \int x^j w(x) dx$$

si può dimostrare che vale

$$m_{j,W_{1,\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha - j} \quad \alpha > j$$

$$m_{j,W_{2,\alpha}} = (-1)^j \frac{\alpha}{\alpha - j}$$

e si nota che il j -esimo momento della Pareto è infinito quando $\alpha \leq j$.

In particolare, per la media e la varianza si ottiene, nella riparametrizzazione in α :

$$m_{W_{i,\alpha}} = \frac{|\alpha|}{\alpha - 1} \quad \frac{1}{\alpha} < 1 \quad i = 1, 2$$

$$Var_{W_{i,\alpha}} = \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)} \quad \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2} \quad i = 1, 2$$

Come consuetudine, tali scritte possono essere ritradotte anche nella parametrizzazione in γ , W_γ , ovvero

$$m_{W_\gamma} = \frac{1}{1 - \gamma} \quad \gamma < 1 \quad (2.20)$$

$$Var_{W_\gamma} = \frac{1}{(1 - \gamma)^2(1 - 2\gamma)} \quad \gamma < \frac{1}{2} \quad (2.21)$$

La stima dei parametri

In modo simile a quanto visto per la distribuzione generalizzata dei valori estremi, si tratta ora di stimare i parametri della Pareto generalizzata presentata poco fa. La trattazione riguarda soltanto due parametri, ovvero γ e σ , poichè, come si vedrà nella sezione 2.3.4, la GPD può essere impiegata per modellare le code e in particolare la distribuzione dei sinistri superiori ad una certa soglia u , che rappresenta anche il parametro di posizione e del quale, quindi, non è necessario produrre una stima.

Per quanto riguarda il modello di Pareto (GP1), si è di fatto già detto nel paragrafo 2.2, dove si operava con un valore di σ fissato (chiamato c), con $\mu = 0$ e con il parametro di forma α stimato con la massima verosimiglianza. Il modello, alla luce di quanto detto a proposito della Pareto generalizzata, può essere scritto come

$$W_{1,\alpha,0,u} \quad \alpha > 0$$

e lo stimatore individuato valeva

$$\alpha_k = \frac{k}{\sum_{i=1}^k \log(y_i/u)}$$

dove l'inserimento di k vuole sottolineare il fatto che si stanno scegliendo esattamente k statistiche d'ordine. Tale stimatore viene anche chiamato stimatore di Hill, nella notazione²¹

$$\alpha_k = \frac{k}{\sum_{i=1}^k \log(x_{n-i+1:n}/x_{n-k:n})}$$

Esso gode di alcune buone proprietà per variabili i.i.d., quali la consistenza debole e, sotto alcune limitazioni sulle v.a., quella forte e la normalità asintotica, ma risulta sensibile al numero di eccedenti k scelti²². In particolare, la varianza dello stimatore si riduce all'aumentare di k , ma in questa situazione può verificarsi un effetto di distorsione. Uno strumento utile per identificare il valore ottimale di k è costituito dal c.d. *Hill plot*, un grafico a dispersione così costruito:

$$\{(k, \alpha_k), k = 2, \dots, n\} \quad (2.22)$$

Un valore intermedio di k dovrebbe garantire una stabilità del risultato senza incorrere in elevati effetti distorsivi. Questo strumento grafico può anche essere usato per migliorare la stima per α in quanto ci si aspetta un accostamento del grafico ad un asintoto ad altezza pari proprio al valore vero di α al crescere di k ²³.

Per quanto riguarda il modello unificato (GPD), può essere nuovamente impiegato, sotto l'ipotesi di variabili i.i.d., il metodo della massima verosimiglianza. La funzione di log-verosimiglianza risulta²⁴:

$$l((\gamma, \sigma); \mathbf{x}) = -n \ln \sigma - \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{\gamma}{\sigma} x_i\right)$$

Le soluzioni delle equazioni di verosimiglianza vengono individuate anche in questo caso per via numerica; il metodo funziona bene quando $\gamma > -1/2$, e dunque sempre nel nostro caso, e gli stimatori ottenuti godono di proprietà asintotiche ottimali. In particolare, per le stime $\hat{\gamma}_n$ e $\hat{\sigma}_n$ vale la seguente distribuzione asintotica:

$$n^{1/2} \left(\hat{\gamma}_n - \gamma, \frac{\hat{\sigma}_n}{\sigma} - 1 \right) \xrightarrow{d} N(0, M^{-1}) \quad n \rightarrow \infty$$

²¹Reiss e Thomas (2007)

²²Embrechts e altri (1997)

²³Resnick (1997)

²⁴Embrechts e altri (1997)

con

$$M^{-1} = (1 + \gamma) \begin{pmatrix} 1 + \gamma & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Uno strumento di controllo sulle stime, di facile utilizzo, è legato alla funzione degli eccessi medi, si veda il paragrafo 2.4.3.

2.3.4 Il teorema di Pickands-Balkema-de Haan

In questo paragrafo presentiamo brevemente l'impostazione teorica che consente di modellare gli eccedenti oltre la soglia u attraverso una distribuzione di Pareto generalizzata²⁵.

L'enunciato del teorema di Pickands, presentato quasi in coincidenza con l'elaborato sullo stesso tema pubblicato da Balkema e de Haan, è il seguente: *Se $F^{[u]}(b_u + a_u x)$ ha una funzione di distribuzione limite continua quando u tende verso l'estremo destro $\omega(F)$ di F , allora*

$$|F^{[u]}(x) - W_{\gamma, u, \sigma_u}(x)| \rightarrow 0 \quad u \rightarrow \omega(F) \quad (2.23)$$

per qualche GPD con parametri di forma, posizione e scala rispettivamente γ , u e $\sigma_u > 0$.

Si nota che la distribuzione degli eccedenti e la GPD approssimante possiedono lo stesso estremo sinistro, che coincide con u .

Una distribuzione F che verifica la 2.23 si dice che appartiene al POT dominio di attrazione della Pareto generalizzata W_γ . In particolare, ogni distribuzione dei valori estremi G_γ appartiene al POT dominio di attrazione di W_γ .

Preso quindi una funzione dei valori estremi, come la Gumbel, è possibile individuare quindi una GPD con dei parametri γ, u, σ tali che la sua funzione degli eccedenti venga approssimata con sufficiente precisione. In figura 2.6 viene rappresentato proprio il confronto tra gli eccedenti la soglia $u = 3$ presi da una distribuzione di Gumbel e una GPD con parametri opportuni, con posizione, in accordo con il teorema di Pickands, pari alla soglia 3.

In modo equivalente, è possibile riformulare quanto detto finora con riferimento, anziché alla funzione degli eccedenti, a quella degli eccessi, presentati nel paragrafo 2.1²⁶. La funzione di ripartizione degli eccessi può essere

²⁵Per ulteriori approfondimenti e per la dimostrazione del teorema presentato si rimanda a Pickands, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. *The Annals of Statistics* 3.

²⁶McNeil (1997)

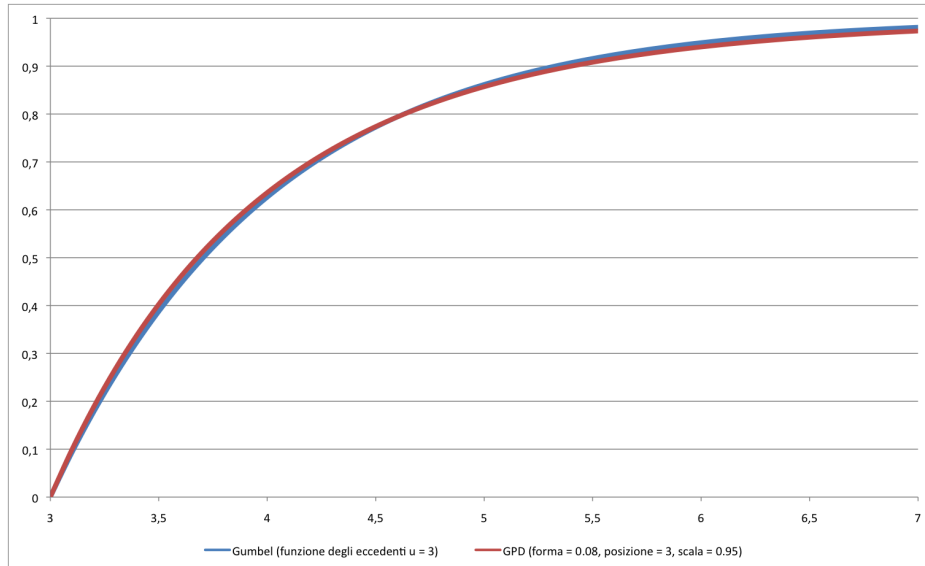


Figura 2.6: Esempio di applicazione del teorema di Pickands-Balkema-de Haan

formulata come

$$F^{(u)}(x) = P\{X - u \leq x \mid X > u\} = \frac{F(x + u) - F(u)}{1 - F(u)} \quad x \geq 0 \quad (2.24)$$

e anche ad essa si applica il teorema di Pickands, Balkema, de Haan, ovvero anche gli eccessi sopra ad una certa soglia si distribuiscono, al crescere della soglia considerata, secondo una distribuzione di Pareto generalizzata.

2.3.5 Code e quantili

In questa sezione ampliamo le basi teoriche poste a fondamento dell'Extreme Value Theory, mostrando:

- come si possa adattare una distribuzione di Pareto generalizzata alla coda di una distribuzione;
- come si calcolano i quantili delle distribuzioni dei valori estremi e della famiglia della Pareto generalizzata.

Adattamento della coda di una distribuzione

Grazie al teorema di Pickands-Balkema-de Haan si è potuto mostrare che, al crescere della soglia u , la distribuzione degli eccedenti si può approssimare ad una GPD. Ora mostriamo come adattare quest'ultima alla coda della distribuzione originaria, al di sopra di una soglia sufficientemente elevata.

In particolare, la funzione di ripartizione $F(x)$ può essere espressa in funzione della soglia u secondo la seguente rappresentazione, valida per $X \in \mathbf{R}$:

$$F(x) = F(u)P(X \leq x \mid X \leq u) + [1 - F(u)]P(X \leq x \mid X > u) \quad (2.25)$$

Questo significa che, per $X \geq u$, vale la seguente relazione, dove $F^{[u]}(x)$ ha lo stesso significato che nella 2.18:

$$F(x) = [1 - F(u)]F^{[u]}(x) + F(u) \quad X \geq u \quad (2.26)$$

Noto il risultato del teorema di Pickands-Balkema-de Haan, è possibile allora approssimare attraverso una certa GPD la funzione di ripartizione $F(x)$, quando sia $x \geq u$, ovvero:

$$F(x) \approx [1 - F(u)]W_{\gamma, u, \sigma}(x) + F(u) = W_{\gamma, \tilde{\mu}, \tilde{\sigma}}(x) \quad (2.27)$$

I nuovi parametri risultano individuati come segue²⁷:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \frac{\sigma}{1 + \gamma W_{\gamma}^{-1}(F(u))} \\ \tilde{\mu} &= u - \tilde{\sigma} W_{\gamma}^{-1}(F(u)) \end{aligned}$$

È possibile mostrare l'unicità del legame che unisce i parametri originari a questi “nuovi” parametri; tale relazione può essere scritta sia nella precedente parametrizzazione in γ che in α ²⁸; utilizzando quest'ultima, per la distribuzione di Pareto vale che

$$\begin{aligned} W_{1, \alpha, \tilde{\mu}, \tilde{\sigma}}^{[u]} &= W_{1, \alpha, \mu, \sigma} \\ W_{1, \alpha, \tilde{\mu}, \tilde{\sigma}}(u) &= F(u) \end{aligned}$$

che conduce ai due nuovi parametri $\tilde{\mu} = \mu$ e $\tilde{\sigma} = \sigma[1 - F(u)]^{1/\alpha}$.

Si riprenda l'esempio mostrato con la figura 2.6 e si consideri ora la figura 2.7. I nuovi parametri di posizione e scala sono stati calcolati usando le relazioni incontrate in questo paragrafo, mentre il parametro di forma,

²⁷Reiss e Thomas (2007)

²⁸In particolare, si può dimostrare che il legame, quando si usi la parametrizzazione in γ , è rappresentato dalle due seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} W_{\gamma, \tilde{\mu}, \tilde{\sigma}}^{[u]} &= W_{\gamma, u, \sigma} \\ W_{\gamma, \tilde{\mu}, \tilde{\sigma}}(u) &= F(u) \end{aligned}$$

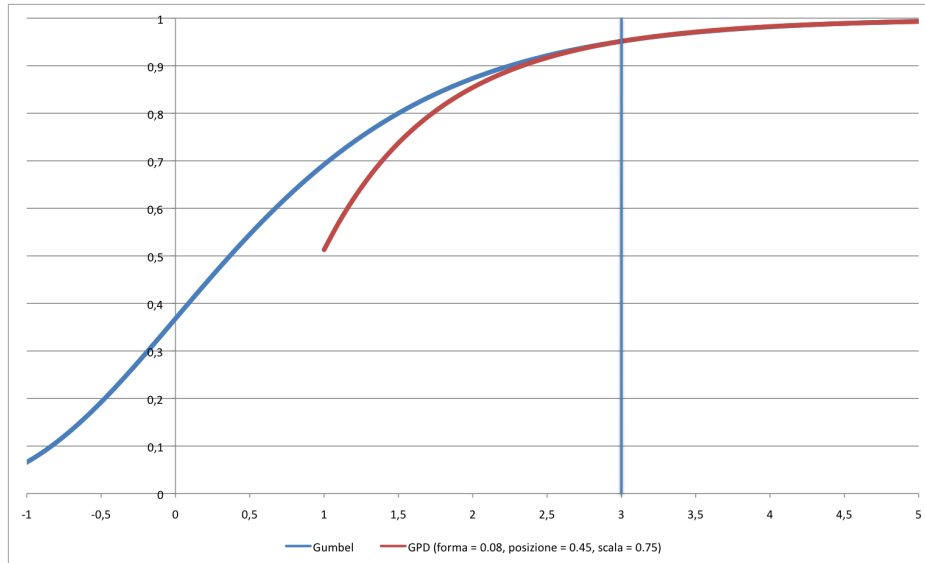


Figura 2.7: Adattamento della coda di una distribuzione

in accordo con quanto detto, è rimasto il medesimo. Si vede come oltre la soglia, sottolineata da una riga verticale, le due curve si avvicinano molto. Il grafico precedente rappresenta quindi una sorta di “zoom” della coda del presente grafico. La distribuzione di Pareto generalizzata può quindi essere uno strumento per rappresentare la coda di una distribuzione di partenza, sopra al valore di u per il quale si applica il teorema di Pickands, Balkema, de Haan, ovvero sopra al livello in cui la funzione degli eccedenti può essere approssimata ad una GPD.

Quantili e funzioni quantili

Il calcolo dei quantili, come si vedrà nel capitolo 3, è di fondamentale importanza all’interno del processo che guida all’individuazione dei requisiti patrimoniali e alle valutazioni di rischiosità.

Il q -quantile è definito come quel valore z tale per cui $F(z) = q$ ed è dunque l’elemento che isola un’area pari a q alla sua sinistra. Quando non è unico, verrà individuato nel più piccolo valore per il quale si realizza questa condizione.

Passando alla funzione quantile, diciamo che, data una funzione di ripartizione F , essa è rappresentata dall’inversa di quest’ultima, ovvero F^{-1} e dunque

$$F^{-1}(q) = \inf\{x : F(x) \geq q\} \quad 0 < q < 1 \quad (2.28)$$

Qualora la funzione di ripartizione iniziale F sia individuata con riferimento anche a parametri di posizione e scala μ e σ , ecco che allora la funzione quantile introdotta verrà riscalata in dipendenza di questi ultimi, ovvero

$$F_{\mu,\sigma}^{-1} = \mu + \sigma F^{-1}$$

A completamento, riportiamo nella tabella 2.4 i valori delle funzioni quantili

	Distribuzione	Funzione quantile
Distribuzioni dei valori estremi	EV ($\gamma \neq 0$)	$G_{\gamma}^{-1}(q) = ((-\log(q))^{-\gamma} - 1)/\gamma$
	Gumbel (EV0)	$G_0^{-1}(q) = -\log(-\log(q))$
	Fréchet (EV1)	$G_{1,\alpha}^{-1}(q) = (-\log(q))^{-1/\alpha}$
	Weibull (EV2)	$G_{2,\alpha}^{-1}(q) = -(-\log(q))^{-1/\alpha}$
Distribuzioni Pareto generalizzate	GPD ($\gamma \neq 0$)	$W_{\gamma}^{-1}(q) = ((1-q)^{-\gamma} - 1)/\gamma$
	Esponenziale (GP0)	$W_0^{-1}(q) = -\log(1-q)$
	Pareto (GP1)	$W_{1,\alpha}^{-1}(q) = (1-q)^{-1/\alpha}$
	Beta (GP2)	$W_{2,\alpha}^{-1}(q) = -(1-q)^{-1/\alpha}$

Tabella 2.4: Funzioni quantili per GEV e GPD

per le distribuzioni dei valori estremi e per quelle della famiglia delle Pareto generalizzate, in entrambe le parametrizzazioni.

2.4 Strumenti statistici per l'analisi di sinistri estremi

In questa sezione presentiamo alcuni strumenti tecnici piuttosto diffusi all'interno delle analisi statistiche, cercando di fornire un taglio che ben si adatti alle *large losses* che siamo interessati a studiare.

In particolare, dopo aver definito come possono essere rappresentate alcune funzioni di probabilità, con particolare riferimento alle funzioni di ripartizione campionarie, utilizzeremo alcuni specifici Q-Q Plots insieme alla funzione degli eccessi medi, metodi che hanno trovato ampia diffusione all'interno degli studi di Extreme Value Theory²⁹. Inoltre, verranno illustrate alcune linee guida circa le modalità con le quali adattare delle funzioni parametriche a sinistri di particolare gravità.

²⁹Embrechts e altri (1997)

2.4.1 Rappresentazioni alternative delle distribuzioni

Di seguito presentiamo alcune tecniche possibili per la rappresentazione dei dati, che si adattano molto bene al caso di sinistri particolarmente rilevanti, come i nostri, ma spesso anche alla maggior parte delle tipologie di dati.

La prima è la *funzione di distribuzione campionaria*, indicata con $\hat{F}_n(x)$, che rappresenta la funzione di ripartizione osservata sui dati:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(x_i \leq x) \quad (2.29)$$

dove con I si è indicata la funzione indicatrice, che vale 1 quando $x_i \leq x$ e 0 altrimenti. Indicando con

$$x_{1:n} \leq \dots \leq x_{n:n}$$

i dati x_1, \dots, x_n opportunamente ordinati dal più piccolo al più grande, risulta $\hat{F}_n(x_{i:n}) = i/n$ quando $x_{i:n}$ non è un punto multiplo.

Per come è stata costruita, $\hat{F}_n(x)$ costituisce quindi una possibile approssimazione della vera funzione di ripartizione $F(x)$, ovvero consideriamo i dati campionari come realizzazioni empiriche provenienti da una comune distribuzione di probabilità F . In termini formali,

$$\hat{F}_n(x) \approx F(x)$$

Ai nostri fini, risulta ancora più utile la *funzione di distribuzione campionaria degli eccedenti*, ovvero di quei valori y_i presentati nel paragrafo 2.1 e definiti come quegli x_i tali per cui $x_i > u$.

Riscrivendo la funzione di distribuzione campionaria come $\hat{F}_n(\mathbf{x}; x)$, in modo da evidenziarne la dipendenza da \mathbf{x} , possiamo allora definire la funzione di distribuzione campionaria degli eccedenti, per k eccedenti, come

$$\hat{F}_k(\mathbf{y}; \cdot) = \left(\hat{F}_n(\mathbf{x}; \cdot) \right)^{[u]}$$

che quindi corrisponde semplicemente alla funzione di distribuzione degli eccedenti della funzione di distribuzione campionaria.

Con ragionamento analogo a quello svolto in precedenza, questa distribuzione costituisce un'approssimazione della funzione di ripartizione sottostante, che in questo caso risulta essere la funzione di distribuzione degli eccedenti 2.18:

$$\hat{F}_k(\mathbf{y}; \cdot) \approx F^{[u]} \quad x \geq u \quad (2.30)$$

Così come esiste la possibilità di rappresentare la funzione di distribuzione campionaria, possiamo calcolare la *funzione dei quantili campionaria*, in accordo con la 2.28, che risulta³⁰

$$\hat{F}_n^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right) = x_{i:n} \quad (2.31)$$

dove, come al solito, i $x_{i:n} \leq \dots \leq x_{n:n}$ sono i dati disposti in ordine crescente. Così come la funzione di distribuzione campionaria, anche questa rappresentazione risulta costante in caso di punti multipli. Tale funzione costituisce quindi una possibile via per approssimare la funzione “teorica” dei quantili, ovvero vale che

$$x_{i:n} = \hat{F}_n^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right) \approx F^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)$$

Un utile strumento alternativo è rappresentato dalle *densità kernel*, che partono dalla nozione di istogramma, inteso come mezzo per rappresentare le funzioni di densità (ottenute come derivata di quelle precedentemente descritte) e definito attraverso la seguente relazione

$$\sum_{i=1}^n g(x, x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n(t_{j+1} - t_j)}$$

essendo $(t_j, t_{j+1}]$ l'intervallo in ascissa e $1/n$ i pesi costanti.

Sostituiamo x_i , prima definito da una funzione costante, con

$$g_b(x, x_i) = \frac{1}{nb} k\left(\frac{x - x_i}{b}\right)$$

essendo:

- k una funzione o *kernel* tale che $\int k(y)dy = 1$;
- $b > 0$ una banda di oscillazione, prefissata o valutata in corso di analisi.

Quando $k \geq 0$ e sommando i singoli termini (aventi parametro di posizione x_i e parametro di scala $b > 0$) si ottiene la densità di probabilità

$$f_{n,b}(x) = \frac{1}{nb} \sum_{i=1}^n k\left(\frac{x - x_i}{b}\right) \quad (2.32)$$

³⁰Formulazioni alternative propongono di sostituire l'argomento della funzione con $(i - 0.5)/n$.

Una particolare funzione *kernel*, che presenta diversi requisiti di ottimalità³¹, è il *kernel di Epanechnikov*:

$$k(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)I(-1 \leq x \leq 1) \quad (2.33)$$

Un esempio di approssimazione di una funzione di distribuzione mediante utilizzo delle densità kernel è riportato nella figura 2.8. Sono stati generati 1000 valori utilizzando la funzione inversa di una distribuzione normale con media 2 e varianza 1. Viene rappresentato l'andamento teorico di tale modello distributivo, confrontato con le densità kernel con 2 diverse bande di oscillazione; si nota che all'aumento del valore di $b > 0$, aumenta il c.d. effetto "smoothing".

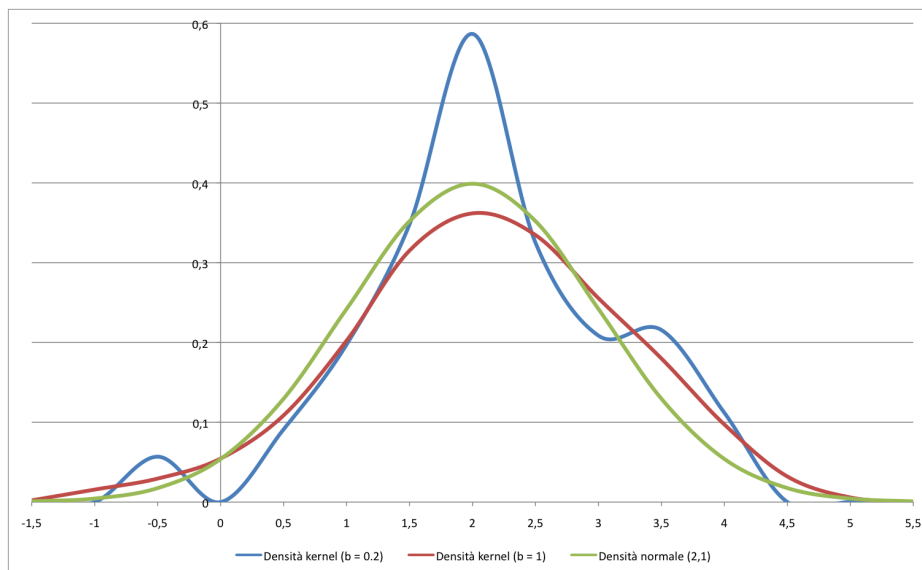


Figura 2.8: Esempio di densità kernel

2.4.2 Metodi per la verifica dell'indipendenza

In questa sezione presentiamo alcuni metodi che possono essere utili per verificare, prima dell'analisi tecnica vera e propria, la correttezza dell'ipotesi di variabili indipendenti che si è soliti formulare. Si vuole valutare se i dati presentino dipendenze al loro interno, elemento solo in parte osservabile dalla serie storica dei sinistri, incontrata nel paragrafo 1.3.

³¹Reiss e Thomas (2007)

Un primo metodo consiste nel calcolo della *funzione di autocorrelazione campionaria*, ovvero si tratta di analizzare se le covarianze, opportunamente normalizzate, calcolate tra dati con distanza reciproca pari al passo h , risultano significativamente nulle o meno.

La funzione di autocorrelazione campionaria viene costruita nel seguente modo³²:

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\sum_{t=1}^{n-h} (x_t - \bar{x})(x_{t+h} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2} \quad (2.34)$$

L'indipendenza risulta verificata quando per $h = 1, \dots, n - h$ la funzione di autocorrelazione $\hat{\rho}(h)$ risulta prossima allo 0.

Trattandosi di sinistri ad elevato impatto, non risultano verificate, anche alla luce di quanto affrontato nel paragrafo 2.3, le consuete ipotesi di gaussianità ed il limite centrale, e quindi le bande entro le quali accettiamo l'ipotesi di indipendenza non possono essere calcolate secondo le più adottate metodologie. In particolare, in Resnick (1997) viene affrontato il problema del calcolo della distribuzione di $\hat{\rho}(h)$ per valori di α compresi tra 1 e 2, situazione valida anche nel nostro caso, essendo quello in esame una estensione del dataset affrontato nel paper al quale ci si sta riferendo.

Per variabili casuali Y_1, \dots, Y_n , aventi funzione di retro-ripartizione ottenuta moltiplicando la quantità $x^{-1/\gamma}$ per una funzione a variazione lenta, chiamata $\hat{\rho}_Y(h)$ la funzione di autocorrelazione campionaria di passo h , si può dimostrare la validità della seguente relazione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{b_n^2}{\hat{b}_n} \hat{\rho}_Y(h) \leq x \right) = P \left(\frac{U_h}{V_0} \leq x \right)$$

dove:

- U_h è una variabile casuale limitata da un lato, stabile con indice $1 < \alpha < 2$;
- V_0 è una variabile casuale stabile con indice $\alpha/2$;
- b_n è la soluzione dell'equazione $P(Y_1 > x) = 1/n$;
- \hat{b}_n è la soluzione dell'equazione $P(Y_1 Y_2 > x) = 1/n$.

È allora possibile costruire un intervallo di confidenza al 95% per le correlazioni campionarie come $\pm l \hat{b}_n / b_n^2$ con l determinato come

$$P(|U_h/V_0| \leq l) = 0.95$$

³²Resnick (1997)

A questo punto, il 95° percentile di $|U_n/U_0|$ può essere individuato via simulativa e, facendo un'ipotesi distributiva sulle Y_i che possono, almeno sopra ad una certa soglia, essere ipotizzate Pareto-distribuite, grazie al teorema di Pickands, si ottiene

$$l \frac{\hat{b}_n}{b_n^2} = l \left(\frac{n}{\log n} \right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Un'alternativa a questo metodo è quella di costruire la funzione di autocorrelazione campionaria per sottoinsiemi del dataset, controllando che il valore stimato sia simile nei differenti sottospazi. In caso contrario si dovrebbe essere prudenti circa la formulazione dell'ipotesi di indipendenza.

Una seconda tipologia di metodologie è costituita dai c.d. *test di casualità*, diffusi in letteratura e dei quali ne evidenziamo due:

- *Test dei turning point*. Indicato con T il numero di turning point all'interno delle variabili, si può dimostrare che sotto l'ipotesi nulla la statistica test

$$\frac{T - \frac{2}{3}(n-2)}{\sqrt{\frac{16n-29}{90}}}$$

si distribuisce come una normale standard;

- *Test delle differenze di segno*. Indicato con S il numero di volte per cui è positiva la differenza $X_t - X_{t-1}$, sotto l'ipotesi nulla di indipendenza vale che

$$\frac{S - \frac{1}{2}(n-1)}{\sqrt{\frac{n+1}{12}}}$$

si distribuisce ancora una volta come una normale standard.

2.4.3 Funzione degli eccessi e Q-Q plot

In questa sezione presentiamo due temi che sono noti nella letteratura statistica, ma che hanno particolare validità per il tipo di distribuzioni che stiamo considerando. Ad esempio, le funzioni degli eccessi sono linee rette nel caso di distribuzioni Pareto generalizzate. Inoltre, questi strumenti possono essere delle utili diagnostiche al fine di calcolare il parametro di forma delle distribuzioni Pareto generalizzate.

Funzione degli eccessi

Innanzitutto richiamiamo la funzione degli eccessi, scritta nella notazione di distribuzione condizionata

$$F^{(u)}(x) = P(X - u \leq x \mid X > u)$$

che viene chiamata anche vita residua all'età u , ovvero rappresenta la probabilità che si viva fino ad x o meno, noto che si è sopravvissuti fino ad u . Analizziamo il ruolo di questa funzione in u .

La *funzione degli eccessi medi* e_F è costituita dal valore atteso della relazione precedente, ovvero³³

$$e_F(u) = E(X - u \mid X > u) = \int x dF^{(u)}(x) \quad u < \omega(F) \quad (2.35)$$

che rappresenta anche la vita media residua all'età u . Descrive quindi il valore medio del superamento della soglia, noto che la soglia prescelta è stata superata.

Quando, come capiterà nelle nostre analisi, sono presenti parametri di posizione e scala, vale

$$e_{F_{\mu,\sigma}}(u) = \sigma e_F\left(\frac{u - \mu}{\sigma}\right) \quad (2.36)$$

Per quanto riguarda la lettura grafica della funzione media degli eccedenti, diciamo che, quando i punti presentano un trend rivolto verso l'alto, questo è un segnale di distribuzione con code pesanti. Infatti, viene preso come riferimento il trend di una distribuzione esponenziale che sarebbe all'incirca orizzontale. Infine, come naturale, una funzione degli eccessi medi rivolta verso il basso sarebbe segnale di una distribuzione con code corte.

Nella tabella 2.5 sono riportate le funzioni degli eccessi medi per le distribuzioni GPD nella doppia parametrizzazione e per la distribuzione di Weibull ribaltata (vedi equazione 2.12). Si noti che non è possibile calcolarla per la distribuzione di Pareto quando $\alpha < 1$. Inoltre, e vale solo per le distribuzioni Pareto generalizzate, tutte le funzioni degli eccessi medi sono lineari. È quindi possibile controllare se una certa distribuzione empirica può essere adattata con una Pareto generalizzata controllando, e valutando sopra quale soglia u questo avviene, che la funzione degli eccessi medi

³³Reiss e Thomas (2007)

Distribuzione	Funzione degli eccessi	Dominio
Esponenziale (GP0)	$e_{W_0}(u) = 1$	$u > 0$
Pareto (GP1)	$e_{W_{1,\alpha}}(u) = \frac{u}{\alpha-1}$	$u > 1$
Beta (GP2)	$e_{W_{2,\alpha}}(u) = \frac{u}{\alpha-1}$	$-1 \leq u \leq 0$
GPD	$e_{W_\gamma}(u) = \frac{1+\gamma u}{1-\gamma}$	$u > 0$ (quando $0 \leq \gamma < 1$) $0 < u < -1/\gamma$ (quando $\gamma < 0$)
Weibull "ribaltata"	$e_{\tilde{G}_{2,\alpha}}(u) = \frac{1}{ \alpha } u^{1+\alpha} (1 + O(u^\alpha))$	$\forall u$

Tabella 2.5: Funzioni degli eccessi medi per le GPD

sia una linea retta³⁴. Si può inoltre osservare che la pendenza, nel modello unificato in γ , è crescente nel parametro.

Qualora l'ipotesi di distribuzione Pareto generalizzata sembri trovare conferma, la funzione degli eccessi medi può essere impiegata come controllo dei valori stimati secondo la massima verosimiglianza. In particolare, la pendenza della funzione può rappresentare una stima per γ , in quanto è pari a $\gamma/(1-\gamma)$.

Quando si voglia applicare questo tipo di funzione per la verifica di determinate ipotesi distributive, è necessario operare con dati campionari. In modo semplice e immediato possiamo definire allora la *funzione campionaria degli eccessi medi* come

$$e_n(u) = e_{\hat{F}_n}(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - u) I(x_i > u)}{\sum_{i=1}^n I(x_i > u)} \quad x_{1:n} < u < x_{n:n} \quad (2.37)$$

che è il valore atteso degli eccessi oltre u e costituisce una stima di e_F .

Q-Q plot e varianti

In questa sezione definiamo cosa sia un Q-Q plot e motiviamo come questo strumento possa essere utile all'interno delle analisi su sinistri estremi.

L'idea di fondo è quella di confrontare i quantili della distribuzione empirica con quelli della distribuzione teorica ipotizzata valida nel contesto di riferimento. Ricordando la 2.28 e la 2.31, si tratta quindi di rappresentare in un grafico a dispersione il seguente insieme di coppie³⁵:

$$\left(F^{-1}(q_i), \hat{F}_n^{-1}(q_i) \right) \quad i = 1, \dots, n \quad (2.38)$$

³⁴Per approfondimenti teorici su tale aspetto vedi il legame con le *hazard functions* e la condizione di von Mises in Reiss e Thomas (2007) paragrafo 2.3.

³⁵Gli assi possono essere anche invertiti a discrezione del ricercatore.

con

$$q_i = \frac{i}{n+1}$$

I parametri di scala e posizione, a differenza del parametro di forma, del quale è necessario produrre una stima anticipatamente, possono anche essere scelti una volta effettuata la procedura. Infatti poichè $\hat{F}_n^{-1}(q_i) = x_{i:n}$ vale sempre la relazione

$$\hat{F}_n^{-1}(q_i) \approx F_{\mu,\sigma}^{-1}(q_i) = \mu + \sigma F^{-1}(q_i)$$

il Q-Q plot $(F^{-1}(q_i), x_{i:n})$, con $i = 1, \dots, n$, è vicino al grafico $(x, \mu + \sigma x)$.

Per quanto riguarda la lettura del Q-Q plot vale che, poichè la rappresentazione vuole mostrare il confronto tra quantili empirici e teorici, se l'ipotesi formulata è vera, ciò significa che i punti si muoveranno lungo una linea retta.

Un esempio di Q-Q plot particolarmente utili ai fini di analisi di Extreme Value Theory è dato dal confronto tra le statistiche d'ordine, utilizzate già in precedenza, confrontate questa volta non con una distribuzione qualunque, ma con la distribuzione esponenziale³⁶. In particolare, si rappresenta nel piano il seguente insieme di coppie ordinate

$$\left(x_{i:n}, W_0^{-1} \left(\frac{i}{n+1} \right) \right) \quad i = 1, \dots, n \quad (2.39)$$

Come in precedenza, quando i punti si muovono lungo una linea retta questo implica che la distribuzione esponenziale ipotizzata è una buona approssimazione della distribuzione empirica. Quando invece c'è uno scostamento concavo questo indica che la distribuzione sottostante ha una coda più pesante; il contrario avviene in presenza di uno scarto di tipo convesso.

Presentiamo ora un'altra applicazione basata su un Q-Q plot, particolarmente interessante perché consente di fornire anche una stima per il parametro di forma della distribuzione di Pareto, possibile alternativa alla relazione di massima verosimiglianza già individuata (vedi equazione 2.6).

³⁶McNeil (1997)

Ricordando come è fatta la funzione dei quantili di una Pareto (tabella 2.4), costruiamo un grafico a dispersione del tipo³⁷

$$\left(-\log \left(1 - \frac{i}{n+1} \right), \log x_{i:n} \right) \quad i = 1, \dots, n \quad (2.40)$$

L'ipotesi di distribuzione paretiana è verificata quando questo grafico segue una linea retta e, in particolare, la pendenza viene chiamata *stimatore QQ* e costituisce una stima di $1/\alpha$.

Fissato dunque un certo ordine, si tratta di costruire il grafico presentato in precedenza, trovare la retta di regressione che meglio interpola i punti e il reciproco del coefficiente di regressione costituirà una stima per α .

2.4.4 Adattamento dei sinistri a funzioni parametriche

Di particolare importanza risulta il seguente insieme di analisi volte ad individuare come si possa adattare una distribuzione teorica parametrica ad una empirica. Per quanto presentato all'interno della sezione 2.3, ci si concentrerà sull'adattamento delle distribuzioni dei massimi alle distribuzioni dei valori estremi e, soprattutto, sul *fitting* con una Pareto generalizzata per le code di una distribuzione.

Adattare una distribuzione dei valori estremi ai massimi

Chiamando con $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un vettore di massimi estratti da una distribuzione di partenza e ricordando il concetto di funzione di distribuzione campionaria $\hat{F}_n(\mathbf{x}; \cdot)$, che fornisce una stima della distribuzione sottostante, quando n è sufficientemente elevato possiamo scrivere

$$\hat{F}_n(\mathbf{x}; \cdot) \approx F^m \approx G_{\gamma, \mu_m, \sigma_m} \quad (2.41)$$

ovvero una distribuzione dei valori estremi può essere adattata alla funzione di ripartizione campionaria basata sui massimi.

Con l'ausilio di un software, questa via può essere percorsa provando ad adattare una distribuzione dei valori estremi su una funzione di densità empirica, seguendo la relazione precedente, oppure su una densità kernel, costruita come visto nel paragrafo 2.4.1. Rispettivamente, si tratterà di scegliere quei parametri che minimizzino il massimo scarto tra le due curve, oppure, nel caso delle kernel, di minimizzare l'area tra le due curve.

³⁷Resnick (1997)

Qualora queste soluzioni risultino insoddisfacenti, vorrò dire che verrà meno l'applicabilità del teorema di Fisher-Tippett, per via di un valore di n non sufficientemente elevato. Potrebbe anche darsi che m , il numero dei "blocchi" dai quali vengono estratti i massimi (i 23 anni a disposizione, nel nostro caso), non sia abbastanza grande.

Adattamento con una distribuzione Pareto generalizzata

Per quanto riguarda l'adattamento sulle code con una Pareto generalizzata, si veda il paragrafo 2.3.5. Con questo riferimento in mente, ampliamo ora la presentazione.

L'applicabilità del teorema di Pickands dipende in modo cruciale dal valore della soglia scelta, che rappresenta la vera problematicità quando si voglia adattare la coda di una distribuzione con una GPD; quanto deve essere elevato u ?

Una possibile risposta è individuabile grazie alla funzione campionaria degli eccessi medi. Poichè tale funzione è lineare per le funzioni Pareto generalizzate (vedi tabella 2.5), una soglia sopra alla quale può essere valida l'approssimazione del teorema di Pickands è tale per cui dopo di essa l'andamento segua una linea retta³⁸.

Individuata la soglia di riferimento possiamo poi passare alla funzione di ripartizione degli eccedenti, essendo

$$F^{[u]}(x) = F^{(u)}(x - u)$$

Quando si abbia a che fare con dati campionari, e chiamando con y_1, \dots, y_k i k eccedenti, vale la seguente approssimazione

$$\hat{F}_k(\mathbf{y}; \cdot) \approx F^{[u]} \approx W_{\gamma, u, \sigma}(x) = W_{\gamma, \sigma}(x - u) \quad x \geq u$$

Si nota come per approssimare la distribuzione degli eccedenti si adotti un parametro di posizione pari alla soglia. Tale scelta risulta corretta dato che, per una GPD, vale in generale che, per $\gamma > 0$, il supporto sia $x > 0$; inserendo una soglia, questa costituisce il minimo valore assunto dalla distribuzione.

Procedendo oltre, è possibile, come già anticipato, adattare la GPD alla coda della distribuzione originaria, operando quindi non più sugli eccedenti; per fare questo è necessario modificare i parametri di posizione e scala.

Basandoci su osservazioni campionarie, si ha che la stima della coda può essere espressa come

$$\hat{F}_n(\mathbf{x}; x) \approx W_{\gamma, \tilde{\mu}, \tilde{\sigma}}(x) \quad x \geq u \quad (2.42)$$

³⁸McNeil e Saladin (1997)

con

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma} &= \sigma(k/n)^\gamma \\ \tilde{\mu} &= u - \sigma[1 - (k/n)^\gamma]/\gamma\end{aligned}$$

dove $\hat{F}_n(\mathbf{x}; u) = 1 - k/n$ è la funzione di distribuzione campionaria dei dati originari valutata nel punto u .

Con riferimento ad una distribuzione di Pareto “standard”, $W_{1,\alpha,\mu,\sigma}$, avente estremo sinistro pari a $\mu + \sigma = u$, che si adatti alla distribuzione campionaria degli eccedenti $\hat{F}_k(\mathbf{y}; \cdot)$, allora la distribuzione di Pareto $W_{1,\alpha,\tilde{\mu},\tilde{\sigma}}$, si adatterà alla coda della distribuzione originaria. In analogia con quanto visto nel paragrafo 2.3.5, è possibile individuare delle condizioni univoche che legano le due coppie di parametri che, per la Pareto, permettono di ottenere $\tilde{\mu} = \mu$ e $\tilde{\sigma} = \sigma(k/n)^{1/\alpha}$.

2.5 Un’analisi congiunta di frequenza e intensità

In questo paragrafo presentiamo un interessante strumento che si è sviluppato nell’ambito dell’Extreme Value Theory e che consente di valutare l’intensità dei sinistri tenendo in considerazione anche la loro frequenza; le pagine che seguono armonizzano quanto fin qui detto e possono essere viste come una rielaborazione della maggior parte degli elementi presentati in questo capitolo.

La relazione 2.16, rivisitazione dell’enunciato di Fisher-Tippett, può essere interpretata come la descrizione quantitativa del numero di osservazioni che eccedono la soglia. Come detto nel paragrafo 2.1, tale numero può essere rappresentato da una variabile casuale binomiale che, sotto alcune condizioni, valide nel nostro caso, converge in distribuzione ad una v.a. di Poisson.

Un processo di punti potrà allora essere costruito considerando i punti

$$\{(i/n, (X_i - b_n)/a_n), 1 \leq i \leq n\}$$

Possiamo reinterpretare la condizione del teorema citato affermando che il numero di punti nell’area $[0, 1] \times (x, \infty)$ converge a $-\log G(x)$. È possibile dimostrare³⁹ che tale processo di punti converge, su insiemi del tipo

$$A = \{(t_1, t_2) \times (x, \infty)\} \subset [0, 1] \times \mathbf{R}$$

³⁹Embrechts e altri (1997)

ad un processo di Poisson bidimensionale, con misura di intensità

$$\Lambda(A) = -(t_2 - t_1) \log G(x) = (t_2 - t_1)(1 + \gamma x)^{-1/\gamma} \quad (2.43)$$

quando valga $1 + \gamma x > 0$.

Poichè in generale non si conosceranno i valori normalizzanti a_n e b_n , non essendo nota la distribuzione sottostante, si utilizzerà la variante della funzione di intensità

$$\Lambda(A) = -(t_2 - t_1) \log G\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad (2.44)$$

in cui i parametri di posizione e scala tengono conto delle sequenze normalizzanti non note.

Riscritture alternative, che ritorneranno utili tra poco, descrivono $\Lambda(A)$ in dipendenza di una funzione ad intensità costante

$$\Lambda(A) = (t_2 - t_1)V(x; \gamma, \sigma, \mu) \quad (2.45)$$

o della sua derivata

$$\Lambda\{(t_1, t_2) \times (x, \infty)\} = (t_2 - t_1) \int_x^\infty v(w; \gamma, \sigma, \mu) dw \quad (2.46)$$

dove $v(x; \gamma, \sigma, \mu) = -\frac{dV(x; \gamma, \sigma, \mu)}{dx}$.

Da quanto emerso, i punti non saranno allora posizionati in un generico tempo i/N , ma dipenderanno dalla distribuzione di Poisson e verranno disposti nell'istante T_i di osservazione. Il modello fin qui costruito viene denominato *modello POT*⁴⁰ e descrive il seguente insieme di punti:

$$\{(T_i, X_i), 1 \leq i \leq N, X_i > u\}$$

nello spazio

$$[-T, 0] \times (u, \infty)$$

In un modello così rappresentato, la funzione di ripartizione che meglio rappresenti la funzione degli eccessi 2.24 risulta essere l'ormai nota distribuzione di Pareto generalizzata

$$G_{\gamma, \phi}(x) = 1 - \left(1 + \frac{\gamma x}{\phi}\right)^{-1/\gamma}$$

⁴⁰McNeil e Saladin (2000)

dove $\phi = \sigma + \gamma(u - \mu)$ ⁴¹.

Il vantaggio di questo approccio è, dunque, la congiunta modellizzazione di frequenza ed intensità e quindi la non unica focalizzazione sulla distribuzione del costo. Tale risultato giustifica l'introduzione dei processi di punti svolta all'inizio del paragrafo 2.1.

Per quanto riguarda la stima, essa può essere nuovamente condotta con il metodo della massima verosimiglianza (con la limitazione sul valore di γ , non influente nel nostro caso, che era già stata discussa a proposito dell'individuazione degli stimatori per distribuzioni GEV e GPD). La funzione di verosimiglianza ha la forma⁴²

$$L(\gamma, \sigma, \mu) = \exp\{-TV(u; \gamma, \sigma, \mu)\} \cdot \prod_{i=1}^N v(X_i; \gamma, \sigma, \mu)$$

che abbiamo opportunamente trasformato in modo più semplice, in modo da poter sfruttare l'algoritmo del risolutore in Excel:

$$\ln L = -TV \left(1 + \frac{\gamma(u - \mu)}{\sigma} \right)^{-1/\gamma} + \sum_{i=1}^N \ln \left[\frac{1}{\sigma} \left(1 + \frac{\gamma(X_i - u)}{\sigma} \right)^{-1 - \frac{1}{\gamma}} \right] \quad (2.47)$$

La costruzione fin qui formulata presuppone che il processo in questione sia poissoniano e *omogeneo*, concetto già visto all'interno del paragrafo 2.1; tuttavia il modello risulta flessibile ad estensioni che riguardino il caso in cui l'intensità di sinistro sia *non omogenea*.

Infatti, è possibile ridefinire l'intensità dei sinistri come

$$V(u; \gamma, \sigma, \mu) = \left(1 + \frac{\gamma_t(u - \mu_t)}{\sigma_t} \right)^{-\frac{1}{\gamma_t}} \quad (2.48)$$

e varrà che gli eventi del processo di punti, indicati con $(X_i - b_n)/a_n$ nella formulazione iniziale, ovvero gli eccessi oltre la soglia u , sono esprimibili come

$$G_{\gamma_t, \mu_t, \sigma_t, \Theta}(x) = 1 - \left(1 + \frac{\gamma_t x}{\phi_t} \right)^{-\frac{1}{\gamma_t}} \quad (2.49)$$

dove il parametro di scala, in accordo con la relazione vista in precedenza, vale $\phi_t = \sigma_t + \gamma_t(u - \mu_t)$. Si noti che è stato inserito un ulteriore parametro

⁴¹Per la breve dimostrazione rimandiamo a McNeil e Saladin (2000), dove si vede che il punto di partenza è costituito dalla funzione di retroripartizione degli eccessi, data nel modello POT dal rapporto tra le intensità dei punti sopra le due soglie $x + u$ e u .

⁴²È da sottolineare che la soglia viene ora indicata, in conformità con il resto del lavoro, con u .

Θ : esso costituisce una scrittura compatta valida per tutti i parametri che servono a modellare il comportamento nel tempo di γ , μ e σ .

A tal proposito, esempi di come possano essere descritti gli andamenti di questi tre parametri sono i seguenti⁴³:

1. $\mu(t) = \alpha_1 + \beta_1 t$
2. $\sigma(t) = \exp(\alpha_2 + \beta_2 t)$
3. $\gamma(t) = \alpha_3 + \beta_3 t$

Nel primo caso si suppone un andamento lineare in μ , ovvero un trend di primo grado nel livello degli eventi estremi; similmente, nel terzo caso viene assunto un certo andamento lineare anche per il parametro di forma. Il secondo caso differisce leggermente, in quanto è necessario avere dei valori positivi per la volatilità assunta dall'intensità dei sinistri.

2.6 Analisi del dataset

In questa sezione vogliamo presentare alcuni risultati ottenuti sul dataset presentato nel paragrafo 1.3 utilizzando le metodologie proposte in questo capitolo.

2.6.1 Indagini preliminari

Una prima analisi riguarda la verifica della bontà dell'ipotesi di indipendenza che si è soliti formulare. Accertata questa proprietà, potremo operare con una certa "libertà" sui sinistri, senza dover tenere conto di dipendenze tra dati riferiti ad istanti temporali diversi. Le metodologie che seguono fanno riferimento al paragrafo 2.4.2.

Lo strumento più efficace è rappresentato dalla funzione di autocorrelazione campionaria 2.34, il cui andamento è mostrato in figura 2.9. Scelto un passo considerato sufficientemente elevato ($h = 15$), sono stati calcolati i valori della funzione e quelli delle bande entro le quali dovrebbe essere compresa per verificare l'indipendenza; in particolare, sia U_h che V_0 sono state scelte distribuite secondo il modello di Pareto, con parametri rispettivamente $\alpha = 1.30$ e $\alpha/2 = 0.65$; individuato l come quel valore prima del quale si ha il 95% della distribuzione costruita come rapporto (del valore assoluto, qui ininfluente) tra U_h e V_0 , si sono ottenute le bande riportate in figura, che confermano l'ipotesi di indipendenza nel dataset.

⁴³Corradin (2002)

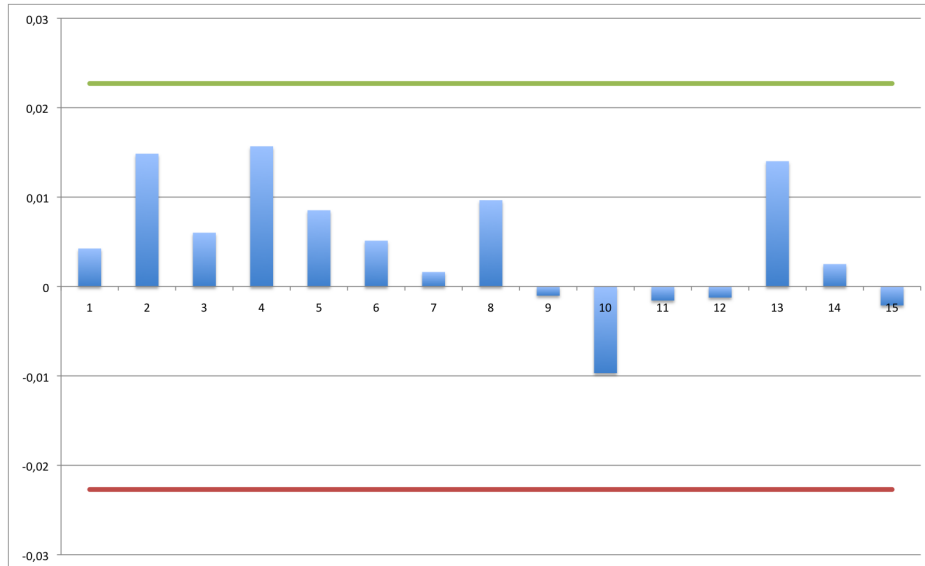


Figura 2.9: Incendi danesi 1980-2002: funzione di autocorrelazione campionaria

Altri strumenti, meno potenti, per la verifica dell'indipendenza sono rappresentati dai test di casualità (test dei turning point e delle differenze di segno), riportati nella tabella 2.6. Le statistiche sono calcolate in accordo con le formule del paragrafo 2.4.2; in particolare, sono stati registrati 4445 turning point e 3405 differenze di segno, valori che, dato il valore di n di 6870, portano ad accettare l'ipotesi di indipendenza in entrambi i test.

Test	Statistica test	Ipotesi accettata
<i>Turning point</i>	$\frac{4445-4579}{\sqrt{1221}} = -3.83$	H_0
<i>Differenze di segno</i>	$\frac{3405-3435}{\sqrt{573}} = -1.23$	H_0

Tabella 2.6: Test di casualità sui sinistri

Un'altra rappresentazione che forniamo in questa sezione è quella di un primo possibile Q-Q plot, in accordo con la relazione 2.39, ovvero confrontiamo le statistiche d'ordine, ossia i dati ordinati, con i quantili della distribuzione esponenziale, calcolati come inversa della funzione di distribuzione valutata nei punti $\frac{i}{n+1}, i = 1, \dots, n$.

La chiave di lettura era già stata fornita nel paragrafo 2.4.3, per cui risulta agevole ora verificare che i dati provengono da una distribuzione a code pesanti; si ha infatti uno scostamento concavo rispetto ad una ideale linea retta che congiunga l'estremo inferiore sinistro del grafico con l'estremo superiore destro. Se è vero che gli stessi quantili di una distribuzione espo-

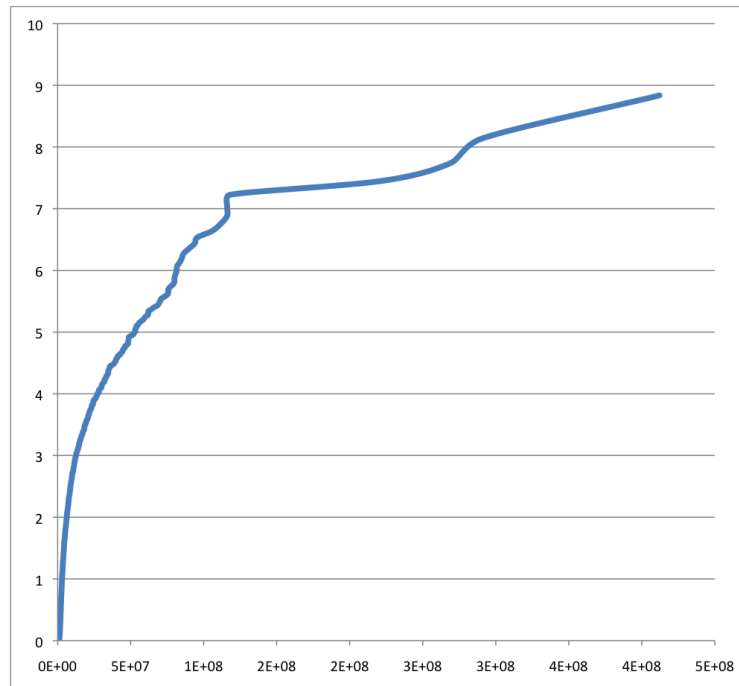


Figura 2.10: Incendi danesi 1980-2002: quantili empirici e quantili della distribuzione esponenziale

nenziale, estratti casualmente, non sarebbero perfettamente disposti lungo una linea retta, è pur vero che, dato l'elevato numero di dati disponibili, il risultato pare decisamente privo di ragionevoli dubbi.

2.6.2 Modelli per il numero e l'importo degli eventi

Con riguardo a quanto detto nel paragrafo 2.1 a proposito del significato del parametro λ e degli intertempi di arrivo dei sinistri, innanzi tutto abbiamo raccolto i sinistri dell'anno 1980 suddivisi per giorno di accadimento dell'evento; il primo incendio è del 5 gennaio, l'ultimo del 31 dicembre; durante il 1980 si sono registrati 166 eventi superiori ad un milione di corone.

Abbiamo costruito gli intertempi di arrivo $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \dots$: ci sono diversi giorni in cui accade più di un evento, per cui ci sono diversi intertempi pari a 0. Abbiamo detto, vedi formula 2.2, che tali intertempi hanno distribuzione esponenziale se ipotizziamo di essere davanti ad un processo di Poisson omogeneo di parametro λ : su un singolo anno di analisi, come in questo caso, riteniamo soddisfacente sia il modello poissoniano sia la sua natura omogenea, e passiamo quindi alla stima di λ . Nella tabella 2.7 si vede come mediamente di verificchi all'incirca un sinistro ogni 2 giorni.

Poichè il valore atteso della distribuzione esponenziale $f(x)$ è $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, ricaviamo facilmente λ . Esso può essere interpretato come l'intensità del

Media	2,2
$\lambda = 1/E(X)$	0.45
Minimo	0
Massimo	12
1° quartile	1
Mediana	1
3° quartile	3

Tabella 2.7: Incendi danesi 1980: intertempi di arrivo dei sinistri

processo di Poisson⁴⁴ e ci è utile per misurare la probabilità che si registrino k sinistri in un tempo t , in accordo con l'equazione 2.1: a titolo di esempio, la probabilità che in un anno si registrino 150 incendi *superiori ad un milione di corone* vale

$$P\{N(365) = 150\} = e^{-0.45 \cdot 365} \cdot \frac{(0.45 \cdot 365)^{150}}{150!} = 1.5\%$$

mentre la media della stessa distribuzione risulta $E[N(t)] = \lambda t = 166$, correttamente coincidente con il numero totale di eventi registrati nel 1980.

Con riferimento sempre al numero dei sinistri, è stata svolta un'ulteriore analisi molto interessante ai fini della modellizzazione del costo aggregato dei sinistri e associata alla determinazione dell'intensità di sinistro, della quale si era brevemente detto nella fase di presentazione del dataset; la riflessione, alla luce della figura 1.9, in alto, era stata che il numero di eventi cresce linearmente nel tempo. Continueremo a considerare questo primo spunto, ma con l'aggiunta di quanto si osserva nella figura 2.11: elevando via via il valore della soglia scelta e calcolando il numero di eventi sopra di essa, l'andamento risulta gradualmente più stabile; già con $u = 3$ milioni scompare la possibilità di parlare di un trend. Riprenderemo questo aspetto all'interno del capitolo 3, quando si tratterà di definire un processo stocastico che descriva il costo aggregato provocato da questi incendi.

Passando a considerare la natura del costo sinistri provocato dagli incendi, si veda innanzi tutto la figura 2.12 che mostra l'andamento del danno medio nel periodo considerato. La funzione è stata calcolata con due accortezze:

⁴⁴ $\lambda = E[N(t+1)] - E[N(t)]$

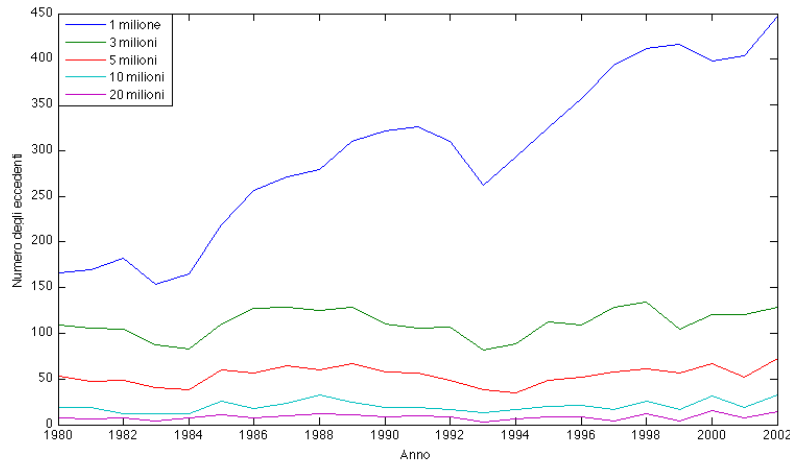


Figura 2.11: Incendi danesi 1980-2002: andamento del numero di eventi in funzione della soglia

- non considerare i 34 sinistri che, nonostante siano inferiori ad un milione di corone, sono confluiti nel dataset;
- eliminare dal calcolo i 4 sinistri superiori a 120 milioni di corone, in quanto marcatamente *outliers*.

Il risultato è che sono stati presi in esame i danni medi comportati da 6832 sinistri, in luogo dei 6870 considerati inizialmente (99.4% dei sinistri). L'andamento è marcatamente decrescente, nonostante nella figura 1.9 avessimo osservato come sia il numero sia l'importo aumentasse nel tempo; rileggendo quanto si era osservato alla luce della nuova analisi, la spiegazione pare evidente: l'ammontare delle perdite totali è in crescita soltanto perché è in crescita il numero dei sinistri avvenuti, non per un trend in aumento del singolo danno; anzi, l'aumento degli eventi è probabilmente legato all'aumento del numero di contratti stipulati e comporta che vengano assicurati edifici e perdite aziendali di valore via via inferiore, con la conseguente riduzione del danno medio.

Utilizziamo ora la distribuzione di Pareto affrontata nel paragrafo 2.2 per studiare meglio il costo del singolo sinistro. Anche qui abbiamo scelto di eliminare i 34 sinistri inferiori ad un milione, senza però eliminare alcun outlier: abbiamo quindi 6836 sinistri da considerare. Per stimare il parametro della distribuzione α , utilizziamo la relazione 2.6, quella che

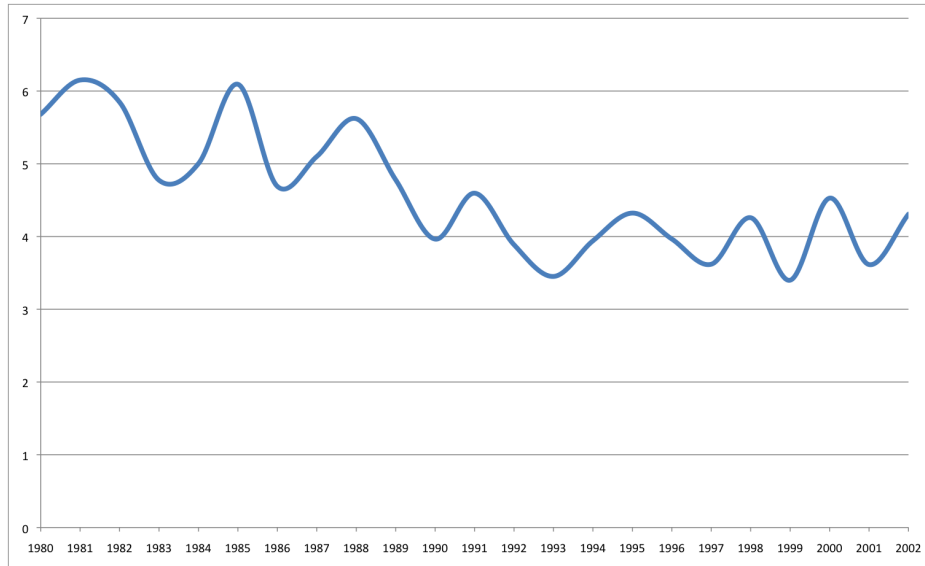


Figura 2.12: Incendi danesi 1980-2002: andamento del danno medio

permette di ottenere lo stimatore di massima verosimiglianza⁴⁵. Poichè $T = \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{X_i}{c}\right) = 7252$, risulta

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{T} = \frac{6836}{7252} = 0.94$$

inferiore ad 1 e che quindi non ci permette di calcolare in forma chiusa media e varianza della distribuzione. Poichè al diminuire di α aumenta il peso della coda e risultano infiniti i momenti, il risultato appare coerente con la teoria.

Un'analisi rispetto alla variabile tempo della stima di massima verosimiglianza conduce alla figura 2.13, che mostra quale sarebbe il valore del parametro α se fosse stimato in ogni singolo anno; fino al 1990 si registrano valori più elevati, successivamente la stima scende al di sotto del valore critico 1; il massimo è registrato proprio nel primo anno e vale 1.47, il minimo nel penultimo anno e risulta 0.86. Il risultato appare perfettamente coerente con quanto detto a proposito dell'ammontare dei danni: all'aumentare dell'importo totale dei sinistri, motivato dall'aumento del numero più che da quello del danno medio (in diminuzione, figura 2.12), deve diminuire la stima prodotta per α .

⁴⁵Non facciamo riferimento alla relazione 2.7 circa la stima corretta perché la correzione incide in misura davvero minima dato l'elevato valore di n .

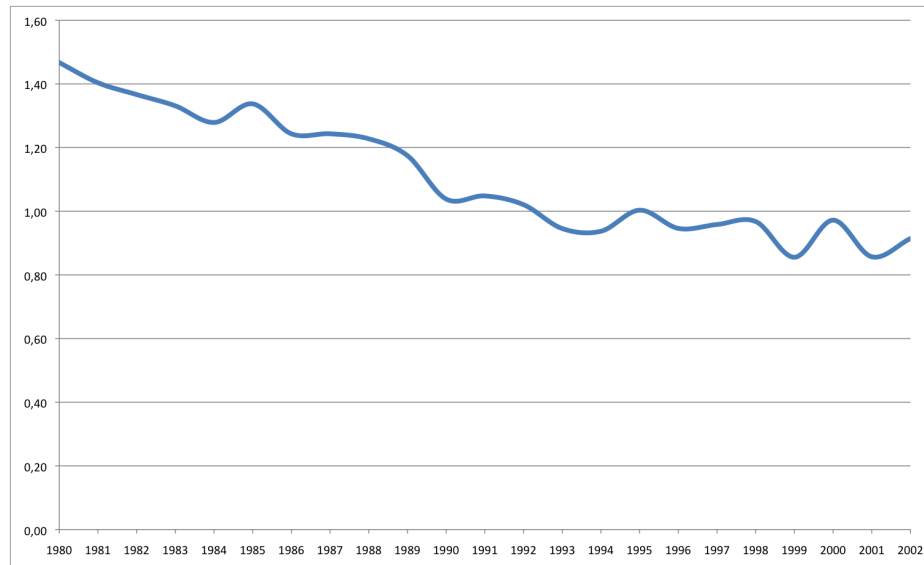


Figura 2.13: Incendi danesi 1980-2002: parametro della Pareto con lo stimatore di massima verosimiglianza

Consideriamo ora solo i sinistri superiori a u , con $u > 1$ milione. La tabella 2.8 mostra come l'incremento della soglia e la conseguente riduzione del numero di sinistri superiori ad essa, provochi un aumento del valore di α : a fronte di un denominatore in diminuzione progressiva, i valori al numeratore decrescono in modo più lento.

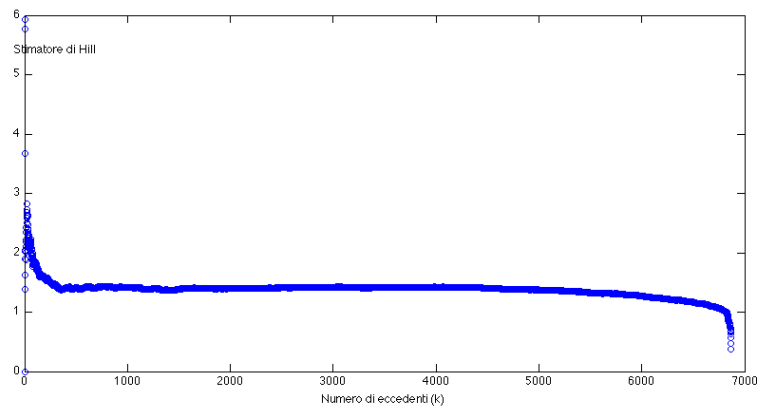
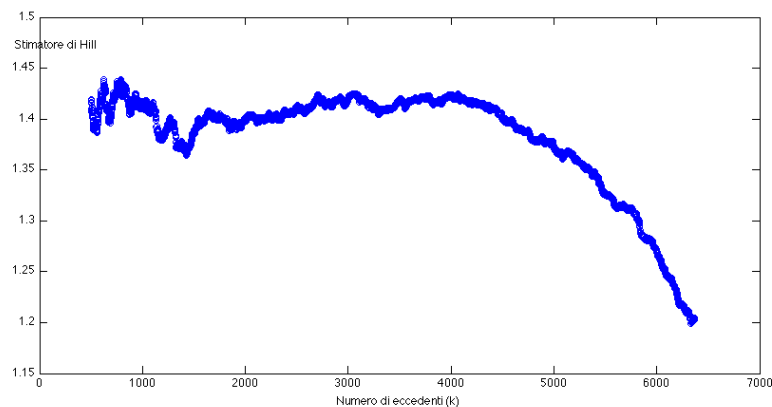
u	n	T	$\hat{\alpha}$
5	1237	891	1.39
10	464	335	1.38
15	277	189	1.47
20	192	120	1.60

Tabella 2.8: Incendi danesi 1980-2002: parametri della Pareto al variare delle soglie

Un'analisi ancora più completa può essere condotta attraverso lo stimatore di Hill, che, come visto nella sezione riguardante la stima dei parametri, all'interno del paragrafo 2.3.3, costituisce il modello teorico di riferimento per stimare il parametro α in dipendenza del numero k di eccedenti selezionato; tale metodo, attraverso la costruzione del c.d. *Hill plot*, porta anche a selezionare quel k ottimale per garantire una bassa volatilità della stima senza incorrere in errori di tipo distorsivo.

Con questo in mente si consideri il grafico in alto nella figura 2.14. Si

nota, come speravamo, che l'andamento della curva risulta piuttosto stabile per un'ampia fascia del dominio; valori di k in questa porzione risultano dunque ottimali perchè garantiscono la consistenza della stima individuata per α . Si noti che i primi valori sono molto elevati: il primo non è riportato e tenderebbe a $+\infty$, i successivi sono comunque piuttosto superiori alla media perchè la coda non è abbastanza pesante; gli ultimi, al contrario, tendono drasticamente verso il basso poichè il numero dei dati "distanti" è particolarmente elevato e dunque la coda risulta pesante, il che implica una conseguente riduzione del valore di α .

(a) $\forall k$ (b) $500 < k < 6370$ Figura 2.14: Incendi danesi 1980-2002: *Hill plot*

Nella figura in basso è riportata la stessa funzione, ottenuta però eli-

minando i primi e gli ultimi 500 valori di k ⁴⁶; il risultato è, una volta di più, decisamente stabile; valori di α compresi fra 1.3 e 1.4 risultano quindi buoni descrittori della coda quando si decida di modellizzare i sinistri secondo la distribuzione di Pareto; essi risultano non più validi solo nel caso in cui si considerino sinistri poco numerosi (caso sul quale non vale la pena soffermarsi) oppure l'intero universo degli eventi; in quest'ultima situazione ci ritroviamo ogni qualvolta scegliamo $u = 1$: sarà quindi necessario impiegare con moderazione la distribuzione di Pareto quando si stia cercando un modello distributivo adattabile all'intero dataset.

Un'ultima applicazione riguarda la modifica dello stimatore di massima verosimiglianza al fine di ottenere il cosiddetto stimatore di credibilità, come nell'equazione 2.9. Nel nostro caso abbiamo utilizzato la relazione per raggiungere due scopi: rivedere lo stimatore di verosimiglianza per $u = 1$, poichè la sua affidabilità risulta non soddisfacente, in quanto in contrasto con l'esperienza, e ridurre, quando $u = 20$, il peso dei sinistri estremi (si ricordi che qui non è stato escluso nessun outlier). Per poter meglio leggere la tabella 2.9 si noti che:

- i pesi b sono calcolati con riferimento alla relazione 2.10 e $b = f(k)$, con $f'(k) > 0$ per $k > -\frac{1}{2(n+1)}$ e quindi sempre nel nostro caso (per come è stato definito, k non può che essere positivo);
- k può essere riletto in termini di coefficiente di variazione, ovvero

$$\frac{\sqrt{\text{Var}(\Theta)}}{E(\Theta)} = \frac{\sqrt{\frac{k}{\alpha_0^2}}}{\frac{1}{\alpha_0}} = \sqrt{k};$$
- dalla relazione 2.9, lo stimatore di credibilità si ricava come $\bar{\alpha} = \frac{\hat{\alpha}\alpha_0}{\hat{\alpha} + b(\alpha_0 - \hat{\alpha})}$;
- il valore di α_0 è quello consigliato in Rytgaard (1990), $\alpha_0 = 1.5$.

Abbiamo scelto valori piuttosto contenuti per k , soprattutto nel primo caso, al fine di non pesare eccessivamente la stimatore di massima verosimiglianza. Si osservi come, con $u = 1$, l'effetto sia il ripristino di α sopra il valore 1, mentre nel secondo caso la variazione del parametro sia abbastanza contenuta, anche perché si è scelto un valore di k tale che b restasse all'elevato valore del 97%.

⁴⁶Si noti che negli ultimi 500 valori sono compresi anche i 34 valori inferiori alla soglia di un milione.

<i>Parametro</i>	$u = 1$	$u = 20$
k	0.0005	0.005
b	0.77	0.97
$\hat{\alpha}$	0.94	1.60
α_0	1.5	1.5
$\bar{\alpha}$	1.03	1.59

Tabella 2.9: Incendi danesi 1980-2002: parametro della Pareto con lo stimatore di credibilità

2.6.3 Utilizzo di strumenti di EVT

In questa sezione presentiamo diverse applicazioni degli strumenti, soprattutto grafici, incontrati nel paragrafo 2.3 e nel paragrafo 2.4.

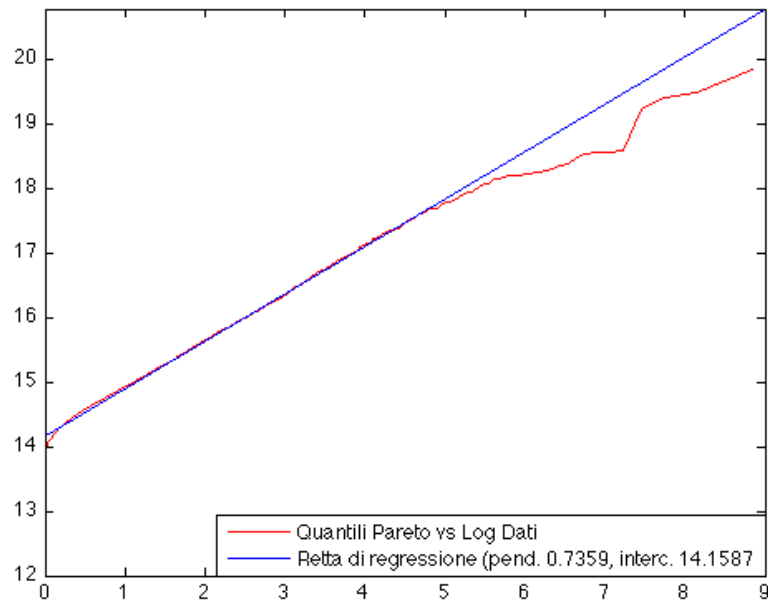


Figura 2.15: Incendi danesi 1980-2002: quantili empirici e quantili della distribuzione di Pareto

Iniziamo con alcune varianti dei Q-Q Plot, in particolare con quello individuato dalla relazione 2.40. In figura 2.15 si nota la linearità del Q-Q Plot così calcolato, salvo per la parte della coda; questo implica, lo vedremo meglio tra poco, che la Pareto sovrastima il peso della coda destra, mentre

ben si adatta nella parte precedente della distribuzione. Si è detto che con questo strumento è anche possibile ricavare un'ulteriore stima per il parametro di forma α ; infatti il coefficiente di regressione è pari a 0.7359, il che implica un valore di α che ammonta a 1.36, vicino a quello calcolato secondo la massima verosimiglianza nel paragrafo 2.6.2 (elevando leggermente il valore della soglia di riferimento).

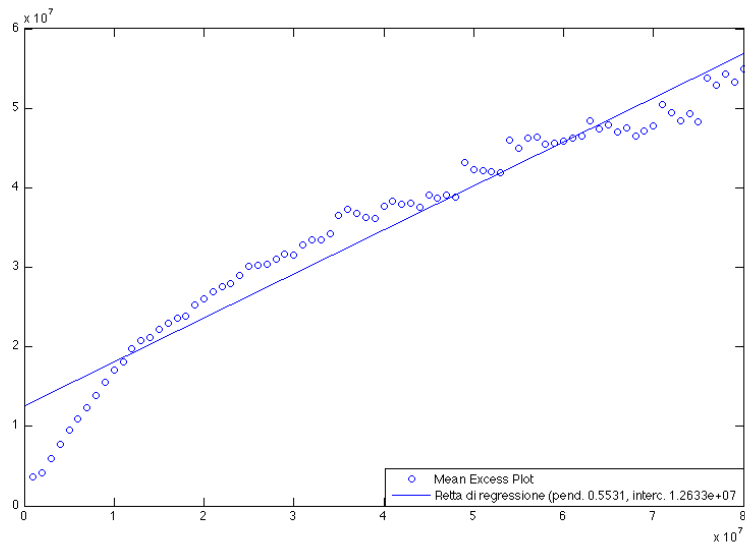


Figura 2.16: Incendi danesi 1980-2002: funzione degli eccessi medi

Nella figura 2.16 è invece riportata la funzione degli eccessi medi. L'andamento dovrebbe seguire una linea retta per sostenere l'ipotesi di distribuzione Pareto generalizzata; nel nostro caso esso non segue perfettamente un trend lineare, ma possiamo comunque affermare che, già per valori non troppo elevati della soglia scelta, la funzione degli eccessi medi sembra sostanzialmente confermare il comportamento tipico di dati distribuiti secondo una GPD. Come si era detto, tale funzione può essere utilizzata per verificare le stime prodotte dall' algoritmo della massima verosimiglianza; in particolare, per sinistri superiori ad un milione (6836 eventi) la verosimiglianza per una Pareto generalizzata darebbe una stima per γ di 0.406; chiamata β la pendenza della retta di regressione vale che

$$\beta = \frac{\gamma}{1 - \gamma} = 0.5531$$

il che implica che la stima per γ risulta 0.356, molto vicina a quella dell'algoritmo numerico.

Entriamo ora più nel vivo nell'analisi tecnica, con la presentazione dei modelli distributivi che meglio rappresentano la realtà del dataset, ed in particolare descrivono la distribuzione dei massimi e soprattutto delle code.

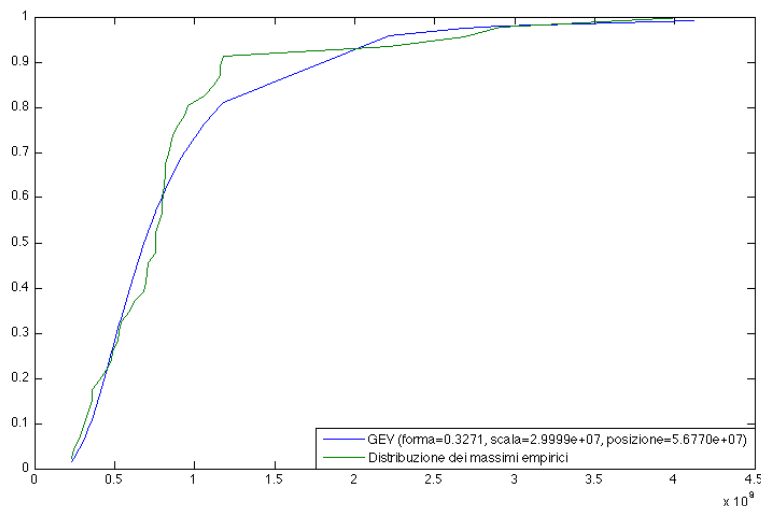


Figura 2.17: Incendi danesi 1980-2002: distribuzione dei massimi

Nella figura 2.17 è rappresentata la distribuzione empirica dei massimi annuali; potendo disporre di un numero molto buono di anni (23) si ha comunque il rischio di interpolare pochi punti e di ottenere una distribuzione fortemente sensibile ai massimi registrati; per questo, si è impiegata una modifica al metodo di Gumbel, scegliendo i due più alti picchi annuali, per un totale di 46 valori, che danno il comportamento del grafico. La stima è stata condotta con algoritmo numerico, secondo il metodo della massima verosimiglianza, che ha restituito, implicitamente, una distribuzione della classe di Fréchet, poichè $\gamma > 0$. L'approssimazione nel suo complesso è discreta, per quanto nella fascia 80-200 milioni, causa la presenza di pochi valori, il modello teorico tenda a sovrastimare la probabilità di eventi record.

Riteniamo opportuno sottolineare in questo contesto che il metodo dei massimi è utile soprattutto per eventi atmosferici (temperature, venti, ecc.) che avvengono con regolarità e nella cui storicità si registrano picchi violenti. Il nostro dataset è costituito già da eventi non eccessivamente frequenti, nei quali è opportuno considerare i massimi di fatto alla stessa stregua degli altri sinistri, escludendo eventualmente i più alti come outliers, più che condurre un'indagine sulla distribuzione degli stessi.

Con questo in mente, procediamo con l'analisi dell'approssimazione della

coda destra, elemento di grandissimo interesse per il nostro lavoro, che avrà implicazioni sia sulle decisioni riassicurative sia nell’allocazione del capitale.

Nella figura 2.18 è rappresentato un confronto tra la distribuzione empirica, la Pareto generalizzata e la Pareto secondo la dizione del paragrafo 2.2 per quanto riguarda la funzione degli eccedenti

$$F^{[u]}(x) = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)} \quad x \geq u \quad u = 10, 20$$

Il confronto tra il comportamento della distribuzione calcolata sui dati e quello dei modelli teorici scelti è simile per entrambe le soglie fissate; in particolare, la distribuzione Pareto generalizzata ben approssima, anche sulle code (come si vedrà meglio tra poco) la distribuzione empirica; la distribuzione di Pareto, invece, si comporta bene, con una leggera sottostima del rischio effettivo, fino a quasi 100 milioni, ma poi sovrastima fortemente il rischio dei sinistri; questa caratteristica potrebbe sembrare positiva, ma porterà a requisiti di capitale e a prezzi per le coperture riassicurative che risulterebbero molto elevati e, probabilmente, fuori mercato.

Per la GPD, i parametri sono stati calcolati ancora una volta per via iterativa usando il metodo della massima verosimiglianza, fissando il parametro di posizione pari alla soglia scelta, in accordo con il teorema di Pickands (vedi equazione 2.23); quando $u = 20$, si osserva una riduzione del parametro γ , dovuto alla minore pesantezza (o “lunghezza”) della coda⁴⁷.

Per la distribuzione di Pareto, i parametri sono invece gli stessi riportati nella già incontrata tabella 2.8.

Ad ulteriore riprova del discorso fatto e riprendendo quando detto circa la necessità di esaminare meglio la coda, si consideri anche la figura 2.19 che costituisce uno “zoom” sui percentili di ordine più elevato nel caso in cui la soglia sia pari a 10; sono naturalmente valide tutte le considerazioni già svolte in precedenza e soprattutto la forte sovrastima della coda destra da parte della distribuzione di Pareto.

A completamento del discorso, proponiamo il significato di quanto svolto fin qui. Ovvero, si sta considerando esclusivamente la coda, senza tener conto in nessun modo di quanto avviene nella parte precedente della distribuzione; questo significa che l’adattamento “inizia” in prossimità della soglia scelta, ma altrove il modello risulta tutt’altro che affidabile.

⁴⁷Si ricordi che le relazioni tra i parametri di forma della GPD e della distribuzione di Pareto sono di verso opposto, in quanto $\gamma = 1/\alpha$.

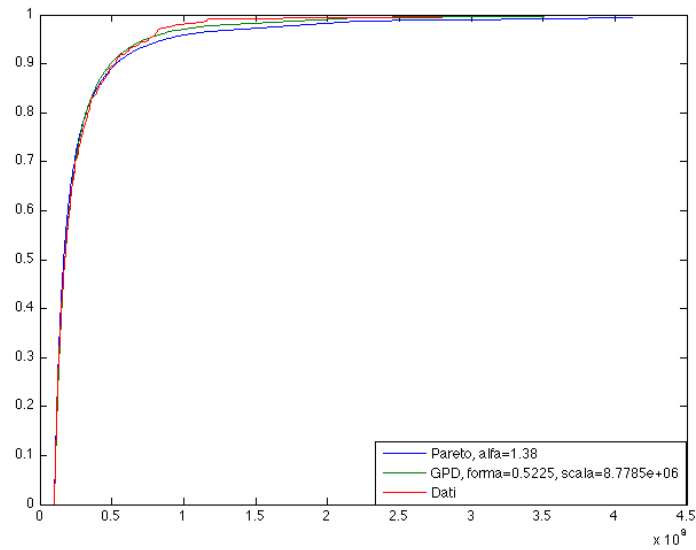
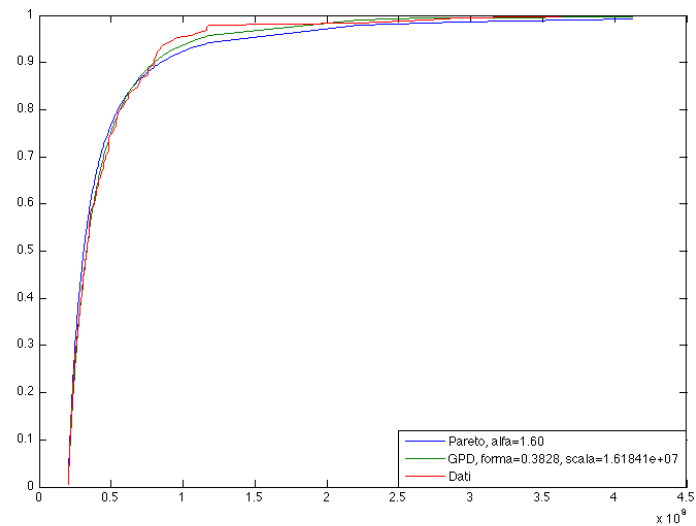
(a) $u = 10$ (b) $u = 20$

Figura 2.18: Incendi danesi 1980-2002: approssimazione degli eccedenti con GPD

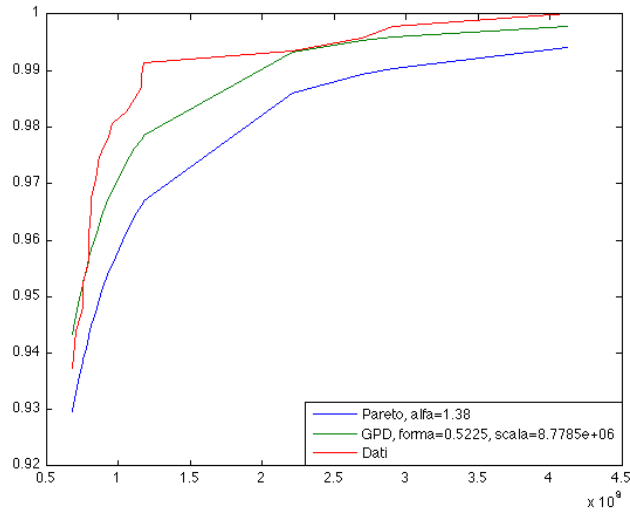


Figura 2.19: Incendi danesi 1980-2002: adattamento della coda ($u = 10$)

Utilizzando le relazioni presentate congiuntamente all'equazione 2.42 si ottiene quanto riportato nella figura 2.20, dove, come atteso, manteniamo lo stesso parametro γ di forma.

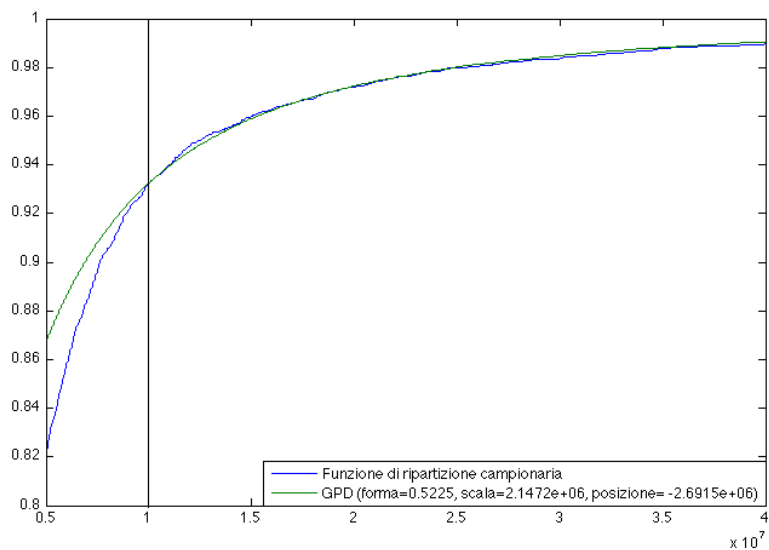


Figura 2.20: Incendi danesi 1980-2002: approssimazione con GPD a partire da $u = 10$

Fino alla soglia scelta ($u = 10$), non vi è nessun tipo di adattamento: ad

esempio, per dati intorno al valore di 5 milioni, c'è uno scostamento di oltre il 4%, certamente non soddisfacente; tale scarto si riduce progressivamente avvicinandosi al livello fissato, oltre il quale si ritorna alla situazione già incontrata negli altri grafici.

La portata di questi aspetti è certamente di elevato interesse. Quando si tratti di prezzare dei *layer* riassicurativi, potremo impiegare questi strumenti, anche grafici, per ricercare il miglior adattamento a seconda della fascia di copertura richiesta, senza essere necessariamente interessati a quanto avviene nelle altre porzioni della distribuzione.

Capitolo 3

Requisiti di capitale e strategie riassicurative

L'obiettivo di questo capitolo è quello di modellizzare la distribuzione che descrive il costo aggregato generato dai sinistri presenti nel nostro dataset, al fine di individuare la misura del capitale che risulta adeguato per svolgere l'attività assicurativa.

A tal fine verranno presentate, in breve, le varianti introdotte a livello legislativo dal progetto *Solvency II* (paragrafo 3.1) e, con questo in mente, si mostrerà come sia possibile costruire un c.d. *modello interno* adeguato a descrivere il profilo di rischio della compagnia (paragrafo 3.2).

Nel paragrafo 3.3, invece, saranno analizzate alcune possibili scelte riassicurative, con particolare riguardo al *pricing* di una riassicurazione *excess of loss* e agli effetti sulla riserva di rischio.

3.1 Verso Solvency II

Il panorama assicurativo e riassicurativo europeo ha assistito recentemente allo sviluppo di un nuovo sistema di controllo sulle compagnie, finalizzato soprattutto all'individuazione di requisiti patrimoniali maggiormente rispondenti al profilo di rischio delle imprese e valido in tutta l'Unione Europea.

Fino ad oggi, infatti, le compagnie sono state obbligate dal Legislatore, nell'ambito del c.d. *Solvency I*, a dotarsi di un *marginale minimo di solvibilità* calcolato in percentuale sui premi o sui sinistri, poco espressivo della

rischiosità reale sopportata dall'impresa¹. Il requisito così calcolato si aggira attorno al 16/18% dei premi, livello che sarà bene tenere presente durante le analisi dei paragrafi successivi. Ad un requisito così calcolato, si aggiungeva la determinazione di una soglia di particolare attenzione, la *quota di garanzia*, pari ad un terzo del margine minimo di solvibilità.

“Poco espressivo” si diceva. Il problema di un approccio come quello dell'attuale sistema legislativo è infatti quello di non tenere in considerazione la tipologia dei rami assicurati, in termini sia di volatilità dei risultati, sia dei margini che il mercato può offrire.

Il passaggio al nuovo meccanismo di regolazione è ormai in atto da alcuni anni, nei quali sono stati proposti alle compagnie (che hanno partecipato in numero via via crescente) i c.d. *QIS (Quantitative Impact Studies)*, allo scopo di valutare quale potesse essere l'effetto sul proprio patrimonio dei capitali richiesti dal nuovo sistema.

Ci avviamo dunque ad illustrare in breve la portata e le caratteristiche del cambiamento in atto.

3.1.1 Architettura e finalità

Il progetto Solvency II prevede una struttura a tre pilastri, sull'esempio di Basilea II, il sistema legislativo in vigore nel settore bancario.

Il primo pilastro è costituito da regole quantitative e principi generali circa gli investimenti, le riserve tecniche e i mezzi patrimoniali propri². Obiettivo chiave è quello di individuare una *Standard Formula* per la determinazione di un ammontare di capitale, definito *Solvency Capital Requirement (SCR)*, espressivo della rischiosità dell'impresa e per il quale è necessario definire:

- un orizzonte temporale, fissato ad 1 anno;
- una misura di rischio, e la scelta è ricaduta sul VaR^3 ;
- un livello di confidenza, fissato al 99.5%⁴;

¹Per maggiori dettagli, si veda Selleri (2003).

²Savelli e Clemente (2009b)

³Nel QIS2 si era optato per un *TailVaR*, poi abbandonato.

⁴Poiché si era scelto un approccio di tipo *TailVaR*, nel QIS2 tale livello era più basso (99%).

Viene poi introdotto un *Minimum Capital Requirement (MCR)*, calibrato ad un livello di confidenza inferiore, e comunque compreso fra il 25% e il 45% del SCR⁵.

La *Standard Formula* viene definita con ipotesi e parametri di natura prudenziale, al fine di ottenere un capitale richiesto di tipo conservativo.

Verrà così incentivato lo sviluppo di opportuni *modelli interni*, con la finalità di aumentare la sensibilità delle compagnie alla valutazione delle proprie caratteristiche di rischio. Va sottolineato che tali modelli dovranno essere approvati dalle autorità di vigilanza locali e che, mentre è sempre possibile il passaggio dalla *Standard Formula* all'impiego dei modelli interni, non è possibile il viceversa; questo per evitare che, ogni anno, le compagnie scelgano la modalità di determinazione del capitale in base a ragioni di convenienza (fenomeno del c.d. *cherry picking*).

Sono poi presenti un secondo e un terzo pilastro, relativi rispettivamente a rischi non considerati dal primo pilastro (quali il rischio reputazionale o quello strategico) e alla tutela della trasparenza verso il mercato.

Accenniamo qui che, tra le numerose novità, compare anche la valutazione delle riserve tecniche dei rami danni al valore attuale, in modo analogo a quello tipico delle assicurazioni sulla vita, a differenza di quanto avviene ora nella maggior parte degli stati europei, Italia compresa.

Come si diceva, il progetto Solvency II si è sviluppato tramite una serie di QIS, arrivati al quinto proprio nel luglio scorso; descriviamo ora la struttura della Standard Formula negli ultimi due QIS, rimandando a Savelli e Clemente (2009b) per maggiori dettagli sui QIS precedenti.

Nel QIS4 il Solvency Capital Requirement viene calcolato come

$$SCR^{QIS4} = BSCR^{QIS4} - ADJ_{FDB} - ADJ_{DT} + SCR^{OP}$$

dove le voci *ADJ* indicano degli aggiustamenti per imposte differite (*DT*) e per eventuali *benefit* futuri (*FDB*), *SCR^{OP}* indica il rischio operativo, che può scaturire da inefficienze nei sistemi e nei processi interni (e che quindi è pienamente correlato con tutti gli altri), mentre il *BSCR^{QIS4}* viene calcolato aggregando con una matrice di correlazione lineare i requisiti dei moduli

- *non-life*, legato alla gestione dei contratti dei rami danni;
- *market*, legato alla volatilità e al livello degli strumenti finanziari;

⁵Si noti dunque che la soglia di allerta non è più definita soltanto in funzione del requisito patrimoniale individuato, ma ha essa stessa una natura di tipo stocastico.

- *health*, legato alla gestione dei contratti sulla salute;
- *default*, legato al rischio di insolvenza delle controparti;
- *life*, legato alla gestione dei contratti sulla vita.

In particolare, è definito come

$$BSCR^{QIS4} = \sqrt{\sum_{r \times c} CorrSCR_{r,c} \cdot SCR_r \cdot SCR_c}$$

dove la matrice di correlazione vale

	SCR_{mkt}	SCR_{def}	SCR_{life}	SCR_{health}	SCR_{nl}
SCR_{mkt}	1				
SCR_{def}	0.25	1			
SCR_{life}	0.25	0.25	1		
SCR_{health}	0.25	0.25	0.25	1	
SCR_{nl}	0.25	0.5	0	0.25	1

Nel QIS5, in modo analogo, il Solvency Capital Requirement viene calcolato come⁶

$$SCR^{QIS5} = BSCR^{QIS5} - ADJ + SCR^{OP}$$

dove la voce *ADJ* indica l'aggiustamento per l'assorbimento del rischio associato alle riserve tecniche e alle imposte differite, *SCR^{OP}* indica sempre il rischio operativo, mentre il *BSCR^{QIS5}* viene calcolato, in analogia con il QIS4, aggregando con una matrice di correlazione lineare i requisiti dei moduli

- *non-life*
- *market*
- *health*
- *default*
- *life*

⁶Ceios (2010)

ma, questa volta, aggiungendo additivamente il rischio associato al modulo *intangibles*, che compare per la prima volta all'interno della Standard Formula, e che riguarda gli *asset intangibili*, che sono esposti ai rischi di mercato (perdita di valore) e ai rischi interni (legati alla finalità dell'asset). La formula per il *BSCR* diventa allora

$$BSCR^{QIS5} = \sqrt{\sum_{r \times c} Corr SCR_{r,c} \cdot SCR_r \cdot SCR_c} + SCR_{intangibles}$$

con matrice di correlazione leggermente modificata rispetto alla precedente e data da

	SCR_{mkt}	SCR_{def}	SCR_{life}	SCR_{health}	SCR_{nl}
SCR_{mkt}	1				
SCR_{def}	0.25	1			
SCR_{life}	0.25	0.25	1		
SCR_{health}	0.25	0.25	0.25	1	
SCR_{nl}	0.25	0.5	0	0	1

Il nostro obiettivo, rimandato alla sezione successiva, è quello di analizzare il modulo del *non-life*, con particolare riguardo alla *Standard Formula* per il *Premium Risk*. Osserveremo tra poco che, anche con riguardo al modulo sul *non-life*, i due ultimi *Quantitative Impact Studies* presentano alcune differenze.

3.1.2 La *Standard Formula* per il *Non-Life* (*QIS4* e *QIS5*)

Con riferimento al QIS4, il Ceiops ha suddiviso le assicurazioni non vita in 12 rami, dei quali la voce *Fire and other damage to property* costituisce un unico ramo⁷; è stato inoltre formulato il calcolo del SCR nell'ambito del *Non-Life Underwriting Risk* come somma di un requisito che aggrega *Premium* e *Reserve Risk* e di un altro che riguarda i rischi catastrofali, che costituiscono i due sottomoduli, supposti tra loro incorrelati, del modulo sulle assicurazioni non vita:

$$SCR_{NL} = \sqrt{NL_{pr}^2 + NL_{cat}^2}$$

Il modulo sul rischio di tariffazione e riservazione prevede il calcolo del requisito attraverso una trasformazione ρ da applicare alla volatilità relativa tipica di ogni ramo, da determinarsi attraverso le modalità, presentate

⁷Ceiops (2007)

sotto, definite come *market wide approach* o *undertaking specific approach*. Tale trasformazione è un tentativo di calibrazione che presuppone che la distribuzione del costo aggregato sottostante sia una lognormale e vale

$$\rho(\sigma) = \frac{\exp\left(N_{0.995} \cdot \sqrt{\log(\sigma^2 + 1)}\right)}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} - 1 \quad (3.1)$$

dove $N_{0.995}$ rappresenta il quantile di ordine indicato di una distribuzione normale standard, e consente di calcolare il requisito come

$$NL_{pr} = \rho(\sigma) \cdot V \quad (3.2)$$

con V volume complessivo dei premi⁸.

Si diceva che la volatilità relativa viene individuata a livello di singolo ramo; infatti la trasformazione ρ si applica ad un livello di volatilità calcolato, per *Premium* e *Reserve Risk*, sulle singole *LoB*

$$\begin{aligned} \sigma_{LoB} &= \\ &= \frac{\sqrt{(\sigma_{pr,LoB} V_{pr,LoB})^2 + (\sigma_{res,LoB} V_{res,LoB})^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot V_{pr,LoB} V_{res,LoB} \sigma_{pr} \sigma_{res}}}{V_{pr,LoB} + V_{res,LoB}} \end{aligned}$$

dove viene ipotizzata una correlazione di 0.5 tra tariffazione e riservazione, e riaggregato attraverso una matrice di correlazione lineare fissata dal Ceiops:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{V^2} \sum_{r,c} CorrLoB_{r \times c} \cdot V_r \cdot V_c \cdot \sigma_r \cdot \sigma_c}$$

Come si accennava, un primo metodo per l'individuazione della volatilità a livello di singolo ramo è quello di utilizzare un approccio *market wide*, che si esprime attraverso l'uso di un coefficiente *volatility factor* fissato direttamente dall'autorità di vigilanza, sia per il *Premium* che per il *Reserve Risk*. Per il *Premium Risk* del ramo incendio tale coefficiente risulta pari al 10%, misura che è rimasta inalterata passando dal QIS2 al QIS5; rimandiamo a Ceiops (2007) per i *volatility factor* delle altre *LoB*.

In alternativa, le compagnie possono adottare un approccio *undertaking specific*, che si realizza attraverso l'impiego dei *Loss Ratios*, con profondità massima della serie storica fissata, per il ramo incendio, a cinque anni; tale misura viene poi riponderata con il livello *market wide* attraverso un coefficiente c , che non supera l'80% nemmeno quando si abbia a disposizione

⁸Si noti che nel QIS4, e così nel QIS5, il volume tiene conto, in termini di risparmio di capitale, della diversificazione geografica dei contratti stipulati.

l'intera serie storica consentita. Per il calcolo della standard deviation dei *Loss Ratios* il Regolatore ha proposto la seguente relazione

$$\sigma_{LR,LoB} = \sqrt{\frac{1}{V_{pr,LoB} \cdot (n_{LoB} - 1)} \sum_{y=1}^n V_{pr,LoB,y} \cdot (LR_{LoB,y} - \mu_{LoB})^2} \quad (3.3)$$

dove n_{LoB} rappresenta il numero massimo di *LR* disponibili, y l'anno di osservazione, mentre μ_{LoB} è il valore atteso, nel periodo considerato, dei *LR*, opportunamente ponderato; chiamato $\sigma_{M,LoB}$ il valore del *volatility factor* imposto dall'approccio *market wide*, la volatilità relativa per il ramo, in caso di *US approach*, vale allora

$$\sigma_{US,LoB} = \sqrt{c_{LoB} \cdot \sigma_{LR,LoB}^2 + (1 - c_{LoB}) \cdot \sigma_{M,LoB}^2} \quad (3.4)$$

Il QIS5⁹ ha modificato leggermente la struttura del requisito aggregato del modulo del *Non-Life Underwriting Risk*, essendo stato introdotto il modulo *Lapse*, legato alle eventuali opzioni lasciate agli assicurati circa il riscatto dei contratti assicurativi danni, ed essendo ipotizzata una correlazione non più nulla tra *Premium-Reserve* e *CAT Risk*. La formulazione del requisito risulta allora

$$SCR_{NL} = \sqrt{\sum_{r \times c} CorrNL_{r,c} \cdot NL_r \cdot NL_c}$$

con matrice di correlazione *CorrNL* pari a

	NL_{pr}	NL_{lapse}	NL_{CAT}
NL_{pr}	1		
NL_{lapse}	0	1	
NL_{CAT}	0.25	0	1

Le altre varianti degne di nota riguardano soprattutto le modifiche apportate all'approccio *undertaking specific*, in termini di sia ponderazione, sia di calcolo delle volatilità relative.

In particolare, la ponderazione avviene attraverso la relazione lineare

$$\sigma_{pr,LoB} = c_{LoB} \cdot \sigma_{US,LoB} + (1 - c_{LoB}) \cdot \sigma_{M,LoB} \quad (3.5)$$

ed è ora necessario utilizzare, per il ramo *Property*, i dati relativi ad almeno 5 anni (peso del 34%) e fino a 10 anni (questa volta il peso sale al 100%).

⁹Ceips (2010)

Inoltre sono stati previsti tre metodi di calcolo per le volatilità relative, dei quali consideriamo il primo ed il terzo¹⁰.

Il primo metodo è utilizzabile quando la perdita attesa è proporzionale al premio, la compagnia non considera variazioni nei tassi di premio, la varianza della perdita è proporzionale ai premi incassati e un metodo di adattamento appropriato è dato dai minimi quadrati. Sotto queste ipotesi, la distribuzione delle perdite è approssimata alla distribuzione

$$U_{y,LoB} \approx V_{y,LoB} \cdot \mu_{LoB} + \sqrt{V_{y,LoB} \cdot \beta_{LoB} \cdot \epsilon_{y,LoB}}$$

con $U_{y,LoB}$ costo ultimo dell'anno y dopo un anno, μ_{LoB} *Loss Ratio* atteso, β_{LoB}^2 costante di proporzionalità per la varianza ed $\epsilon_{y,LoB}$ variabile casuale con media zero e varianza uno. La problematica risulta la stima di β , individuata dal Regolatore attraverso l'impiego dei minimi quadrati, ottenendo

$$\sigma_{US,pr,LoB} = \sqrt{\frac{1}{(n_{LoB} - 1) \cdot V_{LoB}} \sum_y \frac{\left(U_{y,LoB} - V_{y,LoB} \cdot \frac{\sum_y U_{y,LoB}}{\sum_y V_{y,LoB}} \right)^2}{V_{y,LoB}}} \quad (3.6)$$

Il terzo metodo risulta una novità all'interno del panorama di Solvency II e, a detta del Regolatore stesso, riprende la metodologia proposta dallo *Swiss Solvency Test*. Esso risulta di particolare interesse poichè è associato alla nozione di varianza del costo aggregato sotto l'ipotesi che la distribuzione del numero dei sinistri sia una variabile casuale di Poisson con misturazione fornita dalla variabile Θ .

In particolare, la volatilità è calcolata come

$$\sigma_{US,pr,LoB} = \frac{1}{V_{pr,LoB}} \cdot \sqrt{Var(S_n)}$$

dove la varianza di S_n , definito come processo composto $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, risulta, come noto¹¹:

$$Var(S_n) = \mu^2 \cdot \lambda^2 \cdot Var(\Theta) + \lambda \cdot (\mu^2 + \sigma^2) \quad (3.7)$$

con μ importo medio del singolo sinistro e σ sua standard deviation, λ numero atteso dei sinistri e $Var(\Theta)$ varianza del "random factor", la variabile aleatoria di disturbo.

¹⁰Il secondo infatti è associato all'ipotesi di distribuzione lognormale per il costo aggregato, che ci sentiamo di respingere a seguito di quello che verrà detto nelle prossime sezioni.

¹¹Daykin e altri (1984)

Per l'individuazione di quest'ultima, il Legislatore ha proposto una stima basata sulla teoria della credibilità, che mira a calcolare la volatilità esistente fra il numero di sinistri attesi *a priori* ed il loro numero effettivamente realizzati. In alternativa, il Ceiops non esclude di poter indicare esso stesso al mercato un valore di riferimento, interpretando tale volatilità come un elemento *non undertaking-specific*, soluzione che può ritenersi preferibile.

3.2 Un esempio di modello interno

Obiettivo di questo paragrafo è la modellizzazione del costo dei sinistri provocati dagli incendi presenti nel nostro dataset, effettuando un confronto tra distribuzioni differenti, compreso il modello *POT*, con la finalità di individuare un requisito di capitale che sia una misura efficace del reale rischio sopportato dall'impresa.

Verrà quindi verificato se e come il requisito trovato sia differente rispetto a quanto prospettato dalla *Standard Formula* di Solvency II e si valuterà il comportamento della *risk reserve* in un orizzonte di breve periodo.

3.2.1 Ipotesi distributive alternative

Ai fini della modellizzazione del costo sinistri, vale la pena di riepilogare la struttura del nostro dataset, nella componente 'adj claims', ovvero per quanto riguarda gli ammontari complessivi pagati per ogni singolo sinistro. In particolare, il dataset comprende 6870 sinistri, inflazionati opportunamente al 2002, dei quali 6836 sono superiori ad un milione; non abbiamo informazioni sul motivo per cui sono confluiti nel dataset anche quei 34 sinistri inferiori ad un milione, che trascureremo.

Dei rimanenti 6836 sinistri, 464 sono superiori a 10 milioni e 72 risultano invece maggiori di 40 milioni; tali numeri ci sono utili in quanto costituiranno la base di partenza per alcune scelte che sono state formulate.

In particolare, se i sinistri maggiori di 10 milioni, già in parte analizzati nel paragrafo 2.6.3, saranno considerati quando si parlerà della riassicurazione non proporzionale, la soglia di 40 milioni verrà presa in esame in questo paragrafo.

Si è scelto infatti di operare un'analisi separata per le c.d. *attritional losses* e per le *large losses*, modellizzando in modo separato i sinistri compresi fra 1 e 40 milioni e quelli superiori a 40 milioni di corone danesi. La scelta è ricaduta sul valore di 40 milioni in quanto rappresentava un buon compromesso tra la necessità di disporre di una soglia elevata e la discreta numerosità delle osservazioni maggiori di essa.

Chiamato con \tilde{X} il costo aggregato provocato dai sinistri, possiamo allora definirlo come

$$\tilde{X} = \tilde{X}_{\text{attritional}} + \tilde{X}_{\text{large}} \quad (3.8)$$

trattando così in modo separato le due tipologie di sinistri e sommandole poi a modellizzazione avvenuta, in quanto possiamo tranquillamente formulare un'ipotesi di indipendenza tra le due componenti.

Si tratterà dunque di costruire dei modelli separati per le due tipologie di sinistri considerati, in termini di numero e di importo, riaggregando poi attraverso una semplice somma i risultati ottenuti. Descriviamo quindi, separatamente, il percorso seguito e le ipotesi formulate.

Le attritional losses

Per lo studio dell'importo dei sinistri di questa tipologia abbiamo preso in considerazione due modelli alternativi: la distribuzione lognormale, con troncamento a 40 milioni, e la distribuzione di Pareto, monoparametrica, troncata. Lo scopo è modellizzare al meglio la distribuzione dei sinistri la cui funzione di densità è riportata nella figura 3.1.

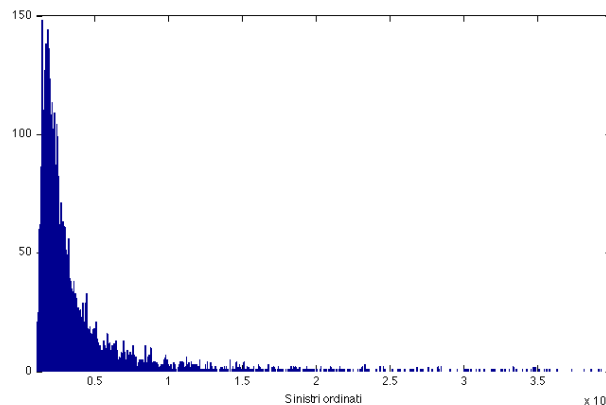


Figura 3.1: Istogramma dei sinistri compresi fra 1 e 40 milioni

Per quanto riguarda la distribuzione lognormale, è bene ricordare che essa presenta un supporto $(0, +\infty)$, che mal si presta ai nostri fini; è stato quindi necessario provvedere ad alcune manipolazioni prima dell'implementazione.

In particolare, si è lavorato sulla distribuzione \tilde{Z} i cui valori sono tali per cui

$$z = 1.000.000 + y$$

con \tilde{Y} pari ad una lognormale avente:

- varianza pari a quella empirica;
- media inferiore di 1 milione rispetto a quella empirica.

In sostanza, si è operato su una traslazione lineare dei sinistri oggetto di studio, il che modifica soltanto il valore atteso, preservando la volatilità assoluta.

I parametri della distribuzione lognormale \tilde{Y} calcolati con il metodo dei momenti sono risultati $\mu = 14.2547$ e $\sigma = 1.09$; la distribuzione \tilde{Z} così ottenuta ha allora media e varianza pari a quelle empiriche.

Ora però diventa necessario troncare la distribuzione al valore di 40 milioni; se così non fosse, l'inversa restituirebbe percentili, di ordine casuale, inferiori ma anche superiori rispetto alla soglia scelta per le *attritional losses* e ci scontreremmo con il problema di aver “contato due volte” gli stessi sinistri, con l'effetto di un'amplificazione immotivata del profilo di rischio della compagnia.

Chiamato *sup* il valore di 39 milioni (seguirà infatti la traslazione), l'inversa si ricava a partire dalla distribuzione di probabilità riscalata in funzione dell'estremo superiore, ovvero

$$\frac{F(y)}{F(\text{sup})} = k$$

con k ordine del percentile (casuale); a questo punto, la generazione casuale verrà formulata come

$$y = F^{-1}(k \cdot F(\text{sup}))$$

e dunque, concludendo, la nostra variabile di *claim severity* risulta

$$z = 1.000.000 + F^{-1}(k \cdot 0.9978) \quad (3.9)$$

Si noti che, attraverso questo troncamento sulla coda destra, non è possibile preservare nè il valore atteso nè la varianza desiderate; in questo senso, si è scelto di aumentare discrezionalmente σ , in modo tale che, fissato un numero elevato di simulazioni (10 milioni), la media della distribuzione estratta coincidesse con quella empirica ($\sigma = 1.13$)¹²; più avanti presenteremo il confronto anche per gli altri momenti e indicatori di questa distribuzione troncata.

¹²Si noti a tal proposito che il valore prima utilizzato per la funzione di ripartizione dell'estremo superiore deriva da $0.9978 = F(39.000.000, 14.2547, 1.13)$.

Per quanto riguarda invece la distribuzione di Pareto troncata, ne abbiamo derivato innanzi tutto la funzione di ripartizione

$$F(z) = \frac{1 - \left(\frac{u}{z}\right)^\alpha}{1 - \left(\frac{u}{sup}\right)^\alpha}$$

con u pari, come si consueto, alla soglia di 1 milione, e la funzione di densità

$$f(z) = \frac{\alpha u^\alpha z^{-\alpha-1}}{1 - \left(\frac{u}{sup}\right)^\alpha}$$

Queste due relazioni ci permettono di ricavare, in modo abbastanza semplice:

- la *funzione inversa*, necessaria per estrarre valori simulati; essa è data da

$$\frac{1 - \left(\frac{u}{z}\right)^\alpha}{1 - \left(\frac{u}{sup}\right)^\alpha} = k$$

da cui il percentile di ordine k (casuale) risulta

$$z = u \cdot \left(1 - k + k \cdot \left(\frac{u}{sup}\right)^\alpha\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (3.10)$$

- la *funzione di verosimiglianza troncata*, dal momento che lo stimatore di Hill non è più sufficiente per stimare α ; trovata la verosimiglianza come produttoria della funzioni di densità e calcolatone il suo logaritmo,

$$\ln V = \ln \left(\alpha^n \cdot u^{n\alpha} \cdot \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{z_i}\right)^{\alpha+1} \right) - n \ln \left(1 - \left(\frac{u}{sup}\right)^\alpha \right)$$

si tratta di calcolarne la derivata rispetto ad α

$$\frac{n}{\alpha} + n \ln u + \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{1}{z_i}\right) - \frac{n \cdot sup^\alpha \cdot \ln sup}{sup^\alpha - u^\alpha} + \frac{n \cdot u^\alpha \cdot \ln u}{sup^\alpha - u^\alpha} + n \ln sup \quad (3.11)$$

e di valutare per quale valore del parametro tale equazione va a 0, ottenendo, per i sinistri compresi fra 1 e 40 milioni, $\hat{\alpha} = 0.79$; per ulteriore controllo sull'attendibilità di questa stima, si è verificato che i risultati coincidessero con quelli ottenuti con lo stimatore 2.6, attraverso la massimizzazione della funzione

$$\lim_{sup \rightarrow \infty} \frac{d \ln V}{d \alpha}$$

- i *momenti di ordine k*, fondamentali per determinare il valore atteso della distribuzione individuata, al fine di un controllo con i momenti empirici e di una valutazione circa l'attendibilità del processo di simulazione; i passaggi svolti sono stati i seguenti:

$$\begin{aligned}
 E(\tilde{Z}^k) &= \int_u^{sup} z^k \cdot \frac{\alpha u^\alpha z^{-\alpha-1}}{1 - \left(\frac{u}{sup}\right)^\alpha} dz = \\
 &= \frac{\alpha u^\alpha}{1 - \left(\frac{u}{sup}\right)^\alpha} \cdot \int_u^{sup} z^{-\alpha-1+k} dz = \\
 &= \frac{\alpha u^\alpha}{1 - \left(\frac{u}{sup}\right)^\alpha} \cdot \left[\frac{z^{k-\alpha}}{k-\alpha} \right]_u^{sup} \\
 &= \frac{\alpha u^\alpha}{\left(1 - \left(\frac{u}{sup}\right)^\alpha\right) \cdot (k-\alpha)} \cdot \left(sup^{k-\alpha} - u^{k-\alpha} \right)
 \end{aligned}$$

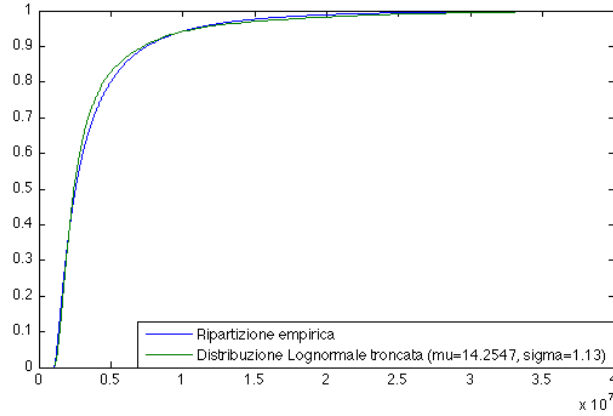
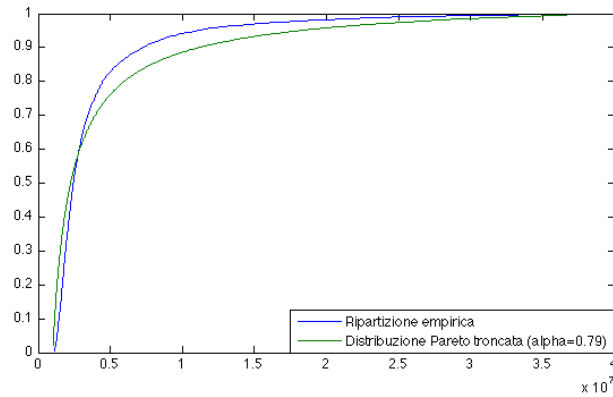
Individuati i due modelli che riteniamo opportuni per questa tipologia di sinistri, mostriamo in figura 3.2 un confronto grafico che valuti il comportamento delle distribuzioni scelte in relazione alla funzione di ripartizione empirica.

La distribuzione di Pareto non fornisce un buon adattamento, soprattutto oltre i 3 milioni di corone, punto dopo il quale sovrastima la probabilità di osservare quantili di ordine elevato. Se è vero che una sottostima del rischio è dannosa perché porta a requisiti di capitale inadeguati, è pur vero che, sia nell'ottica di individuare una riserva di rischio consona sia nella fase di *pricing* di un prodotto (specialmente riassicurativo), una sovrastima della rischiosità così marcata porterebbe l'impresa ad essere poco appetibile sul mercato.

Molto buono è da ritenersi, invece, quanto ottenuto con la distribuzione lognormale, impiegata peraltro molto spesso nelle valutazioni di natura attuariale. Nonostante queste *attritional losses* siano particolarmente *sui generis*, poiché provengono dal portafoglio di un riassicuratore, il modello "tiene".

	Sinistri (1-40 milioni)	Lognormale troncata $\mu = 14.2547, \sigma = 1.13$	Pareto troncata $\alpha = 0.79$
Media	3.82	3.82	4.65
Std	4.28	3.81	6.13
CoV	1.12	1.00	1.32
Skewness	4.10	3.66	2.98

Tabella 3.1: Momenti delle *attritional losses* a confronto

(a) *Lognormale troncata*(b) *Pareto troncata (monoparametrica)*Figura 3.2: Incendi danesi 1980-2002: modelli per le *attritional losses*

Un necessario confronto fra i momenti è invece riportato nella tabella 3.1¹³. Si nota la sovrastima, in termini di valore atteso e di volatilità, quando si utilizzi la distribuzione di Pareto¹⁴; l'asimmetria risulta invece sottostimata. Decisamente migliori sono i risultati ottenuti con la distribuzione lognormale, anche se è bene sottolineare che, per la costruzione formulata sopra, essi derivano dai risultati ottenuti con 10 milioni di simu-

¹³Per questa e per le altre tabelle che analizzano i momenti della distribuzione \tilde{Z} , i valori espressi, laddove siano monetari, sono in milioni di corone.

¹⁴I calcoli sono stati effettuati con le formule viste poco fa e ricontrollati sui risultati del processo simulativo sfruttando le relazioni fra i momenti della distribuzione di singolo costo e quelli della distribuzione di costo aggregato.

lazioni in quanto non possono essere calcolati in forma chiusa; la volatilità è leggermente sottostimata, mentre l'asimmetria è sostanzialmente in linea con quella empirica.

Per quanto riguarda la variabile aleatoria per il numero degli eventi, si sono utilizzate la distribuzione di Poisson e la binomiale negativa anche se, per quanto detto nel paragrafo 2.1 circa i fenomeni caratterizzati da una soglia, che in questo caso è rappresentata dalla cifra iniziale di un milione di corone, si può dimostrare la convergenza ad una variabile casuale di Poisson, e quindi l'impiego della binomiale negativa non è "consigliabile". Tuttavia (si veda la figura 2.11) nel nostro dataset tale convergenza viene raggiunta solo per valori di u piuttosto elevati, in quanto permangono discreti scostamenti rispetto al valore di n individuato per soglie ≤ 5 milioni (e probabilmente non trascurabili neanche per soglie più elevate).

Nel seguito verranno costruiti alcuni modelli, nei quali si confronteranno i risultati ottenuti con una Poisson di parametro iniziale $n = 300$, in linea con il dataset in questione, portato poi a $n = 1000$, per verificare come cambia il requisito di capitale.

Per quanto riguarda la binomiale negativa, compare un secondo parametro, costituito da h e legato al fatto che questa distribuzione è ottenuta misturando una Poisson con una variabile Gamma; chiamata \tilde{q} quest'ultima, si ha che¹⁵

$$\sigma_{\tilde{q}} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

Per l'individuazione di questa misura di volatilità, è possibile sfruttare il fatto che il coefficiente di variazione della variabile di costo aggregato \tilde{X} , ottenuta come

$$\tilde{X} = \sum_{i=1}^{\tilde{K}} \tilde{Z}_i$$

vale

$$\frac{\sigma(\tilde{X})}{E(\tilde{X})} = \sqrt{\frac{1 + c_{\tilde{Z}}^2}{n} + \sigma_{\tilde{q}}^2} \quad (3.12)$$

ed è interpretabile come un *Loss Ratio* "puro".

Abbiamo quindi proceduto costruendo questi *Loss Ratios*, per i soli sinistri fra 1 e 40 milioni, utilizzando le realizzazioni empiriche dei sinistri e ipotizzando per i premi, ottenuti come prodotto fra il numero di sinistri attesi (n) e il danno medio (m), un danno medio pari a quello empirico ($3.82e+06$) ed un numero crescente nel tempo, costruendo la retta di

¹⁵Daykin e altri (1984)

regressione del numero dei sinistri registrati e ottenendo

$$\hat{n}_t = 155.27 + 12.62 \cdot t \quad (R^2 = 0.91)$$

Si è quindi calcolata la standard deviation dei rapporti così ottenuti, ottenendo 0.2136; poiché il valore di n non è stato particolarmente elevato, soprattutto nei primi anni, si è scelto per un valore di $\sigma_{\bar{q}} = 0.16$ e di conseguenza $h = 39$.

Le large losses

Per quanto riguarda l'analisi dei 72 sinistri superiori alla soglia di 40 milioni, il modello per la distribuzione di costo che pare più opportuno è certamente la distribuzione di Pareto (non troncata).

Infatti, non vengono ad evidenziarsi quelle problematiche, già incontrate all'interno del capitolo 2, circa l'eccessiva pesantezza della coda della distribuzione, che risulta in linea con quella empirica.

Questo risultato è da ricercare soprattutto nella separazione dei sinistri che è stata scelta, e che conduce per queste *large losses* ad una distribuzione a code particolarmente pesanti.

Ricordiamo qui che l'impiego della distribuzione Pareto generalizzata nasce per risolvere il problema della scarsa flessibilità che si ha con la distribuzione di Pareto ad un unico parametro, ma, nel nostro caso, non vi è ragione di introdurre una maggior complicazione nel modello con un secondo parametro, come si può notare dalla figura 3.3, dove l'adattamento conseguito risulta decisamente buono.

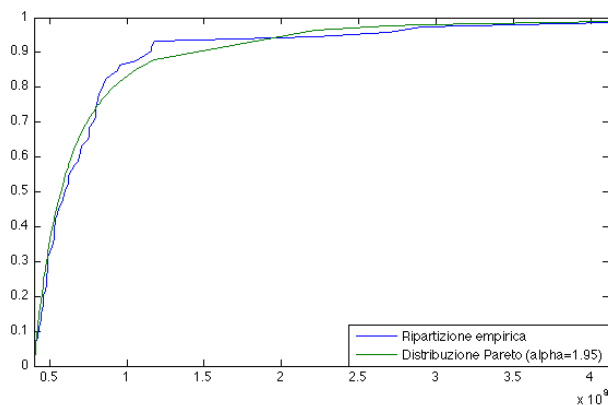


Figura 3.3: Incendi danesi 1980-2002: un modello per le *large losses*

Il parametro α della distribuzione

$$F(z) = 1 - \left(\frac{40.000.000}{z} \right)^\alpha$$

è stato ricavato attraverso la massima verosimiglianza, secondo l'equazione 2.6, ottenendo $\hat{\alpha} = 1.95$.

	Sinistri (> 40 milioni)	Pareto ($\alpha = 1.95$)
Media	77.68	82.11
Std	60.26	∞
CoV	0.78	n.d.
Skewness	3.71	∞

Tabella 3.2: Momenti delle *large losses*

Nella tabella 3.2 si nota soprattutto la difficoltà di valutazione analitica fra i momenti empirici e quelli ottenuti con la distribuzione di Pareto non troncata; infatti $\alpha < 2$ e dunque $E(\tilde{Z}^2)$ e $E(\tilde{Z}^3)$ non sono calcolabili, pregiudicando il controllo di volatilità, coefficiente di variazione e asimmetria. Tuttavia, l'adattamento grafico pare sufficiente a giustificare l'adozione di tale modello, insieme con la letteratura al riguardo, e il valore atteso determina uno scostamento che riteniamo trascurabile, considerando la scarsa stabilità empirica di una media calcolata su soli 72 valori¹⁶.

Per quanto riguarda il numero, dato l'elevato valore della soglia, si è scelto di adottare una distribuzione di Poisson pura, con parametro allineato al numero medio dei sinistri avvenuti nei 23 anni osservati, ovvero $n = 3$.

Come già visto per le *attritional losses*, tale parametro verrà poi alzato a $n = 10$ per valutare l'effetto sui requisiti di capitale.

3.2.2 Impiego del modello POT

All'interno del capitolo 2, si è lungamente discusso circa l'utilizzabilità di una distribuzione Pareto generalizzata per conseguire un adattamento adeguato su tutta la distribuzione di costo empirica. Si rimanda soprattutto al paragrafo 2.6 per la presentazione dei vari strumenti grafici che possono

¹⁶Si può annullare tale scostamento stimando α attraverso il metodo dei momenti, ma già nel paragrafo 2.2 si era sottolineato che tale procedura ha forti problematiche dal punto di vista statistico.

guidare alla modellizzazione del costo del singolo sinistro, lungo tutto l'arco temporale disponibile, con questa distribuzione.

Già in quella sede si era mostrato come la bontà dell'adattamento conseguito dipenda in modo cruciale dal valore della soglia u scelta e alcune valutazioni erano già state svolte fissando $u = 1$ milione, proprio come intendiamo fare ora, con l'intento di trovare un modello che descriva l'intero costo dei sinistri; la separazione tra le *attritional losses* e le *large losses*, infatti, non ha qui motivo di esistere, per le finalità stesse degli studi di Extreme Value Theory.

Ricordiamo che la funzione degli eccessi medi risultava “perfettamente” lineare solo per $u > 10$ milioni, mentre lo era solo approssimativamente per $u > 1$ milione; tuttavia, come si era detto, non vi sono motivi particolari per respingere il modello GPD quando si voglia adattare l'intera distribuzione empirica.

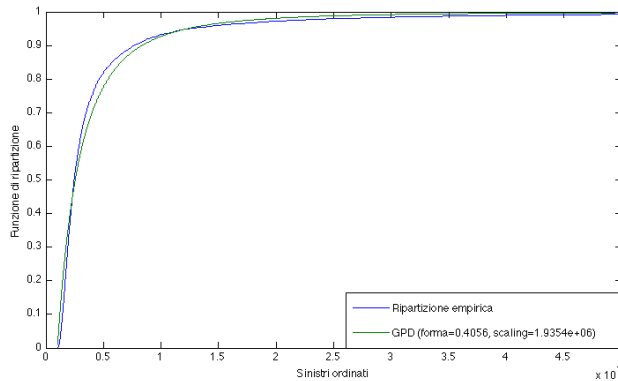


Figura 3.4: Incendi danesi 1980-2002: adattamento dell'intera distribuzione con una GPD

In figura 3.4 è mostrato l'adattamento ottenuto sui 6836 sinistri complessivi, impiegando una Pareto generalizzata, con parametri stimati attraverso la massima verosimiglianza, e dunque in via iterativa, ottenendo:

$$\hat{\gamma} = 0.4056$$

$$\hat{\sigma} = 1.9354e + 06$$

Il comportamento descritto dal modello, almeno al primo impatto, è sicuramente piuttosto buono, anche se va notata la differenza rispetto al caso precedente con riguardo al campo di variazione dei sinistri, che rende qui problematica l'analisi grafica; è necessario inoltre un insieme di riflessioni

sui momenti della distribuzione così costruita, prima di un confronto con i modelli presentati nel paragrafo 3.2.1.

	Sinistri (> 1 milione)	GPD $\gamma = 0.4056, \sigma = 1.9354e + 06$
Media	4.59	4.26
Std	10.56	7.49
CoV	2.30	1.76
Skewness	17.60	∞

Tabella 3.3: Momenti dei sinistri superiori ad un milione di corone

Nella tabella 3.3 sono stati calcolati i momenti per una Pareto generalizzata, secondo le relazioni 2.20 e 2.21. Si nota come il valore atteso non coincida con quello empirico e il motivo è sempre la scelta della massima verosimiglianza per la stima dei parametri; tuttavia, resta inteso che l'obiettivo è l'individuazione di un percentile di ordine elevato, che sia espressivo della rischiosità dell'impresa, e dunque consideriamo meno importante l'uguaglianza in termini di valore atteso, ricercando piuttosto un adattamento complessivo che sia il migliore possibile. Risulta discreta l'approssimazione della volatilità (e di conseguenza del coefficiente di variazione) mentre non è possibile calcolare l'indice di asimmetria, poichè $\gamma > 1/3$.

Prima di procedere oltre, specifichiamo che anche qui procederemo confrontando i risultati ottenuti con la distribuzione di Poisson e con la binomiale negativa. Per cogliere il fatto che ora si sta considerando l'intera distribuzione, utilizzeremo $n = 303$. Risulta molto interessante notare che, stimati i parametri γ e σ sulla distribuzione di costo, presentati poco fa, ricordando che $\phi = \sigma + \gamma(u - \mu)$ e utilizzando la massimizzazione della verosimiglianza 2.47, presentata all'interno del c.d. modello *POT*, si ottiene una stima per l'intensità λ pari a 297, molto vicina a quella da noi scelta¹⁷. Per una maggiore confrontabilità, utilizzeremo i valori fissati anche nel paragrafo 3.2.1, ma sottolineiamo la bontà della costruzione logica del modello *Peaks over Threshold*.

Per quanto riguarda la binomiale negativa, invece, abbiamo ricalcolato i *Loss Ratios* secondo quanto detto già in precedenza (paragrafo 3.2.1), ma questa volta tenendo conto di tutti i sinistri, con $m = 4.6e + 06$ e con

¹⁷Occorre ricordare che, nel paragrafo 2.5, avevamo indicato con ϕ il parametro di scala della distribuzione GPD.

una nuova retta di regressione, molto simile alla precedente, ottenendo una standard deviation di 0.2879; similmente a prima, tale valore è stato portato discrezionalmente, poiché n è ancora basso ma anche perchè il primo anno, il 1980, ha un valore che può essere considerato *outlier* anche per i sinistri in questione (1.87), a 0.2, ottenendo $h = 25$.

3.2.3 Requisiti di capitale a confronto

Presentiamo ora i requisiti di capitale richiesti ad una compagnia il cui portafoglio sia dato dai sinistri danesi che stiamo considerando, sulla base delle già viste ipotesi sulle *attritional losses*, sulle *large losses* o considerando l'intero ammontare dei sinistri.

Nella tabella 3.4, sono mostrate le principali statistiche riferite al costo aggregato \tilde{X} provocato dalle *attritional losses*, nell'ipotesi di modellizzare il numero degli eventi secondo una Poisson o con una binomiale negativa, unitamente ai premi incassati e al requisito di capitale richiesto¹⁸.

	Poisson (n=300)		Bin. Neg. (n=300, $\sigma_{\tilde{q}} = 0.16$)	
	Lognormale	Pareto	Lognormale	Pareto
<i>Media</i>	1.146	1.396	1.146	1.396
<i>Std</i>	0.093	0.133	0.205	0.259
<i>CoV</i>	8.1%	9.5%	18%	19%
<i>Asimmetria</i>	0.16	0.16	0.34	0.32
<i>VaR 99.5%</i>	1.401	1.759	1.738	2.137
$(VaR - E(\tilde{X}))/\sigma(\tilde{X})$	2.741	2.718	2.889	2.855
<i>Premi puri</i>	1.146	1.146	1.146	1.146
λ	0.08	0.08	0.08	0.08
c	0.30	0.30	0.30	0.30
<i>Premi tariffa</i>	1.768	1.768	1.768	1.768
<i>Requisito relativo</i>	9%	29%	28%	51%

Tabella 3.4: Requisiti di capitale per le *attritional losses*

Il valore atteso del costo aggregato, che coincide con i premi di rischio nel solo caso di lognormalità (per quanto già detto in precedenza), coincide nelle due ipotesi sulla distribuzione del numero dei sinistri, poichè $E(\tilde{q}) = 1$. La standard deviation, così come l'asimmetria, cresce invece passando dalla distribuzione di Poisson alla binomiale negativa, provocando un aumento del

¹⁸Per questa e per le prossime tabelle, riferite al costo aggregato, i valori, laddove siano monetari, sono espressi in miliardi di corone.

VaR e dunque del capitale richiesto. La crescita riguarda anche lo scarto fra percentile e valore atteso, rapportato alla standard deviation, che fornisce un'indicazione circa il "moltiplicatore" della standard deviation: in ipotesi di simmetria, tale indicatore vale 2.58, mentre cresce sempre più man mano che l'asimmetria tende ad essere più marcata; non a caso, nella nostra situazione è sempre superiore a 2.7.

Il confronto fra distribuzione lognormale e distribuzione di Pareto, invece, risulta in linea con le ipotesi formulate nel paragrafo 3.2.1: gli indicatori sono più elevati per la seconda distribuzione, ad eccezione dell'asimmetria, che, grazie all'effetto di n , si avvicina nei due casi.

I premi puri P sono definiti da $m \cdot n$, e i premi di tariffa B sono tali per cui

$$B = (1 + \lambda) \cdot P + c \cdot B$$

con λ che costituisce il caricamento di sicurezza, applicato ai premi di rischio, e c quello per spese, applicato come si vede ai premi di tariffa.

Per l'individuazione di tali caricamenti, si veda la figura 1.3 che mostra i principali indicatori tecnici con riferimento al ramo incendio, per il mercato italiano negli ultimi 10 anni. Il caricamento di sicurezza può essere inteso come il complemento a 1 del *Combined Ratio*, in quanto risulta il margine di guadagno tecnico che resta alla compagnia. Negli ultimi 10 anni, tale margine è risultato del 13% medio, sui premi di tariffa B . Poiché a noi interessa un coefficiente da applicare ai premi di rischio, potremo utilizzare un coefficiente dell'8%. Similmente, utilizziamo un valore di c pari al 30%, ottenuto osservando il comportamento, visibile nella stessa figura prima citata, dell'*Expense Ratio*.

Il requisito di capitale relativo (il c.d. *RBC ratio*), infine, viene calcolato come¹⁹

$$RBC = \frac{\tilde{X}_{0.995} - (1 + \lambda) \cdot n \cdot m}{B}$$

ovvero, in entrambe le situazioni, e in quelle che seguiranno, al *Value at Risk* viene sottratto non il valore atteso della distribuzione, ma i reali premi incassati, pari al valore atteso "vero" del costo sopportato dall'impresa. Si è già detto, infatti, che i differenti modelli hanno la finalità di costituire un adattamento adeguato alla distribuzione di costo, al fine di individuare in modo corretto i percentili di ordine elevato; non hanno, invece, la finalità di *pricing*.

¹⁹Daykin e altri (1984)

Nel complesso, i risultati sono in linea con le attese, in quanto il requisito di capitale aumenta passando dall'ipotesi di distribuzione poissoniana a quella di distribuzione binomiale negativa, ed inoltre è superiore nel caso si adotti una distribuzione di Pareto troncata rispetto all'utilizzo di una lognormale con troncamento sempre a 40 milioni.

	Lognormale/Pareto	Pareto/Pareto
<i>Media</i>	1.39	1.64
<i>Std</i>	0.29	0.42
<i>CoV</i>	20.6%	25.4%
<i>Asimmetria</i>	15.78	15.75
<i>VaR 99.5%</i>	2.49	3.50
<i>Premi puri</i>	1.39	1.39
λ	0.08	0.08
c	0.30	0.30
<i>Premi tariffa</i>	2.15	2.15
<i>Requisito relativo</i>	46%	93%

Tabella 3.5: Requisiti di capitale per il costo complessivo di *attritional losses* e *large losses*

Si è poi passati a considerare il requisito che si ottiene quando si considerino anche le *large losses*, ottenendo i risultati della tabella 3.5, riferiti all'utilizzo di una variabile di Poisson pura per le *attritional losses*, così come per le *large losses*.

Rimangono le già evidenziate differenze tra l'impiego della distribuzione lognormale e quella di Pareto, che si osservano in tutti gli indicatori proposti, incrementati in termini assoluti rispetto alla situazione precedente. I valori dell'asimmetria non sono affidabili: si è provato ad elevare il numero di simulazioni, ottenendo valori sempre molto diversi, a causa della non finitezza dei momenti semplici della distribuzione di Pareto non troncata, che serve a modellizzare i sinistri superiori ai 40 milioni. Tuttavia si è osservato che il *VaR* non presenta simili scostamenti, e dunque il valore del capitale individuato risulterà piuttosto affidabile.

Il requisito di capitale che verrà richiesto alla compagnia nel caso si adotti la distribuzione di Pareto per le *attritional losses* è il doppio di quello che viene richiesto nell'ipotesi di lognormalità, che riteniamo di gran lunga la soluzione migliore. Già con riferimento alla figura 3.2 si erano osservate le

criticità del modello di Pareto, che qui ritornano in modo evidente quando si consideri l'ammontare di capitale che è necessario allocare.

Vale comunque la pena sottolineare che, anche nell'ipotesi assunta di lognormalità (sempre e solo per le *attritional losses*), il requisito individuato del 46% risulta decisamente superiore rispetto agli attuali requisiti imposti da Solvency I. Torneremo più avanti sulla spiegazione di questo aspetto, quando miglioreremo l'impostazione seguita finora ed evidenzieremo le criticità possibili delle ipotesi formulate sulle *large losses* (paragrafo 3.2.4).

I requisiti si modificano introducendo l'ipotesi di binomiale negativa per la distribuzione del numero dei sinistri, diventando rispettivamente del 49% e del 96%.

Introduciamo ora l'analisi svolta con il modello *Peaks over Threshold*, dicendo subito che i risultati non paiono particolarmente soddisfacenti.

Nella tabella 3.6 è sviluppato un confronto tra questo modello e il modello $\tilde{X} = \tilde{X}_{attritional} + \tilde{X}_{large}$, dove le *attritional losses* sono modellizzate con una lognormale troncata, dato che questo modello si è rivelato largamente il più affidabile. La distribuzione scelta per il numero è quella di Poisson, fermo restando che l'ordine delle relazioni non muta scegliendo la binomiale negativa.

	Lognormale/Pareto	GPD
<i>Media</i>	1.39	1.29
<i>Std</i>	0.29	0.15
<i>CoV</i>	21%	11%
<i>Asimmetria</i>	15.78	3.99
<i>VaR 99.5%</i>	2.49	1.78
<i>Moltiplicatore</i>	3.83	3.33
<i>Premi puri</i>	1.39	1.39
λ	0.08	0.08
c	0.30	0.30
<i>Premi tariffa</i>	2.15	2.15
<i>Requisito relativo</i>	46%	13%

Tabella 3.6: Due modelli per il requisito complessivo di capitale a confronto

La differenza fra i requisiti relativi individuati risulta consistente; la ragione è da ricercare negli indicatori del costo aggregato, e in particolare

nel basso valore della volatilità nel caso della GPD, che determina un *Value at Risk* inferiore a quello ottenuto con il modello Lognormale/Pareto²⁰.

Ad ulteriore riprova, si riguardi la figura 3.4 e si noti che, al di sopra del valore di 10 milioni, la distribuzione Pareto generalizzata sta sempre al di sopra della funzione di ripartizione empirica, ovvero sottostima il rischio di osservare valori elevati. Essa nasce nell'ambito dell'Extreme Value Theory proprio per questo scopo, ma risulta difficile raggiungerlo quando la si usi per descrivere un *range* troppo elevato di sinistri, in questo caso compresi fra 1 e 412 milioni. Riprenderemo il suo utilizzo anche nella parte sulla riassicurazione (si veda il paragrafo 3.3), così come nel capitolo 4, ma anche in quelle sedi se ne osserveranno diverse criticità.

Si osservi infine la tabella 3.7, dove si è svolta un'analisi di tipo "tradizionale", adottando una lognormale non troncata, con estremo inferiore pari ad un milione, con parametri calcolati attraverso il metodo dei momenti e risultati

$$\begin{aligned}\mu &= 13.9608 \\ \sigma &= 1.5056\end{aligned}$$

e si è inoltre valutato, come promesso, cosa succede al nostro modello elevando il valore di n . La colonna centrale, già presentata, costituisce il nostro punto di riferimento²¹.

Ricordando che nel modello delle *attritional losses* adottato standard deviation e asimmetria sono leggermente sottostimate, un'ulteriore riduzione, visibile in tabella, non pare lecita e dunque possiamo affermare che il requisito del 27% individuato risulta una sottostima della rischiosità complessiva, per quanto rimanga al di sopra del risultato ottenuto con la distribuzione Pareto generalizzata e superiore agli attuali requisiti previsti da Solvency I.

Elevando il valore di n , ovvero supponendo di attenderci 1000 sinistri compresi fra 1 e 40 milioni e 10 superiori a quest'ultima soglia, si riscontra un abbassamento del requisito relativo di capitale richiesto.

In particolare, valore atteso e standard deviation crescono, essendo in aumento il portafoglio, così come cresce il *Value at Risk* ma gli indicatori (principalmente coefficiente di variazione e asimmetria) si riducono, portando ad una rischiosità *relativa* più bassa, che si ripercuote su un minor capitale richiesto per svolgere l'attività²².

²⁰Qualora si utilizzi la binomiale negativa, la differenza risulta più contenuta (49% contro 32%).

²¹In tutti i casi, si è adottata una distribuzione di Poisson pura.

²²Si noti che il moltiplicatore scende sotto il valore di 3.

	Lognormale	Lognormale/Pareto	Lognormale/Pareto
<i>n</i>	303	300/3	1000/10
<i>Media</i>	1.39	1.39	4.64
<i>Std</i>	0.20	0.29	0.85
<i>CoV</i>	14%	21%	18%
<i>Asimmetria</i>	1.18	15.78	7.93
<i>VaR 99.5%</i>	2.09	2.49	7.16
<i>Moltiplicatore</i>	3.55	3.83	2.95
<i>Premi puri</i>	1.39	1.39	4.64
λ	0.08	0.08	0.08
<i>c</i>	0.30	0.30	0.30
<i>Premi tariffa</i>	2.15	2.15	7.15
<i>Requisito relativo</i>	27%	46%	30%

Tabella 3.7: Calcolo del requisito complessivo adottando la distribuzione lognormale non troncata

3.2.4 Internal model o Standard Formula?

Ai fini di un confronto con Solvency II si è ritenuto opportuno operare sui soli ultimi cinque anni disponibili, ovvero sui sinistri dal 1998 al 2002, ricalibrando i parametri delle distribuzioni di costo e il numero atteso degli eventi; tale scelta ha il suo fondamento nella possibilità di sfruttare comunque un buonissimo numero di osservazioni (2077) e nella maggiore costanza del danno medio in quest'ultimo periodo (si veda la figura 2.12).

Il modello che vogliamo confrontare con i requisiti proposti da Solvency II è, dopo le osservazioni svolte, quello che abbina delle *attritional losses* distribuite secondo una lognormale troncata con delle *large losses* distribuite secondo il modello di Pareto; per queste ultime, in particolare, sono proposte due ipotesi alternative:

- la distribuzione di Pareto non troncata, come nel caso precedente;
- la distribuzione di Pareto troncata al valore di 1 miliardo.

La motivazione è da ricercare nel fatto che il massimo osservato su un singolo sinistro in questo periodo (1998-2002) è di poco superiore ai 110 milioni di corone; la stima prodotta adottando una Pareto non troncata, 2.34, porterebbe invece a dire che esiste una possibilità vicina all'8% di osservare valori superiori al valore massimo, misura che pare decisamente poco attendibile. Si noti che nella modellizzazione svolta in precedenza la probabilità

di osservare valori superiori al sinistro massimo (412 milioni) era invece in linea con quella empirica (adottando una funzione di ripartizione empirica del tipo $k/(n+1)$). La scelta pare inoltre ben ponderata, non essendo registrato nel dataset nessun sinistro superiore ai 500 milioni e, soprattutto, essendo l'andamento nel tempo dei sinistri quello riportato nella figura 1.8. Confronteremo comunque i risultati nelle due situazioni.

Per la stima dei parametri della lognormale si è operato come nel paragrafo 3.2.1, ottenendo $\mu = 13.9908$ e $\sigma = 1.204$, mentre per la distribuzione di Pareto non troncata la stima è risultata, come si diceva, $\alpha = 2.34$; nel caso della distribuzione di Pareto troncata si è adottata la verosimiglianza presentata nella sezione 3.2.1, ottenendo un valore molto vicino al precedente, $\alpha = 2.33$.

Per quanto riguarda i modelli per il numero dei sinistri, si è optato, come si diceva, per valori strettamente in linea con quelli empirici, ed in particolare si sono impiegate delle distribuzioni di Poisson con parametro $n = 410$ per le *attritional losses* e $n = 4.5$ per le *large losses*, effettuando una misturazione con una variabile Gamma solo nel primo caso e utilizzando un valore della volatilità del fattore di disturbo pari a $\sigma(\tilde{q}) = 0.112^{23}$.

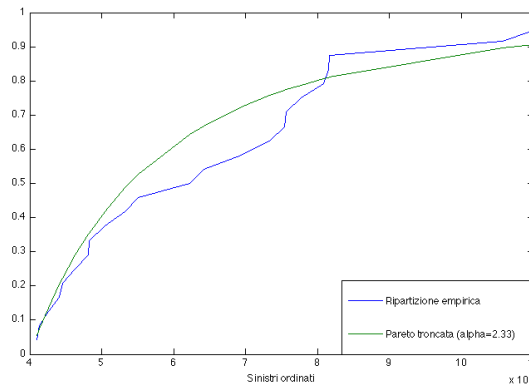


Figura 3.5: Incendi danesi 1998-2002: adattamento delle *large losses* con una Pareto troncata

Come si nota dalla tabella 3.8, il valore del capitale ottenuto si modifica in modo sostanziale a seconda dell'ipotesi scelta per le *large losses*; abbiamo motivato la ragione della nostra scelta di introdurre anche un modello

²³Stante la difficoltà di fornirne una stima sul dataset, si è scelto un livello in linea con quello proposto in Savelli e Clemente (2009c).

troncato al valore di 1 miliardo, e tendiamo a propendere per il requisito così calcolato, per quanto l'altra misura continui a rappresentare un buon valore di riferimento. Il modello troncato, comunque, fornisce una migliore approssimazione della coda della distribuzione, garantendo un buon adattamento (si veda la figura 3.5) ed evitando al contempo di restituire un capitale richiesto eccessivamente prudentiale.

	Lognormale/Pareto	Lognormale/Pareto troncata	Lognormale
<i>Media</i>	1.68	1.68	1.68
<i>Std</i>	0.28	0.26	0.27
<i>CoV</i>	16%	15%	16%
<i>Asimmetria</i>	2.01	0.54	0.52
<i>VaR(99.5%)</i>	2.59	2.51	2.48
<i>c</i>	0.30	0.30	0.30
λ	0.08	0.08	0.08
<i>B</i>	2.59	2.59	2.59
<i>Requisito relativo</i>	29.8%	26.5%	25.7%

Tabella 3.8: Incendi danesi 1998-2002: *RBC ratios* con tre differenti ipotesi distributive

Ancora a titolo di confronto con la modellistica tradizionale, si offrono i risultati anche per una modellizzazione con la distribuzione lognormale, con variabile di Poisson di parametro $n = 415.5$ misturata²⁴. Si nota la maggiore prudenzialità del requisito calcolato spezzando in due l'analisi della distribuzione di costo, e fissiamo la situazione con Pareto troncata come *benchmark*, ma allo stesso si nota quanto sia simile il livello conseguito con la distribuzione lognormale adattata all'intera distribuzione.

Il requisito del 26.5% è stato allora messo a confronto con i requisiti previsti da Solvency II, sia nell'approccio *market wide* che in quello *undertaking specific*, con opportuni pesi c . Si veda il paragrafo 3.1.2 per la costruzione delle *Standard Formula* che verranno impiegate nei prossimi capoversi.

La trasformazione che guida dall'individuazione della volatilità relativa al calcolo del requisito è rimasta immutata nel passaggio dal *QIS4* al *QIS5*, così come la volatilità relativa fissata dal Ceiops per il ramo *Property*, pari al 10%, facendo sì che in entrambi i casi si ottenga un requisito con approccio *market wide* pari al

$$RBC_{market\ wide} = 28.66\% \cdot B \quad (3.13)$$

²⁴Per cogliere la maggiore rischiosità insita in un'analisi che riguarda tutta la distribuzione, si è scelto $\sigma(\tilde{q}) = 0.12$.

Per quanto riguarda l'approccio *undertaking specific* del QIS4, è necessario disporre della serie storica dei *Loss Ratios*.

Come già detto, una maggiore stabilità nei risultati si osserva solo a partire dal 1998, ed è da quell'anno che è possibile individuare efficacemente un numero atteso di sinistri e un danno medio tali da poter essere tradotti in premi. Individuato il danno medio di $4.0233e + 06$ e preso $n = 415.5$, in accordo con il resto della costruzione, i rapporti sono stati calcolati ipotizzando nuovamente, per i premi di tariffa, un valore di λ dell'8% e di c del 30%, ottenendo

$$\begin{aligned} LR_{1998} &= 0.68 \\ LR_{1999} &= 0.55 \\ LR_{2000} &= 0.70 \\ LR_{2001} &= 0.57 \\ LR_{2002} &= 0.75 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Noto che il QIS4 garantiva la possibilità di utilizzare, per l'*US approach*, un peso pari al 79%, si è trovato un capitale pari al

$$RBC_{QIS4, \text{ undertaking specific}} = 25.33\% \cdot B \tag{3.15}$$

Per quanto riguarda invece l'approccio *undertaking specific* del QIS5, sono previste tre modalità, tra le quali abbiamo considerato il *Metodo 1* e il *Metodo 3*.

Per il primo, è necessario il costo ultimo $U_{y,LoB}$, che si è fissato pari al costo totale dei sinistri nell'anno y fornito dal riassicuratore.

Noti i premi annuali V_{LoB} (costanti per ipotesi) e noto che, per rami quali il *Property*, è previsto un peso dell'*US* ridotto rispetto al QIS4, pari, in caso di cinque *Loss Ratios* disponibili, al 34%, si è trovato

$$RBC_{QIS5, \text{ undertaking specific (1)}} = 27.17\% \cdot B \tag{3.16}$$

Particolarmente interessante, come si diceva, è il terzo metodo proposto dal Ceiops per la valutazione con approccio *undertaking specific*, che fa riferimento alla varianza di un processo di Poisson composto. I parametri necessari per il calcolo di $Var(S_n)$ sono

$$\begin{aligned} \lambda &= 415.5 \\ \mu &= 4.023e + 06 \\ \sigma &= 7.782e + 06 \\ Var(\Theta) &= 0.112^2 \end{aligned}$$

Noti i V_{LoB} , il requisito è allora risultato

$$RBC_{QIS5, \text{ undertaking specific } (3)} = 28.64\% \cdot B \quad (3.17)$$

Un confronto grafico fra i requisiti (figura 3.6) consente di vedere che il modello con la distribuzione di Pareto non troncata risulta il più prudentiale, anche rispetto alle *Standard Formula* di Solvency II, conservative per loro stessa natura, mentre l'*undertaking specific* calcolato secondo il QIS4 offre il maggior risparmio in termini di capitale; torneremo tra poco sul perchè si verifica questo risultato inatteso.

Per quanto riguarda il modello che abbiamo fissato come livello affidabile di riferimento, invece, va detto che risulta più parsimonioso in termini di mezzi da accantonare rispetto all'approccio *Market Wide* dei QIS4-QIS5 e all'*Undertaking specific* del QIS5 con metodi 1 e 3; in particolare, va sottolineato che il *Metodo 3* può essere considerato il più affidabile, in quanto dipende dai momenti della distribuzione \tilde{Z} e dal numero atteso dei sinistri, che coincidono con quelli utilizzati nella costruzione del modello; si nota in questo caso un risparmio di capitale quando si utilizzi il modello interno.

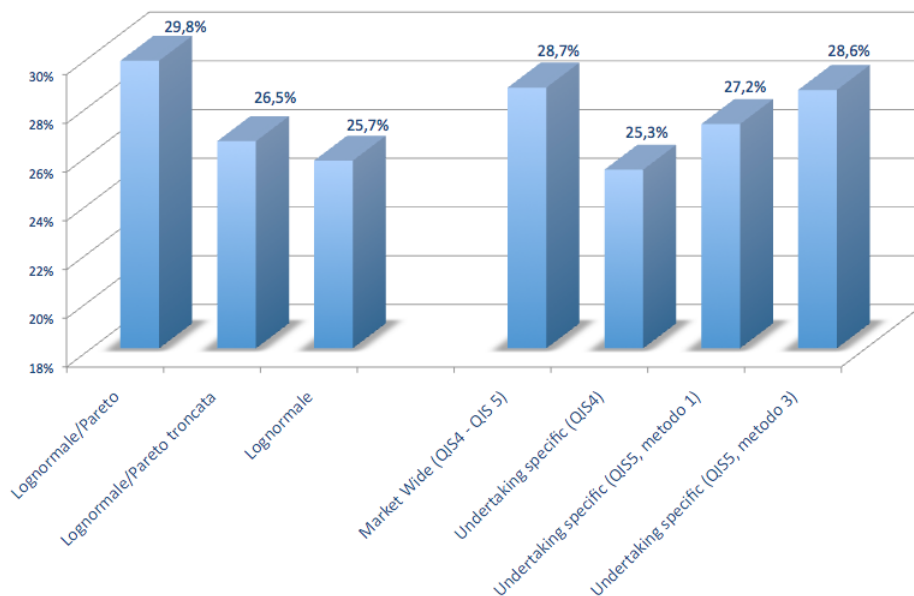


Figura 3.6: *RBC ratios*: confronti fra i modelli interni e *Standard Formula*

Il nostro modello risulta invece superiore in termini di requisito relativo rispetto all'*Undertaking specific* del QIS4; siamo dubbiosi circa l'eventuale conclusione che il requisito da noi calcolato risulti eccessivamente prudentiale (considerati soprattutto i diversi controlli che sono stati fatti sulle ipotesi

formulate), così come che scarsamente prudenziale sia la *Standard Formula*; la ragione è da ricercare piuttosto in un eccessivo peso di credibilità (79%) dato ai *Loss Ratios* calcolati *ex-post* senza conoscenze particolari sul valore dei premi.

Sottolineiamo inoltre che tale modello risulta piuttosto flessibile, ed in particolare può portare a requisiti differenti a seconda della soglia di troncamento scelta. Qualora fosse approvato dalla vigilanza, un modello come quello costruito ma con troncamento inferiore a 1 milione di corone per singolo sinistro, quota più che prudenziale visto il comportamento del *trend* storico, porterebbe ad un risparmio in termini di capitale richiesto. Questa considerazione, insieme ad altre analisi di sensitività, è riportata nella tabella 3.9²⁵. Si noti che i requisiti individuati portando la soglia a 800 e 500 milioni risultano inferiori a quello calcolato provando ad adattare l'intera distribuzione con una lognormale.

	Requisito relativo
<i>Livello di riferimento</i>	<u>26.5%</u>
$\lambda = 0.05$	29.2%
<i>sup = 800 mil</i>	25.3%
<i>sup = 500 mil</i>	23.3%
<i>VaR 99%</i>	22.0%
<i>VaR 99.99%</i>	50.5%
<i>TailVar 99%</i>	28.6%

Tabella 3.9: Alcune analisi di sensitività sul modello *benchmark*

Si nota come, caricando meno i premi puri ($\lambda = 0.05$), la compagnia necessiti di maggiore capitale per far fronte, con lo stesso livello di confidenza, alle perdite inattese.

L'effetto dell'asimmetria risulta particolarmente evidente modificando il livello di tolleranza scelto: sensibilmente inferiore risulta il requisito con un approccio *VaR* al 99%, mentre il capitale risulta quasi raddoppiato elevando il livello di confidenza al 99.99%.

Si è poi proposto un approccio di tipo *TailVaR*, con un livello di confidenza inferiore (99%), sull'esempio di quanto affrontato dal *QIS2*; si osserva

²⁵Per maggiore dettaglio, precisiamo che nel caso di una soglia superiore fissata a 800 milioni la stima per α è la medesima, mentre risulta di poco inferiore ($\alpha = 2.30$) quando *sup* = 500 milioni.

un requisito superiore rispetto alla situazione di partenza: l'equivalenza tra le due metodologie vale infatti solo per distribuzioni approssimativamente simmetriche.

3.2.5 L'andamento della *risk reserve* nel tempo

In questa sezione mostriamo come sia possibile costruire un modello che descriva il comportamento nel tempo della *risk reserve* definita come²⁶

$$\tilde{U}_t = (1 + j) \cdot \tilde{U}_{t-1} + (B_t - \tilde{X}_t - E_t) \cdot (1 + j)^{1/2} \quad (3.18)$$

e dunque in modo ricorsivo, con j che rappresenta il tasso di interesse *risk-free*, B_t i premi di tariffa e E_t le spese sostenute, mentre \tilde{X}_t rappresenta la variabile di costo aggregato, costruita come presentato in dettaglio nelle sezioni precedenti. L'elevamento alla 0.5 è effettuato formulando l'ipotesi di una costanza durante l'anno di entrate ed uscite, che è equivalente ad affermare che queste ultime si concentrino a metà anno.

Definiti i premi di tariffa come

$$B_t = P_t + \lambda \cdot P_t + c \cdot B_t$$

e formulando l'ipotesi per cui non vi sia margine di guadagno sulle spese, ovvero $c \cdot B_t = E_t$, con c caricamento per le spese, si ottiene

$$\tilde{U}_t = (1 + j) \cdot \tilde{U}_{t-1} + (P_t + \lambda \cdot P_t - \tilde{X}_t) \cdot (1 + j)^{1/2}$$

Per tenere in considerazione il comportamento nel tempo del costo aggregato vengono formulate due ipotesi:

- il parametro della distribuzione di Poisson al tempo t è definito come $n_t = n_0 \cdot (1 + g)^t$, con g tasso di crescita del portafoglio, mentre il fattore misturante, nell'ottica di voler cogliere i soli scostamenti di breve periodo, è mantenuto costante;
- la distribuzione di *claim severity* viene riscalata ogni anno tramite una misura pari al tasso di inflazione i e dunque i suoi momenti di ordine k risultano

$$E(\tilde{Z}_{i,t}^k) = (1 + i)^{k \cdot t} \cdot E(\tilde{Z}_0^k)$$

²⁶Savelli (2002)

Per una più semplice lettura e, soprattutto, nell'ottica di voler valutare l'impatto delle diverse strategie riassicurative (paragrafo 3.3), è più utile ragionare in termini di *risk reserve ratio*, definita come $\tilde{u}_t = \tilde{U}_t/B_t$, per la quale vale la nuova relazione ricorsiva

$$\tilde{u}_t = r \cdot \tilde{u}_{t-1} + p \cdot \left[(1 + \lambda) - \frac{\tilde{X}_t}{P_t} \right] \quad (3.19)$$

dove sono stati utilizzati i fattori sintetici

$$r = \frac{1 + j}{(1 + i) \cdot (1 + g)}$$

e

$$p = \frac{1 - c}{1 + \lambda} \cdot (1 + j)^{1/2} = \frac{P}{B} \cdot (1 + j)^{1/2}$$

Rimandando a Savelli (2002) per l'individuazione dei momenti esatti di tale *capital ratio*, ne sottolineiamo tuttavia, qualitativamente, le principali caratteristiche:

- nel caso in cui $r < 1$ e $\lambda > 0$, come è piuttosto lecito attendersi, il valore atteso cresce monotonamente nel tempo raggiungendo, quando $t \rightarrow \infty$, un asintoto pari a $\frac{\lambda p}{1-r}$;
- la volatilità cresce inizialmente, fino a raggiungere il valore massimo dopo alcuni anni, proporzionalmente al valore di $g > 0$, per poi decrescere monotonamente, raggiungendo un asintoto pari alla volatilità del fattore di disturbo;
- in conseguenza del teorema del limite centrale, l'asimmetria si riduce progressivamente al passare del tempo e tende verso lo zero.

In figura 3.7 è possibile vedere il comportamento della riserva di rischio calcolata per un orizzonte di 5 anni, dove le ipotesi sulle distribuzioni del numero e del costo dei sinistri sono quelle formulate all'interno della sezione 3.2.4, ed in particolare il modello prevede un'analisi suddivisa in *attritional losses* e *large losses*, con queste ultime proposte nel caso di distribuzione di Pareto troncata al valore di un miliardo. Con riferimento allo sviluppo multiperiodale, è necessario, come si è visto, formulare ulteriori ipotesi; in particolare:

- il tasso di rendimento è fissato al valore $j = 4\%$;
- si ipotizza una crescita di $g = 5\%$;
- l'inflazione è posta al livello $i = 2\%$;

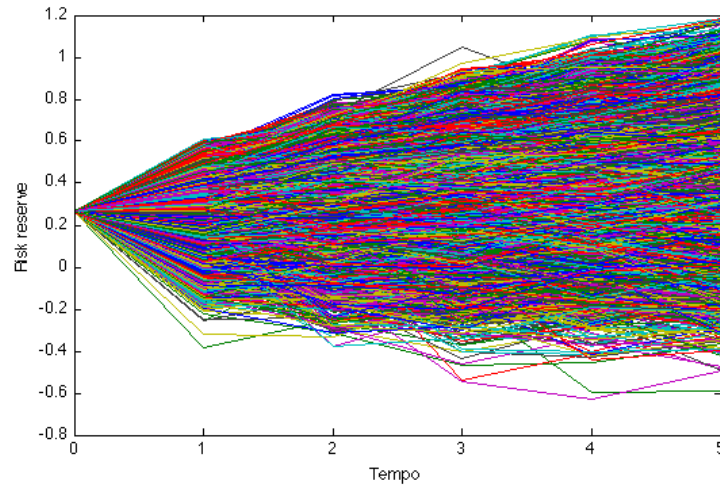


Figura 3.7: Andamento della *risk reserve* su un orizzonte di 5 anni

- il capitale di partenza è pari al requisito individuato nel paragrafo menzionato prima, ovvero $u_0 = 26.5\%$;

Un'analisi basata sui momenti è svolta nella tabella 3.10, dove si ritrovano alcune delle osservazioni svolte poco fa²⁷; in particolare si può notare un incremento medio nei valori della riserva di rischio, così come un progressivo aumento della volatilità, associato ad una riduzione graduale dell'asimmetria; si noti la leggera diminuzione di quest'ultima rispetto a quanto visto nel paragrafo 3.2.4, motivata dalla crescita del portafoglio.

t	Media	Standard deviation	Asimmetria	$\tilde{u}_{0.5\%}$
0	0.265			0.265
1	0.310	0.099	-0.500	0.001
2	0.354	0.138	-0.353	-0.051
3	0.397	0.165	-0.296	-0.087
4	0.438	0.187	-0.238	-0.089
5	0.478	0.204	-0.215	-0.091

Tabella 3.10: Momenti della riserva di rischio su un orizzonte di 5 anni

Si vede inoltre che il percentile al livello dello 0.5% si abbassa progressivamente, avvicinandosi alla barriera di rovina, che viene oltrepassata già in

²⁷Si noti che nella nostra situazione risulta $r < 1$.

$t = 2$.

3.3 **Impatto della riassicurazione**

Obiettivo di questo paragrafo, come già anticipato più volte, è quello di valutare l'impatto di strategie riassicurative differenti sui requisiti di capitale individuati in precedenza. Per questo verranno presentate le principali tipologie di riassicurazioni proporzionali (paragrafo 3.3.1), la questione del *pricing* di una riassicurazione c.d. *XL* (paragrafo 3.3.2), per poi lasciare al paragrafo 3.3.3 i confronti tra contratti alternativi.

3.3.1 **Riassicurazioni proporzionali**

I trattati proporzionali sono accordi che impegnano l'assicuratore a cedere una quota prefissata di ogni rischio originariamente sottoscritto, il che implica che ai sinistri che vi rientrano viene fornita immediata copertura²⁸. Vengono quindi condivisi in proporzione i premi incassati (meno le commissioni) e i sinistri che si verificano.

Presentiamo di seguito le principali forme tradizionali di riassicurazione proporzionale: la riassicurazione in *quota* e quella *per eccedente*.

Nel c.d. **trattato quota** le imprese di assicurazione si impegnano a cedere ai riassicuratori una certa percentuale prefissata di tutti i rischi, e, nella stessa proporzione, verranno loro rimborsati i sinistri che si verificano su queste esposizioni.

Una volta considerato l'ammontare dei premi che vanno ceduti, è necessario tener conto delle spese pagate dall'impresa cedente, motivo per il quale è prassi che le compagnie di riassicurazione riconoscano, almeno in parte, le spese sostenute con riferimento alla rete di vendita e alle campagne pubblicitarie per la sottoscrizione dei contratti (*commissione fissa*); è anche possibile che venga determinata una commissione "provvisoria" al cui aggiustamento si procederà a fine esercizio, sulla base dei sinistri che hanno colpito il trattato (*commissione scalare*). In ogni caso, la quota che viene così riconosciuta risulta fondamentale ai fini dell'efficacia del trattato di riassicurazione in quota per l'impresa di assicurazione.

In termini analitici, chiamati B_t^{RE} i premi ceduti al riassicuratore, risulta

$$B_t^{RE} = (1 - \alpha) \cdot B_t$$

²⁸Di Gropello e Gionta (2004)

dove α è la quota dei rischi trattenuti dall'impresa cedente, mentre le commissioni riconosciute a quest'ultima possono essere indicate con $C_t^{RE} = c^{RE} \cdot B_t^{RE}$, dove c^{RE} può essere differente, come detto, da c ; la compagnia di riassicurazione, d'altro canto, pagherà i sinistri X_t^{RE} definiti come

$$\tilde{X}_t^{RE} = (1 - \alpha) \cdot \tilde{X}_t$$

Dal trattato, inoltre, possono essere esclusi alcuni rischi, in genere quelli legati al verificarsi di eventi sulle code delle distribuzioni; per questi sinistri il riassicuratore propone piuttosto delle coperture non proporzionali di tipo *excess of loss*.

Con riguardo ai vantaggi conseguiti e ai possibili svantaggi, diciamo che:

- *per la cedente*, è possibile sfruttare una copertura piuttosto semplice che consente un'espansione del proprio portafoglio, sebbene sia costretta a cedere anche i rischi minori e non migliori quindi l'equilibrio del portafoglio (si noterà più avanti, in particolare, il non miglioramento dell'asimmetria della distribuzione della riserva di rischio);
- *per la cessionaria*, c'è il vantaggio di ricevere una quota di ogni rischio e quindi non vi è antiselezione, nonostante le commissioni siano più elevate rispetto agli altri tipi di trattato;

Un trattato che riesce invece a migliorare l'equilibrio del portafoglio è il c.d. **trattato eccedente**, dato che qui non viene trattenuta una quota fissa, ma piuttosto una percentuale variabile in funzione del tipo di rischio assicurato.

La compagnia cedente, infatti, definisce il c.d. *pieno di conservazione*, ovvero l'importo massimo che vuole conservare per ogni singolo rischio, e l'eccedenza, secondo un numero di pieni concordato fra le parti, verrà riassicurata proporzionalmente.

Un esempio di riassicurazione per eccedente è riportato nella figura 3.8²⁹, dove si nota che, per alcuni rischi, la cedente non viene riassicurata, mentre per quelli che eccedono il pieno, fissato a 300, si innesta un meccanismo di copertura con percentuale variabile, per un massimo di 3 pieni, dopo i quali il riassicuratore non interviene.

Con riguardo ai vantaggi conseguiti e ai possibili svantaggi, diciamo che:

²⁹Fonte: Galey e Kuhn (2009)

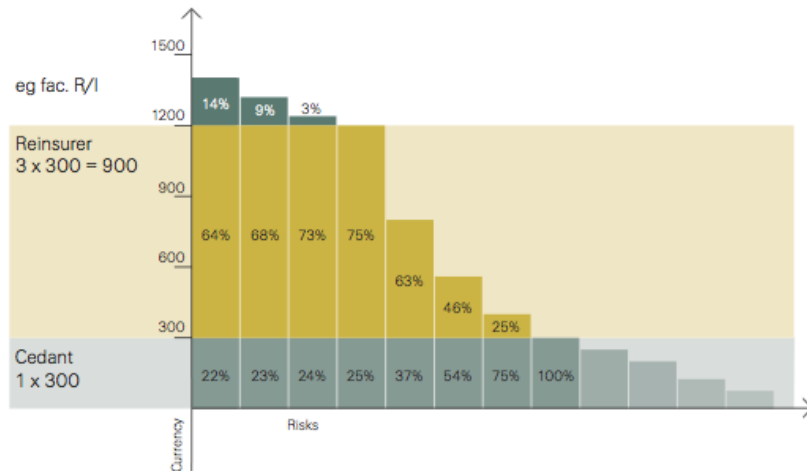


Figura 3.8: Un esempio di riassicurazione per eccedente

- *per la cedente*, si tratta questa volta di una copertura che rende omogeneo il portafoglio, ma che è associata ad un'amministrazione complessa in quanto è necessario effettuare un calcolo specifico per ogni rischio da assicurare;
- *per la cessionaria*, l'unico vantaggio è dato dalle minori commissioni riconosciute alla cedente, cui fa però da contrappeso una serie di svantaggi, legati all'assunzione dei rischi peggiori.

Pur essendo utile in una copertura come quella contro l'incendio, la riassicurazione per eccedente necessita però di conoscere le esposizioni dei singoli rischi, delle quali non sappiamo nulla con riferimento al dataset in questione, motivo per il quale non riusciremo a valutare il comportamento della *risk reserve* in questa situazione.

3.3.2 Riassicurazione *excess of loss*

La riassicurazione *excess of loss*, o *XL*, è la più diffusa copertura di tipo non proporzionale, ed è costituita dall'impegno del riassicuratore a pagare tutti i sinistri che superino un limite specifico rispetto ad un singolo rischio o ad un singolo evento.

Il riassicuratore, in particolare, è impegnato per gli importi che superino la c.d. priorità, e rimborserà in questo caso lo scarto fra il sinistro e il limite inferiore stesso. Allo stesso tempo, spesso il riassicuratore non conserva tutti i rischi superiori ad una certa soglia, la c.d. portata del layer, così

che l'importo massimo per il quale stipula il contratto risulta la somma di priorità e portata.

Il premio dipende dalla probabilità di accadimento del sinistro, ovvero dalla probabilità per cui l'evento "entri" nel *layer* assicurato, moltiplicata per il danno medio che si può verificare in quel caso.

Per ogni layer riassicurato, dunque, il premio puro è individuato a partire da³⁰

$$n_t^{RE} = n_t \cdot P(\tilde{Z}_t > L_t)$$

dove con n_t^{RE} si è indicato il numero dei sinistri che cadono nella porzione di distribuzione riassicurata e con L_t la priorità, mentre n_t rappresenta l'usuale parametro della distribuzione di Poisson, e da

$$\begin{aligned} E(\tilde{Z}_t^{RE}) &= E(\tilde{Z}_t - L_t \mid Z_t > L_t) = \\ &= \frac{\int_{L_t}^{H_t} (1 - S_t(\tilde{Z})) dZ + (H_t - L_t) \cdot P(\tilde{Z}_t > H_t)}{P(\tilde{Z}_t > L_t)} \end{aligned}$$

con H_t pari alla somma di priorità e portata ed S_t funzione di ripartizione; si noti che la priorità e la portata hanno bisogno di essere indicizzate all'inflazione, così come va notato che, sotto l'ipotesi di una crescita ad un tasso g , un numero via via crescente di sinistri entra a far parte della copertura riassicurativa, peggiorando anno dopo anno, a parità delle altre condizioni, il c.d. *rate on line*, una misura utilizzata dai riassicuratori per valutare in modo sintetico la qualità dei rischi assunti, e definito come

$$ROL_t = \frac{E(\tilde{Z}_t^{RE}) \cdot n_t^{RE}}{H_t - L_t} = \frac{P_t^{RE}}{H_t - L_t} \quad (3.20)$$

A seguito di quanto già detto, sottolineiamo che il costo aggregato a carico del riassicuratore è dato da³¹

$$\tilde{X}_t^{RE} = \sum_{i=1}^{\tilde{K}_t} \min \left\{ \max \left[\tilde{Z}_t - L_t, 0 \right], H_t - L_t \right\}$$

A differenza di quanto succedeva per la riassicurazione in quota, infine, non prevediamo nessun riconoscimento alla cedente in termini di commissioni, ma piuttosto quest'ultima sarà tenuta a pagare, sui premi ceduti, una quota legata alle attività di brokeraggio necessarie per l'impresa di riassicurazione

$$BR_t = br \cdot B_t^{RE}$$

³⁰Schmutz e Doerr (1998)

³¹Savelli (2002)

dove i premi di tariffa sono ottenuti attraverso un caricamento λ^{RE} da applicare ai premi di rischio, che in genere, visto che tale tipologia riassicurativa nasce per assicurare le code delle distribuzioni, sarà superiore al valore di λ applicato dalla cedente verso i propri assicurati:

$$B_t^{RE} = (1 + \lambda^{RE}) \cdot P_t^{RE}$$

Sottolineamo inoltre che è opportuno che l'impresa di riassicurazione applichi un caricamento di sicurezza crescente a seconda del *layer* riassicurato.

Da ultimo, ricordiamo che spesso nei contratti riassicurativi di tipo *excess of loss* è prevista una *clausola di reintegro*, o *reinstatement*, ovvero la continuazione della copertura anche dopo il verificarsi di un sinistro, spesso a seguito del pagamento di un premio addizionale, non necessariamente di identico ammontare rispetto all'importo originario.

Come illustrato ripetutamente all'interno del lavoro, per procedere con un'analisi di questo tipo è necessario però disporre di modelli probabilistici che descrivano adeguatamente il comportamento della coda della distribuzione del singolo costo, pena una tariffazione, da parte del riassicuratore, non in linea con la rischiosità reale. Nella figura 3.9 sono rappresentati alcuni modelli studiati con l'obiettivo di adattare nel miglior modo possibile i sinistri danesi superiori a 40 milioni registrati nel periodo 1998-2002, come già fatto in precedenza, dove si era impiegato il modello di Pareto e quello di Pareto troncato, qui riproposti; sottolineiamo che i sinistri sono soltanto 23, ma il buon adattamento conseguito risulta stabile (anche nel valore di α) ampliando la finestra temporale, che, si ricorda, era stata scelta a motivo della stabilità dei dati di partenza.

Si osserva che la distribuzione di Pareto non troncata oppure troncata ad un miliardo di corone risultano sovrapposte, e forniscono un ottimo adattamento, anche se, come diremo tra poco, portano a valori comunque differenti fra di loro per quanto riguarda il premio di rischio. Non risulta particolarmente buono l'adattamento con una GPD quando si scelga una soglia $u = 10$ milioni, mentre è apparentemente migliore quello conseguito con $u = 40$ milioni: in realtà si noti che il parametro è negativo e dunque, come visto nel paragrafo 2.3.3, il supporto è compreso fra gli estremi *soglia* $t < \tilde{Z}_t < \frac{\sigma}{\gamma} + \text{soglia}_t$, e dunque il massimo è pari a poco più di 130 milioni nel nostro caso, valore certamente non sufficiente a cogliere l'ampiezza delle possibili coperture riassicurative.

Nella tabella 3.11 sono mostrati alcuni esempi di calcolo del premio puro e di successiva valutazione del *rate on line*, una volta individuati il numero

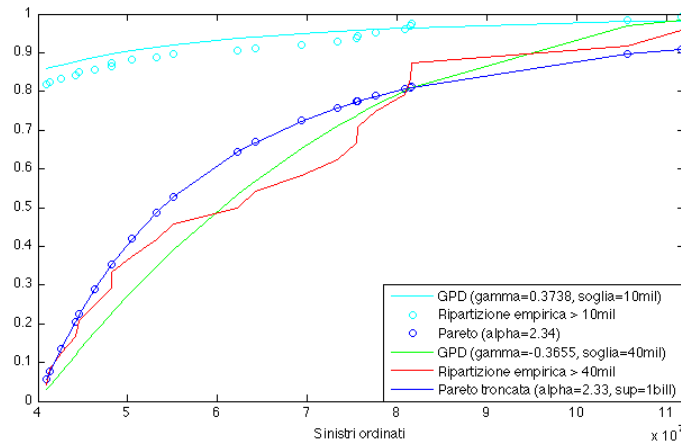


Figura 3.9: Approssimazione della coda destra ai fini del *pricing* di una riassicurazione *XL*

<i>Layer</i>	n^{RE}	$E(Z^{RE})$	Premio puro	<i>Rate on line</i>
50 mil – 120 mil	2.67	25.8	68.9	99%
60 mil – 130 mil	1.75	28.9	50.6	72%
80 mil – 140 mil	0.89	31.5	28.0	47%
100 mil – 200 mil	0.53	45.0	23.9	24%
200 mil – 500 mil	0.10	101.25	10.1	3%

Tabella 3.11: Incendi danesi 1998-2002: frequenza e danno medio in un funzione del *layer* riassicurato

atteso di eventi che “colpiscono” il *layer* ed il relativo danno atteso³²; la distribuzione utilizzata è la distribuzione di Pareto troncata al valore di un miliardo, con estremo inferiore pari, come di consueto, a 40 milioni, con l’ipotesi che 4.5 sinistri siano superiori a questa soglia. Si nota che al crescere della priorità si riduce il numero di eventi, mentre, a parità di ampiezza del *layer* (valida nei primi 3 casi), si alza il danno medio. La conformazione scelta per i *layer*, inoltre, fa sì che si abbassi il *rate on line*; sottolineiamo che, in base ai dati di mercato, verranno accolti con favore dal riassicuratore i contratti il cui *ROL* sia inferiore al 30%.

³²Per le formule, si vedano quelle individuate all’interno del paragrafo 3.2.1, che sono state opportunamente modificate per tenere conto dello scarto fra il sinistro e la priorità. Precisiamo inoltre che, laddove si tratti di valori monetari, essi sono espressi in milioni di corone.

Adottando una Pareto non troncata, invece, con medesima soglia inferiore, i risultati si modificano leggermente: per *layer* lontani dal valore di un miliardo, come i primi 4 della tabella, il premio calcolato risulta inferiore a quello riportato, mentre avvicinandosi al limite superiore la situazione si ribalta, a motivo delle basse probabilità di accadimento ipotizzate con una distribuzione di Pareto troncata.

3.3.3 Impatto delle strategie sul *risk capital*

Nel cui si voglia valutare come cambia nel tempo il comportamento della riserva di rischio dopo l'introduzione dei contratti riassicurativi, è necessario modificare opportunamente l'equazione 3.18 al fine di tenere conto di questi ultimi. Si veda quanto detto nei paragrafi 3.3.1 e 3.3.2 a proposito delle ipotesi che possono essere formulate per una riassicurazione in quota e per una riassicurazione *excess of loss*, che verranno utilizzate di seguito. In particolare, prendendo spunto dalle relazioni mostrate in Savelli (2002), abbiamo formulato i due seguenti modelli:

- per la riassicurazione in quota, la riserva di rischio si modifica nel seguente modo:

$$\tilde{U}_t = (1+j) \cdot \tilde{U}_{t-1} + (B_t - \tilde{X}_t - E_t + \tilde{X}_t^{RE} - B_t^{RE} + C_t^{RE}) \cdot (1+j)^{1/2} \quad (3.21)$$

dove le varie voci sono già state illustrate in precedenza; sottolineamo in particolare che, nelle analisi che seguiranno, la quota ritenuta è pari ad $\alpha = 80\%$ mentre le commissioni riconosciute alla cedente sono calcolate con lo stesso valore di c espressivo delle spese sostenute dalla compagnia di assicurazione (30%);

- per la riassicurazione *XL*, la riserva di rischio si modifica invece come segue:

$$\tilde{U}_t = (1+j) \cdot \tilde{U}_{t-1} + (B_t - \tilde{X}_t - E_t + \tilde{X}_t^{RE} - B_t^{RE} - BR_t^{RE} - \beta \cdot \tilde{R}_t) \cdot (1+j)^{1/2} \quad (3.22)$$

dove è opportuno specificare che si è introdotta una nuova variabile aleatoria, \tilde{R}_t , che misura l'eventuale costo addizionale che grava sulla compagnia cedente quando si verificano uno o più sinistri, in conseguenza dei quali il riassicuratore garantisce un reintegro della copertura previo il pagamento di una frazione $0 < \delta < 1$ del premio originario, ovvero $\beta = \delta \cdot B_t^{RE}$ (ed in particolare si è fissato un valore di δ pari al

20%³³); in particolare, \tilde{R}_t misura il numero di sinistri che gravano sulla compagnia di riassicurazione, che sono stati misurati empiricamente sulle simulazioni, ma che, si è visto, possono essere ben approssimati, se lo si volesse, anche con una distribuzione di Poisson pura; inoltre, le commissioni di brokeraggio sono calcolate ad un tasso pari al 10% dei premi ceduti; i contratti che descriveremo sono di due tipologie:

1. *Ipotesi 1*: vengono ceduti tutti i sinistri superiori a 100 milioni di corone, sui quali la cessionaria applica un caricamento $\lambda^{RE} = 0.2$;
2. *Ipotesi 2*: vengono ceduti i sinistri compresi fra 80 e 200 milioni di corone, sui quali la compagnia di riassicurazione costruisce un contratto basato su due *layer*, il primo che copre i sinistri fino a 150 milioni, al quale è associato un caricamento $\lambda_1^{RE} = 0.12$, il secondo quelli successivi, con $\lambda_2^{RE} = 0.15$, per tenere conto della maggiore rischiosità.

Nella tabella 3.12 sono mostrati i valori dei principali momenti ed indicatori per la riserva di rischio al lordo della riassicurazione e dopo l'introduzione dei tre contratti riassicurativi costruiti³⁴. Rispetto alla riserva lorda, i cui momenti coincidono con quelli della tabella 3.10, si osserva che:

- dopo la riassicurazione in quota, la volatilità è ridotta proporzionalmente alla quota α ritenuta, mentre l'asimmetria è immutata; nonostante il valore atteso si riduca, in dipendenza dei premi ceduti, si ottiene un beneficio in termini di percentile della riserva di rischio;
- dopo la riassicurazione *excess of loss*, la volatilità è ridotta rispetto alla situazione iniziale, e questa volta il discorso vale anche per l'asimmetria; per quanto riguarda l'ipotesi 1, in $t = 1$ e in $t = 2$, tale contratto risulta sempre preferibile a quello in quota, mentre successivamente si dovrà operare in termini di *trade off* tra valore atteso e capitale richiesto; nel caso dell'ipotesi 2, invece, permane il beneficio rispetto alla situazione senza riassicurazione, ma, rispetto agli altri contratti, solo in $t = 4$ e $t = 5$ si iniziano a notare gli effetti dell'elevato valore atteso senza troppe penalizzazioni in termini patrimoniali;

³³Qualora i sinistri fossero concentrati a metà anno, infatti, β sarebbe pari a 0.5; si è optato allora per una riduzione a partire da questo ultimo valore, che rende meno penalizzante il contratto per la cedente.

³⁴Si ipotizza qui che, nel caso di riassicurazione *excess of loss*, il reintegro non sia soggetto al pagamento di premi addizionali.

t	Media	St. dev.	Asimmetria	$\tilde{u}_{0.5\%}$
<i>Riserva di rischio al lordo della riassicurazione</i>				
0	0.265			0.265
1	0.310	0.099	-0.500	0.001
2	0.354	0.138	-0.353	-0.051
3	0.397	0.165	-0.296	-0.087
4	0.438	0.187	-0.238	-0.089
5	0.478	0.204	-0.215	-0.091
<i>Al netto di una riassicurazione in quota ($\alpha = 80\%$)</i>				
0	0.265			0.265
1	0.299	0.079	-0.500	0.051
2	0.333	0.110	-0.353	0.008
3	0.365	0.132	-0.296	-0.022
4	0.396	0.149	-0.238	-0.025
5	0.428	0.164	-0.215	-0.028
<i>Al netto di una riassicurazione XL (Ipotesi 1)</i>				
0	0.265			0.265
1	0.303	0.089	-0.241	0.054
2	0.341	0.123	-0.164	0.008
3	0.377	0.148	-0.140	-0.025
4	0.412	0.167	-0.113	-0.037
5	0.447	0.184	-0.102	-0.044
<i>Al netto di una riassicurazione XL (Ipotesi 2)</i>				
0	0.265			0.265
1	0.306	0.090	-0.369	0.038
2	0.347	0.125	-0.258	-0.009
3	0.386	0.150	-0.220	-0.037
4	0.423	0.170	-0.176	-0.045
5	0.461	0.186	-0.156	-0.046

Tabella 3.12: Effetto di contratti riassicurativi alternativi sulla riserva di rischio

Ulteriori indicazioni possono essere tracciate a partire dalla tabella 3.13, dove si è evidenziata la differenza tra il caso in cui il *reinstatement* sia gratuito e quello in cui sia oneroso, con riferimento all'ipotesi 2. Si nota l'aggravamento della situazione in termini di valore atteso e volatilità, ma anche con riferimento all'asimmetria, in quanto, come si diceva, la distribuzione del numero dei reintegri è approssimativamente una Poisson pura, e dunque asimmetrica verso destra. Il cumulo dell'effetto dei reintegri è evi-

t	Media	St. dev.	Asimmetria	$\tilde{u}_{0.5\%}$
<i>Ipotesi 2 (Reinstatement gratuito)</i>				
0	0.265			0.265
1	0.306	0.090	-0.369	0.038
2	0.347	0.125	-0.258	-0.009
3	0.386	0.150	-0.220	-0.037
4	0.423	0.170	-0.176	-0.045
5	0.461	0.186	-0.156	-0.046
<i>Ipotesi 2 (Reinstatement oneroso)</i>				
0	0.265			0.265
1	0.303	0.091	-0.376	0.031
2	0.341	0.127	-0.263	-0.021
3	0.378	0.152	-0.224	-0.051
4	0.412	0.172	-0.179	-0.063
5	0.447	0.189	-0.159	-0.068

Tabella 3.13: Effetto della clausola di *reinstatement* sulla riserva di rischio

dente in $t = 5$, dove il contratto in caso di reintegro oneroso è decisamente subottimale rispetto a quello gratuito.

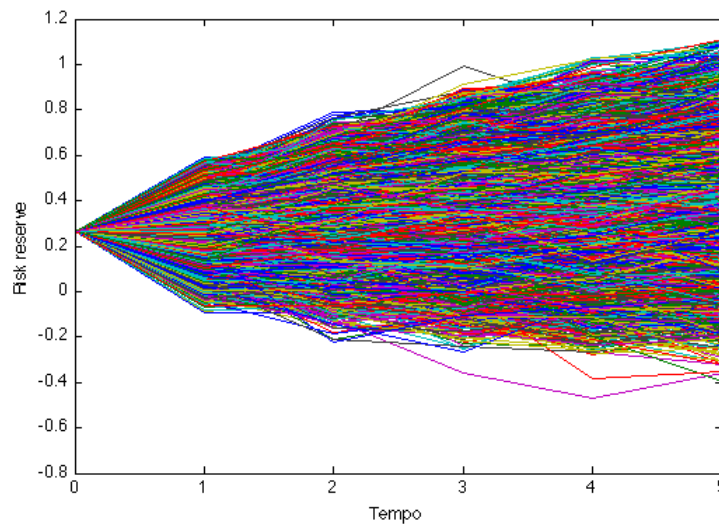


Figura 3.10: Andamento della *risk reserve* su un orizzonte di 5 anni in presenza di una copertura *excess of loss* con priorità 100 milioni e portata illimitata

Da ultimo, proponiamo in figura 3.10 l'andamento della *risk reserve* in caso di riassicurazione *excess of loss*, del tipo dell'ipotesi 1, i cui momenti sono già stati descritti. Si noti soprattutto la differenza, a parità di scala utilizzata, rispetto alla figura 3.7, dove non era ipotizzata nessuna copertura riassicurativa: è evidente, forse più di quanto non lo fosse a livello numerico, il beneficio che si ricava con riferimento alla volatilità della riserva di rischio, pena una flessione in termini di valore atteso.

Capitolo 4

Analisi delle dipendenze

In questo capitolo presentiamo innanzi tutto alcuni elementi teorici riferiti all'analisi della dipendenza fra variabili aleatorie, con la finalità di individuare dei modelli utili per descrivere il valore del requisito di capitale che si ottiene quando si aggregano fra di loro più rami assicurativi. La trattazione è di particolare interesse all'interno del lavoro poiché, come già si anticipava nel capitolo 1, i sinistri sono ripartiti in danni ad edifici, contenuti e perdite di profitto.

Nel paragrafo 4.1, si mostreranno alcuni modi con i quali può essere descritta la dipendenza, con particolare attenzione all'evidenziazione dei limiti del tradizionale coefficiente di correlazione lineare. Verrà inoltre presentato il concetto di *tail dependence* e se ne produrrà una stima con riferimento al dataset in esame.

Successivamente (sezione 4.2) verranno presentate le copule, strutture di aggregazione i cui sviluppi e il cui impiego sono stati oggetto di numerosi recenti studi in ambito attuariale. Verrà messo in risalto il legame esistente fra una determinata copula e la sua capacità di descrivere accuratamente la dipendenza di coda.

Infine, nel paragrafo 4.3, individueremo dei modelli stocastici pratici per la descrizione del costo aggregato dei tre singoli rami e, una volta definito il requisito di capitale *stand alone*, confronteremo i risultati ottenuti in termini di aggregazione a seconda della diversa scelta di dipendenza.

Pare opportuno sottolineare all'inizio di questo capitolo che i dati forniti erano indicizzati (a valori del 2002) nella sola componente chiamata 'adj claims', ovvero sugli ammontari totali per singolo sinistro. Prima di analizzare le singole componenti, si è quindi provveduto a riportare anche i danni

ad edifici e contenuti e le perdite di profitto a valori del 2002. In particolare, i fattori di incremento coincidono nel caso di ammontari complessivi, edifici e contenuti, mentre sono più elevati per le perdite di profitto.

4.1 Rappresentazioni alternative della dipendenza

Nel presente paragrafo descriviamo quali possano essere dei metodi adeguati per descrivere la dipendenza tra due variabili aleatorie, riprendendo il concetto di correlazione lineare e definendo una nuova misura, il c.d. τ di Kendall. Assumeranno particolare importanza la definizione e la stima della dipendenza di coda (paragrafo 4.1.3).

4.1.1 Standardizzazione delle componenti

Cominciamo la trattazione procedendo con una standardizzazione delle variabili aleatorie di riferimento, ovvero, rispettivamente, i danni ad edifici, contenuti e perdite di profitto. Tale standardizzazione risulterà utile, in particolare, per il calcolo del τ di Kendall e per la stima della *tail dependence*, ed è necessaria in quanto abbiamo a che fare con distribuzioni differenti, che è necessario rendere confrontabili prima di procedere con il calcolo di eventuali indicatori.

Una certa distribuzione $F_X(x)$ può essere trasformata in una c.d. *Frechet unit* oppure in una *Pareto unit*; la scelta tra le due non risulta di particolare interesse, fermo restando che la finalità è quella di rendere omogenee le marginali. Scelta la distribuzione di Frechet, la trasformazione da applicare risulta¹

$$X_{FR} = -\frac{1}{\ln(F_X(x))} \quad (4.1)$$

La ragione del nome *Frechet unit* la si può ben vedere calcolandone la funzione di ripartizione, per $y > 0$:

$$\begin{aligned} P(X_{FR} \leq y) &= P(-\ln^{-1}(F_X(x)) \leq y) \\ &= P(F_X(x) \leq \exp(-y^{-1})) \\ &= \exp(-y^{-1}) \end{aligned}$$

dove si riconosce la funzione di ripartizione presentata nella tabella 2.1.

Quando si tratti di passare all'applicazione concreta di tale trasformazione, è necessario disporre della funzione di ripartizione $F_X(x)$. Per descriverla

¹Rytgaard (2009)

possono essere impiegati dei modelli parametrici oppure, come vedremo qui, la funzione di ripartizione empirica.

Chiamato $x_{(n-k+1)}$ il k -esimo valore più grande all'interno del campione, la funzione di ripartizione di ripartizione empirica potrà essere espressa, in analogia con quanto visto nel paragrafo 2.4.1, da:

$$\hat{F}_X(x_{n-k+1}) = \frac{n-k+1}{n+1}$$

Si noti che quando $k = 1$, si ha il valore massimo della funzione di ripartizione, ovvero $k = 1$ descrive il sinistro massimo registrato su ogni singolo ramo; l'utilizzo di $n + 1$ al denominatore fa sì che, anche in questo caso, $X_{FR} \neq +\infty$, poichè stiamo impedendo che il denominatore della trasformazione (ovvero il logaritmo della funzione di ripartizione empirica) vada a 0.

Frechet	Edifici	Frechet	Contenuti	Frechet	Perdite di profitto
0.41	0	0.67	0	2.50	0
3.02	2.5078e+06	3.02	1.0922e+06	3.02	56126
6.4698	3.6842e+06	6.477	2.3153e+06	6.4698	3.7893e+05
10.014	4.625e+06	10.014	3.384e+06	10.014	6.6436e+05
25.039	7.7862e+06	25.039	7.2715e+06	25.039	1.6335e+06
40.155	9.8552e+06	40.155	1.1116e+07	40.155	2.5987e+06
100.54	1.7433e+07	100.54	2.2292e+07	100.54	6.5879e+06
298.24	3.0608e+07	298.24	4.1941e+07	298.24	1.5529e+07
528.04	3.8397e+07	528.04	4.8906e+07	528.04	1.8995e+07
762.94	4.4949e+07	762.94	6.238e+07	762.94	2.0032e+07
1373.7	7.2715e+07	1373.7	8.0448e+07	1373.7	2.3293e+07
6870.5	2.9122e+08	6870.5	2.4561e+08	6870.5	1.0128e+08

Tabella 4.1: Incendi danesi 1980-2002: valori standardizzati e valori originari

Per evitare lo smarrimento del significato economico dopo le trasformazioni, abbiamo riportato nella tabella 4.1 alcune traslazioni dei valori standardizzati rispetto ai sinistri effettivi.

4.1.2 Coefficiente di correlazione lineare e τ di Kendall

Tipicamente, il coefficiente di correlazione lineare di Pearson è lo strumento impiegato per misurare il legame esistente fra due variabili aleatorie; esso viene definito come

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}$$

ed è tale per cui $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$. La letteratura, tuttavia, ne ha evidenziato alcuni svantaggi, fra i quali sottolineiamo i tre principali, particolarmente rilevanti ai nostri fini:

- è necessario che le varianze siano definite, altrimenti il coefficiente non può essere calcolato; nel nostro caso, ad esempio, possiamo produrne una stima empirica sui sinistri osservabili ma, a livello dei modelli Pareto e GPD, sappiamo che quando $\alpha < 2$, come tipicamente avviene nel ramo incendio, la varianza è infinita (si veda ad esempio la tabella 3.2);
- un'uguaglianza pari a 0 del coefficiente di correlazione implica una piena indipendenza solo nel caso di variabili congiuntamente normali, altrimenti si parlerà genericamente di *incorrelazione*;
- il coefficiente del Pearson non è invariante sotto trasformazioni non lineari strettamente crescenti; nel nostro caso, la standardizzazione attraverso la distribuzione *Frechet unit* modifica quindi il valore del coefficiente di correlazione lineare.

Dal punto di vista operativo, poi, sorge una problematica ancora più forte: *date le distribuzioni marginali e individuato il coefficiente di correlazione lineare, non è sempre possibile determinare un'univoca distribuzione congiunta multivariata*². Ci accorgeremo di questo aspetto quando, nella simulazione delle distribuzioni copula, a fronte della stessa matrice di correlazione in *input*, otterremo differenti strutture di aggregazione, in relazione alla copula scelta (ad esempio, si veda il paragrafo 4.2.1 per un confronto fra la copula gaussiana e la copula *t*).

Il τ di Kendall prima nominato sorge proprio dalla necessità di individuare strumenti per misurare la dipendenza differenti dalla semplice correlazione lineare. Esso si fonda sull'analisi dell'ordinamento dei dati ed ha l'importante vantaggio di dipendere direttamente dalla distribuzione bivariata e non dalle marginali. Può essere interpretato come una misura di concordanza tra coppie di variabili casuali. Per la sua stima, impieghiamo le distribuzioni standardizzate ottenute nel paragrafo 4.1.1, poichè esso è definito a partire da vettori (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) *identicamente distribuiti* e risulta:

$$\tau_{X,Y} = P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0) \quad (4.2)$$

²Clemente (2007)

La lettura è simile a quella del coefficiente di correlazione lineare: se $\tau \rightarrow 1$, X e Y si dicono *comotoniche*, mentre quando $\tau \rightarrow -1$ esse si dicono *contro-monotoniche*.

Una stima non parametrica del τ può essere condotta considerando il segno delle coppie prima introdotte e il loro numero, ed in particolare risulta

$$\tau_{X,Y} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \text{sign}((X_i - X_j)(Y_i - Y_j)) \quad (4.3)$$

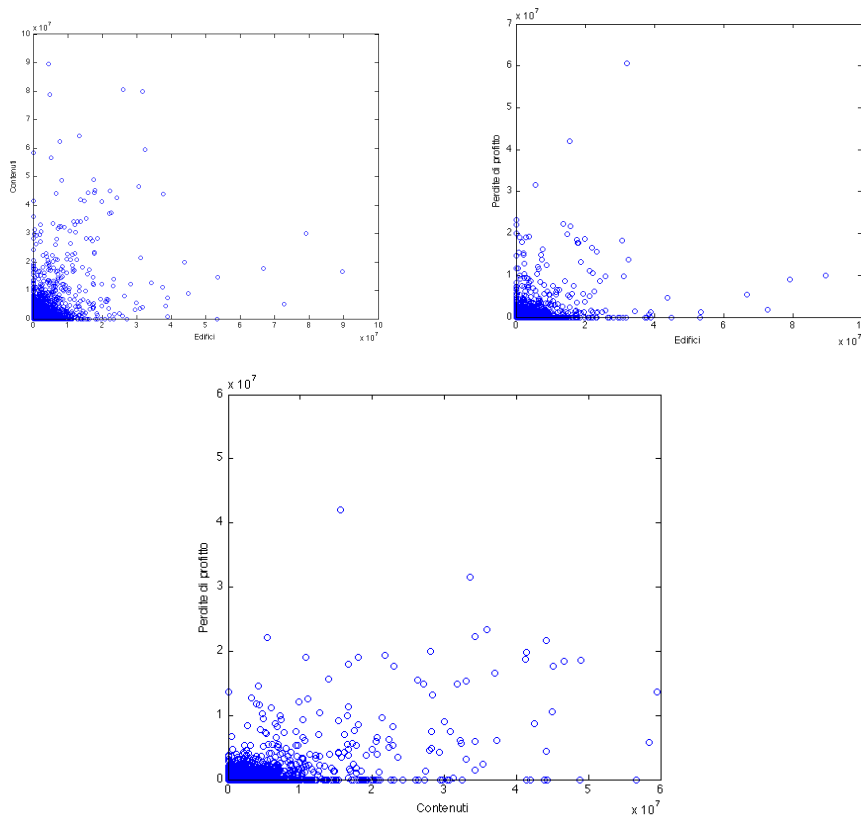


Figura 4.1: Incendi danesi 1980-2002: grafici a dispersione dei rami

Chiariti gli aspetti teorici, spostiamo ora l'attenzione sulla stima empirica della dipendenza, misurata sulle tre variabili di interesse e con i due strumenti introdotti in questo paragrafo. Risultano pratici in questo contesto i grafici a dispersione, come in figura 4.1; uno sguardo a queste figure può dare un'indicazione circa il comportamento reciproco dei rami assicurati, che sembrano positivamente correlati; con questo in mente, commentiamo

i risultati proposti nella tabella 4.2, dove X , Y e Z rappresentano rispettivamente i danni agli edifici, ai contenuti e le perdite di profitto e il pedice FR indica le componenti standardizzate.

Variabili	ρ	τ
X, Y	0.32	-
X, Z	0.34	-
Y, Z	0.58	-
X_{FR}, Y_{FR}	0.21	-0.1406
X_{FR}, Z_{FR}	0.35	-0.0143
Y_{FR}, Z_{FR}	0.46	0.2086

Tabella 4.2: Incendi danesi 1980-2002: valori di ρ e di τ

In termini di coefficiente di correlazione lineare, notiamo subito che tutti e tre i rami presentano correlazioni reciproche superiori a 0.3; tale indicazione, pur con i limiti già menzionati, ci aiuta a comprendere che esiste una certa dipendenza fra le componenti. In particolare, il legame sembra essere più debole nelle coppie che contengono i danni ad edifici e pare particolarmente forte nella coppia contenuti-perdite di profitto.

Quando si passa a considerare lo stesso coefficiente, ma calcolato sulle distribuzioni standardizzate, incontriamo valori differenti e, in particolare, uguali o inferiori; tuttavia il valore di ρ , come detto, non è invariante rispetto a trasformazioni non lineari strettamente crescenti, e dunque nutriamo forti dubbi circa l'attendibilità di questa nuova indicazione di "minore dipendenza".

Ulteriori indicazioni provengono dai valori assunti dal τ di Kendall, che, forse con sorpresa, è positivo soltanto per l'associazione contenuti-perdite di profitto, ad ulteriore riprova che quest'ultima è certamente la combinazione tra i rami con legame più marcatamente evidente. Come si vedrà in seguito, ai fini di un'analisi comunque prudenziale, in vista dell'individuazione del capitale di rischio, non verranno prese comunque in considerazione misure negative di dipendenza³.

³L'assenza del calcolo del τ per le coppie non standardizzate è da ricercare all'interno di quanto detto in precedenza.

4.1.3 Stima della *tail dependence*

In questo paragrafo definiamo il coefficiente che misura la dipendenza di coda e successivamente ne produciamo una stima con riferimento al nostro dataset, e dunque per i tre rami in esame, calcolandone inoltre un intervallo di confidenza.

In generale, fornire una misurazione della *tail dependence* è molto utile poiché consente di dire se e come due variabili aleatorie si “condizionano” quando entrambe assumono valori elevati, vicini all’estremo destro o sinistro del proprio supporto. Si parlerà dunque di dipendenza di coda superiore o inferiore, a seconda della regione (o delle regioni) dove si presentano delle dipendenze.

Detto questo, il coefficiente di dipendenza di coda può allora essere definito come⁴

$$\lambda_U(\mathbf{X}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} P(X > x \mid Y > x) \quad (4.4)$$

per quanto riguarda la coda destra e dove \mathbf{X} rappresenta il vettore bivariato, oppure

$$\lambda_L(\mathbf{X}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} P(X \leq x \mid Y \leq x) \quad (4.5)$$

per la coda sinistra.

Nell’ambito attuariale in genere, e così nel nostro lavoro, sono tipicamente di interesse quei fenomeni che possono presentare dei costi particolarmente elevati, laddove possono esistere fra i rami esercitati delle relazioni “pericolose” per la stabilità dell’impresa. Saremo allora interessati allo studio della coda destra e dunque a produrre una stima per $\lambda_U(\mathbf{X})$.

Proponiamo subito due interessanti proprietà del coefficiente individuato:

- se disponiamo, come nel nostro caso, grazie alle standardizzazioni effettuate, di variabili X e Y identicamente distribuite, varrà allora che

$$\begin{aligned} \lambda_U(X, Y) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(X > x, Y > x)}{P(Y > x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(X > x, Y > x)}{P(X > x)} = \lambda_U(Y, X) \end{aligned}$$

ovvero $\lambda_U(X, Y) = \lambda_U(Y, X) = \lambda_U(\mathbf{X})$;

⁴Rytgaard (2009)

- il coefficiente può essere riscritto come

$$\lambda_U(\mathbf{X}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X > x, Y > x)}{P(Y > x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x^{-1}\mathbf{X} \in A_1)}{P(x^{-1}\mathbf{X} \in A_2)} = \frac{\mu(A_1)}{\mu(A_2)}$$

dove si sono utilizzati gli spazi $A_1 = (1, \infty) \times (1, \infty)$ e $A_2 = R_+ \times (1, \infty)$ e dove $\mu(A_1)$ rappresenta l'intensità dei punti che cadono in A_1 , e similmente $\mu(A_2)$; tale espressione aiuta a comprendere il significato di dipendenza di coda, poiché viene vista in termini di rapporto fra punti appartenenti a determinati spazi (estremi), secondo la nozione di distribuzione condizionata.

Desideriamo ora, come detto, individuare un metodo per stimare tale coefficiente; lo stimatore può essere individuato a partire dalla definizione stessa attraverso una catena di uguaglianze, ovvero

$$\begin{aligned} P(X > x | Y > x) &= \frac{P(X > x, Y > x)}{P(Y > x)} \\ &= \frac{P(x^{-1}\mathbf{X} \in A_1)}{P(x^{-1}\mathbf{X} \in A_2)} \\ &\approx \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{x^{-1}\mathbf{X}_i \in A_1\}}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{x^{-1}\mathbf{X}_i \in A_2\}}} \end{aligned}$$

dove si sono utilizzati gli spazi A_1 e A_2 definiti sopra. Una scrittura compatta dello stimatore è dunque

$$\hat{\lambda}_m = \frac{\sum_{i=1}^n I_{\{m^{-1}\mathbf{X}_i \in A_1\}}}{\sum_{i=1}^n I_{\{m^{-1}\mathbf{X}_i \in A_2\}}} \quad (4.6)$$

dove $m = m_n \nearrow \infty$ e $m/n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

In particolare, Rytgaard (2009) ha discusso la scelta di m , il parametro di cui è funzione lo stimatore di *tail dependence*, che dovrà essere elevato ma che non potrà essere portato a “infinito”. La scelta di m dovrà essere tale per cui l'ordine della distribuzione congiunta sia sufficientemente elevato, per garantire lo studio di una reale dipendenza *sulle code*, ma evitando valori troppo estremi, dove si abbiano pochi dati a disposizione.

Come realizzazione congiunta delle marginali (standardizzate) si è scelto di optare per l'utilizzo della norma delle coppia di variabili, ovvero

$$|\mathbf{X}_i| = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}$$

e la scelta riguardante m sarà allora quella di prendere i quantili elevati di questa nuova variabile, ed in particolare quelli compresi tra il 95% e il 99.5%.

Osservando poi che l'ordine della norma è $\sqrt{2}$ volte quello delle componenti marginali, si giunge infine all'individuazione dell'intervallo per m :

$$m \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{q}_{0.95}(|\mathbf{X}|), \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{q}_{0.995}(|\mathbf{X}|) \right]$$

I valori di m così calcolati sono riportati nella tabella 4.3, per ciascuna

Variabili	Limite inferiore	Limite superiore
X_{FR}, Y_{FR}	24	263
X_{FR}, Z_{FR}	25	270
Y_{FR}, Z_{FR}	23	243

Tabella 4.3: Incendi danesi 1980-2002: valori di m

delle coppie di rami; sarà in funzione di essi che tra poco rappresenteremo la stima della *tail dependence*, allo scopo di individuare quel valore di m che garantisca un buon *trade-off* tra quantile elevato e correttezza della stima.

A tal proposito, diventa ora necessario valutare la stima effettuata costruendo un intervallo di confidenza per $\hat{\lambda}_m$. A tale scopo occorre dimostrare la normalità asintotica dello stimatore, che risulta verificata⁵. Le bande di oscillazione della stima, ad un livello del 95%, risultano

$$\lambda_U(\mathbf{X}) \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot \sqrt{\mu(A_2)^{-1}} \cdot \sqrt{\lambda_U(\mathbf{X})(1 - \lambda_U(\mathbf{X}))}$$

e possono essere approximate attraverso l'utilizzo dello stimatore empirico

$$\hat{\lambda}_m \pm 1.96 \cdot \left(\sum_{i=1}^n I_{\{m-1\} \mathbf{X} \in A_2} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\hat{\lambda}_m(1 - \hat{\lambda}_m)} \quad (4.7)$$

Il risultato di questo processo di stima è visibile nella figura 4.2, dove sono posti a confronto i risultati in funzione di m ; la spezzata blu rappresenta la stima prodotta, le altre due rette i limiti inferiore e superiore al 95%; la scelta pare buona per un valore di m vicino a 100. Possiamo quindi dire che, similmente a quanto avveniva con l'impiego del coefficiente di correlazione lineare o del τ di Kendall, anche sulle code si registra una dipendenza più marcata nella coppia contenuti-perdite di profitto, mentre più deboli, anche se comunque positive, restano le relazioni nelle coppie che contengono la variabile edifici. Nella tabella 4.4 mostriamo i valori di *tail dependence* scelti nei tre casi, sulla base dei grafici presentati.

⁵Per dettagli al riguardo, rimandiamo nuovamente a Rytgaard (2009) e alla letteratura lì citata.

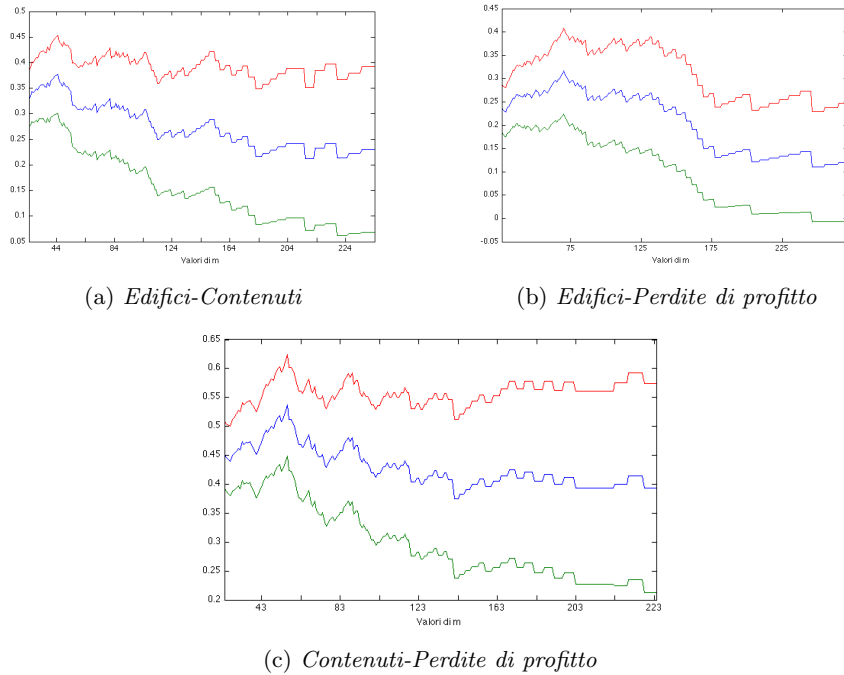


Figura 4.2: Incendi danesi 1980-2002: *tail dependence* e bande di oscillazione in funzione di m

Variabili	<i>Tail dependence</i>
X_{FR}, Y_{FR}	0.28
X_{FR}, Z_{FR}	0.25
Y_{FR}, Z_{FR}	0.44

Tabella 4.4: Incendi danesi 1980-2002: stime della *tail dependence*

4.2 Misurare la dipendenza attraverso le copule

In questo paragrafo illustreremo il significato delle funzioni copula, che si sono diffuse recentemente in ambito attuariale, con lo scopo di misurare meglio la struttura di dipendenza fra variabili aleatorie. In particolare, esse permettono di creare una corrispondenza biunivoca fra le funzioni di ripartizione delle marginali e la distribuzione multivariata, superando così il presentato limite del coefficiente di correlazione lineare.

Tale aspetto cruciale, che guida all'impiego delle copule, è stato evidenziato dal teorema di Sklar (1959), che ha dimostrato che, data una funzione F di ripartizione congiunta di dimensione n , con marginali F_1, F_2, \dots, F_n ,

esiste una copula C tale per cui per ogni x appartenente a \mathbf{R} vale che $F(x) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))^6$; inoltre, se le marginali sono tutte continue, come è nel nostro caso, C è unica.

Con le copule, dunque, la struttura di dipendenza è separata rispetto alle variabili marginali: da marginali uguali si potranno ottenere vettori multivariati differenti a seconda dell'ipotesi di aggregazione formulata, e quindi in relazione alla copula scelta.

Attraverso l'inversione, è poi possibile esprimere la copula in dipendenza della funzione di ripartizione congiunta e delle marginali, ovvero

$$C(u) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))$$

Inoltre, le principali misure di dipendenza, fra cui il τ di Kendall, potranno essere riscritte in funzione della copula stessa.

Procediamo ora con la descrizione delle due tipologie maggiormente diffuse in letteratura. Per ulteriori dettagli sulla teoria delle copule, rimandiamo a Clemente (2007).

4.2.1 Ellittiche: caratteristiche e problematiche

Le copule ellittiche sono una classe di strutture di dipendenza che raccoglie le copule delle distribuzioni ellittiche. Per questa ragione, esse condividono le stesse proprietà di trattabilità della distribuzione normale multivariata, ma consentono allo stesso tempo di modellizzare strutture di aggregazione diverse dalla normale; come vedremo tra poco, infatti, la copula t si presta particolarmente a cogliere dipendenze anche estreme.

Copula Gaussiana

La copula gaussiana corrisponde ad una distribuzione multivariata normale con matrice di correlazione lineare R , che sarà l'unico parametro richiesto in fase di implementazione. Infatti, un qualsiasi vettore multivariato è distribuito normalmente, oltre al caso in cui le marginali siano gaussiane, anche quando la struttura di dipendenza tra queste ultime sia descritta da una copula C tale che

$$C_R^{Ga}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \Phi_n^R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$$

con Φ_n funzione di ripartizione della normale multivariata.

⁶Clemente (2007)

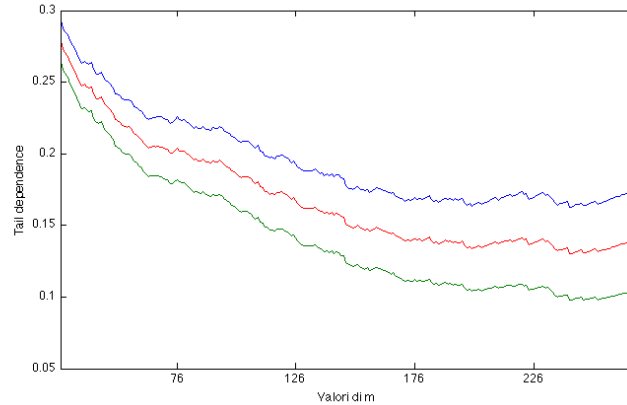


Figura 4.3: Dipendenza di coda e relative bande fra due vettori simulati da una copula gaussiana con $\rho = 0.6$

Come procedimento di simulazione verrà utilizzata la funzione *Matlab* chiamata *copularnd('Gaussian',R,n)*, con n numero di simulazioni, che genera una matrice $n \times 3$, essendo quadrata di ordine 3 la matrice di correlazione lineare fra i rami:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.32 & 0.34 \\ 0.32 & 1 & 0.58 \\ 0.34 & 0.58 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Nel nostro caso, l'analisi delle dipendenze è volta in particolar modo ad analizzare le dipendenze estreme, e in tal caso l'impiego della copula gaussiana va effettuato con attenzione; la teoria delle copule ha evidenziato infatti come essa non si presti ad analizzare le dipendenze di coda. A titolo di esempio, nella figura 4.3 abbiamo rappresentato la stima e le relative bande di oscillazione della *tail dependence*, ottenute generando 100.000 valori da una copula gaussiana con matrice di correlazione 2×2 con $\rho_{12} = 0.6$ e dunque piuttosto elevato; sulle due marginali non è stata operata nessuna standardizzazione, in quanto esse sono già identicamente distribuite; la stima della *tail dependence* è calcolata come visto nel paragrafo 4.1.3. Il risultato evidenzia la debole dipendenza di coda, dato che una scelta consona per m , vicino a 125, è associata ad una *tail dependence* solamente di 0.15; si noti inoltre come, al crescere dell'ordine m , si riduca progressivamente la misura individuata.

Copula t

In analogia con la copula gaussiana, la copula t_ν è associata alla distribuzione multivariata t . La sua formulazione risulta

$$C_{\nu,R}^t(u_1, u_2, \dots, u_n) = \Theta_{\nu,R}^n(t^{-1}(u_1), \dots, t^{-1}(u_n))$$

con Θ distribuzione congiunta, R matrice di correlazione e ν gradi di libertà. L'algoritmo che genera vettori n -dimensionali dalla copula t è implementato in *Matlab* e richiamabile attraverso la funzione `copularnd('t',R,\nu,n)`.

Oltre a R , già presente nella copula gaussiana, è presente un secondo parametro, costituito dal numero dei gradi di libertà, caratteristici della distribuzione t -student; al crescere del loro numero, la copula generata è via via sempre più simile alla copula gaussiana, mentre per valori bassi di questo parametro vengono ad evidenziarsi dipendenze di coda inferiore e superiore e la sua funzione di densità assume una peculiare forma a croce. Come si diceva già in precedenza, dunque, la copula t è adatta a cogliere dipendenze estreme e la ricerca che abbiamo condotto per scegliere i gradi di libertà va proprio in questa direzione.

In particolare, sono stati estratti 100.000 valori da una copula t con matrice di correlazione analoga a quella della relazione 4.8, con numero variabile di gradi di libertà. Su queste estrazioni si è proceduto con il calcolo della stima della dipendenza di coda e delle relative bande, per valori di m sempre dipendenti dalla norma calcolata fra le tre coppie di marginali (quantili di ordine 0.95 e 0.995). Si è quindi scelto quel valore di ν che garantisse il miglior *trade off* fra i valori delle *tail dependence* nelle varie coppie di rami: la scelta è ricaduta su $\nu = 3$. Si vedano la figura 4.4 e la tabella 4.5 per una sintesi di quanto detto.

Variabili standardizzate	<i>Tail dependence</i> empirica fra le coppie di rami	<i>Tail dependence</i> copula t in funzione di ρ	Coefficiente di correlazione lineare
X_{FR}, Y_{FR}	0.28	0.25	$\rho = 0.32$
X_{FR}, Z_{FR}	0.25	0.26	$\rho = 0.34$
Y_{FR}, Z_{FR}	0.44	0.38	$\rho = 0.58$

Tabella 4.5: *Tail dependence* fra le tre coppie di rami a confronto con la dipendenza di coda fra coppie di vettori estratti dalla copula t con matrice di correlazione lineare pari a quella empirica e con $\nu = 3$

4.2.2 Archimediane: la copula di Gumbel

La copula di Gumbel rientra nell'ampia classe delle copule archimediane, che comprende un elevato numero di copule dalle caratteristiche molto diverse tra loro.

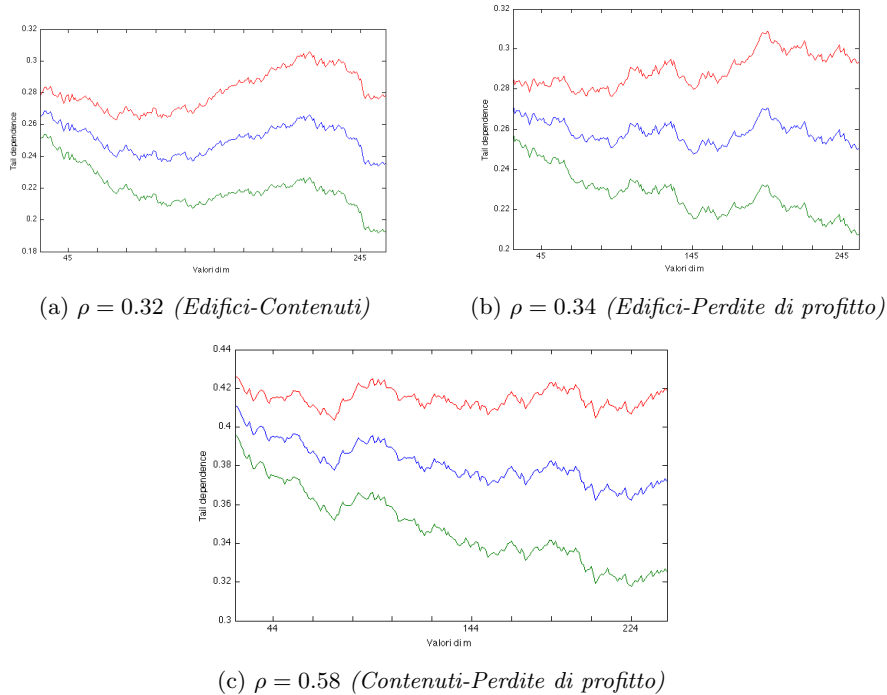


Figura 4.4: Dipendenza di coda e relative bande fra tre coppie di vettori simulati da una copula t con $\nu = 3$ ed R pari alla matrice di correlazione fra i rami edifici, contenuti e perdite di profitto

Il concetto di copula archimediiana si fonda sulla capacità di scindere la funzione di ripartizione congiunta tra le due marginali attraverso l'utilizzo di una funzione $\lambda(t)$ positiva e con t che assume valori in $(0, 1)$:

$$\lambda(F(x_1, x_2)) = \lambda(F_1(x_1)) \cdot \lambda(F_2(x_2))$$

Posto $\varphi(t) = -\ln(\lambda(t))$ è possibile riscrivere tale relazione, in termini di copule, nel modo seguente: $\varphi(C(u, v)) = \varphi(u) + \varphi(v)$; la funzione φ è dunque la funzione generatrice della copula.

All'interno della famiglia delle copule archimediane, risulta di particolare efficacia ai nostri fini la copula di Gumbel, impiegata nella prassi con rischi di tipo catastrofe, ed in generale per modellizzare fenomeni con spiccata dipendenza di coda superiore.

Il suo funzionale è

$$F_\theta(u, v) = \exp \left[- \left(\ln(u)^{-\theta} + \ln(v)^{-\theta} \right) \right]^{1/\theta}$$

ed è definito per $\theta \geq 1$, mentre la funzione generatrice risulta $\varphi_\theta(t) = [-\ln t]^\theta$. Per l'implementazione di tale copula è possibile sfruttare, come in

precedenza, l'algoritmo di *Matlab* (in particolare, *copularnd('Gumbel', θ , n)*, dove θ è esprimibile come $\theta = \frac{1}{1-\tau}$, ovvero è funzione del τ di Kendall⁷). Si noti che il τ richiesto è la misurazione della dipendenza di rango (si parla infatti *rank correlation*) fra *due* rami assicurati; una volta aggregati i primi due rami con il rispettivo valore di τ , sorge quindi il problema dell'individuazione della nuova misura di dipendenza; riprenderemo questa problematica, con riferimento ai nostri dati, all'interno del paragrafo 4.3.2.

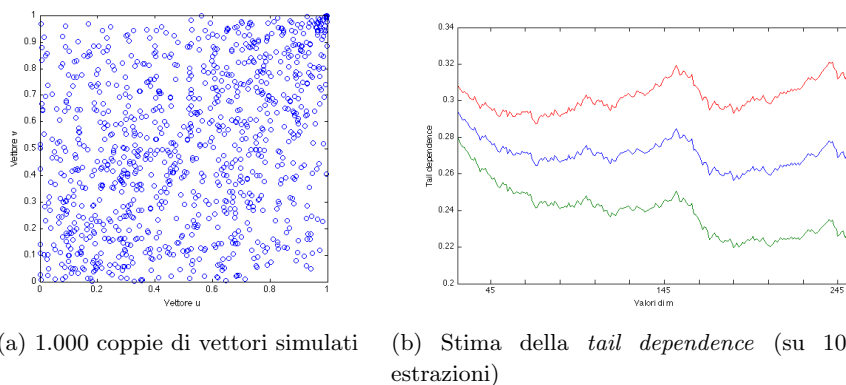


Figura 4.5: Coppie di vettori simulati e stima della dipendenza di coda in una copula di Gumbel con $\tau = 0.2086$

A conclusione di quanto detto, si veda la figura 4.5, dove, con riferimento ad un $\tau = 0.2086$, pari a quello stimato fra i rami contenuti e perdite di profitto, sono riportate:

- 1.000 coppie di vettori simulati da una copula di Gumbel⁸; si può notare l'accentramento sulla coda superiore;
- con riferimento a 100.000 vettori simulati, la stima della dipendenza di coda, che risulta positiva e abbastanza elevata (pari a 0.28), pur se inferiore al livello di riferimento empirico (0.44).

4.3 Aggregazione dei tre rami

All'interno di questa sezione desideriamo sviluppare ulteriormente quanto detto a proposito delle misure di dipendenza e dell'impiego delle copule.

⁷Si noti dunque che è necessario disporre di un valore di $\tau \geq 0$, in quanto, in caso contrario, $\theta < 1$.

⁸il numero di simulazioni è stato mantenuto basso per una migliore facilità di lettura.

In particolare, ci proponiamo di individuare dei modelli probabilistici idonei a rappresentare il costo aggregato in ognuno dei rami presi in esame (edifici, contenuti e perdite di profitto), di calcolare i requisiti di capitale per ogni *LoB* e infine di aggregare questi requisiti effettuando ipotesi di dipendenza differenti, con lo scopo di valutare se e come la riserva di rischio indispensabile per svolgere l'attività assicurativa si modifichi nei vari casi.

4.3.1 Scelta di modelli distributivi opportuni

Nel capitolo 3 sono stati confrontati alcuni modelli descrittivi del costo di un singolo sinistro, all'interno della formulazione che porta a individuare una modellistica per il costo aggregato. Sono state evidenziate le criticità del modello di Pareto generalizzato diffusosi all'interno dell'Extreme Value Theory, così come le problematiche del modello di Pareto con un unico parametro.

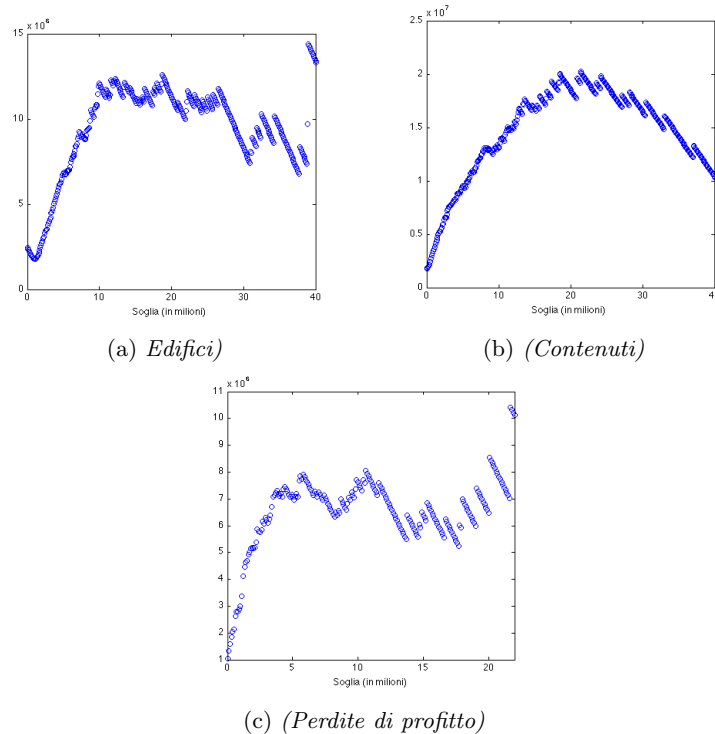


Figura 4.6: Incendi danesi 1998-2002: funzione degli eccessi medi dei tre rami in esame

L'analisi dei tre singoli rami ci riporta al problema della scelta di un modello adatto per descrivere il costo di un singolo sinistro. Data la sua elevata pesantezza di coda, non consideriamo questa volta il modello di

Pareto, mentre proviamo nuovamente ad utilizzare la distribuzione GPD. Ai fini di un confronto con quanto visto in precedenza, utilizzeremo i dati degli ultimi 5 anni di osservazione, mentre le dipendenze, ai fini di una migliore stima e tenendo conto delle problematiche associate ad una *tail dependence* calcolata su poche osservazioni, verranno misurate su tutto il periodo che va dal 1980 al 2002, come presentato nei paragrafi precedenti⁹.

Nella figura 4.6 abbiamo rappresentato le funzioni degli eccessi medi per i tre rami (la più piccola soglia scelta è lo 0). Sappiamo (vedi tabella 2.5) che una distribuzione degli eccessi medi lineare implica che la distribuzione sottostante è di tipo Pareto generalizzato. Osservando le figure, si nota come tale comportamento non sia valido per nessuno dei tre rami esaminati.

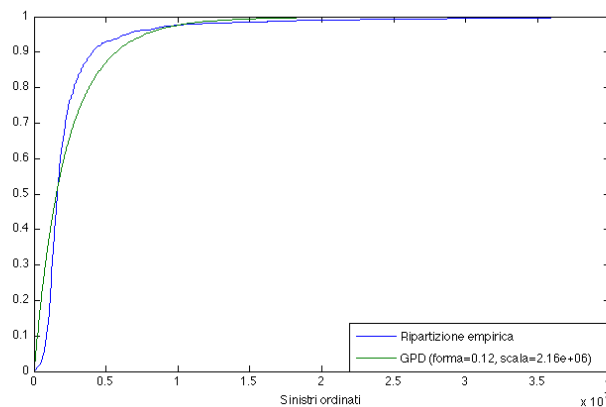


Figura 4.7: Adattamento della distribuzione degli edifici con una GPD

Ad ulteriore riprova, rappresentiamo in figura 4.7 l'adattamento della distribuzione degli edifici effettuato con una Pareto generalizzata, con parametri stimati attraverso la massima verosimiglianza, che non risulta soddisfacente.

Una ragione del non buon adattamento è sicuramente dettata dall'assenza, in questo caso, di una vera e propria "soglia"; i sinistri che sono confluiti nel dataset, infatti, sono tali per cui la somma dei danni ad edifici, contenuti e perdite di profitto sia superiore ad un milione di corone; non ci sono invece dei collegamenti circa il valore assunto dal danno in ciascuna componente, tanto è vero che, soprattutto nelle perdite di profitto, molti valori sono nulli. L'assenza di soglie fa sì che venga meno quella proprietà caratteristica della

⁹Si è peraltro controllata la stabilità del coefficiente di correlazione lineare e del τ di Kendall lungo tutto l'arco temporale.

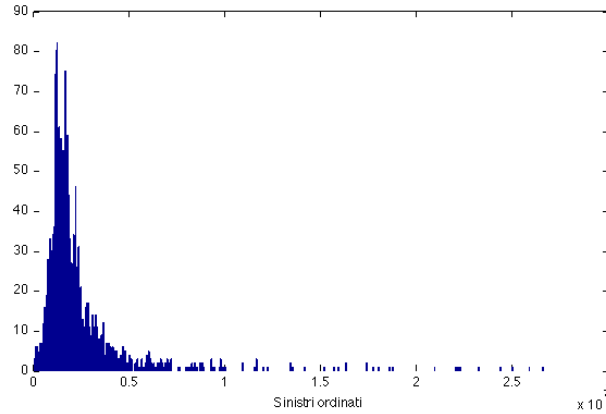


Figura 4.8: Incendi danesi 1998-2002: istogramma dei danni agli edifici

Pareto generalizzata di cogliere i *Peaks over Threshold*, che, per altro, si è vista valere solo alzando in modo abbastanza consistente il livello di u .

Si è scelto allora di utilizzare il modello lognormale, che, già nel capitolo 3, aveva rappresentato un potente modello di adattamento ai dati; qui, ancora meglio che in precedenza, è la stessa distribuzione empirica dei sinistri che presenta quella forma caratteristica del modello lognormale (per un esempio, si veda la figura 4.8, dove è rappresentata la funzione di densità del ramo edifici, fra 0 e 20 milioni per semplicità di lettura).

Nella tabella 4.6 sono riportati i parametri utilizzati, calcolati attraverso il metodo dei momenti, che garantisce l'uguaglianza tra media e varianza empiriche e del modello lognormale, e dunque la correttezza del coefficiente di variazione; un controllo sull'asimmetria ha mostrato che essa è in linea con quella empirica nel ramo edifici, mentre è sovrastimata negli altri due casi. In generale, riteniamo decisamente soddisfacente l'adattamento ottenuto, che è stato verificato anche con opportune rappresentazioni grafiche.

Si è scelto quindi di procedere con l'utilizzo della distribuzione lognormale, mentre per la distribuzione del numero degli eventi, nonostante quanto detto nel paragrafo 2.1 a proposito della convergenza verso la distribuzione

Ramo	Parametri <i>Lognormale</i>
Edifici	$\mu = 14.14, \sigma = 1.08$
Contenuti	$\mu = 13.32, \sigma = 1.47$
Perdite di profitto	$\mu = 12.75, \sigma = 1.48$

Tabella 4.6: Incendi danesi 1998-2002: parametri della lognormale per i tre rami

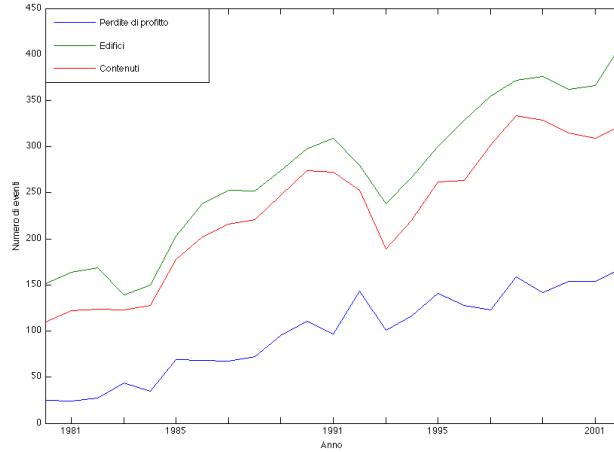


Figura 4.9: Incendi danesi 1980-2002: numero di eventi suddivisi per anno di accadimento e per ramo

di Poisson, si è optato per la distribuzione binomiale negativa, come nel capitolo 3, con un numero di sinistri attesi determinato in base all'andamento degli ultimi cinque anni osservati¹⁰; sono stati scelti (vedi figura 4.9)

$$n_{\text{edifici}} = 380$$

$$n_{\text{contenuti}} = 320$$

$$n_{\text{perdite di profitto}} = 160$$

Per la volatilità del fattore di disturbo, stante la difficoltà di fornirne una stima, si è optato ancora una volta per la misura proposta in Savelli e Clemente (2009c), opportunamente elevata (si veda il paragrafo 3.2.4), ottenendo $\sigma_{\tilde{q}} = 0.12$ ($h = 70$).

Sono state allora effettuate 100.000 simulazioni da una distribuzione di Poisson di parametro variabile in funzione del ramo, sommando, sulla base del valore estratto, delle distribuzioni lognormali i.i.d. come definite in precedenza, secondo la logica di un processo di Poisson composto puro

$$\tilde{X} = \sum_{i=1}^{\tilde{K}} \tilde{Z}_i$$

¹⁰Con riferimento al mancato impiego della distribuzione di Poisson, si vedano le motivazioni all'interno dei commenti svolti nel paragrafo 3.2.

e avendo cura che i momenti del costo aggregato così calcolato coincidessero con i momenti teorici.

Per tutte e tre le distribuzioni si è poi proceduto al calcolo della distribuzione della riserva di rischio su un orizzonte annuale, attraverso la relazione

$$\tilde{U} = (1 + \lambda) \cdot E(\tilde{X}) - \tilde{X} \quad (4.9)$$

avendo ipotizzato che non vi sia un capitale iniziale accantonato e che i premi puri o di rischio coincidano con il valore atteso della variabile di costo aggregato, ovvero

$$P = E(\tilde{X}) = n \cdot m$$

dove n ed m rappresentano rispettivamente il valore atteso del numero di sinistri e il costo medio di un singolo sinistro. Il parametro λ sta invece ad indicare il caricamento di sicurezza applicato.

Per l'individuazione di tale caricamento, si veda la figura 1.3 che mostra i principali indicatori tecnici con riferimento al ramo incendio, per il mercato italiano negli ultimi 10 anni. Il caricamento di sicurezza può essere inteso come il complemento a 1 del *Combined Ratio*, in quanto risulta il margine di guadagno tecnico che resta alla compagnia. Negli ultimi 10 anni, tale margine è risultato del 13% medio, sui premi di tariffa B . Poichè a noi interessa un coefficiente da applicare ai premi di rischio, potremo utilizzare un coefficiente dell'8%, come già nel capitolo 3.

Per l'individuazione dei premi di tariffa, necessari per il calcolo del requisito di capitale relativo, utilizziamo un valore di c pari a 0.3, ottenuto osservando il comportamento, visibile nella stessa figura prima citata, dell'*Expense Ratio*¹¹.

A questo punto, possiamo individuare il capitale di rischio su un orizzonte di 1 anno, ad un livello di confidenza del 99.5% e con una misura di tipo *VaR* in due modi alternativi:

$$U_r = \tilde{X}_{0.995} - (1 + \lambda) \cdot E(\tilde{X})$$

$$U_r = -\tilde{U}_{0.005}$$

Tale requisito verrà poi rapportato ai premi di tariffa, per consentire, ora, il confronto tra i vari rami e, più avanti, tra le diverse ipotesi di aggregazione formulate.

¹¹Sottolineamo che, sia per il caricamento di sicurezza che per quello riferito alle spese, non abbiamo ragioni valide per operare una differenziazione fra i tre sottorami.

I requisiti così calcolati sono riportati nella tabella 4.7, insieme con i principali momenti del costo aggregato¹². In base ai valori ottenuti possono essere svolte alcune analisi. In particolare, il requisito relativo cresce passando dagli edifici ai contenuti e dai contenuti alle perdite di profitto; il motivo sta proprio nei valori assunti dai principali momenti e indicatori del costo aggregato. La distribuzione degli edifici, infatti, presenta un'asimmetria molto meno marcata, grazie soprattutto alla maggiore numerosità dei sinistri attesi, ma anche ad un'ipotesi di partenza sulla distribuzione del singolo sinistro che la rendeva meno asimmetrica¹³. Questo si ripercuote sul valore per il quale, una volta presa la media, bisogna moltiplicare la standard deviation per ottenere il $VaR_{0.995}$; un valore di 2.58 presupporrebbe una distribuzione simmetrica, ma nella nostra situazione vi sono soltanto valori superiori a 2.8, che consentono di cogliere la particolarità e la rischiosità dei rami assicurati.

	Edifici	Contenuti	Perdite di profitto
n	380	320	160
$E(\tilde{X})$	940	579	161
$\sigma(\tilde{X})$	141	117	43
CoV	15.0%	20.2%	26.8%
$\gamma(\tilde{X})$	0.29	0.87	1.45
$\frac{VaR_{0.995}-E(\tilde{X})}{\sigma(\tilde{X})}$	2.84	3.30	3.64
$\frac{VaR_{0.995}-(1+\lambda)E(\tilde{X})}{B}$	22.5%	38.2%	58.1%

Tabella 4.7: Momenti del costo aggregato e requisiti di capitale per i tre rami

Ad ulteriore riprova, i coefficienti di variazione del costo aggregato sono particolarmente elevati in tutte e tre le componenti e mai inferiori al 15%¹⁴.

4.3.2 Ipotesi di dipendenza a confronto

Dopo aver individuato i tre requisiti di capitale *stand alone*, procediamo ora con la formulazione di una serie di ipotesi di dipendenza alternative, che ci porteranno ad individuare requisiti di capitale aggregati differenti. Per

¹²Laddove si tratti di valori monetari, essi sono espressi in milioni.

¹³Per la distribuzione lognormale, infatti, vale che $\gamma(\tilde{X}) \propto \sigma$.

¹⁴Per un confronto sui valori, si veda Savelli e Clemente (2009c), dove sono riportati alcuni modelli simulativi diversificati per ramo assicurato, basati su dati del mercato italiano.

migliorare la lettura, procediamo presentando prima le varie scelte di dipendenza, lasciando all'ultima parte i valori numerici riferiti ai momenti delle distribuzioni aggregate e ai requisiti individuati. Per brevità, indicheremo con 1, 2 e 3 rispettivamente i rami edifici, contenuti e perdite di profitto.

Un primo semplice approccio è quello di ipotizzare l'*indipendenza* fra i tre rami assicurati; tale soluzione verrà presentata per un confronto con gli altri requisiti, ma sappiamo già che essa non è realistica, in quanto nel nostro dataset esistono dipendenze, anche di coda, fra le componenti.

La distribuzione congiunta in ipotesi di indipendenza è data da

$$\tilde{X}_{Ind} = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \tilde{X}_3$$

e su questa possiamo calcolare il *Risk-Based Capital (RBC)* come

$$RBC_{Ind} = \frac{\tilde{X}_{Ind,0.995} - (1 + \lambda) \cdot E(\tilde{X}_{Ind})}{B} \quad (4.10)$$

dove ora B è dato dalla somma dei premi di tariffa incassati nei singoli rami, ovvero è pari alla somma dei premi utilizzati in precedenza, e dove la media della nuova variabile, poichè quest'ultima è stata costruita come somma dei costi aggregati dei singoli rami, coincide con la somma delle medie dei costi aggregati sui singoli rami.

Una seconda ipotesi formulabile è quella impiegata da Solvency II per costruire il requisito aggregato fra i vari rami assicurati, ovvero è data dall'aggregazione mediante una matrice di *correlazione lineare*; questa ipotesi, ovviamente, si porta dietro tutti i problemi già sottolineati nel paragrafo 4.1.2 a proposito del coefficiente di correlazione lineare ρ , ma, nella logica di Solvency, è un tentativo mirato ad aggregare requisiti di capitale individuati con una *Standard Formula* su ogni singolo ramo.

Chiamati CC_1 , CC_2 e CC_3 i c.d. *capital charges* per i tre rami, intesi come

$$CC_i = \tilde{X}_{i,0.995} - E(\tilde{X}_i) \quad (4.11)$$

il requisito aggregato è dato da¹⁵

$$RBC_{Corr} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \cdot Corr_{i,j} \cdot CC_i \cdot CC_j} - \lambda \sum_{i=1}^3 P_i \quad (4.12)$$

Con lo scopo di descrivere meglio la dipendenza, facciamo ora riferimento alle copule, che consentono, dati pochi parametri di input (principalmente

¹⁵Savelli e Clemente (2009a)

la matrice di correlazione lineare o il τ di Kendall, a seconda della tipologia) di descrivere la struttura di dipendenza delle marginali.

Per la *copula gaussiana*, utilizziamo la formula di *Matlab* menzionata nel paragrafo 4.2.1, che genera tre distribuzioni con correlazione reciproca data dalla matrice di input R . A questo punto, le tre variabili di costo aggregato \tilde{X}_1 , \tilde{X}_2 e \tilde{X}_3 vengono ricalcolate come inversa della copula simulata, ovvero si individua il percentile delle tre distribuzioni di costo con ordine dato dalla colonna della copula corrispondente al ramo in esame. La somma delle nuove \tilde{X}_1^* , \tilde{X}_2^* e \tilde{X}_3^* costituisce la variabile di costo aggregato $\tilde{X}_{Gaussiana}$, ovvero il modello di costo costruito aggregando i tre rami sotto l'ipotesi che la loro dipendenza sia normale multivariata. Il calcolo del RBC , in analogia con quanto visto nella situazione di indipendenza, risulterà

$$RBC_{Gaussiana} = \frac{\tilde{X}_{Gaussiana,0.995} - (1 + \lambda) \cdot E(\tilde{X}_{Gaussiana})}{B} \quad (4.13)$$

L'altra copula ellittica presentata, la *copula t*, ha un meccanismo di simulazione molto simile anche se, come detto, compare la problematica relativa alla scelta del numero di gradi di libertà. Tuttavia questo problema è stato già affrontato nel paragrafo 4.2.1, dove si è sottolineato che una scelta ottimale sembra essere quella di utilizzare quel valore dei *g.d.l.* che avvicina la *tail dependence* calcolata fra le marginali estratte dalla copula t a quella empirica e, in questo senso, la decisione è stata presa in favore di $\nu = 3$. In analogia con i casi precedenti, poi, determiniamo il capitale richiesto in questa ipotesi di aggregazione come

$$RBC_t = \frac{\tilde{X}_{t,0.995} - (1 + \lambda) \cdot E(\tilde{X}_t)}{B} \quad (4.14)$$

Il meccanismo è simile anche per le copule archimediane e in particolare per la selezionata *copula di Gumbel*, ma esiste la differenza sostanziale per cui l'aggregazione avviene combinando due rami alla volta, sulla base del rispettivo τ di Kendall. Questo significa che, per la prima aggregazione, possiamo utilizzare il τ di Kendall non parametrico individuato in base all'equazione 4.3 mentre, per la seconda, subentra il problema della scelta del nuovo valore di τ . Possiamo individuare due soluzioni al riguardo:

- trovata $Y_{12} = Y_1 + Y_2$, con Y_i variabili iniziali (realizzazione empiriche dei tre rami), il coefficiente di correlazione lineare può essere espresso, scegliendo ad esempio l'aggregazione 12 + 3, come

$$\rho_{12,3} = \frac{\sigma^2(Y_{12} + Y_3) - \sigma^2(Y_{12}) - \sigma^2(Y_3)}{2 \cdot \sigma(Y_{12}) \cdot \sigma(Y_3)}$$

e si tratterà di calcolare il τ di Kendall associato, ipotizzando una dipendenza multivariata di tipo normale, attraverso la funzione *copulastat*('Gaussian', ρ)¹⁶;

- trovata $X_{FR,12} = X_{FR_1} + X_{FR_2}$, ovvero individuando la variabile aggregata come risultato della somma delle componenti standardizzate, si può poi applicare la formula 4.3 dove sia $X = X_{FR,12}$ e $Y = X_{FR,3}$.

Ordine	$\tau = f(\rho)$	τ non parametrico
A	0.3872	0.1480
B	0.3048	0.0777
C	0.2321	-0.1092

Tabella 4.8: Calcolo del τ di Kendall parametrico e non parametrico in funzione dell'ordine di aggregazione (A =edifici-contenuti e perdite di profitto, B =edifici-perdite di profitto e contenuti, C =contenuti-perdite di profitto ed edifici)

I risultati ottenuti variano in modo considerevole a seconda della scelta effettuata; si consideri a tal proposito la tabella 4.8, dove sono confrontati i risultati direttamente sul valore di τ , a seconda che sia calcolato con la funzione *copulastat*('Gaussian', ρ), con ρ trovato grazie alla formula della varianza prima presentata, oppure in modo non parametrico. Abbiamo utilizzato le seguenti notazioni in merito all'ordine di aggregazione:

A = edifici-contenuti e perdite di profitto

B = edifici-perdite di profitto e contenuti

C = contenuti-perdite di profitto ed edifici

È bene sottolineare che l'ordinamento non varia, mentre cambia in modo consistente l'intensità della dipendenza trovata; tali differenze avranno ovvie ripercussioni sull'ammontare di capitale richiesto e sui momenti della distribuzione di costo aggregato, sui quali torneremo fra poco. In proposito, il capitale richiesto ha la stessa formulazione vista in precedenza e si ricava sulla distribuzione aggregata come

$$RBC_{Gumbel} = \frac{\tilde{X}_{Gumbel,0.995} - (1 + \lambda) \cdot E(\tilde{X}_{Gumbel})}{B} \quad (4.15)$$

¹⁶Savelli e Clemente (2009a)

Possiamo ora passare a commentare i risultati ottenuti in relazione alle diverse ipotesi di dipendenza formulate; si veda in proposito la tabella 4.9 dove sono riportati i principali momenti e indicatori delle varie distribuzioni ottenute; vengono presentati i risultati ottenuti con la copula di Gumbel nel caso in cui la seconda aggregazione avvenga in modo parametrico, attraverso la trasformazione del coefficiente di correlazione lineare, mentre ritorneremo fra poco sulla tematica del calcolo svolto con il metodo non parametrico¹⁷.

Un primo commento riguarda il significato generale implicito in tutte queste ipotesi: grazie all'effetto di diversificazione, i coefficienti di variazione e gli indici di asimmetria sono mediamente più contenuti rispetto alla situazione nella quale i rami venivano considerati singolarmente e quindi la rischiosità relativa si è ridotta rispetto alla situazione precedente (vedi tabella 4.7, dove si noti che l'unica anomalia in questo senso è rappresentata dall'asimmetria del ramo edifici.).

	Indip.	Copula gaussiana	Copula $t (\nu = 3)$	Gumbel A	Gumbel B	Gumbel C
$E(\tilde{X})$	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68
$\sigma(\tilde{X})$	0.19	0.24	0.24	0.21	0.23	0.23
CoV	11.2%	14.1%	14.0%	12.6%	13.6%	14.0%
$\gamma(\tilde{X})$	0.35	0.47	0.57	0.55	0.70	0.83

Tabella 4.9: Incendi danesi 1998-2002: momenti della distribuzione di costo aggregato in funzione dell'ipotesi di aggregazione (A =edifici-contenuti e perdite di profitto, B =edifici-perdite di profitto e contenuti, C =contenuti-perdite di profitto ed edifici)

Si osserva inoltre una sostanziale stabilità del coefficiente di variazione; la formulazione dell'ipotesi di indipendenza o l'utilizzo delle varie copule preserva infatti il valore atteso, mentre la volatilità aumenta passando dalla situazione di indipendenza alle varie ipotesi di aggregazione, ma il rapporto con la media non ne esce particolarmente penalizzato.

Anche il *range* dell'asimmetria risulta ridotto, anche se qui le differenze rimangono sostanziali: a fronte di una situazione con bassa asimmetria (caso dell'indipendenza), negli altri casi l'asimmetria assume valori considerevoli e tutto sommato piuttosto simili, che crescono passando dalla copula gaussiana alle copule archimedee; l'unico valore sensibilmente più elevato è lo 0.83 che si realizza con la copula di Gumbel aggregando prima i rami contenuti e perdite di profitto e poi il ramo edifici; la ragione è piuttosto semplice:

¹⁷Laddove si tratti di valori monetari, essi sono espressi in miliardi di corone.

negli altri casi i valori di τ riferiti alla prima aggregazione sono nulli, mentre in questa situazione la prima aggregazione avviene con un $\tau = 0.2086$, che, abbiamo visto (figura 4.5), descrive discretamente bene la *tail dependence* empirica, e la seconda avviene con un $\tau = 0.23$, molto vicino al precedente e che quindi sovrastima (in modo leggero) la dipendenza di coda (anche se non è possibile calcolare quest'ultima in modo rigoroso, ricordiamo che le dipendenze di coda fra contenuti ed edifici e fra perdite di profitto ed edifici sono molto simili, rispettivamente 0.28 e 0.25)¹⁸.

Ad ulteriore riprova della differenza tra la situazione di indipendenza e quest'ultimo caso, si consideri la figura 4.10, dove si nota la maggior asimmetria ottenuta con la copula di Gumbel, che possiede una distribuzione maggiormente accentrata sulla media e con code più spesse; non a caso i valori della curtosi sono 3.6 (indipendenza) e 5.4 (copula di Gumbel).

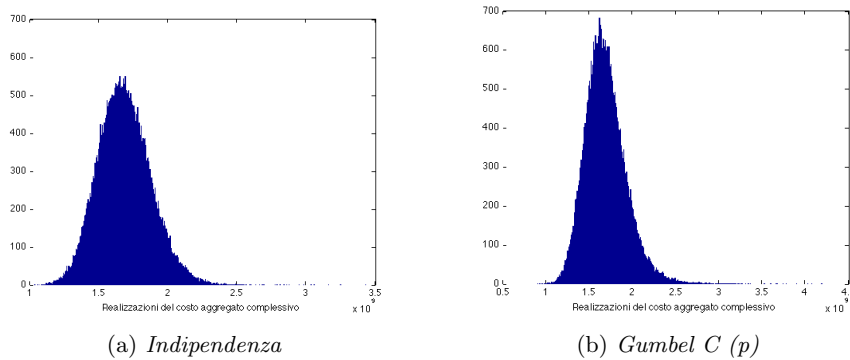


Figura 4.10: Due istogrammi del costo aggregato complessivo a confronto

Arriviamo infine a presentare i risultati ottenuti in sede di determinazione del capitale richiesto; i valori sono riportati nella figura 4.11.

La situazione in cui il capitale richiesto è minore è ovviamente quella di indipendenza; tale ipotesi, dopo quanto detto nel presente capitolo, è ovviamente fuorviante e la misura ottenuta è posta sul grafico a solo titolo di confronto.

Adottando la copula di Gumbel, i risultati risultano piuttosto sensibili all'ordinamento; la spiegazione va ricercata all'interno dei commenti già

¹⁸Come già detto nel paragrafo 4.2.2, è necessario disporre di un $\tau \geq 0$ nel caso della copula di Gumbel, motivo per il quale abbiamo portato a 0 i valori negativi stimati; la scelta, oltre che dettata dall'algoritmo stesso di estrazione, è di buon senso, nel senso che va in una direzione di prudenzialità sul requisito di capitale.

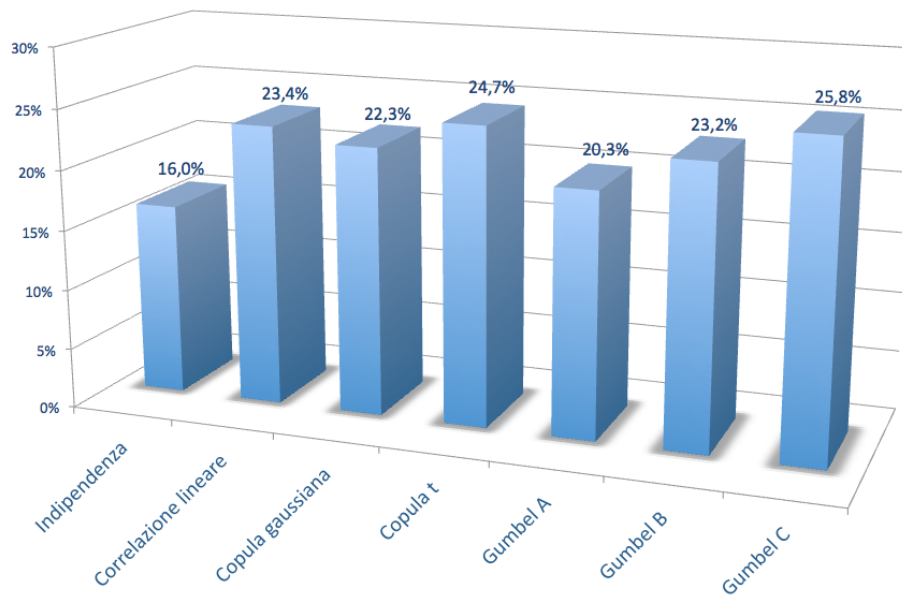


Figura 4.11: Incendi danesi 1998-2002: *RCB ratios* in funzione dell'ipotesi di aggregazione (*A* =edifici-contenuti e perdite di profitto, *B* =edifici-perdite di profitto e contenuti, *C* =contenuti-perdite di profitto ed edifici)

svolti, ed in particolare nei valori delle misure di concordanza e dei momenti, proposti poco fa.

I requisiti risultano, nel complesso, abbastanza simili nei casi di correlazione lineare, copula gaussiana e copula di Gumbel con seconda aggregazione di tipo parametrico, con differenze non relevantissime dal punto di vista relativo.

Tuttavia, per quanto detto all'interno del paragrafo 4.2 sul modo in cui le varie copule siano in grado di misurare con efficacia la nostra *tail dependence* empirica, la scelta ritenuta più affidabile per il requisito aggregato è quella di osservare i risultati forniti dalla copula *t* e dalla copula di Gumbel, con ordine di aggregazione *C* (con seconda aggregazione di tipo parametrico), pur se con le limitazioni già accennate circa la misura di *tail dependence* relativa alla seconda aggregazione e all'abbinato significato di $\rho_{23,1}$. Non a caso, queste due situazioni sono quelle il cui risultato è più vicino al *benchmark* rappresentato dal valore del 25.7%, ottenuto nel capitolo 3 adottando, come qui, un processo stocastico con distribuzioni binomiale negativa (numero) e lognormale a due parametri (importo) e operando sull'intero ammontare dei sinistri, il quale esprime in modo perfetto le relazioni di dipendenza fra i 3 diversi rami.

Dati (periodo: 1998-2002)	Ipotesi di aggregazione	Requisito di capitale
Sinistri complessivi		25.7%
Sinistri suddivisi per ramo	Correlazione lineare	23.4%
Sinistri suddivisi per ramo	Copula t ($\nu = 3$)	24.7%
Sinistri suddivisi per ramo	Copula di Gumbel (C)	25.8%

Tabella 4.10: Incendi danesi 1998-2002: sintesi dei risultati sugli *RBC ratios* derivanti da ipotesi di aggregazione alternative (aggregazione con ordine C: contenuti e perdite di profitto, poi aggregazione con ramo edifici)

Vale inoltre la pena sottolineare che, da questa analisi, non emergono particolarmente le temute problematiche relative all'aggregazione mediante la matrice di correlazione lineare, secondo l'approccio di Solvency II, nonostante il requisito risultante sia comunque inferiore a quello preso come riferimento.

Sono stati calcolati anche i valori dei requisiti individuati adottando la copula di Gumbel con seconda aggregazione di tipo non parametrico, inferiori rispetto a quelli ottenuti trasformando il coefficiente di correlazione lineare; per i diversi ordini di aggregazione *A*, *B* e *C*, sono infatti risultati rispettivamente il 18.2%, il 19.2% e il 17.8% dei premi di tariffa.

I risultati più significativi sono infine sintetizzati nella tabella 4.10, insieme con il risultato ottenuto nel capitolo 3 adottando una distribuzione lognormale per adattare l'intera distribuzione, dove si era operato sull'ammontare complessivo per ogni singolo sinistro, perfettamente espressivo, lo sottolineiamo ancora una volta, della struttura di dipendenza esistente fra i rami.

	Indip.	Copula gaussiana	Copula t ($\nu = 3$)	Gumbel A	Gumbel B	Gumbel C
$E(\tilde{X})$	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93
$\sigma(\tilde{X})$	0.18	0.23	0.23	0.21	0.22	0.23
CoV	9.4%	11.8%	11.9%	10.8%	11.5%	12.1%
$\gamma(\tilde{X})$	0.95	0.91	1.20	1.33	1.35	2.19

Tabella 4.11: Incendi danesi 1980-2002: momenti della distribuzione di costo aggregato in funzione dell'ipotesi di aggregazione (*A* =edifici-contenuti e perdite di profitto, *B* =edifici-perdite di profitto e contenuti, *C* =contenuti-perdite di profitto ed edifici)

Concludendo, proponiamo una possibile situazione alternativa, che riguarda il caso in cui si costruiscano dei modelli stocastici per i tre rami utilizzando:

- una distribuzione di Poisson pura per il numero atteso dei sinistri, in sostituzione della binomiale negativa;
- una distribuzione lognormale a due parametri, calibrati in base ai sinistri del periodo 1980-2002.

Entrambe le modifiche apportate vanno nella direzione di una riduzione del requisito relativo, dal momento che:

- la distribuzione di Poisson suppone che la varianza del numero dei sinistri sia pari al valore atteso, e non superiore;
- i sinistri presentano un danno medio decrescente nel tempo (vedi figura 2.12) e dunque allargando la finestra temporale considerata si ottiene un requisito assoluto superiore, che risulta però inferiore in termini relativi.

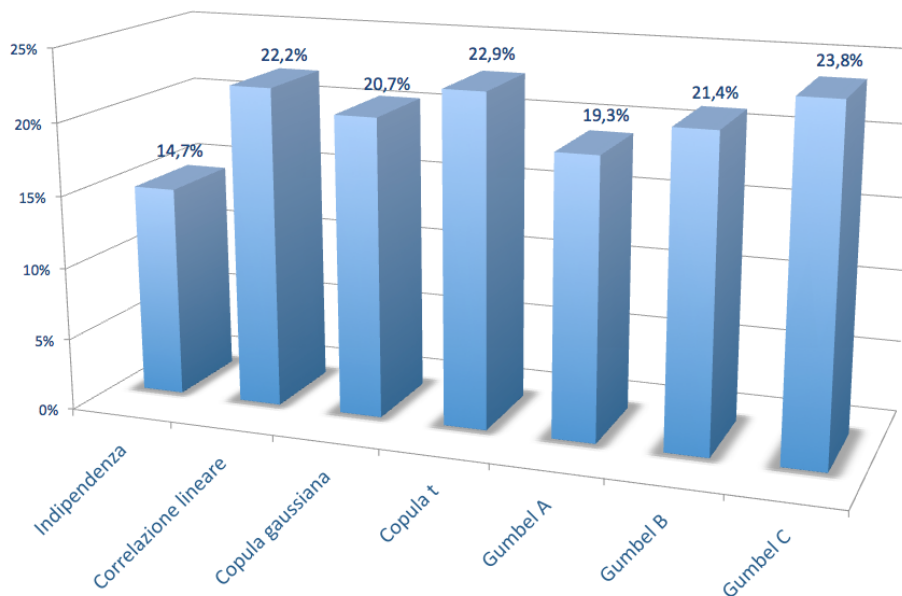


Figura 4.12: Incendi danesi 1980-2002: *RCB ratios* in funzione dell'ipotesi di aggregazione (*A* =edifici-contenuti e perdite di profitto, *B* =edifici-perdite di profitto e contenuti, *C* =contenuti-perdite di profitto ed edifici)

Nella tabella 4.11 si possono osservare i risultati numerici collegati a quanto appena detto. Si osserva un aumento nel valore atteso, mentre la standard deviation si aggira attorno agli stessi valori osservati in precedenza (tabella 4.9); la motivazione si rintraccia osservando che la media quadratica

dei sinistri considerati è superiore, ma che non vi è fattore di disturbo¹⁹. La conseguenza è che la volatilità relativa, espressa dal coefficiente di variazione, si è ridotta. L'aumento dell'asimmetria, che si realizza nonostante l'utilizzo di una Poisson pura, è invece da ricercare nella presenza di alcuni sinistri particolarmente rilevanti avvenuti nei primi anni (vedi figura 1.8), che determinano un elevato valore dei parametri della lognormale, e specialmente di $\sigma \propto \gamma_{\bar{X}}$.

I requisiti di capitale così individuati risultano inferiori in termini percentuali rispetto alla situazione precedente (tra l'1 e il 2% di riduzione), come si nota nella figura 4.12. Ci si allontana così dalla situazione presa come punto di riferimento anche in precedenza (25.7%).

¹⁹Per le relazioni che esprimono la varianza in un processo di Poisson puro si veda Daykin e altri (1984).

Conclusioni

Individuiamo di seguito i principali spunti che emergono a seguito della trattazione svolta, all'interno della quale sono stati individuati dei modelli probabilistici idonei a rappresentare la distribuzione del costo aggregato, ai fini della costruzione di adeguati modelli interni, il cui impiego verrà incentivato all'interno del futuro progetto europeo Solvency II.

Il presente lavoro ha evidenziato innanzi tutto i pregi e le problematiche legati all'utilizzo della distribuzione Pareto generalizzata per descrivere il comportamento della coda delle distribuzioni.

Nel caso dei sinistri danesi considerati, l'adattamento ottenuto sui percentili di ordine elevato adottando una GPD risulta piuttosto buono, per lo meno al di sopra della soglia $u = 10$ milioni, quando si consideri l'intero arco temporale disponibile (1980-2002), sia in termini di risultati grafici sia sfruttando alcune metodologie statistiche come strumento di controllo (Q-Q Plots e funzione degli eccessi medi).

Maggiori problematiche risultano evidenti quando si restringa il numero di dati utilizzati ad un quinquennio (1998-2002), come svolto in alcune sezioni per poter sfruttare l'assenza di trend nel numero degli eventi e nel loro danno medio. In questa situazione la presenza di due parametri può portare a peggioramenti nell'adattamento o a valori anomali nella stima; si è per esempio riscontrato (vedi figura 3.9) che possono presentarsi dei valori del parametro di forma γ negativi, con la conseguenza che il supporto della variabile aleatoria risulta limitato a destra, ipotesi che in ambito attuariale è necessario valutare attentamente.

Inoltre, il modello di Pareto generalizzato non si è rivelato utile, anche utilizzando l'intero dataset disponibile, per modellizzare la distribuzione empirica dei nostri sinistri con la finalità di costruire un processo di Poisson composto per l'individuazione del requisito patrimoniale, in quanto, in questo contesto, non si dispone di una soglia sufficientemente elevata. In questa situazione, infatti, si è osservata una consistente sottostima della rischiosità complessiva, motivata dalla difficoltà di questa distribuzione di adattare una

distribuzione con supporto piuttosto ampio, nonostante questa risulti fra le sue stesse finalità.

Considerando quanto visto sui sinistri presi in esame, sembra dunque che l'impiego del modello di Pareto generalizzato debba essere ristretto al caso della riassicurazione *excess of loss*, sebbene anche in questo campo il suo utilizzo sia condizionato dalla disponibilità del numero di sinistri registrati, che deve essere sufficientemente elevato.

Quest'ultima limitazione non è invece risultata problematica adottando una distribuzione di Pareto monoparametrica, ed è proprio per questa ragione che possono nutrirsi dubbi circa la scelta di utilizzare il più articolato modello GPD, nel quale emerge oltretutto il problema della stima dei parametri.

La distribuzione di Pareto ha infatti il pregio di una stima sufficientemente agevole, grazie all'impiego dello stimatore di Hill, e di un adattamento piuttosto buono, anche se, per quanto visto, necessita, rispetto alla distribuzione GPD, di un più elevato valore della soglia di riferimento (parametro c). L'unico problema sostanziale è dato dal peso elevato che viene in genere dato alla coda destra, che può portare a calcolare dei premi riassicurativi che sovrastimino il rischio effettivo (e dunque non competitivi) e che, soprattutto, rischia di rendere tale modello poco utile ai fini della costruzione di un modello interno.

In quest'ultimo caso, si è adottato il modello di Pareto per descrivere soltanto le c.d. *large losses*, mentre i sinistri fino alla soglia di 40 milioni DKK (poco più di 5 milioni di euro, opportunamente calibrata in base alla struttura del dataset), ovvero le c.d. *attritional losses*, sono stati modellizzati secondo una distribuzione lognormale troncata, ottenendo dei buoni risultati in termini sia di adattamento sia di confronto con i momenti empirici.

In generale, la scelta di dividere i sinistri in due tipologie è parsa la soluzione più efficace, in quanto consente un adattamento migliore su tutto il dominio e permette di poter sfruttare il modello di Pareto su una porzione di supporto più ristretta, con migliori risultati nella stima di α e senza la necessità di dover ricorrere alle complicazioni introdotte dalla distribuzione di Pareto generalizzata.

Per evitare di sovrastimare la possibilità di eventi estremi oltre quanto è lecito attendersi osservando il comportamento della funzione di ripartizione empirica, come avviene con il modello di Pareto, si è proposta una possibile soluzione attraverso l'impiego di un troncamento sulla coda destra, sopra al quale si ritiene nulla la probabilità di accadimento di un sinistro. È chiaro che tale limite superiore va scelto con attenzione, pena la sottostima della

rischiosità complessiva, ma è bene notare anche che, scelto un valore sufficientemente prudenziale per l'estremo destro, tale modello si presta ad essere adottato sia nella costruzione di un modello interno al fine di individuare dei requisiti di capitale, sia a calcolare il prezzo corretto per una riassicurazione *excess of loss*.

Adottando il modello di Pareto non troncato, infatti, sono stati calcolati dei requisiti patrimoniali, che, soprattutto nel caso di portafogli di piccole dimensioni, sembrano sovrastimare la reale rischiosità. Il problema non si è invece posto adottando la distribuzione lognormale troncata per le *attritional losses* e la Pareto troncata per descrivere le *large losses*, dove si sono osservati dei risultati da ritenersi soddisfacenti, poichè espressivi della particolare rischiosità dei rami assicurati ma non eccessivamente prudenziali (requisito patrimoniale pari al 26.5% dei premi di tariffa) rispetto al tradizionale modello lognormale a due parametri, spesso utilizzato in letteratura, ma che non sempre è caratterizzato da un elevato *fitting*, per il quale si è individuato un livello di capitale pari al 25.7% dei premi di tariffa.

I risultati sono stati messi a confronto con i requisiti patrimoniali previsti dalla *Standard Formula* di *Solvency II* negli ultimi due *Quantitative Impact Studies*, dopo aver costruito la serie storica dei *Loss Ratios* per poter valutare anche i risultati degli approcci *Undertaking Specific*, oltre a quelli prefissati di tipo *Market Wide*. Per il dataset utilizzato, si è notato che i modelli interni costruiti consentono un sensibile risparmio in termini di capitale, che si aggira attorno al 5%, salvo nel caso in cui si adotti per le *large losses* una distribuzione di Pareto “tradizionale”, senza troncamenti.

Il buon numero di dati disponibili ha poi consentito di stimare la dipendenza di coda fra le tre coppie di rami presenti nel dataset (edifici, contenuti e perdite di profitto), che è risultata strettamente positiva per tutte e tre le combinazioni. In particolare, al verificarsi di un sinistro di grandi dimensioni su uno dei tre rami, la possibilità che se ne verifichi uno altrettanto grave in uno dei restanti è pari almeno al 25%. Visto l'impatto che tali legami possono avere sulla stabilità dell'impresa, si sono allora verificati i coefficienti di dipendenza di coda associati ad alcune delle copule presenti in letteratura, al fine di individuare quelle più opportune per il presente contesto.

Confrontando i risultati ottenuti attraverso ipotesi di aggregazione differenti è risultato che, per rami estremamente rischiosi come quelli in questione, non solo l'ipotesi di indipendenza determina un profilo di rischio non rispondente alle caratteristiche dell'impresa, ma anche l'ipotesi di correlazione lineare non tiene sufficientemente conto delle dipendenze “pericolose” che si realizzano quando si verifica un evento estremo. In questo contesto, tra le funzioni utilizzate la copula *t*, con un basso numero di gradi di libertà,

e la copula di Gumbel si sono rivelati gli strumenti più efficaci per tenere conto della struttura di dipendenza fra le tre distribuzioni marginali.

Le calibrazioni adottate riguardano, come è stato descritto nei vari capitoli, il rischio di sottoscrizione dei contratti di tipo non vita (*Underwriting Risk Non-Life*, secondo la denominazione di Solvency II) ed in particolare il *Premium Risk*; i modelli presentati costituiscono dunque una possibile via per la costruzione di un *Partial Internal Model*.

Quest'ultimo può essere esteso costruendo una modellistica che fornisca una misurazione efficace, ad esempio, per il *Reserve Risk*, considerato congiuntamente al *Premium Risk* negli ultimi *Quantitative Impact Studies*; si noti al riguardo che la *Standard Formula*, nel tentativo di cogliere le realtà assicurative di imprese e mercati differenti, essendo valida in tutta l'Unione Europea, ipotizza che il costo aggregato generato da queste due componenti di rischio sia distribuito secondo una distribuzione lognormale.

Ulteriori rischi che possono essere via via inclusi ai fini della costruzione di un modello interno completo per il rischio di sottoscrizione di un'assicurazione danni sono il rischio catastrofale e, come si è accennato nella presentazione delle novità introdotte dal *QIS5*, il rischio legato alle opzioni di riscatto delle posizioni assicurate (*Lapse Risk*).

In conclusione, la costruzione svolta ha evidenziato come sia possibile descrivere una particolare realtà attraverso l'impiego di modelli stocastici adeguati, nell'ottica di misurare i rischi che possono insorgere verso la compagnia e che sono legati alla sua solvibilità. Il lavoro ha mostrato quali possano essere le problematiche di questo percorso, con particolare riguardo agli errori di *modello*, *parametro* e *processo*, relativi rispettivamente alla scelta di distribuzioni inadeguate, alla distorsione dei valori dei parametri utilizzati e all'impiego di un numero insufficiente di simulazioni, che non consentirebbe, in particolare, di cogliere il comportamento della coda della distribuzione.

La scelta dei modelli distributivi, la stima dei relativi parametri, il controllo in termini di adattamento, le ipotesi sulle strutture di dipendenza fra i rami assicurati e la verifica dei requisiti di capitale sono tutti aspetti che non è possibile implementare in modo rigido, ma che necessitano di continue verifiche e calibrazioni. Confidiamo di essere riusciti a mostrare come un'attenta analisi di tutti questi elementi possa guidare all'individuazione di un profilo di rischio e di una misura patrimoniale realmente espressivi della complessa realtà sottostante.

Bibliografia

- Ania (2008). L'assicurazione italiana 2007-2008, con appendice statistica. Relazione tecnica, Ania.
- Berz G.; Loster T.; Wirtz T. (2000). Topics 2000: Natural catastrophes - the current position. Relazione tecnica, Munich Re.
- Buhlmann H. (1967). Experience rating and credibility. *ASTIN Bulletin* 4.
- Cea (2009). Cea statistics n° 37, con dataset. Relazione tecnica, Cea.
- Ceiops (2007). Qis 4, technical specifications. Relazione tecnica, Ceiops.
- Ceiops (2010). Qis 5, technical specifications. Relazione tecnica, Ceiops.
- Chiarlo M. (1990). *L'assicurazione danni indiretti da incendio secondo il modello per differenza*. Bozzi.
- Clemente G. (2007). *Gli effetti della correlazione tra i rami assicurativi sul requisito patrimoniale di un'impresa di assicurazione Rami Danni*. Tesi di dottorato, Università La Sapienza, Roma.
- Corradin S. (2002). Economic risk capital and reinsurance: an extreme values theory's application to fire claims of an insurance company. *6th International Congress on IME (Insurance: Mathematics and Economics) (Lisbon)*.
- Daykin C.; Pentikainen T.; Pesonen M. (1984). *Practical risk theory for actuaries*. Chapman & Hall.
- Di Gropello G.; Gionta G. (2004). *Manuale di riassicurazione*. LINT Editoriale.
- Embrechts P.; Kluppelberg C.; Mikosch E. (1997). *Modelling extremal events: for insurance and finance*. Springer.

- Enz R.; Schwarz S. (2009). Natural catastrophes and man-made disasters in 2008. Relazione tecnica, Swiss Re, Sigma n° 2.
- Galey G.; Kuhn M. (2009). Fire insurance. Relazione tecnica, Swiss Re.
- Havning M. (2005). A mixed poisson process from real life. *RESTIN (Reykjavik)*.
- Isvap (2010). Statistiche relative alla gestione dei rami infortuni, malattia, incendio ed elementi naturali, responsabilità civile generale. Relazione tecnica, Isvap, Servizio Studi (Ufficio Statistica).
- Kingman J. (2002). *Poisson processes*. Oxford Clarendon Press.
- McNeil A. (1997). Estimating the tails of loss severity distributions using extreme value theory. *ASTIN Bulletin 27*.
- McNeil A.; Saladin T. (1997). The peaks over thresholds method for estimating high quantiles of loss distributions. *28th International ASTIN colloquium*.
- McNeil A.; Saladin T. (2000). Developing scenarios for future extreme losses using the pot model. *Risk Books, London*.
- Reiss R.; Thomas M. (2007). *Statistical analysis of extreme values. With applications to Insurance, Finance, Hydrology and other fields*. Birkhauser.
- Resnick S. (1997). Discussion of the danish data on large insurance fire losses. *ASTIN Bulletin 27*.
- Rytgaard M. (1990). Estimation in the pareto distribution. *ASTIN Bulletin 20*.
- Rytgaard P. (2009). *Analysis of the Danish fire insurance data*. Tesi di laurea, University of Copenhagen.
- Savelli N. (2002). Solvency and traditional reinsurance for non-life insurance. *6th International Congress on IME (Insurance: Mathematics and Economics) (Lisbon)*.
- Savelli N.; Clemente G. (2009a). Hierarchical structures in the aggregation of premium risk for insurance underwriting. *39th ASTIN Colloquium (Helsinki)*.

- Savelli N.; Clemente G. (2009b). Il progetto solvency 2. *Dispensa di Teoria del Rischio II, UCSC.*
- Savelli N.; Clemente G. (2009c). Modelling aggregate non-life underwriting risk: standard formula vs internal model. *Giornale dell'Istituto Italiano degli attuari.*
- Schmutz M.; Doerr R. (1998). The pareto model in property reinsurance. formulas and applications. Relazione tecnica, Swiss Re.
- Selleri L. (1996). *I rischi catastrofali e ambientali: principi di valutazione e strumenti di gestione.* Guerini e associati.
- Selleri L. (2003). *Impresa di assicurazione e strategie di valore.* Etas.