

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE DI MILANO  
FACOLTÀ DI SCIENZE BANCARIE FINANZIARIE E ASSICURATIVE  
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ATTUARIALI ED ECONOMICHE

# LA VALUTAZIONE DELLA RISERVA SINISTRI: IMPIEGO DI MODELLI LINEARI GENERALIZZATI

TESI DI LAUREA DI ELENA PIZZOCARO

RELATORE. CHIAR.MO PROF. ZAPPA

ANNO ACCADEMICO 2007/2008

---

# SOMMARIO

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. LA RISERVA SINISTRI</b>                              | <b>1</b>  |
| LA COMPETENZA DEI SINISTRI                                 | 4         |
| LA VALUTAZIONE A COSTO ULTIMO DELLA RISERVA SINISTRI       | 6         |
| I PRINCIPI IAS ED IL SOLVENCY II                           | 7         |
| <b>2. METODI DETERMINISTICI</b>                            | <b>11</b> |
| IL DIAGRAMMA DI LEXIS PER LA RAPPRESENTAZIONE DEI SINISTRI | 12        |
| IL TRIANGOLO DI RUN.OFF                                    | 15        |
| METODI GROSSING UP E METODI LINK RATIO                     | 17        |
| IL METODO CHAIN LADDER                                     | 20        |
| VARIANTI AL METODO CHAIN LADDER: INFLAZIONE                | 27        |
| VARIANTI AL METODO CHAIN LADDER: COSTO MEDIO               | 34        |
| IL METODO FISHER-LANGE                                     | 42        |
| IL METODO BORNHUETTER-FERGUSON                             | 45        |
| <b>3. MODELLI LINEARI GENERALIZZATI</b>                    | <b>49</b> |
| INTRODUZIONE AI MODELLI LINEARI GENERALIZZATI              | 49        |
| LA STIMA DEI PARAMETRI                                     | 53        |
| I LEGAMI CANONICI  | 57        |
| L'ALGORITMO DI NEWTON-RAPHSON                              | 59        |
| L'ANALISI DEI RESIDUI                                      | 61        |
| STRUTTURE DI REGRESSIONE PER LA RISERVA SINISTRI           | 63        |
| IL MODELLO POISSON-LOGARITMO PER LE RISERVE                | 64        |
| IL MODELLO GAMMA-LOGARITMO PER LE RISERVE                  | 75        |
| INTERPRETAZIONE DEL CHAIN-LADDER COME GLM                  | 83        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>4. MODELLI STOCASTICI</b>                                       | <b>87</b>  |
| IL METODO BOOTSTRAP PER LA RISERVA SINISTRI                        | 87         |
| INTRODUZIONE AI MODELLI CHAIN LADDER                               | 89         |
| IL MODELLO DI POISSON SOVRADISPERSO                                | 90         |
| IL MODELLO BINOMIALE NEGATIVO E L'APPROSSIMAZIONE NORMALE          | 100        |
| LA CURVA DI HOERL E IL MODELLO DI WRIGHT                           | 103        |
| IL MODELLO DI MACK   | 108        |
| L'ERRORE DI PREVISIONE   | 111        |
| LA RISERVA PER GLI IBNR: IL MUNICH CHAIN LADDER                    | 125        |
| <b>5. MODELLI MULTIVARIATI</b>                                     | <b>133</b> |
| PROPRIETÀ DEL PROCESSO DI STIMA DELLA RISERVA SINISTRI             | 133        |
| TECNICHE DI RICAMPIONAMENTO PER LA STIMA DELL'ERRORE DI PREVISIONE | 136        |
| ALCUNE DEFINIZIONI PER IL CASO MULTIVARIATO                        | 140        |
| IL MODELLO CHAIN LADDER MULTIVARIATO                               | 141        |
| L'ERRORE DI PREVISIONE PER SINGOLI ANNI DI GENERAZIONE             | 144        |
| L'ERRORE DI PREVISIONE PER ANNI DI GENERAZIONE AGGREGATI           | 147        |
| LA STIMA DEI PARAMETRI   | 150        |
| <b>6. LA RISERVA SINISTRI NEL QIS4</b>                             | <b>159</b> |
| LA BEST ESTIMATE LIABILITES  | 159        |
| IL QIS4 BEST ESTIMATE VALUATION TOOL                               | 161        |
| UN'APPLICAZIONE  | 163        |
| CONCLUSIONI  | 173        |
| <br>   |            |
| BIBLIOGRAFIA   | 177        |

---

## 1. LA RISERVA SINISTRI

Le riserve tecniche sono gli accantonamenti che l'Impresa di Assicurazione detiene per fronteggiare gli obblighi tecnici nei confronti dei propri assicurati, *per quanto ragionevolmente prevedibile*<sup>1</sup>. Nell'ambito delle assicurazioni contro i danni, la prassi distingue tra riserva premi e riserva sinistri in base alla finalità di detti accantonamenti.

La costituzione della riserva premi risponde all'esigenza di una corretta gestione del premio incassato dall'assicuratore; la sua valutazione, possibile ad ogni istante di vita di un generico contratto, normalmente si basa su ipotesi di distribuzione uniforme delle spese, di accadimento dei sinistri e di risarcimenti. La legislazione italiana ammette un metodo contratto per contratto, denominato *pro rata temporis*, o, in alternativa e sotto alcune condizioni, un metodo forfettario.

Vogliamo invece concentrarci sulla riserva sinistri, la cui costituzione è giustificata dal processo di liquidazione dei sinistri. Il Codice delle Assicurazioni già citato specifica allo stesso articolo (par. 5) che la riserva sinistri deve essere sufficiente alla copertura sia dei sinistri accaduti nell'esercizio di riferimento o in quelli precedenti e ancora non chiusi, sia delle spese di liquidazione.

Dall'accadimento del sinistro fino alla sua chiusura, ossia il momento che determina la fine degli impegni dell'Impresa di Assicurazione nei suoi confronti, si evolvono infatti fasi distinte, che possono coprire lassi di tempo più o meno estesi, in ragione del ramo, delle caratteristiche della Compagnia, della velocità di liquidazione, delle condizioni contrattuali, nonché della nascita di contenziosi.

---

<sup>1</sup> Art. 37 del D.Lgs. 209/2005: *Codice delle Assicurazioni Private*.

Possiamo riassumere il corso tipico di un sinistro con lo schema seguente, pur tenendo conto di possibili anomalie operative (e.g. ritardo della registrazione rispetto alla denuncia, riapertura di un sinistro chiuso per effetto di contenziosi, ...):

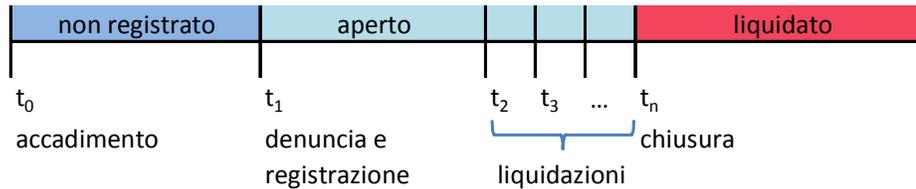


FIGURA 1

Nello schema si evidenziano i tre momenti fondamentali della vita di un sinistro (accadimento, denuncia alla Compagnia e conseguente registrazione, chiusura del sinistro); il numero di liquidazioni è influenzato dalle politiche di liquidazione dell'Impresa e dalle condizioni contrattuali.

Dal punto di vista attuariale, è irrilevante l'ulteriore distinzione tra sinistri liquidati e sinistri pagati; infatti i sinistri liquidati e non pagati costituiscono un vero e proprio debito esigibile verso gli assicurati, per il quale non si pone, quindi, un problema di valutazione attuariale.

L'assicuratore deve pertanto porre a riserva non solo gli importi necessari a coprire i sinistri per i quali, a seguito della denuncia, è iniziato il processo di liquidazione, ma anche opportuni accantonamenti per i sinistri accaduti ma ancora sconosciuti alla Compagnia. Questi ultimi sono comunemente conosciuti con la dicitura inglese di *IBNR* (*Incurred But Not Reported*).

I sinistri non ancora noti alla Compagnia esigono una valutazione sulla base dell'esperienza passata dell'Impresa, riguardo alla frequenza ed al costo medio dei sinistri tardivi. Il ricorso a dati storici in possesso della Compagnia richiede di valutare con particolare cautela i sinistri passati che hanno il carattere dell'eccezionalità. Le disposizioni vigenti in materia di redazione del bilancio prevedono che la procedura con

cui vengono trattati questi sinistri, in genere particolarmente onerosi, sia dettagliatamente descritta nella nota integrativa.

La valutazione della riserva nel suo complesso può seguire due logiche alternative: l'una monitora il singolo sinistro, quantificando in modo dinamico il suo costo finale; l'altra, di approccio collettivo, analizza un portafoglio sufficientemente ampio di sinistri in termini di risarcimenti avvenuti ed attesi. La prima trova espressione nel metodo dell'inventario, idealmente preferibile perché ritenuto più aderente al principio di una prudente valutazione; la seconda porta all'impiego di metodi statistici deterministici e stocastici, oggetto di questo lavoro.

Le Linee Guida<sup>2</sup> dell'Ordine Nazionale degli Attuari precisa che la valutazione della riserva deve fondarsi su elementi obiettivi e secondo prudenza, e che pertanto il metodo di riferimento è quello dell'inventario; tuttavia, con l'esclusione dei rami Credito e Cauzioni e limitatamente alla generazione dell'anno di bilancio, è consentito stimare il costo ultimo mediante il criterio del costo medio per gruppi di sinistri omogenei sufficientemente numerosi.

La correttezza delle stime secondo un approccio collettivo è subordinata non solo alla numerosità e all'omogeneità dei sinistri in portafoglio, aspetti peraltro delicati del processo di valutazione, ma anche alla stabilità delle condizioni contrattuali ed alla regolarità della velocità di liquidazione.

Per quanto detto, nella pratica attuariale si ricorre sovente ad approcci misti, privilegiando per i sinistri di importo medio-basso una logica collettiva, anche in ragione del fatto che si avrà normalmente una base di dati più corposa, ed adottando un approccio individuale per i sinistri di ammontare elevato.

---

<sup>2</sup> *Regole applicative dei principi attuariali e linee guida per l'attuario che presta attività lavorativa professionale nelle Compagnie di assicurazione contro i danni* pubblicate dal Consiglio Nazionale degli Attuari, giugno 2001.

A questo proposito le stesse Linee Guida suggeriscono di considerare più affidabili i metodi basati sull'esperienza storica (con particolare riferimento alla frequenza di accadimento), almeno per i rami che godono di andamenti tecnici regolari.

Qualunque sia il procedimento di calcolo adottato, rimane la centralità dell'informazione disponibile, indispensabile base di partenza per la stima degli oneri futuri.

### LA COMPETENZA DEI SINISTRI

La riserva sinistri è tra le più importanti voci del bilancio di un'Impresa di Assicurazione che esercita i rami danni e gli elementi su cui si basa la sua valutazione sono regolati da principi contabili rigorosi.

Per quanto riguarda i sinistri, un principio di redazione del bilancio che assume particolare rilevanza è quello della competenza. Esso impone che costi e ricavi siano contabilizzati attribuendoli agli esercizi cui competono economicamente, indipendentemente dalla loro manifestazione finanziaria. Ecco allora che si parlerà di *sinistri di competenza*, intendendo con questo termine l'onere complessivo relativo ai sinistri accaduti nell'esercizio in corso.

L'ammontare dei sinistri di competenza, secondo i prospetti ministeriali di bilancio, si ricava in funzione del flusso finanziario generato dagli importi pagati, rettificato con l'accantonamento alla riserva sinistri. Il primo è un dato presente nel conto tecnico dei rami danni, mentre il secondo è un'informazione iscritta nel lato passivo dello stato patrimoniale.

L'onere complessivo relativo ai sinistri di competenza dell'esercizio in corso risulta quindi pari alla somma dei pagamenti effettuati per liquidare i sinistri nell'esercizio e della variazione dell'ammontare della riserva sinistri nel corso dell'anno.

In funzione della data di accadimento di un sinistro si possono distinguere quattro casi:

- Sinistro accaduto nell'esercizio in corso e chiuso nello stesso anno;
- Sinistro accaduto nell'esercizio in corso ma ancora aperto;
- Sinistro accaduto in un esercizio precedente e chiuso nell'esercizio in corso;
- Sinistro accaduto in un esercizio precedente ma ancora aperto.

Con riferimento allo schema in FIGURA 1, la casistica delle condizioni in cui può versare un sinistro è reinterpretata nella tabella seguente:

|  | Chiuso nell'esercizio in corso   | Aperto al termine dell'esercizio  |
|--|--|---|
| <b>Accaduto nell'esercizio in corso</b>    | Gli istanti $t_0$ e $t_n$ appartengono entrambi all'esercizio in corso.                                | L'istante $t_0$ fa parte dell'esercizio in corso, mentre il processo di vita del sinistro non ha ancora raggiunto $t_n$ . |
| <b>Accaduto in un esercizio precedente</b> | L'istante $t_0$ appartiene ad un esercizio precedente, mentre $t_n$ appartiene all'esercizio in corso. | L'istante $t_0$ appartiene ad un esercizio precedente, mentre il corso del sinistro non ha ancora raggiunto $t_n$ .       |

TABELLA 1

Nei primi due casi il sinistro è da considerarsi di competenza; se è stato chiuso nel corso dell'esercizio, allora il costo relativo è valorizzato tra gli importi pagati, altrimenti la valutazione dell'importo a copertura compare nella riserva sinistri dell'esercizio in corso.

Negli altri casi il sinistro non è di competenza dell'esercizio in corso, pertanto la Compagnia ha già predisposto degli accantonamenti destinati alla sua copertura.

Tuttavia nel terzo caso possono riscontrarsi delle differenze tra l'importo effettivamente liquidato e l'accantonamento già effettuato. Analogamente nell'ultimo caso può verificarsi un saldo non nullo tra l'ammontare appostato a riserva e l'accantonamento costituito all'esercizio precedente.

I sinistri tardivi di cui si è parlato in precedenza rientrano nel secondo o nel quarto caso, anche se solo quelli accaduti nell'esercizio in corso sono di competenza.

In tutti i casi commentati, i sinistri di competenza sono quantificati nel conto tecnico del ramo danni (All. II), al netto delle cessioni in riassicurazione e dei recuperi e al lordo delle spese di liquidazione.

#### LA VALUTAZIONE A COSTO ULTIMO DELLA RISERVA SINISTRI

Il criterio di valutazione di riferimento per la valutazione della riserva sinistri è quello del costo ultimo, specificato nell'art. 37 del D.Lgs. 209/2005. Tale principio impone che l'Impresa predisponga accantonamenti in misura del costo futuro prevedibile per i sinistri ancora da pagare, incluse, come già detto, le spese di liquidazione.

Pertanto occorre tenere conto, in fase di stima della riserva, dell'inflazione nel costo sinistri. Tale grandezza si può scomporre in due parti: una esogena ed una endogena.

Il termine inflazione *esogena* indica l'inflazione legata al sistema economico di riferimento che è oggetto di studi degli Istituti di Statistica. Essa riflette la variazione media dei prezzi al consumo e in senso lato il potere di acquisto della valuta nazionale. Si tratta di una variabile esogena e pertanto in un certo senso subita dagli operatori del mercato.

L'inflazione *endogena* raccoglie invece, in questo contesto, l'effetto delle variabili interne della Compagnia sulla variazione media del costo dei sinistri. Queste variabili comprendono, tra le altre, l'efficienza delle strutture apposte alla liquidazione dei sinistri e le politiche assuntive, dalle quali dipende la limitazione dei fenomeni di antiselezione.

Naturalmente una valutazione a costo ultimo non può prescindere da attente analisi statistiche sui dati passati; a questo scopo le Linee Guida già citate nel precedente paragrafo sottolineano la necessità, da parte dell'Attuario, di ottenere le necessarie informazioni sulle classi di sinistri omogenei per migliorare la valutazione dei sinistri a costo ultimo.

Si richiede inoltre di dare evidenza delle valutazioni condotte per quantificare le spese di liquidazione dei sinistri. In queste si assommano i costi specifici di particolari sinistri, i costi indiretti di ramo ed i costi comuni a tutti i rami.

Correttamente si dovrebbero attribuire i primi ai soli sinistri cui si riferiscono, imputare in quota i costi indiretti di ramo ai sinistri afferenti al ramo specifico ed infine distribuire i costi comuni. L'attribuzione dei costi comuni avverrà su due livelli: il primo consisterà nella distribuzione in quota tra i rami esercitati dalla Compagnia, il secondo riguarderà i singoli sinistri all'interno di questi ultimi.

## I PRINCIPI IAS ED IL SOLVENCY II

L'Unione Europea ha adottato, con il Regolamento UE 1606/2002, l'applicazione dei principi contabili internazionali (IAS/IFRS) emanati dallo IASB (*International Accounting Standard Board*), obbligando tutte le società della UE quotate in un mercato regolamentato di redigere il bilancio consolidato conformemente agli IAS. Questo complesso di norme è stato recepito in Italia con il D.Lgs. 38/2005, con il quale il legislatore ha stabilito le regole e l'ambito di applicazione dei principi contabili internazionali nel nostro Ordinamento; le Imprese di Assicurazione rientrano nell'ambito di applicazione così come definito all'articolo 2 del suddetto decreto<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup> I principi IAS/IFRS si applicano:

- Nella redazione del bilancio consolidato alle società quotate ed inoltre a società aventi strumenti finanziari diffusi presso il pubblico in misura rilevante, Banche, Intermediari Finanziari vigilati, Società Finanziarie e Imprese di Assicurazione;
- Nella redazione del bilancio individuale alle società quotate ed inoltre a società aventi strumenti finanziari diffusi presso il pubblico in misura rilevante, Banche ed Imprese di Assicurazione quotate che non redigono il bilancio consolidato.

Il Codice delle Assicurazioni Private stabilisce inoltre che l'esercizio da parte dell'ISVAP dei poteri regolamentari e sanzionatori in materia di bilanci delle Imprese di Assicurazione avviene in conformità ai principi contabili internazionali<sup>4</sup>.

L'adozione di principi contabili comuni a tutte le categorie di imprese, siano esse afferenti al settore bancario, assicurativo o industriale, permetterà, una volta a regime, di confrontare a livello internazionale il risultato delle imprese; proprietà, questa, sempre più irrinunciabile in una prospettiva di globalizzazione dei mercati economici.

I principi IAS sono caratterizzati da un'impronta *principles-based*, nel quale è privilegiato, su tutti, il principio della competenza. Questo si traduce in una valutazione di attività e passività al valore corrente (*fair value*) in luogo del costo storico, privilegiato piuttosto in un contesto di prudenza. Il cambiamento della prospettiva di valutazione fa in modo non solo di rendere il bilancio di esercizio una rappresentazione sempre più fedele della reale situazione patrimoniale dell'impresa, ma anche, in ambito assicurativo, di facilitare la revisione della vigilanza prudenziale.

È evidente quindi che l'evoluzione in materia contabile va di pari passo con la radicale riforma del regime di solvibilità nota tra gli operatori del mercato come *Solvency II*. Questa consiste principalmente nell'introduzione di requisiti patrimoniali minimi più aderenti ai rischi (non solo tecnici) sopportati dalle Compagnie. Il progetto prevede di calcolare tali requisiti mediante una formula standard o, in alternativa, tramite modelli interni di valutazione del rischio; il CEIOPS (*Committee of European Insurance and Occupational Pension Supervisors*) ha finora chiesto la partecipazione degli operatori del mercato a quattro indagini di impatto (*Quantitative Impact Studies*) dei nuovi criteri sui requisiti minimi di solvibilità, al fine di migliorare la struttura e le regole di calcolo.

Analogamente al sistema in uso per il settore bancario, il *Solvency II* prevede una struttura a tre pilastri. Il primo pilastro contiene i requisiti finanziari, comprendendo disposizioni relative ai criteri di valutazione di attività e passività, al calcolo del *Solvency Capital Requirement (SCR)* mediante la formula standard e alle condizioni di utilizzo dei

---

<sup>4</sup> Art 90, par 4 del D.Lgs. 209/2005: *Codice delle Assicurazioni Private*.

modelli interni. Viene in questo contesto inoltre introdotta una soglia minima di solvibilità, il cosiddetto *Minimum Capital Requirement* (MCR), ideale evoluzione del concetto di quota di garanzia attualmente in vigore nella disciplina di vigilanza italiana<sup>5</sup>.

Il secondo pilastro riguarda i requisiti di tipo qualitativo cui le Imprese di Assicurazione saranno tenute e, soprattutto, l'attività di vigilanza, specificando le disposizioni sulla valutazione delle riserve e la gestione degli investimenti.

Il terzo pilastro è orientato a garantire la disciplina del mercato, la trasparenza e la corretta informazione agli assicurati.

A riguardo della valutazione delle attività e passività, farà da guida, come è facile intuire, il principio della valutazione economica. Questo si esprime, dal lato delle Attività, nella valutazione *fair value* di cui si è discusso nella prima parte del presente paragrafo.

Dal lato delle Passività, non essendo chiaramente possibile una valutazione al costo di mercato, poiché non esiste un mercato di riferimento, si fa ricorso a due moduli: la *best estimate* delle passività ed il *risk margin*.

La *best estimate* delle passività richiede la proiezione di tutti i flussi futuri generati dalla produzione corrente e l'attualizzazione degli stessi mediante un'opportuna struttura a termine dei tassi. La stima così calcolata vuole essere la rappresentazione più fedele degli oneri dell'Impresa, condotta in forza del principio della correttezza.

Il *risk margin* risponde invece al principio della prudenza, in precedenza introdotto implicitamente nelle valutazioni stesse di attività e passività, secondo il criterio del *cost of capital*, ossia in base al costo del capitale necessario a far fronte agli impegni verso gli assicurati.

In realtà la valutazione delle passività secondo l'approccio economico è per le Compagnie abbastanza impegnativa dal punto di vista applicativo; pertanto finora i

---

<sup>5</sup> La quota di garanzia è disciplinata dall'art. 46 del D.Lgs. 209/2005: *Codice delle Assicurazioni Private*.

*Quantitative Impact Studies* hanno previsto di applicare anche approcci semplificati (*proxy*) nelle stime della *best estimate* e del *risk margin*.

Nelle intenzioni del CEIOPS una valutazione attuariale di tipo *best estimate* escluderà ogni applicazione meccanica di algoritmi di calcolo della riserva sinistri. Con il *Solvency II* a regime, infatti, qualunque applicazione di tecniche statistiche per la stima delle riserve dovrà essere accompagnata da una certa varietà di indagini attuariali. Tali indagini saranno soprattutto volte a testare la coerenza del metodo scelto dalla Compagnia con le caratteristiche particolari del portafoglio in carico. A questo proposito, si evince dalle osservazioni del Comitato<sup>6</sup> la particolare attenzione che deve essere posta alle evidenti distorsioni causate da fusioni ed acquisizioni, cambiamenti nelle prassi liquidative e sinistralità eccezionali.

I requisiti quantitativi del primo pilastro hanno anche la finalità di rendere confrontabili le Compagnie in base alle passività tecniche, cosa finora impossibile per via della soggettività con cui il principio della prudenza è stato recepito. Il risultato andrà a beneficio di tutti gli *stakeholders* del mercato assicurativo e non solo dell'autorità di vigilanza, anche in relazione alla trasparenza dei mercati perseguita nel terzo pilastro.

---

<sup>6</sup> Ad esempio all'interno di *QIS4 Best Estimate Valuation Tool: User's Guide and Functionality Overview*, pag 3.

---

## 2. METODI DETERMINISTICI

La prassi usa distinguere i metodi di calcolo collettivo della riserva sinistri in due categorie: metodi deterministici e metodi stocastici. I primi si concentrano sui dati storici e sulle informazioni statistiche che se ne possono ricavare. I metodi stocastici, diversamente, si basano su significative distribuzioni probabilistiche delle riserve. Questi ultimi saranno oggetto di approfondimento nei capitoli seguenti, in questo capitolo vogliamo invece approfondire i principali metodi statistici deterministici.

Un approccio collettivo alla stima di grandezze economiche richiede, come già sottolineato, un'adeguata base di dati; nel caso della riserva sinistri tali informazioni fondamentali riguardano il numero dei sinistri aperti e liquidati, nonché i risarcimenti ed i premi di competenza.

*Se la statistica è il metodo della ricerca empirica<sup>1</sup>, allora il primo passo per qualunque indagine statistica è la corretta rappresentazione dei dati.*

Mutuando il termine dalla demografia, si userà l'espressione *coorti di sinistri* per indicare tutti i sinistri della collettività di riferimento che hanno in comune la realizzazione di un certo evento. I raggruppamenti più opportuni fanno riferimento all'anno di accadimento, anche detto anno di generazione, o all'anno di denuncia alla Compagnia.

---

<sup>1</sup> B.V. Frosini – 2001 – Metodi Statistici, Carocci, pag. 15

## IL DIAGRAMMA DI LEXIS PER LA RAPPRESENTAZIONE DEI SINISTRI

Il corso di un sinistro si articola in diverse fasi che vanno dal momento di accadimento,  $t_0$ , all'istante della chiusura dello stesso,  $t_n$ . Indichiamo con  $s$  l'ampiezza dell'intervallo di tempo  $[t_0, t_n]$ ;  $s$  esprime pertanto il ritardo con cui il sinistro viene liquidato (come spiegato nel corso del capitolo precedente non distinguiamo tra sinistri liquidati e sinistri pagati), anche detto anno di sviluppo.

Dal momento che un sinistro evolve nel tempo, come già illustrato in FIGURA 1, sono anzitutto oggetto di interesse le due dimensioni temporali fondamentali della generazione e dell'anno di sviluppo. Dal punto di vista dell'Impresa di Assicurazione esiste l'esigenza di rappresentare anche una terza dimensione temporale, vale a dire il periodo.

Considerato il fatto che una Compagnia deve gestire tipicamente un certo numero di coorti consecutive di sinistri, un modo efficiente per rappresentare contemporaneamente tutte le dimensioni finora descritte è quello di usare un diagramma di Lexis (1875).

Il diagramma cartesiano di Lexis nel caso delle coorti di sinistri riporta sull'asse delle ordinate l'anno di sviluppo e sulle ascisse l'anno di generazione. Una sezione verticale ad una certa ascissa riconsegna la fotografia della collettività al periodo di riferimento.

Con riferimento allo schema convenzionale introdotto nel Capitolo 1, il corso di un generico sinistro è rappresentato sul diagramma come in FIGURA 2.

Convenzionalmente si rappresenta l'evento con una freccia, la cui origine giace sull'asse delle ascisse al punto che rappresenta l'istante di generazione. La direzione è parallela alla bisettrice del quadrante, a rappresentare il progredire, contemporaneamente, del tempo storico e del tempo individuale. Infatti nell'esercizio successivo a quello dell'anno di accadimento il sinistro ancora aperto avrà maturato un anno di sviluppo; durante l'esercizio ancora successivo due anni di ritardo, e così via. Infine la punta indica la

chiusura del sinistro e pertanto ha come coordinata di ascissa la data, cioè il periodo, in cui le liquidazioni sono completate.

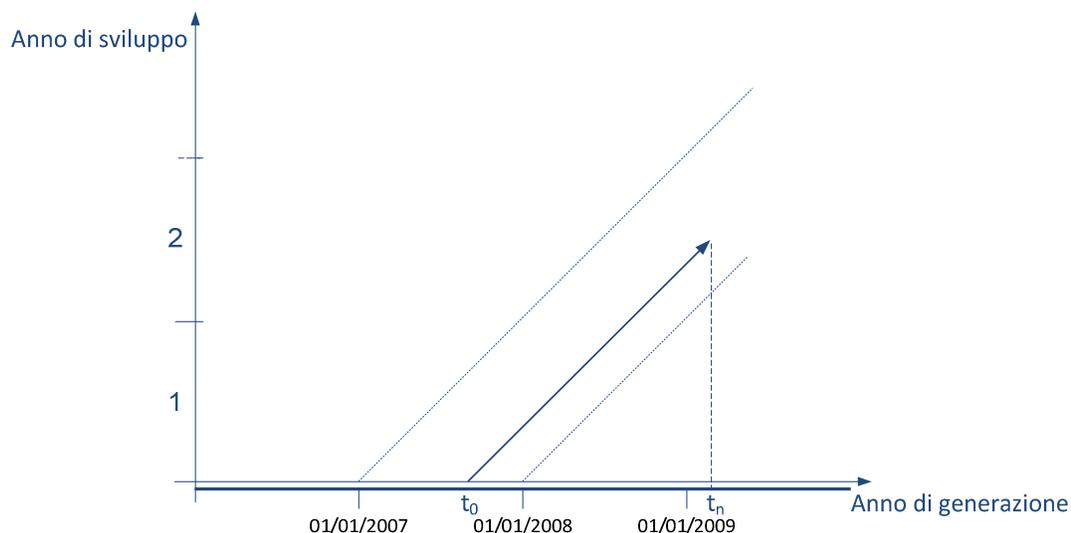


FIGURA 2

Anche se non esiste una limitazione teorica al numero di anni di sviluppo, normalmente si stabilisce un ritardo massimo nella liquidazione dei sinistri, in base all'esperienza storica della compagnia. Indicando con  $s_{max}$  tale valore, possiamo altresì immaginare l'onere della Compagnia verso i sinistri appartenenti ad una stessa coorte decrescere fino ad annullarsi in  $s_{max}$ .

Vogliamo ora dare una rappresentazione aggregata dei sinistri in portafoglio, utilizzando un diagramma analogo a quello in FIGURA 2.

Definiamo  $t$  l'istante in cui avviene la valutazione. Trattandosi di valori aggregati, risulta opportuno dare un nuovo significato alla freccia diagonale del diagramma: in un contesto di portafoglio essa rappresenta l'ammontare cumulato fino all' $s$ -esimo anno di sviluppo dei risarcimenti relativi alla coorte dei sinistri generati in  $t - s$ .

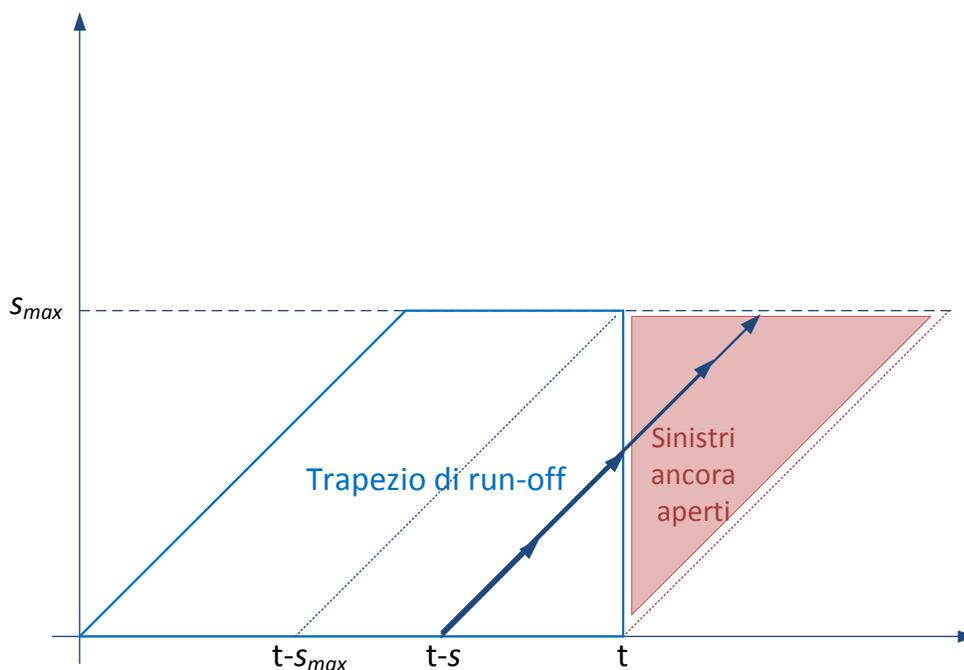


FIGURA 3

La presenza di più terminazioni della freccia è dovuta proprio alla natura cumulativa del dato oggetto di rappresentazione. Il risarcimento cumulato infatti si compone di addendi le cui date di liquidazione non coincidono. Come già illustrato, infatti, identifichiamo le coorti dei sinistri per anno di generazione, e non per istante di chiusura.

Al momento della valutazione  $t$  la Compagnia conosce i dati storici delle liquidazioni, il cosiddetto trapezio di run-off evidenziato in figura.

La riserva sinistri è interessata invece dall'ammontare dei risarcimenti per sinistri ancora aperti in  $t$ . Questi ultimi non hanno ancora raggiunto il massimo ritardo  $s_{max}$  e sono rappresentati in FIGURA 3 dal triangolo a destra.

Con il diagramma di Lexis si apprezza ulteriormente la delicatezza della questione della competenza dei sinistri, espressa dallo sviluppo diagonale. Per leggere invece i cash-

flows dovuti alle liquidazioni dei sinistri occorre analizzare il grafico per sezioni verticali e in particolare l'intersezione delle frecce con l'ascissa  $t$ .

## IL TRIANGOLO DI RUN-OFF

Il triangolo di run-off è la rappresentazione più comune della base di dati utilizzabile per la stima della riserva sinistri, la cui costruzione si basa su alcune ipotesi.

La prima di queste è il limite superiore al differimento nel risarcimento dei sinistri, che già abbiamo indicato con  $s_{max}$  nel precedente paragrafo.

Il valore di tale limite dipende certamente dalle caratteristiche della Compagnia e del suo portafoglio; tuttavia esso rimane maggiormente influenzato dal ramo di riferimento. Ad esempio il ramo RCAuto, in cui la fase di valutazione del danno talvolta porta a contenziosi, registra ritardi fino a tredici anni, con punte di anche vent'anni nel caso di sinistri arrecanti danni fisici a persone. I rami infortuni e malattia invece hanno spesso valori di  $s_{max}$  inferiori ai 5 anni.

Convenzionalmente si raggruppano i sinistri per anno di denuncia o, in alternativa, per anno di accadimento. Ne segue che, una volta trascorsi  $s_{max}$  anni dalla denuncia (o dall'accadimento, nel caso si sia scelto il secondo criterio di classificazione), la Compagnia può considerare completamente assolto l'onere nei confronti della coorte dei sinistri in questione.

Si ipotizza inoltre che all'istante di valutazione  $t$ , per convenzione posto alla chiusura dell'ultimo esercizio, la Compagnia conosca tutte le liquidazioni avvenute fino a quel momento sia per i sinistri denunciati (accaduti) nell'ultimo esercizio, sia per le coorti di sinistri degli anni precedenti.

Il numero di queste coorti non può essere inferiore al numero massimo di anni di differimento, perché altrimenti la base di dati sarebbe incompleta e, quindi, inutilizzabile. Infatti, se questo fosse il caso, anzitutto, la Compagnia non avrebbe modo di verificare che il valore assegnato ad  $s_{max}$  sia effettivamente adatto per il proprio

portafoglio. In secondo luogo, non si conoscerebbe il comportamento delle liquidazioni per gli ultimi anni di sviluppo, perché nessuna coorte avrebbe raggiunto il tetto massimo di differimento entro la data di valutazione  $t$ .

Evidentemente le dimensioni oggetto di interesse sono due: la coorte di appartenenza e l'anno di sviluppo. Perciò i dati devono essere organizzati in una matrice, sulle cui righe si dispongono convenzionalmente le coorti dei sinistri e sulle cui colonne si rappresentano gli anni di sviluppo.

Per quanto detto il numero di righe dovrà essere almeno pari al numero di colonne; in seguito faremo riferimento prevalentemente a matrici quadrate, tali cioè da raccogliere l'informazione minima necessaria.

Gli elementi della matrice, organizzati secondo uno schema analogo a quello che segue, costituiscono la base di dati a disposizione della Compagnia.

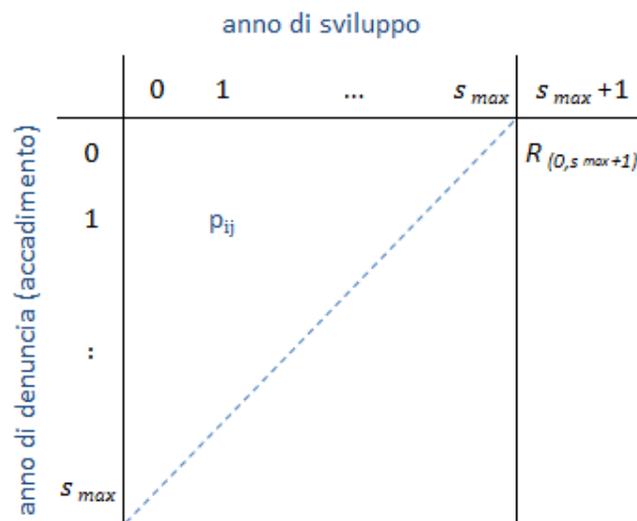


FIGURA 4

Più precisamente il triangolo superiore, che prende il nome di triangolo di run-off, contiene i dati storici, mentre quello inferiore deve essere completato con opportuni valori stimati, in quanto i suoi elementi non sono noti al momento della valutazione.

L'elemento  $R_{(0,s_{max}+1)}$  indica l'ammontare della riserva calcolata per i sinistri denunciati (accaduti) nell'esercizio 0 ancora aperti dopo  $s_{max}$  anni di differimento. Per i sinistri interessati si ipotizza inoltre che venga liquidato un importo pari a quello messo a riserva. In questo valore si raccolgono anche gli importi riservati per coorti antecedenti l'esercizio 0.

Lo scopo dei metodi di stima che verranno descritti nel seguito è quello di completare il triangolo inferiore e l'ultima colonna. L'ammontare della riserva sinistri per l'esercizio in corso è pari alla somma di tutti gli  $R_{(i,s_{max}+1)}$ , con  $i = 0, \dots, s_{max}$ .

## METODI GROSSING UP E METODI LINK RATIO

A partire dalla base di dati, opportunamente organizzata, i metodi deterministici forniscono una stima puntuale della riserva proiettando i dati storici nella metà inferiore della matrice.

In generale si distinguono due tecniche di proiezione: il *grossing up* ed il *link ratio*.

La prima delle due, il *grossing up*, calcola dei coefficienti, chiamati fattori di sviluppo, che hanno la funzione di descrivere la dinamica dei sinistri, in termini di ritardo nei pagamenti dei risarcimenti.

Indichiamo nel seguito con  $p_{ij}$  l'ammontare dei risarcimenti effettuati per sinistri appartenenti alla coorte  $i$ -esima nel corso del loro  $j$ -esimo anno di sviluppo, mentre chiamiamo  $C_{ij} = \sum_{k=0}^j p_{i,k}$  l'ammontare dei risarcimenti cumulati effettuati per sinistri generati appartenenti alla coorte  $i$ -esima fino al loro  $j$ -esimo anno di sviluppo.

Il termine raggruppamento che dà il nome a questa tecnica fa riferimento alle coorti dei sinistri, per ciascuna delle quali, anzitutto, si determina il peso dei risarcimenti sull'ammontare totale pagato fino alla data di valutazione  $t$ . Adottando la rappresentazione matriciale del triangolo di run-off per i risarcimenti cumulati  $C_{ij}$ ,

possiamo intendere questo peso come il rapporto tra ciascun elemento della diagonale e la somma per colonna dei sinistri cumulati:

$$w_h = \left( \frac{\sum_i C_{i,h}}{C_{h, s_{max}-h}} \right), \text{ con } h = 0, \dots, s_{max}$$

Lo stesso peso moltiplica, per ogni generazione, il risarcimento cumulato per l'ultimo anno di sviluppo disponibile nella base dei dati, dando per risultato il costo di generazione stimato:

$$C_h = w_h C_{h, s_{max}-h}.$$

I fattori di sviluppo  $g_0, g_1, \dots, g_s$ , uno per generazione, sono infine calcolati come rapporto tra l'ammontare dell'ultimo risarcimento cumulato noto ed il costo di generazione stimato:

$$g_h = \left( \frac{C_{h, s_{max}-h}}{C_h} \right).$$

Si moltiplica infine i coefficienti di sviluppo per i corrispondenti elementi della diagonale, ottenendo in questo modo una proiezione del costo cumulato dei risarcimenti all'anno di sviluppo  $s_{max}$ .

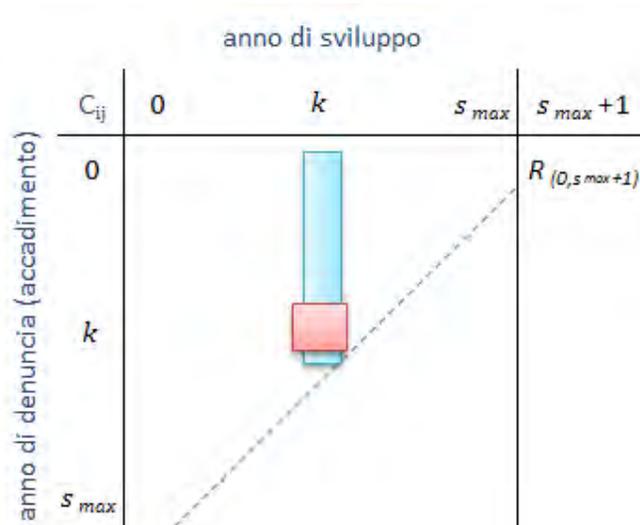


FIGURA 5

La seconda tecnica di proiezione, il *link ratio*, stabilisce invece dei fattori di proporzionalità tra i risarcimenti effettuati in anni di sviluppo consecutivi. Al contrario della tecnica *grossing up*, in questo caso si calcolano dei coefficienti indifferenziati per coorti dei sinistri, ma distinti per anno di differimento.

In generale i fattori di proporzionalità, uno per ciascun anno di differimento, si ottengono rapportando il totale dei risarcimenti cumulati ad un certo anno di sviluppo afferenti a tutte le coorti dei sinistri con la somma dei risarcimenti cumulati all'anno di sviluppo precedente per i sinistri afferenti alle medesime coorti:

$$r_k = \left( \frac{\sum_{i=0}^k C_{i,k}}{\sum_{i=0}^k C_{i,k-1}} \right)$$

La proiezione degli ultimi risarcimenti cumulati disponibili ha una struttura moltiplicativa. Infatti, l'ultimo risarcimento cumulato da stimare, cioè, per ogni coorte, quello in corrispondenza dell'anno di differimento  $s_{max}$ , è ottenuto moltiplicando tutti i fattori di proporzionalità degli anni di sviluppo successivi all'ultimo noto.

Per la coorte  $s$ -esima, ad esempio, si deve moltiplicare l'elemento sulla diagonale della matrice dei risarcimenti cumulati per tutti i fattori di proporzionalità, a partire da quello calcolato per l'anno di sviluppo  $s + 1$  fino all'ultimo ricavato per l'anno di differimento massimo  $s_{max}$ .

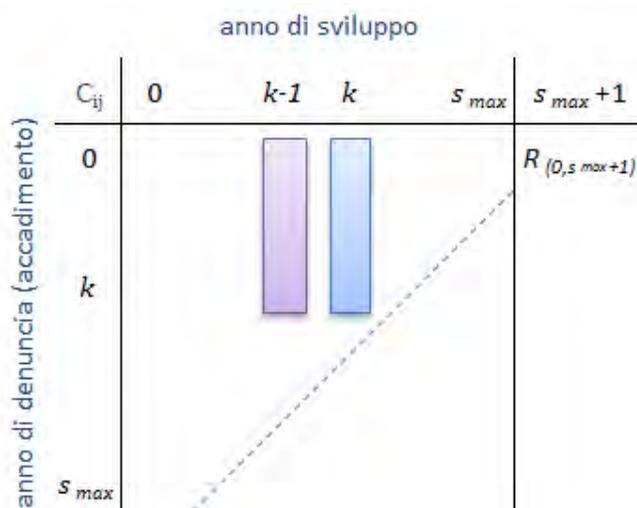


FIGURA 6

La scelta di un metodo di proiezione rispetto ad un altro dipende, come è facile intuire, dalle caratteristiche del portafoglio. Non esistono criteri univoci di discriminazione di un metodo sull'altro; pertanto la Compagnia valuta la scelta considerando tutti i fattori che, col passare degli anni, possono influenzare i risarcimenti, sia in termini di numero di sinistri sia in termini di costo medio.

Tra i fattori di tipo endogeno, nel senso che dipendono dall'Impresa, citiamo le condizioni contrattuali (in particolare le limitazioni alla garanzia assicurativa), le politiche assuntive e la gestione dei sinistri e del processo di liquidazione.

Esistono, come noto, anche fattori di tipo esogeno, quali la legislazione del Paese in cui la Compagnia opera, fattori ambientali e climatici e variabili economiche, su tutte l'inflazione.

## IL METODO CHAIN LADDER

Il metodo di stima Chain Ladder, o della catena, è universalmente riconosciuto quale metodo base per la stima della riserva sinistri, e costituisce il termine di paragone per i risultati ottenuti con altre tecniche.

La sua fortuna è dovuta certamente alla semplicità dei calcoli necessari al procedimento e alla mancanza di ipotesi restrittive necessarie per garantire l'efficacia delle stime.

Storicamente la sua origine si colloca negli anni Settanta nel Regno Unito, e da quel momento questa tecnica ha goduto di grande diffusione.

Il cuore del metodo è un approccio di tipo *link ratio* per la determinazione di parametri di proporzionalità tra l'ammontare dei sinistri cumulati di anni consecutivi. L'assunzione fondamentale che giustifica la procedura di calcolo è quella dell'indipendenza dei fattori di sviluppo dalla coorte di appartenenza.

In altre parole si ipotizza che la legge che regola l'andamento delle liquidazioni lungo gli anni di sviluppo sia la stessa per tutte le coorti interessate, a meno di variazioni

aleatorie. Sotto questa ipotesi quindi si ha che la progressione dei risarcimenti cumulati è medesima per tutte le coorti dei sinistri.

Pertanto i fattori di sviluppo  $m_j$  relativi ad ogni anno di sviluppo, tanti quanti sono le colonne della matrice dei dati, sono calcolati come segue:

$$m_j = \frac{\sum_{i=0}^{T-j} C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{T-j} C_{i,j-1}},$$

dove  $T$  indica il numero massimo di anni di differimento, cioè il numero di colonne (o di righe) della matrice.

Gli anni di differimenti interessati dal calcolo dei fattori di sviluppo sono tutti quelli contemplati dal triangolo di run-off, ad esclusione, come è ovvio, dell'anno di sviluppo 0. Infatti, formulazione a parte, non avrebbe senso calcolare un fattore di sviluppo per i sinistri liquidati senza alcun differimento: essi sono già noti alla Compagnia alla chiusura dell'esercizio, cioè al momento della valutazione.

I fattori di sviluppo, così come definiti nella formula appena enunciata, sono interpretabili come media ponderata dei rapporti di sviluppo  $r_{ij} = \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}$ .

E' immediato verificarlo, semplicemente riscrivendo

$$m_j = \frac{\sum_{i=0}^{T-j} r_{ij} \cdot C_{i,j-1}}{\sum_{i=0}^{T-j} C_{i,j-1}},$$

da cui risulta chiara la ponderazione degli  $r_{ij}$  con i risarcimenti cumulati dell'anno di sviluppo precedente.

Poiché per la stima di ciascun fattore si utilizzano tutte le informazioni disponibili relative all'anno di sviluppo in esame, e poiché il numero di tali informazioni decresce via via che si considerano anni di differimento maggiori, si intuisce la probabile origine

del nome con cui è nota questa tecnica: la dimensione discreta delle variabili temporali rende l'informazione "a gradini".

L'altro aspetto che caratterizza questo metodo è la proiezione concatenata dei risarcimenti cumulati, dovuta alla struttura moltiplicativa tipica delle tecniche *link ratio*. In pratica le stime dei futuri risarcimenti cumulati, vale a dire il triangolo inferiore della matrice, replicano l'evoluzione che i pagamenti hanno subito nei confronti delle coorti precedenti in corrispondenza del medesimo anno di sviluppo, attribuendo così ogni movimento dei risarcimenti cumulati al numero di anni di differimento delle liquidazioni.

Certamente, per accettare un simile metodo, occorre che sia plausibile una certa stabilità della velocità di liquidazione e della gestione dei sinistri lungo le generazioni e, quindi, anche nel corso degli anni di calendario. Perché i risultati siano attendibili, quindi, l'Impresa di Assicurazione deve mantenere la modalità di chiusura dei sinistri costante nel tempo.

Si noti che di per sé una variazione nelle dimensioni o nella composizione del portafoglio non invalida le ipotesi del modello. Tuttavia tali cambiamenti possono incidere sui processi aziendali riguardanti la gestione dei sinistri e quindi indirettamente violare le condizioni del modello.

Per una generica riga  $i$ -esima, sia  $C_{i,T-i}$  l'ultima osservazione disponibile nella base di dati. L'obiettivo è quello di stimare l'ammontare complessivo dei risarcimenti per la coorte corrispondente; per raggiungere tale scopo occorre completare la riga, cioè stimare  $\hat{C}_{i,j+1}, \dots, \hat{C}_{i,T}$ .

La matrice dei dati viene completata procedendo nello stesso modo per tutte le righe, secondo la formula che segue:

$$\hat{C}_{i,k} = C_{i,j} \cdot \prod_{h=0}^{T-k} m_{j+h+1}, \text{ con } k = j + 1, \dots, T.$$

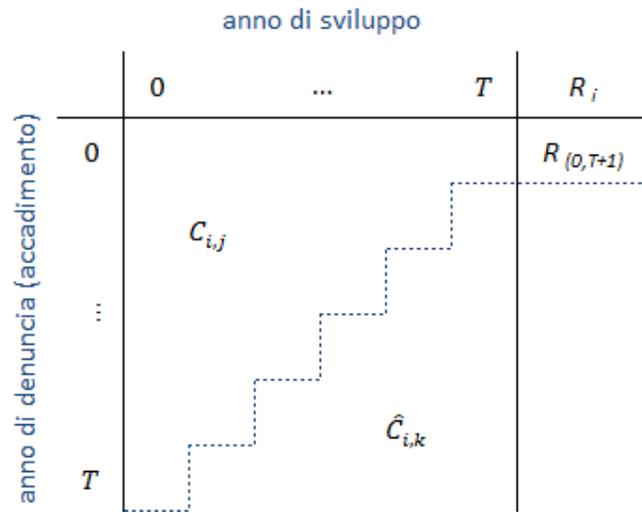


FIGURA 7

Nella colonna  $R_i$  si leggeranno gli importi da mettere a riserva per ciascuna coorte di sinistri. Il primo valore è solitamente noto e rappresenta il costo attribuito dalla Compagnia ai sinistri appartenenti alla coorte di etichetta 0 ancora aperti dopo  $T$  anni. Questo ammontare riguarda i risarcimenti per sinistri avvenuti nel lontano passato e che al momento della valutazione hanno già maturato il ritardo massimo teorico; perciò i casi interessati saranno anzitutto in numero esiguo, e, in secondo luogo, tali che il costo ad essi associati sia praticamente certo.

La stima di tale valore per la generica coorte  $i$ -esima, con  $i = 1, \dots, T$ , è ottenuta per differenza dell'ultimo risarcimento cumulato stimato  $\hat{C}_{i,T}$ , e l'ultimo risarcimento noto  $C_{i,T-i}$ .

Infine la riserva stimata complessiva è pari al totale della colonna  $R_i$ :

$$R = \sum_i R_{i,T+1} = \sum_i (\hat{C}_{i,T} - C_{i,T-i}).$$

Riassumiamo nel seguito i passaggi della procedura attraverso l'applicazione del metodo ad un esempio.

Sia noto il seguente triangolo di run-off dei risarcimenti (i cui importi sono espressi in Euro), per una Compagnia esercitante un solo ramo. In esso le coorti raggruppano i sinistri per anno di generazione a partire dall'anno 2000, essendo il ritardo massimo osservato di sette anni.

Come si nota gli importi sono decrescenti all'aumentare del ritardo nella liquidazione; questa è una caratteristica piuttosto comune a tutti i rami danni la cui motivazione è del tutto intuitiva: via via che ci si allontana dalla data di accadimento rimane aperto un numero sempre minore di sinistri, costituito dai pochi eventi la cui valutazione è più complessa.

| $p_{ij}$ | anno di sviluppo |           |         |           |         |         |         | $R_i$   |        |
|----------|------------------|-----------|---------|-----------|---------|---------|---------|---------|--------|
|          | 0                | 1         | 2       | 3         | 4       | 5       | 6       |         | 7      |
| 2000     | 357.848          | 766.940   | 610.542 | 482.940   | 527.326 | 574.398 | 146.342 | 139.950 | 67.948 |
| 2001     | 352.118          | 884.021   | 933.894 | 1.183.289 | 445.745 | 320.996 | 527.804 |         |        |
| 2002     | 290.507          | 1.001.799 | 926.219 | 1.016.654 | 750.816 | 146.923 |         |         |        |
| 2003     | 310.608          | 1.108.250 | 776.189 | 1.562.400 | 272.482 |         |         |         |        |
| 2004     | 443.160          | 693.190   | 991.983 | 769.488   |         |         |         |         |        |
| 2005     | 396.132          | 937.085   | 847.498 |           |         |         |         |         |        |
| 2006     | 440.832          | 847.631   |         |           |         |         |         |         |        |
| 2007     | 359.480          |           |         |           |         |         |         |         |        |

TRIANGOLO 1

Per prima cosa si calcolano i valori cumulati dei risarcimenti, in modo da poter applicare le formule descritte nel corso del paragrafo. Avremo quindi il triangolo dei sinistri cumulati di seguito riportato.

| $C_{\bar{j}}$ | anno di sviluppo |           |           |           |           |           |           |         | $R_i$  |
|---------------|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|--------|
|               | 0                | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7       |        |
| 2000          | 357.848          | 1.124.788 | 1.735.330 | 2.218.270 | 2.745.596 | 3.319.994 | 3.466.336 | 3606286 | 67.948 |
| 2001          | 352.118          | 1.236.139 | 2.170.033 | 3.353.322 | 3.799.067 | 4.120.063 | 4.647.867 |         |        |
| 2002          | 290.507          | 1.292.306 | 2.218.525 | 3.235.179 | 3.985.995 | 4.132.918 |           |         |        |
| 2003          | 310.608          | 1.418.858 | 2.195.047 | 3.757.447 | 4.029.929 |           |           |         |        |
| 2004          | 443.160          | 1.136.350 | 2.128.333 | 2.897.821 |           |           |           |         |        |
| 2005          | 396.132          | 1.333.217 | 2.180.715 |           |           |           |           |         |        |
| 2006          | 440.832          | 1.288.463 |           |           |           |           |           |         |        |
| 2007          | 359.480          |           |           |           |           |           |           |         |        |

A seguito di questa prima elaborazione calcoliamo i fattori di sviluppo  $m_j$ , ottenendo i valori riportati sotto.

|       |        |
|-------|--------|
| $m_1$ | 3,4077 |
| $m_2$ | 1,6744 |
| $m_3$ | 1,4800 |
| $m_4$ | 1,1589 |
| $m_5$ | 1,0990 |
| $m_6$ | 1,0906 |
| $m_7$ | 1,0404 |

I risultati ottenuti per i fattori di sviluppo sono decrescenti all'aumentare del ritardo riportato nella liquidazione. Questo andamento è perfettamente attendibile per quanto osservato a proposito del comportamento degli importi dei risarcimenti.

A questo punto applichiamo la logica del *link ratio* per proiettare i valori storici delle liquidazioni nel triangolo inferiore, ottenendo la seguente matrice.

| $C_{ij}$ | anno di sviluppo |           |           |           |           |           |           |           | $R_i$  |
|----------|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------|
|          | 0                | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |        |
| 2000     | 357.848          | 1.124.788 | 1.735.330 | 2.218.270 | 2.745.596 | 3.319.994 | 3.466.336 | 3.606.286 | 67.948 |
| 2001     | 352.118          | 1.236.139 | 2.170.033 | 3.353.322 | 3.799.067 | 4.120.063 | 4.647.867 | 4.835.520 |        |
| 2002     | 290.507          | 1.292.306 | 2.218.525 | 3.235.179 | 3.985.995 | 4.132.918 | 4.507.403 | 4.689.385 |        |
| 2003     | 310.608          | 1.418.858 | 2.195.047 | 3.757.447 | 4.029.929 | 4.428.808 | 4.830.104 | 5.025.115 |        |
| 2004     | 443.160          | 1.136.350 | 2.128.333 | 2.897.821 | 3.358.265 | 3.690.664 | 4.025.076 | 4.187.585 |        |
| 2005     | 396.132          | 1.333.217 | 2.180.715 | 3.227.475 | 3.740.299 | 4.110.511 | 4.482.966 | 4.663.962 |        |
| 2006     | 440.832          | 1.288.463 | 2.157.442 | 3.193.031 | 3.700.382 | 4.066.643 | 4.435.123 | 4.614.187 |        |
| 2007     | 359.480          | 1.225.010 | 2.051.194 | 3.035.784 | 3.518.149 | 3.866.373 | 4.216.706 | 4.386.952 |        |

Rimane infine da calcolare le quantità da porre a riserva, dapprima divise per generazione di sinistri e successivamente sommate.

Il primo importo, relativo ai sinistri generati nel 2000 è frutto di valutazioni attuariali esterne alla presente trattazione e quindi accettato come noto.

In base al procedimento descritto nella prima parte del paragrafo si sono ottenuti gli importi elencati di seguito:

|      | $R_i$      |
|------|------------|
| 2000 | 67.948     |
| 2001 | 187.653    |
| 2002 | 556.467    |
| 2003 | 995.186    |
| 2004 | 1.289.764  |
| 2005 | 2.483.247  |
| 2006 | 3.325.724  |
| 2007 | 4.027.472  |
| $R$  | 12.933.460 |

Il metodo Chain Ladder riconsegna quindi un importo da scrivere alla voce riserva sinistri nel lato passivi del bilancio di questa Compagnia pari a 12.933460 euro.

#### VARIANTI AL METODO CHAIN LADDER: INFLAZIONE

La semplicità del metodo di stima Chain Ladder è dovuta essenzialmente ad un'assunzione particolarmente forte: quella dell'indipendenza, a meno di variazioni stocastiche, delle dinamiche di liquidazione dalla coorte di appartenenza.

Questa equivale ad ipotizzare l'assenza di fattori, anche esogeni, variabili in funzione dell'anno di calendario. Nella realtà si tratta di una condizione poco realistica, se non altro per la realtà dinamica del sistema economico in cui l'Impresa opera.

La causa più evidente di variabilità è sicuramente l'inflazione, che ha effetto diretto sugli importi esigibili dagli assicurati.

Il metodo tradizionale Chain Ladder può essere facilmente adattato a questa situazione mantenendo la semplicità della procedura di calcolo. Basterà infatti applicare il medesimo procedimento convertendo prima i dati in valore corrente della moneta.

In realtà lo scopo è raggiunto introducendo dei dati inflattivi che, per come sono calcolati, raccolgono non solo l'effetto dell'inflazione esogena, ma anche altri effetti diretti ed indiretti sui costi di risarcimento.

Le informazioni necessarie all'applicazione di questa variante riguardano i dati storici dei tassi di inflazione e anche i tassi attesi per i futuri  $T$  anni.

I primi sono relativamente facili da reperire, perché deducibili dai dati in possesso della Compagnia. I secondi invece richiedono accurate analisi previsionali, siano esse di natura econometrica o stocastica. Nel seguito ci limiteremo a trattare queste stime come valori noti, benché frutto di valutazioni e non di osservazioni.

Siano quindi  $i_t$ , con  $t = 0, \dots, T$ , i tassi di inflazione effettivamente registrati e  $\hat{i}_u$ , con  $u = T + 1, \dots, 2T$ , i tassi di inflazione attesi per gli anni futuri.

Il primo passo è esprimere i sinistri incrementali  $p_{i,j}$  nella stessa moneta, cioè ai prezzi correnti dell'ultimo anno di calendario trascorso. Indichiamo con  $p_{i,j}^*$  tali valori, pari a:

$$p_{i,j}^* = p_{i,j} \prod_{d=i+j}^T (1 + i_d).$$

In modo del tutto analogo al metodo Chain Ladder base si dovrà costruire dapprima il triangolo dei sinistri cumulati  $C_{ij}^*$  espressi in moneta corrente, pari a

$$C_{i,j}^* = \sum_{k=0}^j p_{i,k}^*.$$

Da esso si ricaveranno i fattori di sviluppo, alla base della proiezione dei dati storici nel triangolo inferiore:

$$m_j = \frac{\sum_{i=0}^{T-j} C_{i,j}^*}{\sum_{i=0}^{T-j} C_{i,j-1}^*}$$

La matrice così completata non contiene ancora le stime definitive, perché quelle ottenute tramite i fattori  $m_j$  non tengono ancora conto dell'inflazione futura attesa. Per completare il procedimento di proiezione occorre decumulare il triangolo ottenuto e ai valori così ottenuti applicare i tassi di inflazione attesi. In questo modo ciascun importo incrementale viene espresso nella moneta corrente al momento della liquidazione.

Solo ora si possiedono le stime dei  $\hat{p}_{i,j}^*$ , da cui è immediato ricostruire il triangolo cumulato  $\hat{C}_{i,j}^*$  e ricavare infine la stima delle riserva espressa al valore corrente di moneta per coorte di sinistri  $R_{i,T+1}^* = \hat{C}_{i,T}^* - \hat{C}_{i,T-i}^*$ .

Il risultato finale si ottiene, come noto, sommando tali stime su tutte le generazioni:

$$R^* = \sum_i R_{i,T+1}^*$$

Applichiamo il metodo appena descritto al TRIANGOLO 1 che abbiamo utilizzato come esempio anche per il metodo base.

Esprimiamo dapprima sia i sinistri incrementali sia i sinistri cumulati in termini di valore corrente al 2007, ultimo anno osservato.

Per farlo occorre reperire le informazioni sui tassi di inflazione storici ed ipotizzare altrettanti tassi di inflazione attesi, riportati qui di seguito.

$i_t$

| 2000  | 2001  | 2002  | 2003  | 2004  | 2005  | 2006  | 2007  |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2,50% | 2,70% | 2,50% | 2,70% | 2,20% | 3,80% | 3,12% | 4,50% |

$\hat{\pi}_{t,t}$

| 2008  | 2009  | 2010  | 2011  | 2012  | 2013  | 2014  |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 5,88% | 5,60% | 4,90% | 6,01% | 5,91% | 6,12% | 6,32% |

Applicando i tassi di inflazione osservati ricaviamo i triangoli dei  $p_{i,j}^*$  che seguono.

|                                |            | anno di sviluppo |           |           |           |         |         |         |         |
|--------------------------------|------------|------------------|-----------|-----------|-----------|---------|---------|---------|---------|
|                                |            | 0                | 1         | 2         | 3         | 4       | 5       | 6       | 7       |
| anno di denuncia (accadimento) | $p_{ij}^*$ | 453.309          | 947.837   | 734.712   | 566.984   | 602.819 | 642.495 | 157.699 | 146.248 |
|                                | 2000       | 435.171          | 1.063.811 | 1.096.416 | 1.352.690 | 498.589 | 345.907 | 551.555 |         |
|                                | 2001       | 349.589          | 1.176.139 | 1.058.818 | 1.137.181 | 809.082 | 153.535 |         |         |
|                                | 2002       | 364.662          | 1.266.908 | 868.208   | 1.683.648 | 284.744 |         |         |         |
|                                | 2003       | 506.603          | 775.370   | 1.068.965 | 804.115   |         |         |         |         |
|                                | 2004       | 443.095          | 1.009.807 | 885.635   |           |         |         |         |         |
|                                | 2005       | 460.669          | 937.858   |           |           |         |         |         |         |
|                                | 2006       | 359.480          |           |           |           |         |         |         |         |
| 2007                           |            |                  |           |           |           |         |         |         |         |

Da questi, sommando i valori per anni di differimento consecutivi, costruiamo il triangolo dei  $C_{ij}^*$  che segue.

|                                |            | anno di sviluppo |           |           |           |           |           |           |           |
|--------------------------------|------------|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|                                |            | 0                | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
| anno di denuncia (accadimento) | $C_{ij}^*$ | 453.309          | 1.401.146 | 2.135.858 | 2.702.843 | 3.305.661 | 3.948.156 | 4.105.855 | 4.252.102 |
|                                | 2000       | 352.118          | 1.415.929 | 2.512.345 | 3.865.035 | 4.363.624 | 4.709.531 | 5.261.086 |           |
|                                | 2001       | 290.507          | 1.466.646 | 2.525.463 | 3.662.644 | 4.471.727 | 4.625.261 |           |           |
|                                | 2002       | 310.608          | 1.577.516 | 2.445.725 | 4.129.373 | 4.414.117 |           |           |           |
|                                | 2003       | 443.160          | 1.218.530 | 2.287.495 | 3.091.610 |           |           |           |           |
|                                | 2004       | 396.132          | 1.405.939 | 2.291.574 |           |           |           |           |           |
|                                | 2005       | 440.832          | 1.378.690 |           |           |           |           |           |           |
|                                | 2006       | 359.480          |           |           |           |           |           |           |           |
| 2007                           |            |                  |           |           |           |           |           |           |           |

Riportiamo i nuovi fattori di sviluppo  $m_j$  calcolati sulla base dei sinistri espressi in moneta del 2007, che come è logico differiscono da quelli calcolati con il metodo base:

|       |        |
|-------|--------|
| $m_1$ | 3,6716 |
| $m_2$ | 1,6732 |
| $m_3$ | 1,4657 |
| $m_4$ | 1,1529 |
| $m_5$ | 1,0941 |
| $m_6$ | 1,0819 |
| $m_7$ | 1,0356 |

Tramite i fattori appena calcolati completiamo il triangolo dei sinistri cumulati, esprimendo in questo modo i risarcimenti stimati futuri in moneta corrente del 2008.

|                                |      | anno di sviluppo |           |           |           |           |           |           |           |
|--------------------------------|------|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $C_{ij}$                       |      | 0                | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
| anno di denuncia (accadimento) | 2000 | 453.309          | 1.401.146 | 2.135.858 | 2.702.843 | 3.305.661 | 3.948.156 | 4.105.855 | 4.252.102 |
|                                | 2001 | 352.118          | 1.415.929 | 2.512.345 | 3.865.035 | 4.363.624 | 4.709.531 | 5.261.086 | 5.473.497 |
|                                | 2002 | 290.507          | 1.466.646 | 2.525.463 | 3.662.644 | 4.471.727 | 4.625.261 | 5.044.358 | 5.248.019 |
|                                | 2003 | 310.608          | 1.577.516 | 2.445.725 | 4.129.373 | 4.414.117 | 4.851.023 | 5.290.576 | 5.504.178 |
|                                | 2004 | 443.160          | 1.218.530 | 2.287.495 | 3.091.610 | 3.582.845 | 3.937.473 | 4.294.248 | 4.467.625 |
|                                | 2005 | 396.132          | 1.405.939 | 2.291.574 | 3.391.548 | 3.930.441 | 4.319.474 | 4.710.863 | 4.901.059 |
|                                | 2006 | 440.832          | 1.378.690 | 2.308.521 | 3.416.629 | 3.959.508 | 4.351.417 | 4.745.700 | 4.937.304 |
|                                | 2007 | 359.480          | 1.225.010 | 2.051.194 | 3.035.784 | 3.518.149 | 3.866.373 | 4.216.706 | 4.386.952 |

Abbiamo visto però che queste stime non sono accurate, perché tengono conto solo dell'inflazione passata e non di quella futura stimata. Occorre pertanto decumulare il triangolo appena ottenuto, applicarvi i tassi di inflazione futura esprimendo ciascuna grandezza nella moneta corrente nell'anno  $i + j$ . Per non appesantire eccessivamente

l'esposizione non riportiamo questi calcoli intermedi, ma solo il triangolo cumulato definitivo che riporta i  $\hat{C}_{i,j}^*$ .

|                                |      | anno di sviluppo |           |           |           |           |           |           |           |
|--------------------------------|------|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $C_{ij}^*$                     |      | 0                | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
| anno di denuncia (accadimento) | 2000 | 453.309          | 947.837   | 734.712   | 566.984   | 602.819   | 642.495   | 157.699   | 146.248   |
|                                | 2001 | 352.118          | 1.063.811 | 1.096.416 | 1.352.690 | 498.589   | 345.907   | 551.555   | 791.216   |
|                                | 2002 | 290.507          | 1.176.139 | 1.058.818 | 1.137.181 | 809.082   | 153.535   | 654.357   | 884.145   |
|                                | 2003 | 310.608          | 1.266.908 | 868.208   | 1.683.648 | 284.744   | 838.227   | 1.363.495 | 1.604.499 |
|                                | 2004 | 443.160          | 775.370   | 1.068.965 | 804.115   | 1.456.918 | 1.906.168 | 2.332.517 | 2.528.135 |
|                                | 2005 | 396.132          | 1.009.807 | 885.635   | 2.429.247 | 3.145.383 | 3.638.219 | 4.105.930 | 4.320.526 |
|                                | 2006 | 440.832          | 937.858   | 2.319.430 | 3.874.458 | 4.595.889 | 5.092.370 | 5.563.540 | 5.779.723 |
|                                | 2007 | 359.480          | 1.645.512 | 2.873.084 | 4.181.503 | 4.792.576 | 5.208.705 | 5.603.981 | 5.784.992 |

Rimangono solo gli ultimi calcoli per ottenere le stime della riserva per generazione. Anzitutto il primo valore riferito alla generazione di sinistri del 2000 è espresso già in valore di moneta corrente al 2007, perché calcolato alla fine dell'ultimo esercizio, che è appunto il 2007. Questo valore però esprime le somme necessarie ai risarcimenti che avverranno nel futuro, e che quindi, per coerenza, devono essere espresse nel valore corrente al momento in cui saranno pagate. Scegliamo di convertire questo ammontare in unità monetarie valide due anni più tardi.

Per le generazioni successive la stima della riserva si ottiene invece secondo la stessa logica del modello base. Per effetto delle conversioni eseguite ciascuna riserva per generazione esprime le risorse per fare fronte ai risarcimenti futuri valorizzati all'effettiva epoca di pagamento. Un simile risultato non sarebbe stato possibile agendo direttamente sulle stime delle riserve ottenute con il metodo base, perché così facendo non si sarebbe tenuto conto delle diverse epoche in cui si ipotizzano le liquidazioni dei sinistri ancora aperti al momento della valutazione.

Sommiamo infine i risultati ottenuti per ottenere la stima della riserva sinistri complessiva, riportata di seguito.

|       | $R^*_i$    |
|-------|------------|
| 2000  | 75.181     |
| 2001  | 239.661    |
| 2002  | 730.610    |
| 2003  | 1.319.755  |
| 2004  | 1.724.020  |
| 2005  | 3.434.891  |
| 2006  | 4.841.865  |
| 2007  | 5.425.512  |
| $R^*$ | 17.791.494 |

Non sorprende osservare che la riserva stimata tenendo conto dell'inflazione è più alta di quella ottenuta con il metodo base. Il valore  $R^*$  non è però necessariamente quello da iscriversi a bilancio. Infatti, scegliendo di tenere conto del valore temporale del denaro, non deve sfuggire il rovescio della medaglia, vale a dire la remunerazione delle risorse impiegate nelle riserve tecniche. Il tasso previsto può essere usato infatti per scontare le stime ottenute, fornendo un dato più rappresentativo delle effettive passività da mettere a bilancio.

L'integrazione della procedura standard per tenere conto dell'inflazione affina i risultati del Chain Ladder, anche se ciò la rende più sensibile alle ipotesi adottate. Ci riferiamo alla stima dei tassi di inflazione e al ben noto problema dell'inflazione superimposta.

Con questo termine si indica il fenomeno per cui si verifica sistematicamente una differenza positiva tra i tassi di incremento dei risarcimenti e gli indici dei prezzi al consumo o analoghi indicatori dell'inflazione economica.

Chiaramente un fenomeno di questo tipo rende ancora più complesso il già delicato compito di stimare l'andamento dei costi futuri e di un opportuno indice che ne esprima il progredire negli anni.

#### VARIANTI AL METODO CHAIN LADDER: COSTO MEDIO

Un'altra variante comune del metodo base fa riferimento al costo medio dei sinistri pagati. Con questa tecnica scorporiamo l'effetto della frequenza sinistri dalla dinamica dei risarcimenti, sviluppando i calcoli sulla base del triangolo dei costi medi per sinistro.

Siano  $n_i, i = 0, \dots, T$ , il numero di sinistri denunciati con seguito nell'anno  $i$ -esimo.

Il primo passo è quello di costruire il triangolo di run-off dei costi medi  $s_{ij}$  a partire dal triangolo dei sinistri incrementali  $p_{ij}$ :

$$s_{ij} = \frac{p_{ij}}{n_i}, \text{ con } i = 0, \dots, T \text{ e } j = 0, \dots, T - i$$

A questo punto si applica la procedura, ormai nota, del metodo base.

Si costruisce quindi il triangolo dei costi medi cumulati  $S_{ij}$  tali che

$$S_{i,j} = \sum_{h=0}^j s_{i,h}, \text{ con } i = 0, \dots, T \text{ e } j = 0, \dots, T - i.$$

La proiezione nel triangolo inferiore avviene sempre secondo una logica link ratio. Tuttavia in questa versione si introduce spesso una variante, efficace proprio per la trasformazione della base dei dati in costi medi per generazione.

Anziché stimare i fattori di sviluppo  $m_j$  come rapporti dei totali cumulati di anni di differimento successivi, si calcolano i coefficienti di incremento  $d_{ij}$ , specifici di ogni generazione, rapportando i costi medi cumulati ad anni di differimento consecutivi:

$$d_{ij} = \frac{S_{i,j}}{S_{i,j-1}}.$$

La tecnica base ipotizza rapporti costanti negli anni tra valori di colonne consecutive, a meno di variazioni aleatorie. Questa assunzione non viene rimossa in questa sede, ma il modo in cui è determinato il valore di tale rapporto è affinato tramite l'introduzione di un sistema di pesi  $w_{ij}$ .

Infatti il fattore di sviluppo  $m_j^\circ$  costante per il generico anno di sviluppo  $j$ -esimo è determinato quale media ponderata dei  $T$  coefficienti di proporzionalità  $d_{ij}$ :

$$m_j^\circ = \frac{\sum_{i=0}^{T-j} w_{ij} \cdot d_{i,j}}{\sum_{i=0}^{T-j} w_{ij}}.$$

Abbiamo già dimostrato che anche i fattori di sviluppo del Chain Ladder classico si possono interpretare come una media ponderata dei coefficienti di proporzionalità per generazione, pesati con i sinistri cumulati  $C_{i,j}$ .

La novità sta nell'aver introdotto un sistema di pesi arbitrario, che la Compagnia può determinare in base alla credibilità dei diversi coefficienti di proporzionalità. Ad esempio, potrà scegliere di attribuire maggiore rilevanza dei dati più recenti, riferiti quindi alle ultime righe della matrice, rispetto all'esperienza passata più lontana. Sulla stessa linea potrà invece optare per un sistema di pesi  $w_{ij} = (i + j)^2$  per privilegiare le informazioni più recenti in termini di periodo di calendario.

Superata l'assegnazione del sistema di pesi più adeguato si procede proiettando i dati storici nel triangolo inferiore, secondo la nota relazione

$$\hat{S}_{i,k}^\circ = S_{i,j} \cdot \prod_{h=0}^{T-k} m_{j+h+1}^\circ, \text{ con } k = j + 1, \dots, T.$$

Decumuliamo infine la matrice ora completa dei costi medi cumulati per tornare ai dati dei costi medi incrementali  $\hat{s}_{i,k}^\circ$ . Questo passaggio è necessario per poter ricostruire le stime dei sinistri incrementali: intuitivamente essi saranno dati da  $\hat{p}_{i,k}^\circ = \hat{s}_{i,k}^\circ \cdot n_i$ .

La stima della riserva sinistri è immediata; basterà infatti ricostruire la matrice cumulata dei  $\hat{C}_{i,k}^\circ = \sum_{k=0}^j \hat{p}_{i,k}^\circ$  e per ciascuna generazione sottrarre ai sinistri cumulati stimati per l'anno di sviluppo  $T$  l'ultimo valore cumulato noto, ottenendo  $R_{i,T+1}^\circ = \hat{C}_{i,T}^\circ - \hat{C}_{i,T-i}^\circ$ .

Valgono le stesse osservazioni a proposito dell'ammontare della riserva per la generazione di etichetta 0 fatte nei paragrafi precedenti.

Infine l'importo totale da iscrivere a riserva è dato dalla somma di queste ultime stime su tutte le generazioni, ovvero:

$$R^\circ = \sum_i R_{i,T+1}^\circ.$$

Anche in questa occasione ripercorriamo la procedura attraverso l'applicazione al **TRIANGOLO 1**.

Sia data la seguente distribuzione del numero di sinistri denunciati con seguito:

| $i$  | $n_i$ |
|------|-------|
| 2000 | 5.426 |
| 2001 | 5.460 |
| 2002 | 5.584 |
| 2003 | 5.190 |
| 2004 | 4.448 |
| 2005 | 4.576 |
| 2006 | 4.619 |
| 2007 | 4.672 |

Disponendo di queste informazioni potremo scorporare l'effetto dell'andamento del numero dei sinistri sull'ammontare delle liquidazioni, evitando quindi di dover formulare ipotesi a priori sull'evolvere dei sinistri.

Abbiamo già sottolineato la difficoltà che insorge nel fare assunzioni circa l'inflazione sinistri. Il numero dei sinistri è chiaramente un fattore di tale grandezza. Notiamo, in questo esempio, un andamento privo di trend nel numero di sinistri denunciati con seguito, come si evince dalla rappresentazione grafica riportata sotto. In questo caso quindi difficilmente si potrebbe formulare un'ipotesi veritiera.

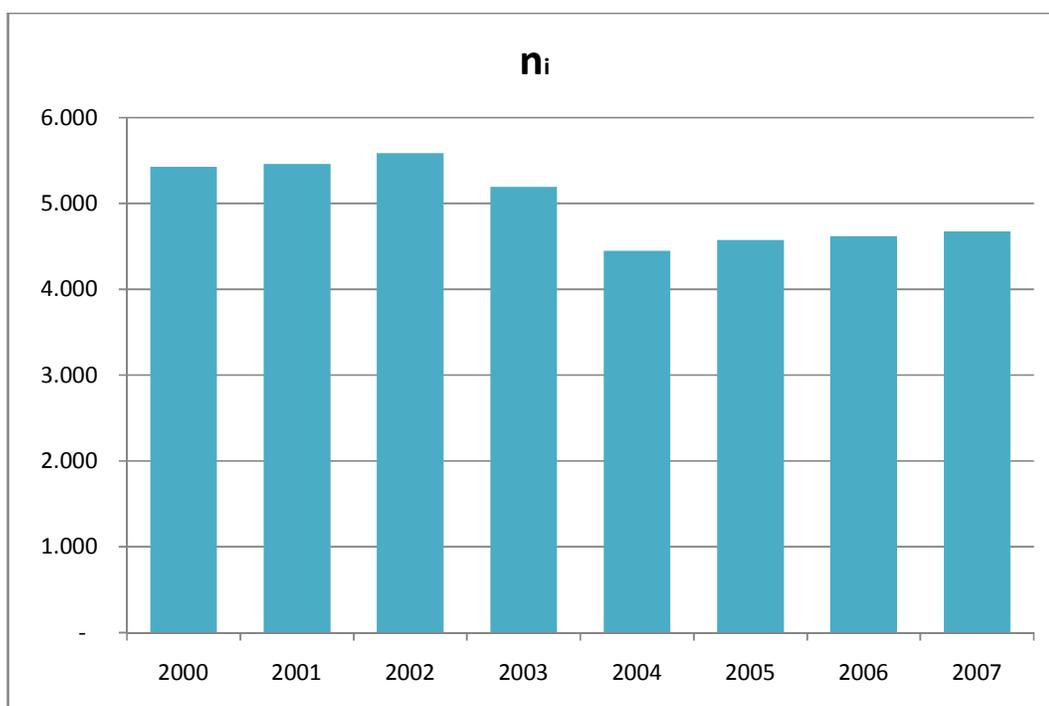


GRAFICO 1

Costruiamo anzitutto I triangoli dei costi medi incrementali e cumulati, che riportiamo qui di seguito.

|                                |      | anno di sviluppo |        |        |        |        |        |       |       |        |
|--------------------------------|------|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|--------|
| $s_{ij}$                       |      | 0                | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6     | 7     | $R_i$  |
| anno di denuncia (accadimento) | 2000 | 65,95            | 141,35 | 112,52 | 89,00  | 97,19  | 105,86 | 26,97 | 25,79 | 67,948 |
|                                | 2001 | 64,49            | 161,91 | 171,04 | 216,72 | 81,64  | 58,79  | 96,67 |       |        |
|                                | 2002 | 52,02            | 179,41 | 165,87 | 182,07 | 134,46 | 26,31  |       |       |        |
|                                | 2003 | 59,85            | 213,54 | 149,55 | 301,04 | 52,50  |        |       |       |        |
|                                | 2004 | 99,63            | 155,84 | 223,02 | 173,00 |        |        |       |       |        |
|                                | 2005 | 86,57            | 204,78 | 185,20 |        |        |        |       |       |        |
|                                | 2006 | 95,44            | 183,51 |        |        |        |        |       |       |        |
|                                | 2007 | 76,94            |        |        |        |        |        |       |       |        |

|                                |      | anno di sviluppo |        |        |        |        |        |        |        |        |
|--------------------------------|------|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $s_{ij}$                       |      | 0                | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | $R_i$  |
| anno di denuncia (accadimento) | 2000 | 65,95            | 207,30 | 319,82 | 408,82 | 506,01 | 611,87 | 638,84 | 664,63 | 67,948 |
|                                | 2001 | 64,49            | 226,40 | 397,44 | 614,16 | 695,80 | 754,59 | 851,26 |        |        |
|                                | 2002 | 52,02            | 231,43 | 397,30 | 579,37 | 713,82 | 740,14 |        |        |        |
|                                | 2003 | 59,85            | 273,38 | 422,94 | 723,98 | 776,48 |        |        |        |        |
|                                | 2004 | 99,63            | 255,47 | 478,49 | 651,49 |        |        |        |        |        |
|                                | 2005 | 86,57            | 291,35 | 476,55 |        |        |        |        |        |        |
|                                | 2006 | 95,44            | 278,95 |        |        |        |        |        |        |        |
|                                | 2007 | 76,94            |        |        |        |        |        |        |        |        |

Sulla base di quest'ultimo calcoliamo i coefficienti di proporzionalità:

|                                |      | anno di sviluppo |        |        |        |        |        |        |        |
|--------------------------------|------|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $d_{ij}$                       |      | 0                | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      |
| anno di denuncia (accadimento) | 2000 |                  | 3,1432 | 1,5428 | 1,2783 | 1,2377 | 1,2092 | 1,0441 | 1,0404 |
|                                | 2001 |                  | 3,5106 | 1,7555 | 1,5453 | 1,1329 | 1,0845 | 1,1281 |        |
|                                | 2002 |                  | 4,4485 | 1,7167 | 1,4583 | 1,2321 | 1,0369 |        |        |
|                                | 2003 |                  | 4,5680 | 1,5471 | 1,7118 | 1,0725 |        |        |        |
|                                | 2004 |                  | 2,5642 | 1,8730 | 1,3615 |        |        |        |        |
|                                | 2005 |                  | 3,3656 | 1,6357 |        |        |        |        |        |
|                                | 2006 |                  | 2,9228 |        |        |        |        |        |        |
|                                | 2007 |                  |        |        |        |        |        |        |        |

Naturalmente non esistono i coefficienti per i sinistri liquidati entro l'anno di denuncia, poiché questi ultimi sono dati già noti alla Compagnia al momento della valutazione; pertanto non esiste alcun interesse a determinare dei parametri utili alla loro stima.

Per il calcolo dei fattori di sviluppo  $m_j^\circ$  scegliamo di applicare il sistema di pesi tale per cui  $w_{ij} = (i + j)^2$ . Ne risulta il seguente sistema di fattori  $m_j^\circ$ :

| $j$  | $m_j^\circ$ |
|------|-------------|
| 2000 | -           |
| 2001 | 3,2771      |
| 2002 | 1,6956      |
| 2003 | 1,4891      |
| 2004 | 1,1511      |
| 2005 | 1,0916      |
| 2006 | 1,0925      |
| 2007 | 1,0404      |

Tralasciamo di riportare tutti i calcoli intermedi che portano dapprima alla proiezione dei costi medi incrementali con il completamento della matrice dei  $\hat{S}_{i,k}^\circ$ , successivamente alla decumulazione di questi ultimi con la costruzione della matrice dei  $\hat{S}_{i,k}^\circ$  ed infine, attraverso la  $\hat{p}_{i,k}^\circ = \hat{S}_{i,k}^\circ \cdot n_i$ , alla matrice dei sinistri incrementali.

Riproduciamo nel seguito solo la matrice dei sinistri cumulati completata con le stime per il triangolo inferiore ottenendo cumulando la sopracitata matrice dei  $\hat{p}_{i,k}^\circ$ .

Dall'immediato confronto con le corrispondenti stime ottenute con il Chain Ladder base non emerge alcun comportamento sistematico. Infatti l'introduzione della valutazione al costo medio per generazione non comporta a priori stime più basse o più alte, com'è invece il caso della variante dell'inflazione. Nel paragrafo precedente abbiamo riscontrato infatti stime maggiori, come è naturale, data la crescita del costo sinistri prevista per gli anni futuri.

|                                |      | anno di sviluppo |           |           |           |           |           |           |           |        |
|--------------------------------|------|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------|
| $C_{ij}^\circ$                 |      | 0                | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         | $R_i$  |
| anno di denuncia (accadimento) | 2000 | 357.848          | 1.124.788 | 1.735.330 | 2.218.270 | 2.745.596 | 3.319.994 | 3.466.336 | 3.606.286 | 67.948 |
|                                | 2001 | 352.118          | 1.236.139 | 2.170.033 | 3.353.322 | 3.799.067 | 4.120.063 | 4.647.867 | 4.835.520 |        |
|                                | 2002 | 290.507          | 1.292.306 | 2.218.525 | 3.235.179 | 3.985.995 | 4.132.918 | 4.515.287 | 4.697.588 |        |
|                                | 2003 | 310.608          | 1.418.858 | 2.195.047 | 3.757.447 | 4.029.929 | 4.399.146 | 4.806.146 | 5.000.190 |        |
|                                | 2004 | 443.160          | 1.136.350 | 2.128.333 | 2.897.821 | 3.335.596 | 3.641.199 | 3.978.076 | 4.138.687 |        |
|                                | 2005 | 396.132          | 1.333.217 | 2.180.715 | 3.247.256 | 3.737.821 | 4.080.275 | 4.457.774 | 4.637.753 |        |
|                                | 2006 | 440.832          | 1.288.463 | 2.184.724 | 3.253.227 | 3.744.693 | 4.087.777 | 4.465.970 | 4.646.280 |        |
|                                | 2007 | 359.480          | 1.178.049 | 1.997.506 | 2.974.443 | 3.423.794 | 3.737.478 | 4.083.262 | 4.248.119 |        |

Siamo ora in grado di fornire le stime della riserva sinistri per generazione e, dalla loro somma, l'ammontare complessivo da porre a riserva:

|             | $R^{\circ}_i$ |
|-------------|---------------|
| 2000        | 67.948        |
| 2001        | 187.653       |
| 2002        | 564.670       |
| 2003        | 970.261       |
| 2004        | 1.240.866     |
| 2005        | 2.457.038     |
| 2006        | 3.357.817     |
| 2007        | 3.888.639     |
| $R^{\circ}$ | 12.734.891    |

In questo caso l'importo complessivo è di poco inferiore (meno del 2%) a quello stimato dal metodo base.

Di seguito confrontiamo i risultati delle stime della riserva sinistri per generazione ottenute con le tre varianti del Chain Ladder.

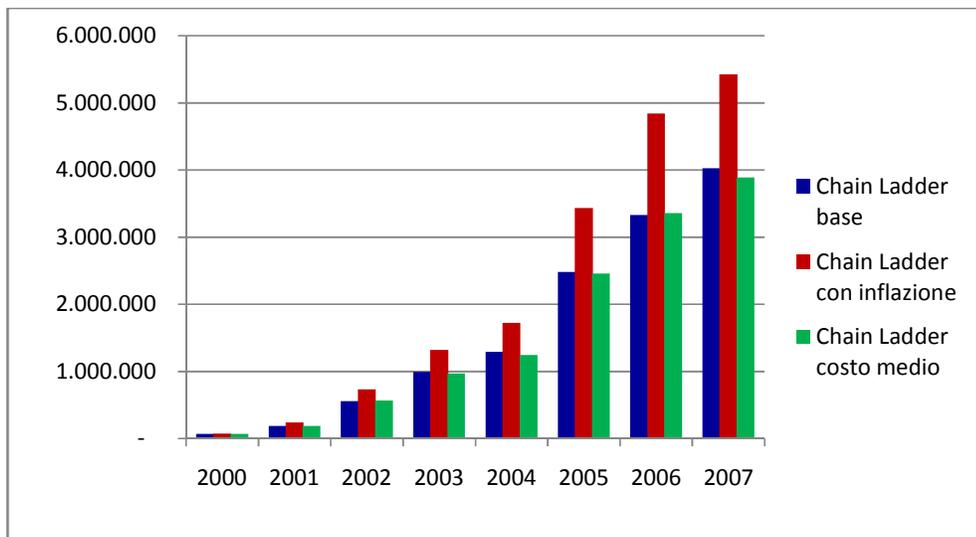


GRAFICO 2

Abbiamo già notato come l'inclusione della variabile inflazione riconsegna stime più alte che nel metodo base. In tutti e tre i casi l'andamento è crescente, perché le generazioni più recenti hanno chiaramente un maggior numero di sinistri ancora aperti al momento di valutazione.

Inoltre le stime che si ottengono includendo l'inflazione crescono negli anni in modo convesso. Il motivo più evidente è che tali importi dipendono direttamente dai sinistri cumulati espressi in unità monetarie diverse. Nell'ipotesi di inflazione sempre positiva tali riferimenti saranno senz'altro crescenti. È naturale pertanto che la riserva sinistri cresca più velocemente al progredire dell'anno di generazione.

#### IL METODO FISHER-LANGE

Al pari del precedente, il metodo Fisher-Lange utilizza le informazioni sui dati medi, siano essi risarcimenti medi, nel caso in cui la base di dati riguardi i sinistri liquidati, oppure costi medi dei sinistri, nel caso invece la base di dati riguardi i sinistri dichiarati.

Le informazioni necessarie non sono diverse da quelle alla base del Chain Ladder; esse riguardano anzitutto il triangolo dei sinistri incrementali  $p_{ij}$  o il corrispondente triangolo

cumulato  $C_{ij} = \sum_{k=0}^j p_{i,k}$ .

In secondo luogo è necessario disporre della distribuzione del numero di sinistri  $n_{i,j}$  per anno di generazione (o di denuncia, a seconda della natura della base di dati) e per anno di sviluppo.

Inoltre occorre conoscere il numero cumulato dei sinistri relativi alla  $i$ -esima generazione complessivamente liquidati fino al  $j$ -esimo anno di sviluppo, che nel seguito indichiamo con  $n_{ij}^C$ .

Infine servono i numeri dei sinistri riservati per generazione e anno di sviluppo  $n_{ij}^R$ .

Questo metodo mira a separare l'effetto del risarcimento medio dalla velocità di liquidazione dei sinistri.

Con una certa analogia con l'ipotesi fondamentale del Chain Ladder, si assume che l'evolvere di entrambi gli effetti, appunto costo medio e velocità di liquidazione, non dipenda dall'anno di generazione  $i$ , ma solo dall'anno di differimento  $j$ .

Si stimano due ordini di fattori. Il primo, indicato con  $q_i$ , per  $i = 0, \dots, T$ , rappresenta l'evoluzione del risarcimento medio al variare della generazione di appartenenza.

Il secondo coglie invece l'evoluzione della velocità di liquidazione dei sinistri al progredire dell'anno di differimento. Indichiamo i parametri appartenenti a questo gruppo di fattori con  $v_j$ , per  $j = 0, \dots, T$ .

Il nodo centrale di questo metodo consiste nel determinare la velocità di liquidazione futura sulla base dei dati storici, secondo un approccio per altro simile a quello utilizzato per le stime dei fattori di sviluppo del Chain Ladder.

In base a quest'ultima si può calcolare il numero delle liquidazioni future e valorizzarle al risarcimento medio (o alternativamente al costo medio) per individuare l'ammontare che la Compagnia deve accantonare a riserva.

I parametri che descrivono la velocità di liquidazione sono stimati sulla base degli ultimi dati osservati per ciascun anno di differimento e normalizzati in base al numero di sinistri registrati nell'ultimo anno osservato. In formule:

$$v_j = \frac{n_{T-j,j}}{\sum_j n_{T-j,j}} \cdot \frac{m_T^\circ}{m_{T-j}^\circ}$$

essendo  $m_T^\circ$  gli stessi definiti nel paragrafo precedente.

Siano inoltre  $\alpha_j$  l'aliquota dei sinistri con seguito liquidati con  $j$  anni di differimento sul numero totale dei sinistri riservati per il medesimo anno di sviluppo.

Il triangolo del numero stimato dei sinistri liquidati si stima come prodotto tra l'ultimo numero di sinistri riservati, l'aliquota dell'anno di sviluppo corrispondente di cui al capoverso precedente e il parametro di velocità stimato. In formule si ha

$$\hat{n}_{i,j} = n_{ij}^R \cdot \alpha_j \cdot v_j.$$

A seconda della generazione di appartenenza si moltiplica il numero atteso per il risarcimento medio (o costo medio) per ottenere la matrice dei risarcimenti attesi (o dei costi sinistri attesi).

Da quest'ultimo si ricaverà l'ammontare dell'accantonamento necessario in modo perfettamente analogo ai metodi descritti sopra.

Questo metodo non è solitamente utilizzato per determinare l'importo della riserva da mettere a bilancio, ma piuttosto ai fini del controllo.

Il punto debole del modello sta soprattutto nella distorsione che può insorgere nel caso in cui i calcoli si basino unicamente sui dati più recenti.

In particolare le aliquote  $\alpha_j$  richiedono una base di dati sufficientemente numerosa, perché più esposte a fattori di distorsione sia esogeni (aumento della sinistralità, ad esempio) sia endogeni (tra cui anche errori di riservazione).

## IL METODO BORNHUETTER-FERGUSON

Questo metodo combina l'utilizzo di informazioni sul *loss ratio* con una tecnica standard di proiezione, ad esempio quella del Chain Ladder classico, per stimare gli importi necessari da porre a riserva.

Così come l'approccio del costo medio, anche il metodo in esame studia l'evolversi degli importi medi liquidati separando le informazioni sul numero di sinistri. La novità consiste nel confrontare la dinamica così individuata con l'andamento tecnico del portafoglio.

Come già accennato, gli autori individuano nel *loss ratio* l'indicatore ideale delle perdite tecniche conseguite dai contratti della collettività in esame. Tale grandezza è definita in questo contesto come rapporto tra l'ammontare riconducibile ai risarcimenti dovuti per i sinistri accaduti in una data unità temporale e i rispettivi premi di competenza.

Esistono tuttavia definizioni alternative che coinvolgono l'ammontare pagato o i premi emessi e contabilizzati. Inoltre il metodo si può applicare ricorrendo anche ad altri rapporti significativi, ad esempio il *combined ratio*<sup>2</sup> o il *trading ratio*<sup>3</sup>, con opportuni aggiustamenti della procedura.

A meno di distorsioni dovute a sinistralità eccezionali, in occasione ad esempio di calamità naturali, crisi economiche, terrorismo o altri eventi catastrofici, è ragionevole aspettarsi una certa consistenza degli andamenti tecnici complessivi registrati di anno in anno.

Escludendo questi casi, comunque impossibili da prevedere, esiste un altro evidente fattore esogeno che ha influenza sul comportamento del *loss ratio*. La teoria economica delle imprese di assicurazione lo definisce come ciclo di mercato. Con questo termine ci si riferisce ai movimenti dei tassi di premio dettati dall'incontro di domanda e offerta

---

<sup>2</sup> Si definisce *combined ratio* il rapporto tra il totale di somme per sinistri accaduti e spese di gestione sui premi di competenza.

<sup>3</sup> Il *trading ratio* prende in considerazione il ritorno degli investimenti delle riserve e dei premi incassati.

assicurativa, qualora su queste ultime agiscano le aspettative degli attori del mercato sulla capacità delle imprese di assumere particolari rischi.

La procedura di questo metodo inizia con la stima dei fattori di sviluppo del Chain Ladder base,  $m_j$ , eventualmente applicato al triangolo dei sinistri cumulati aggiustati all'inflazione.

Utilizzando le informazioni sul *loss ratio* si ottengono delle stime iniziali degli importi cumulati all'ultimo anno di sviluppo per ogni generazione di sinistri. In altre parole si ottengono dei valori di stima dell'ultima colonna della matrice di run-off.

Siano  $P_i$  i premi di competenza per la generazione  $i$ -esima ed  $r_i$  il corrispondente *loss ratio*. Le stime iniziali degli importi cumulati all'ultimo anno di sviluppo sono date dalla

$$U_i^I = r_i \cdot P_i$$

Queste prime valutazioni sono indipendenti dal modo in cui evolveranno i sinistri negli anni successivi a quello di accadimento.

A questo punto per ciascuna coorte si ricavano i risarcimenti cumulati all'ultimo anno di sviluppo osservabile (collocato cioè sulla diagonale del triangolo) tali che, se proiettati attraverso i fattori di sviluppo di cui sopra, l'ultima stima dei sinistri cumulati risulti esattamente uguale all'importo stimato tramite le informazioni sul *loss ratio*.

Operativamente si tratta di applicare i fattori di sviluppo  $m_j$  a ritroso, a partire dalle  $U_i^I$  stimate. In formule si ha

$$U_i = C_{i,T-i+1} + \left(1 + \frac{1}{m_{T-i+1}}\right) \cdot U_i^I$$

La valutazione della riserva per ciascuna generazione è quindi ottenuta come differenza tra le stime appena ricavate e gli importi cumulati osservati nelle corrispondenti posizioni:

$$R_i = U_i - C_{i,T-i}$$

Alla quantità così ottenuta vengono sommati ulteriori accantonamenti aggiuntivi per i sinistri non ancora liquidati dopo il massimo differimento  $T$ . Si tratta di somme valutate esternamente dalla Compagnia, cui abbiamo già accennato in termini di  $R_{(0,T+1)}$ .



---

### 3. MODELLI LINEARI GENERALIZZATI

#### INTRODUZIONE AI MODELLI LINEARI GENERALIZZATI

I modelli lineari generalizzati (GLM) sono una classe di modelli di regressione, volti a studiare l'impatto di variabili esplicative, dette covariate, su una variabile risposta. Essi estendono i modelli lineari tradizionali, superando alcuni limiti di questi ultimi, ad esempio quando la natura della variabile risposta impone delle limitazioni ai possibili valori dell'output.

Trattandosi di modelli di regressione sono applicabili anche ad informazioni riguardanti i singoli contratti assicurativi, a differenza dei metodi deterministici illustrati nel capitolo 2 dove necessariamente si deve disporre di dati aggregati per essere rappresentati dalla matrice di run-off. Pertanto consentono, eventualmente, di utilizzare al meglio l'informazione disponibile a livello di singolo sinistro.

La classe dei GLM comprende i modelli con predittore lineare, in cui si ipotizza che la variabile risposta segua una distribuzione facente parte della famiglia esponenziale.

Tale famiglia comprende le distribuzioni dipendenti da un vettore di  $k$  parametri reali  $\boldsymbol{\theta}$  la cui distribuzione di probabilità o funzione di densità sia riconducibile alla forma seguente:

$$f(y; \boldsymbol{\theta}) \propto h(y) \cdot \exp \left\{ \sum_{j=1}^k \eta_j(\boldsymbol{\theta}) u_j(y) \right\}$$

in cui  $h(y)$  è una funzione non negativa che non dipende dal parametro  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $\eta_j(\boldsymbol{\theta})$  rappresentano delle funzioni reali del parametro  $\boldsymbol{\theta}$ , denominate parametri canonici ed infine  $u_j(x)$  sono funzioni reali di  $y$ .

Alla famiglia esponenziale appartengono, tra le altre, la distribuzione Gaussiana, la Binomiale, la Poisson, la Gamma e la Geometrica. Per ciascuna di esse il supporto non dipende dal parametro naturale  $\theta$ .

Nel caso in cui il vettore  $\theta$  sia ridotto ad una sola dimensione indicheremo con  $\theta$  l'unico parametro della distribuzione.

È possibile adottare la seguente notazione alternativa, usata ad esempio Hardin e Hilbe (2007), per indicare la forma canonica della famiglia esponenziale monoperametrica:

$$f_y(y; \theta, \phi) \propto \exp\left\{\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)}\right\},$$

dove  $\phi$  è un parametro di scala, necessario affinché gli errori standard seguano a loro volta una distribuzione appartenente alla famiglia esponenziale, nel seguito chiamato parametro di dispersione.

La funzione  $b(\theta)$  è detta funzione cumulante; essa caratterizza una famiglia di distribuzioni in base alla forma assunta (ad esempio tutte le Poisson, tutte le Gamma, ...)

Per le distribuzioni appartenenti alla famiglia esponenziale sussiste inoltre una precisa relazione tra valore atteso  $E(Y_i) = \mu_i$  e varianza  $\text{var}(Y_i)$ ; con riferimento all'  $i$ -esima unità statistica, con  $i = 1, \dots, n$ , vale infatti:

$$\text{var}(Y_i) = \alpha(\phi_i) \cdot V(\mu_i),$$

dove  $V(\cdot)$  è la funzione di varianza definita dalla derivata seconda della funzione generatrice dei cumulanti<sup>1</sup>  $\psi''\left(\frac{1}{b'(\mu)}\right)$ .

Spesso  $\alpha(\phi_i) = \phi/\omega_i$ , indicando con  $\omega_i$  il peso assegnato alla  $i$ -esima osservazione.

---

<sup>1</sup> Si definisce funzione generatrice dei cumulanti  $\psi(s)$  di una variabile aleatoria  $Y$  la quantità  $\ln[E(e^{sY})]$ , la cui derivata di ordine  $k$  calcolata in 0 restituisce il cumulante  $k$ -esimo.

A titolo di esempio, per la distribuzione gaussiana si dimostra che vale  $V(\mu_i) = 1$ , per una bernoulliana  $V(\mu_i) = \mu_i(1 - \mu_i)$ , che per una binomiale con  $k$  prove indipendenti diventa  $V(\mu_i) = \mu_i \left(1 - \frac{\mu_i}{k}\right)$ ; tra le distribuzioni per le quali la  $V(\mu_i)$  assume la forma di potenza, citiamo la distribuzione di Poisson, per la quale si ha  $V(\mu_i) = \mu_i$ , e la distribuzione Gamma di parametri  $r$  e  $\lambda$ , dove vale  $V(\mu_i) = \mu_i^2$  con  $\mu_i = r / \lambda$ .

Definiamo  $\mathbf{x}_i$  il vettore contenente le determinazioni di  $k$  variabili esplicative per l' $i$ -esima unità statistica; sia  $\mathbf{X}$  la matrice di regressione di ordine  $n \times k$  data dall'accostamento per riga di tali vettori.

Nell'ambito dei GLM solitamente non sono oggetto di stima direttamente i  $\theta_j$ , quanto piuttosto un vettore di parametri  $\boldsymbol{\beta}$  di dimensione  $p$ , detto vettore dei parametri di regressione, tale che la sua combinazione lineare con le variabili esplicative  $\mathbf{x}_i$  risulti essere pari ad una prescelta funzione del valore atteso  $\mu_i$ :

$$g(\mu_i) = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}$$

La funzione  $g(\cdot)$ , supposta invertibile, è detta funzione legame (o funzione link) e, insieme alla legge di distribuzione della variabile risposta, caratterizza un modello lineare generalizzato. La scelta della funzione link deve essere coerente con le caratteristiche della variabile risposta e del suo codominio.

Data la matrice di regressione  $\mathbf{X}$  ed il vettore di parametri  $\boldsymbol{\beta}$ , si definisce previsore lineare il vettore  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ , che sappiamo essere il vettore dei parametri canonici per le assunzioni fatte circa l'appartenenza della variabile risposta alla famiglia esponenziale. Pertanto, con riferimento all' $i$ -esima unità statistica, si ha

$$\mu_i = g^{-1}(\eta_i).$$

Dapprima si dovrà stimare il vettore dei parametri  $\boldsymbol{\beta}$ .

Successivamente si ricaveranno da tali stime i parametri canonici, in base alla relazione

$$\eta_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}.$$

Infine i parametri naturali si otterranno dalla funzione cumulante  $b(\theta)$ , valendo la relazione

$$\mu_i = g^{-1}(\eta_i) = g^{-1}(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})$$

e la definizione

$$\theta_j = \left( b'(\mu_i) \right)^{-1}.$$

Per la stima del vettore di parametri  $\boldsymbol{\beta}$  si ricorre al metodo della massima verosimiglianza tramite opportuni algoritmi di calcolo illustrati brevemente nel seguito.

Il parametro di dispersione  $\phi$  è in genere noto. È ad esempio il caso della distribuzione di Poisson, in cui  $\phi = 1$ . Talvolta si rende opportuno stimarlo col metodo della massima verosimiglianza. Esistono in letteratura stimatori consistenti per i quali si rimanda a successivi paragrafi.

Nell'ambito della statistica assicurativa i GLM sono ampiamente utilizzati, oltre che per la tariffazione, anche in fase di determinazione della riserva sinistri; in questo caso con le  $n$  realizzazioni della variabile risposta  $Y$  ( $y_i; i = 1 \dots n$ ) si descrivono solitamente l'ammontare dei pagamenti incrementali, o anche il numero di pagamenti o di sinistri denunciati. Tra le variabili esplicative sono frequentemente incluse i parametri tariffari, variabili di tempo quali il periodo di origine e di sviluppo del sinistro e la relativa epoca di pagamento, assieme a variabili geografiche.

## LA STIMA DEI PARAMETRI

Indicando con  $f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$  la funzione di densità congiunta delle  $n$  realizzazioni della variabile risposta  $Y$  ( $y_i; i = 1 \dots n$ ), di cui sono noti i valori  $\mathbf{y}$ , e con  $\Omega$  lo spazio parametrico, il vettore  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  è detto stimatore di massima verosimiglianza se è tale che

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}; \mathbf{y}) \geq L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}) \text{ per ogni } \boldsymbol{\theta} \in \Omega.$$

Nella prassi statistica si utilizza al posto della funzione di verosimiglianza la sua trasformazione logaritmica  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}) = \log L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y})$ , il cui massimo, essendo monotona, coincide con quello di  $L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y})$ .

Lo stimatore  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , che si dimostra essere consistente ed almeno asintoticamente efficiente, si ottiene dalla soluzione del sistema delle derivate parziali:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y})}{\partial \theta_j} = 0 \text{ con } j = 1, \dots, k.$$

Condizione di secondo ordine perché tale soluzione sia effettivamente il massimo di  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y})$  è che la matrice Hessiana sia definita negativa.

Per semplicità di notazione nel seguito facciamo riferimento al solo caso in cui esiste un solo parametro  $\theta$  in luogo del vettore  $k$ -dimensionale  $\boldsymbol{\theta}$ .

La funzione di log-verosimiglianza per tutte le distribuzioni della famiglia esponenziale è, in accordo con la notazione della forma canonica  $f_y(\mathbf{y}; \theta, \phi)$  introdotta in precedenza, del tipo:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a(\phi)} + c(y_i, \phi) \right\}$$

La condizione necessaria

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta; \mathbf{y})}{\partial \theta} = 0$$

diventa in questo caso

$$\sum_{i=1}^n \frac{y_i - b'(\theta_i)}{a(\phi)} = 0,$$

che equivale ad imporre  $b'(\theta) = E(\mathbf{y}) = \mu$ .

La condizione di secondo ordine è invece

$$E \left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\theta; \mathbf{y})}{\partial \theta^2} + \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\theta; \mathbf{y})}{\partial \theta} \right)^2 \right\} = 0;$$

esplicitandola per la forma di  $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}; \theta, \phi)$  in questione si ottiene:

$$\begin{aligned} 0 &= - \sum_{i=1}^n \frac{b''(\theta_i)}{a(\phi)} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a(\phi)^2} E\{y_i - b'(\theta_i)\}^2 = \\ &= - \sum_{i=1}^n \frac{b''(\theta_i)}{a(\phi)} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a(\phi)^2} \frac{b''(\theta_i)}{a(\phi)} = \\ &= - \sum_{i=1}^n \frac{b''(\theta_i)}{a(\phi)} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a(\phi)^2} V(y_i). \end{aligned}$$

Poiché le  $n$  realizzazioni della variabile risposta sono ipotizzate *i. i. d.* si può riscrivere la precedente equazione come:

$$0 = - \frac{b''(\theta)}{a(\phi)} + \frac{1}{a(\phi)^2} V(y_i), \quad \text{con } i = 1, \dots, n$$

da cui, raccogliendo il denominatore e risolvendo per  $V(y_i)$ , si ottiene

$$V(y_i) = b''(\theta_i) a(\phi).$$

La condizione appena trovata può essere riformulata con la seguente uguaglianza

$$V(y_i) = V(\mu_i)a(\phi)$$

per quanto detto nel paragrafo precedente a riguardo della relazione che lega la varianza di una variabile aleatoria, tale da appartenere alla famiglia esponenziale, al suo valore atteso.

Tornando quindi alle condizioni di primo ordine, introduciamo nel problema i coefficienti  $\boldsymbol{\beta}$  della combinazione lineare che dà per risultato il legame canonico  $\eta$ ; il sistema delle derivate parziali risulta essere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\theta; \mathbf{y})}{\partial \beta_j} &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\theta; \mathbf{y})}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial \theta}{\partial \mu_i} \right) \left( \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial \beta_j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - b'(\theta_i)}{a(\phi)} \right) \left( \frac{1}{V(\mu_i)} \right) \left( \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \right)_i (x_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - \mu_i}{a(\phi)V(\mu_i)} \right) \left( \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \right)_i (x_{ij}) \end{aligned}$$

dove il termine  $\left( \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \right)_i$  è riferito all' $i$ -esima unità statistica, mentre  $x_{ij}$  è il generico elemento della matrice di regressione  $\mathbf{X}$ .

Visto che l'oggetto delle stime di massima verosimiglianza è diventato il vettore di parametri  $\boldsymbol{\beta}$  di dimensione  $p$ , occorre ricavarne la matrice di informazione di Fisher  $\mathcal{J}(p \times p)$ , utile per lo sviluppo degli algoritmi di stima. Essa è basata sulle derivate seconde della funzione di log-verosimiglianza  $\mathcal{L}(\theta; \mathbf{y})$

$$E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\theta; \mathbf{y})}{\partial \beta_j \partial \beta_h} \right],$$

essendo il generico elemento della matrice pari a

$$J_{j,h} = \sum_{i=1}^n E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\theta; \mathbf{y})_i}{\partial \beta_j \partial \beta_h} \right].$$

Dal momento che un generico GLM introduce una parametrizzazione della media  $\mu$  in termini di matrice di regressione  $\mathbf{X}$  e di coefficienti associati  $\boldsymbol{\beta}$ , legando il predittore lineare  $\eta = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$  alla media  $\mu$  per mezzo della funzione legame  $g(\cdot)$ , la  $g^{-1}(\eta)$  restituisce  $\mu$ .

Inoltre, dato che il predittore lineare è, come già detto, una combinazione lineare delle determinazioni delle covariate e di parametri oggetto di opportuna stima, tale cioè che

$$\eta = \sum_{j=1}^p x_j \beta_j,$$

si ha

$$\frac{\partial \eta}{\partial \beta_i} = x_i.$$

Si osserva pertanto che il dominio e codominio del predittore lineare non subiscono limitazioni specifiche, ma dipendono direttamente da quello della covariate. È a questo punto che si apprezza il ruolo della funzione legame  $g(\cdot)$ , tramite la quale si può imporre un intervallo di valori per le stime della variabile risposta.

Teoricamente qualsiasi funzione monotona può essere usata come link, e la scelta deve essere guidata dall'obiettivo di rispettare i vincoli imposti dalla funzione di varianza della specifica distribuzione considerata.

## I LEGAMI CANONICI

Si definisce legame canonico la funzione link derivante dall'uguaglianza del parametro canonico al predittore lineare, tale cioè che  $\theta = \eta$ .

In questo caso la funzione di verosimiglianza diventa:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta; \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a(\phi)} + c(y_i, \phi) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a(\phi)} + \sum_{i=1}^n c(y_i, \phi) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{a(\phi)} \{y_i \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} - b(\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta})\} + \sum_{i=1}^n c(y_i, \phi) \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{a(\phi)} y_i \mathbf{x}'_i \right\} \boldsymbol{\beta} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a(\phi)} b(\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}) + \sum_{i=1}^n c(y_i, \phi)\end{aligned}$$

Si deduce quindi che  $\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{a(\phi)} y_i \mathbf{x}'_i \right\}$  è una statistica sufficiente<sup>2</sup> per  $\boldsymbol{\beta}$  se  $a(\phi)$  è assente o noto (ad esempio nel caso della distribuzione di Poisson  $a(\phi) = 1$ ).

Se  $a(\phi)$  non è noto ma la funzione di verosimiglianza è ancora di struttura esponenziale, si può dimostrare che  $\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{a(\phi)} y_i \mathbf{x}'_i \right\}$  è comunque parte della statistica sufficiente minimale<sup>3</sup>.

La scelta di adottare il legame canonico comporta inoltre alcune importanti semplificazioni nel sistema delle derivate parziali, che diventa:

---

<sup>2</sup> Una statistica  $T(\cdot)$  è sufficiente per  $\theta$  se assume lo stesso valore in due punti distinti dello spazio campionario solo se tali punti godono di verosimiglianze equivalenti. Condizione necessaria e sufficiente perché  $T(\cdot)$  sia una statistica sufficiente è che la distribuzione di  $Y$  condizionata al valore assunto da  $T(\cdot)$  non dipenda da  $\theta$ .

<sup>3</sup>  $V(\cdot)$  è una statistica minimale sufficiente per  $\theta$  se è funzione di qualunque statistica sufficiente  $T(\cdot)$ .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}(\theta; \mathbf{y})}{\partial \beta_j} &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\theta; \mathbf{y})}{\partial \theta_i} \right) \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial \mu_i} \right) \left( \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} \right) \left( \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\theta; \mathbf{y})}{\partial \eta_i} \right) \left( \frac{\partial \eta_i}{\partial \mu_i} \right) \left( \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} \right) \left( \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\theta; \mathbf{y})}{\partial \eta_i} \right) \left( \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - \mu_i}{a(\phi)} \right) (x_{ij}).
\end{aligned}$$

Il sistema così ottenuto, seppur semplificato, non è facilmente risolvibile per via analitica; pertanto anche nel caso di legami canonici si ricorre di norma a metodi numerici iterativi.

Un altro vantaggio derivante dall'impiego dei legami canonici riguarda l'informazione di Fisher  $\mathcal{J}$ . Si ha infatti che le derivate seconde della funzione di verosimiglianza non dipendono dalle osservazioni  $y$ :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\theta; \mathbf{y}_i)}{\partial \beta_j \partial \beta_h} = \frac{\partial \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - \mu_i}{a(\phi_i)} \right) (x_{ij})}{\partial \beta_h} = - \frac{x_{ij}}{a(\phi_i)} \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_h}$$

Pertanto:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\theta; \mathbf{y})}{\partial \beta_i \partial \beta_k} = E \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\theta; \mathbf{y})}{\partial \beta_i \partial \beta_k} \right]$$

cioè l'informazione attesa coincide con l'informazione osservata.

## L'ALGORITMO NEWTON-RAPHSON

La procedura di calcolo illustrata brevemente nel seguito può essere utilizzata in generale per qualsiasi funzione derivabile  $f(u)$ , per la quale si deve determinare il valore di una sua radice  $r$ .<sup>4</sup>

Sia  $u_1$  un valore iniziale per  $r$ , opportunamente scelto.

La derivata prima calcolata in tale punto,  $f'(u_1)$ , permette di ricavare l'espressione utile per determinare le stime al passo successivo:

$$f(u) = f'(u_1)(u - u_1)$$

Il criterio di aggiornamento è quindi:

$$u_2 = u_1 - \frac{f(u_1)}{f'(u_1)}$$

e in generale:

$$u_t = u_{t-1} - \frac{f(u_{t-1})}{f'(u_{t-1})}$$

Si può dimostrare la convergenza dell'algoritmo al vero valore della radice, espressa formalmente come  $|r - u_s| \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$

In realtà tale convergenza è solo teorica, perché vista la complessità dei calcoli la procedura in genere viene fatta terminare al soddisfacimento di una determinata regola di arresto, stabilita dal ricercatore.

---

<sup>4</sup>  $r$  è una radice di  $f(\cdot)$  se è t.c.  $f(r) = 0$

Nel caso specifico delle equazioni di verosimiglianza il criterio di aggiornamento è particolarizzato come segue:

$u = \hat{\beta}$  dove  $\hat{\beta}$  è un vettore di stime iniziali dei parametri.

Le funzioni di cui occorre trovare la radice sono appunto le equazioni di verosimiglianza

$$f(u) = \left[ \frac{\partial l(\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}_j} \right],$$

le cui derivate prime sono gli elementi della matrice di informazione di Fisher  $\mathcal{J}(\hat{\beta})$ .

L'algoritmo prevede quindi ad ogni iterazione una correzione della stima del vettore dei parametri pari a:

$$\hat{\beta}^t = \hat{\beta}^{t-1} - \mathcal{J}(\hat{\beta}^{t-1})^{-1} \frac{\partial l(\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}}.$$

Nella versione più semplice l'algoritmo non considera la stima del parametro di dispersione  $\phi$ , che quindi viene trattato come un parametro accessorio, la cui stima avviene separatamente da quella del vettore  $\beta$ . Tuttavia esistono implementazioni che includono  $\phi$  tra i parametri oggetto delle stime di massima verosimiglianza.

Per l'implementazione dell'algoritmo sono anzitutto necessari dei valori iniziali per i parametri, che definiamo con  $\hat{\beta}^0$ . Anche se non esiste un criterio univoco di scelta di tali valori iniziali, nel caso in cui il modello dei dati lo contempli, si usa procedere assegnando a  $\hat{\beta}^0$  le stime di massima verosimiglianza per il caso particolare costante. In molti casi, infatti, le soluzioni del sistema di verosimiglianza per il caso costante sono ricavabili per via analitica e pertanto facilmente determinabili.

Come sovente accade per i metodi numerici, la convergenza non è garantita se non con un numero molto elevato di iterazioni, condizione che non sempre è realizzabile. Da qui il problema di assegnare valori iniziali plausibili.

## L'ANALISI DEI RESIDUI

I residui sono una misura della discrepanza tra i valori stimati dal modello e quelli osservati in corrispondenza di ciascuna unità statistica. In realtà i residui possono essere calcolati secondo diverse formulazioni.

Una delle definizioni che gode di maggior popolarità è quella di Pearson, in base alla quale si ha, per l'  $i$ -esima unità statistica,

$$r_i^P = \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\sqrt{V(\hat{\mu}_i)/\omega_i}},$$

ricordando la forma della varianza

$$\text{var}(Y_i) = \phi/\omega_i \cdot V(\mu_i).$$

La somma su tutte le unità statistiche degli  $r_i^P$  equivale alla statistica chi-quadro.

La distribuzione dei residui teorici

$$\frac{Y_i - \hat{\mu}_i}{\sqrt{V(\hat{\mu}_i)/\omega_i}}$$

ha media nulla e varianza  $\phi$ , indipendente da  $i$ .

Com'è facile intuire, valori elevati (in valore assoluto) dei residui di Pearson indicano un cattivo adattamento del modello per quella particolare unità statistica.

Una definizione alternativa dei residui coinvolge invece la devianza:

$$r_i^D = \text{sign}(y_i - \hat{\mu}_i)\sqrt{d_i},$$

dove  $d_i$  è l'addendo  $i$ -esimo nell'espressione della devianza

$$d_i = -2\omega_i\{(y_i\hat{\theta}_i - b(\hat{\theta}_i)) - (y_i\theta_i^* - b(\theta_i^*))\}$$

e

$$\text{sign}(y_i - \hat{\mu}_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } y_i - \hat{\mu}_i > 0 \\ -1 & \text{se } y_i - \hat{\mu}_i < 0. \end{cases}$$

La somma su tutte le unità statistiche dei quadrati degli  $r_i^D$  è la devianza.

Ad esempio per la distribuzione di Poisson i residui della devianza hanno espressione

$$r_i^D = \begin{cases} 2\hat{\mu}_i & \text{se } y_i = 0 \\ 2\left\{y_i \ln\left(\frac{y_i}{\hat{\mu}_i}\right)(y_i - \hat{\mu}_i)\right\} & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

mentre per la distribuzione Gamma vale

$$r_i^D = -2\left\{\ln\left(\frac{y_i}{\hat{\mu}_i}\right) - \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\hat{\mu}_i}\right\}.$$

In generale i residui della devianza sono preferiti ai residui di Pearson perché la loro analisi permette non solo di individuare quali osservazioni non sono ben stimate dal modello, ma anche di verificare se i dati evidenziano scostamenti sistematici dal modello stimato.

Spesso si considerano anche le versioni standardizzate dei residui appena definiti; in tal caso la distribuzione asintotica è quella della normale standard.

Attraverso il grafico a dispersione dei residui si possono sviluppare analisi informali; in particolare, se i grafici mostrano scostamenti sostanziali dall'andamento ideale allora il modello può non essere adeguato nella distribuzione assegnata alla variabile risposta o nella scelta della funzione di collegamento.

## STRUTTURE DI REGRESSIONE PER LA RISERVA SINISTRI

Le variabili esplicative tipiche dei problemi di stima della riserva sinistri sono l'anno di generazione (o di denuncia, a seconda dell'accezione che si vuole dare ai  $p_{ij}$ ) e l'anno di sviluppo. Queste possono essere trattate come variabili di tipo *factor* o numeriche, in base alla struttura di regressione prescelta.

Se entrambe le variabili sono trattate come *factor*, allora i parametri oggetto di stima sono:

- l'intercetta  $\mu$ ,
- $\alpha_0, \dots, \alpha_T$  parametri per gli anni di generazione (o di denuncia),
- $\beta_0, \dots, \beta_T$  parametri per gli anni di sviluppo.

La matrice di regressione  $\mathbf{X}$  pertanto ha  $n = (t + 1)^2/2$  righe, pari al numero di celle del triangolo di run-off, e  $1 + 2(t + 1)$  colonne, di cui però solo  $p = 1 + 2t$  sono linearmente indipendenti.

Ne consegue che il numero di parametri da stimare è pari al rango di  $\mathbf{X}$ , cioè  $p$ .

Di norma si fissa un parametro dell'anno di sviluppo ed uno dell'anno di generazione pari a 0. Ad esempio si può porre  $\alpha_T = 0$  e  $\beta_T = 0$ .

Consideriamo il caso della funzione di collegamento logaritmo. La struttura di regressione è di tipo moltiplicativo, con

$$E(Y_{ij}) = \mu_{ij} = \exp(\mu + \alpha_{ij} + \beta_{ij}).$$

L'impostazione della struttura di regressione con entrambe le variabili di tipo *factor* può comportare problemi di sovra parametrizzazione, che hanno per conseguenza, oltre a rendere difficile l'interpretazione dei risultati, una perdita di significatività di alcuni parametri.

In alternativa si può optare per una struttura di regressione che prevede una variabile numerica e una di tipo *factor*. In tal caso il numero di parametri da stimare scende a  $p = 2 + t$ .

Se, ad esempio, si intende la variabile anno di generazione numerica e la variabile anno di sviluppo di tipo *factor*, la struttura di regressione diventa

$$E(Y_{ij}) = \exp(\mu + \alpha \cdot i + \beta_j),$$

coerentemente con l'ipotesi che, in termini attesi, i risarcimenti totali crescano al progredire dell'anno di generazione secondo una percentuale fissa, mentre l'effetto del differimento rimane proprio di ciascun anno di sviluppo.

Infine è possibile adottare anche una struttura di regressione in cui tutte le variabili sono di tipo numerico, in base alla quale i parametri da stimare sono solo tre:

$$E(Y_{ij}) = \exp(\mu + \alpha \cdot i + \beta \cdot j).$$

#### IL MODELLO POISSON-LOGARITMO PER LE RISERVE

La distribuzione di Poisson è spesso usata in modelli per variabili di conteggio. Alla cui base vi è l'assunzione della seguente distribuzione di probabilità per la variabile  $Y$  di interesse:

$$f(y) = \frac{\mu^y e^{-\mu}}{y!},$$

dove  $\mu$  è l'unico parametro della distribuzione, rappresentante il valore atteso della  $Y$ .

Nella notazione caratteristica della famiglia esponenziale la distribuzione di probabilità può essere riscritta in questo modo:

$$f(y; \mu) = \exp\{y \ln(\mu) - \mu - \ln \Gamma(y + 1)\}^5$$

Abbiamo già accennato alla seguente relazione tra valore atteso e varianza:

$$E(Y) = \mu = \text{var}(Y).$$

Valore atteso e varianza risultano infatti identiche; si parlerà nei prossimi capitoli di variabili di Poisson sovra disperse, intendendo con questo termine i modelli stocastici del tipo poissoniano che risultano però avere media e varianza proporzionali, anziché identiche.

Il legame canonico risulta essere

$$\theta = \ln(\mu),$$

pertanto il legame inverso  $g^{-1}(\eta)$  sarà del tipo esponenziale:  $g^{-1}(\eta) = \exp \eta$ .

L'espressione della log-verosimiglianza è

$$\mathcal{L}(\mu; y) = \sum_{i=1}^n \{y_i \ln(\mu_i) - \mu_i - \ln \Gamma(y_i + 1)\},$$

che, riparametrizzata in termini di  $\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}$ , diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}; y) &= \sum_{i=1}^n \{y_i \ln(\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}) - \mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta} - \ln \Gamma(y_i + 1)\} \\ &= \sum_{i=1}^n \{y_i \mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta} - \exp(\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}) - \ln \Gamma(y_i + 1)\}. \end{aligned}$$

Gigante e Sigalotti (2005) mostrano un'applicazione del modello di Poisson non ad una variabile di conteggio, come vogliono gli esempi più classici, ma direttamente ai

---

<sup>5</sup> Con  $\Gamma(\cdot)$  si intende in questo contesto la funzione Gamma con dominio discreto, pertanto  $\Gamma(y + 1) = y!$

risarcimenti incrementali  $p_{ij}$ . Il modello può essere quindi utilizzato per la stima degli elementi del triangolo inferiore della matrice di run-off, da cui ricaveremo la stima della riserva sinistri.

Ripercorriamo l'applicazione degli autori sopracitati, applicando il modello al TRIANGOLO 1 che abbiamo già utilizzato per gli esempi del capitolo 2. Le stime sono realizzate in SPSS.

Definiamo le seguenti caratteristiche del modello:

- Variabile risposta:  $Y_{ij} = p_{ij}$
- Variabili esplicative: anno di accadimento (anno\_accadimento) e anno di sviluppo (anno\_sviluppo).
- Distribuzione di probabilità: Poisson
- Funzione link: Log
- Struttura di regressione  $E(Y_{ij}) = \mu_{ij} = \exp(\mu + \alpha_{ij} + \beta_{ij})$ , con entrambe le variabili di tipo *factor*.

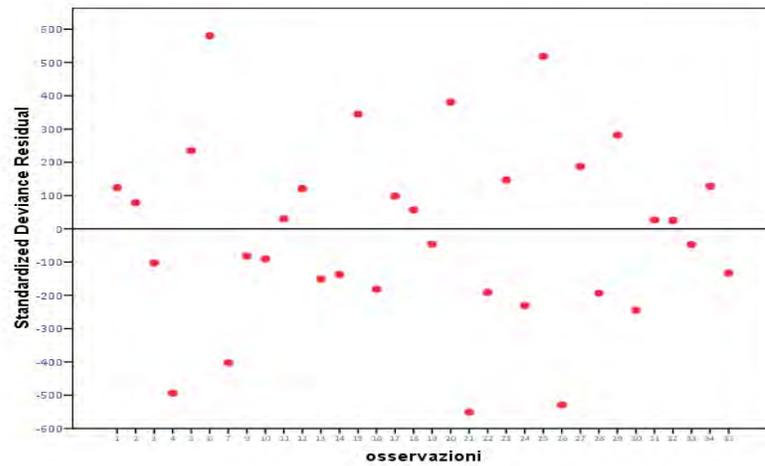
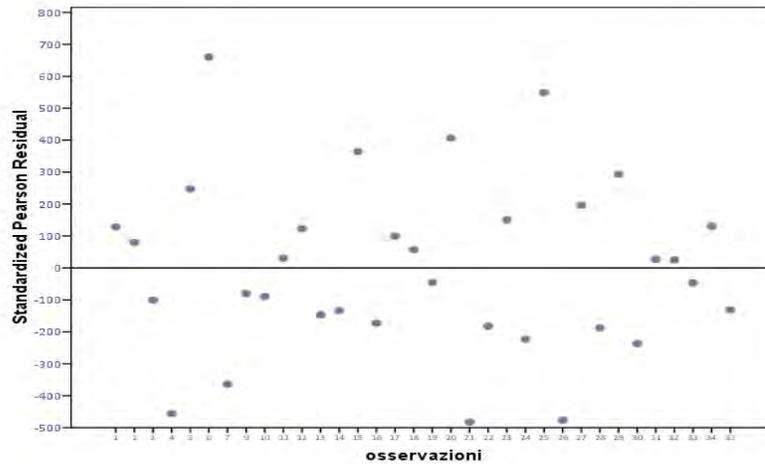
L'output di SPSS riconsegna le seguenti stime:

| Parameter               | B              | Std. Error | 95% Wald Confidence Interval |        | Hypothesis Test |    |      | Exp(B)   | 95% Wald Confidence Interval for Exp(B) |          |
|-------------------------|----------------|------------|------------------------------|--------|-----------------|----|------|----------|---|----------|
|                         |                |            | Lower                        | Upper  | Wald Chi-Square | df | Sig. |          | Lower                                   | Upper    |
|                         |                |            |                              |        |                 |    |      |          |   |          |
| (Intercept)             | 12,045         | ,0033      | 12,039                       | 12,051 | 13682560,7      | 1  | ,000 | 170249,1 | 169166,0                                | 171339,1 |
| [anno_accadimento=2000] | -,196          | ,0019      | -,200                        | -,192  | 11106,601       | 1  | ,000 | ,822     | ,819                                    | ,825     |
| [anno_accadimento=2001] | ,097           | ,0018      | ,094                         | ,101   | 2800,626        | 1  | ,000 | 1,102    | 1,098                                   | 1,106    |
| [anno_accadimento=2002] | ,067           | ,0018      | ,063                         | ,070   | 1307,405        | 1  | ,000 | 1,069    | 1,065                                   | 1,073    |
| [anno_accadimento=2003] | ,136           | ,0018      | ,132                         | ,139   | 5428,345        | 1  | ,000 | 1,145    | 1,141                                   | 1,150    |
| [anno_accadimento=2004] | -,047          | ,0019      | -,050                        | -,043  | 620,901         | 1  | ,000 | ,955     | ,951                                    | ,958     |
| [anno_accadimento=2005] | ,061           | ,0019      | ,058                         | ,065   | 1051,243        | 1  | ,000 | 1,063    | 1,059                                   | 1,067    |
| [anno_accadimento=2006] | ,051           | ,0020      | ,047                         | ,054   | 665,788         | 1  | ,000 | 1,052    | 1,048                                   | 1,056    |
| [anno_accadimento=2007] | 0 <sup>a</sup> | .          | .                            | .      | .               | .  | .    | 1        | .                                       | .        |
| [anno_sviluppo=0]       | ,747           | ,0028      | ,742                         | ,753   | 71417,118       | 1  | ,000 | 2,111    | 2,100                                   | 2,123    |
| [anno_sviluppo=1]       | 1,626          | ,0028      | 1,621                        | 1,631  | 348094,388      | 1  | ,000 | 5,084    | 5,057                                   | 5,111    |
| [anno_sviluppo=2]       | 1,580          | ,0028      | 1,574                        | 1,585  | 327728,180      | 1  | ,000 | 4,853    | 4,827                                   | 4,879    |
| [anno_sviluppo=3]       | 1,755          | ,0028      | 1,750                        | 1,760  | 405287,579      | 1  | ,000 | 5,783    | 5,752                                   | 5,815    |
| [anno_sviluppo=4]       | 1,041          | ,0028      | 1,036                        | 1,047  | 137536,831      | 1  | ,000 | 2,833    | 2,818                                   | 2,849    |
| [anno_sviluppo=5]       | ,715           | ,0029      | ,710                         | ,721   | 61542,661       | 1  | ,000 | 2,045    | 2,034                                   | 2,057    |
| [anno_sviluppo=6]       | ,722           | ,0030      | ,716                         | ,727   | 59215,869       | 1  | ,000 | 2,058    | 2,046                                   | 2,070    |
| [anno_sviluppo=7]       | 0 <sup>a</sup> | .          | .                            | .      | .               | .  | .    | 1        | .                                       | .        |
| (Scale)                 | 1 <sup>b</sup> | .          | .                            | .      | .               | .  | .    | .        | .                                       | .        |

Dependent Variable: pij  
Model: (Intercept), anno\_accadimento, anno\_sviluppo

In base al test d'ipotesi riportato nello stesso output verifichiamo che tutti i parametri stimati sono significativi per questo modello.

Il software permette di visualizzare anche i residui, utili ad una valutazione della bontà del modello. Riportiamo di seguito i grafici dei residui di Pearson standardizzati e dei residui standardizzati di devianza. Da questi si deduce che il modello non è adatto a descrivere al meglio i dati, in particolare le loro dispersioni. Infatti, la distribuzione dei residui standardizzati, comunque definiti, è asintoticamente gaussiana, di media nulla e parametro di scala pari ad 1. Per entrambi i tipi di residui però notiamo dai rispettivi grafici una variabilità ben maggiore.



La medesima valutazione riguardo la bontà del modello si ottiene analizzando il seguente output che restituisce devianza e chi-quadro delle stime.

Tali statistiche se divise per il numero di gradi di libertà nell'ottimo devono assumere valore unitario, ma vediamo che per il nostro modello il risultato è piuttosto lontano.

**Goodness of Fit**

|                                      | Value   | df | Value/df  |
|--------------------------------------|---------|----|-----------|
| Deviance                             | 1467387 | 21 | 69875,579 |
| Scaled Deviance                      | 1467387 | 21 |           |
| Pearson Chi-Square                   | 1459727 | 21 | 69510,816 |
| Scaled Pearson Chi-Square            | 1459727 | 21 |           |
| Log Likelihood <sup>a</sup>          | -733965 |    |           |
| Akaike's Information Criterion (AIC) | 1467959 |    |           |
| Finite Sample Corrected AIC (AICC)   | 1467983 |    |           |
| Bayesian Information Criterion (BIC) | 1467983 |    |           |
| Consistent AIC (CAIC)                | 1467998 |    |           |

Dependent Variable: pij  
 Model: (Intercept), anno\_accadimento, anno\_sviluppo

Con riferimento al nostro esempio, stimiamo per il triangolo inferiore della matrice di run-off i seguenti sinistri incrementali e cumulati:

|                                |      | anno di sviluppo |           |         |           |         |         |         |         |        |
|--------------------------------|------|------------------|-----------|---------|-----------|---------|---------|---------|---------|--------|
| $p_{\bar{j}}$                  |      | 0                | 1         | 2       | 3         | 4       | 5       | 6       | 7       | $R_i$  |
| anno di denuncia (accadimento) | 2000 | 357.848          | 766.940   | 610.542 | 482.940   | 527.326 | 574.398 | 146.342 | 139.950 | 67.948 |
|                                | 2001 | 352.118          | 884.021   | 933.894 | 1.183.289 | 445.745 | 320.996 | 527.804 | 187.659 |        |
|                                | 2002 | 290.507          | 1.001.799 | 926.219 | 1.016.654 | 750.816 | 146.923 | 374.490 | 181.988 |        |
|                                | 2003 | 310.608          | 1.108.250 | 776.189 | 1.562.400 | 272.482 | 398.841 | 401.298 | 195.015 |        |
|                                | 2004 | 443.160          | 693.190   | 991.983 | 769.488   | 460.444 | 332.367 | 334.414 | 162.512 |        |
|                                | 2005 | 396.132          | 937.085   | 847.498 | 1.046.760 | 512.824 | 370.177 | 372.457 | 180.999 |        |
|                                | 2006 | 440.832          | 847.631   | 868.979 | 1.035.589 | 507.351 | 366.226 | 368.482 | 179.068 |        |
|                                | 2007 | 359.480          | 865.530   | 826.184 | 984.589   | 482.365 | 348.190 | 350.335 | 170.249 |        |

| $C_{ij}$ | anno di sviluppo |           |           |           |           |           |           |           | $R_i$  |
|----------|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------|
|          | 0                | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |        |
| 2000     | 357.848          | 1.124.788 | 1.735.330 | 2.218.270 | 2.745.596 | 3.319.994 | 3.466.336 | 3.606.286 | 67.948 |
| 2001     | 352.118          | 1.236.139 | 2.170.033 | 3.353.322 | 3.799.067 | 4.120.063 | 4.647.867 | 4.835.526 |        |
| 2002     | 290.507          | 1.292.306 | 2.218.525 | 3.235.179 | 3.985.995 | 4.132.918 | 4.507.408 | 4.689.396 |        |
| 2003     | 310.608          | 1.418.858 | 2.195.047 | 3.757.447 | 4.029.929 | 4.428.770 | 4.830.068 | 5.025.083 |        |
| 2004     | 443.160          | 1.136.350 | 2.128.333 | 2.897.821 | 3.358.265 | 3.690.632 | 4.025.046 | 4.187.558 |        |
| 2005     | 396.132          | 1.333.217 | 2.180.715 | 3.227.475 | 3.740.299 | 4.110.476 | 4.482.932 | 4.663.932 |        |
| 2006     | 440.832          | 1.288.463 | 2.157.442 | 3.193.031 | 3.700.382 | 4.066.608 | 4.435.090 | 4.614.157 |        |
| 2007     | 359.480          | 1.225.010 | 2.051.194 | 3.035.783 | 3.518.149 | 3.866.339 | 4.216.674 | 4.386.923 |        |

Come di consueto calcoliamo le stime delle riserve per generazione come differenza tra l'ammontare di risarcimenti cumulati all'ultimo anno di sviluppo osservabile e il più recente valore osservato. Sommiamo infine tali stime su tutte le generazioni, ottenendo l'importo della riserva sinistri complessiva:

|          | $R_i$             |
|----------|-------------------|
| 2000     | 67.948            |
| 2001     | 187.659           |
| 2002     | 556.478           |
| 2003     | 995.154           |
| 2004     | 1.289.737         |
| 2005     | 2.483.217         |
| 2006     | 3.325.694         |
| 2007     | 4.027.443         |
| <b>R</b> | <b>12.933.329</b> |

Notiamo quindi come la stima ottenuta con il modello di Poisson sia del tutto analoga a quella ottenuta con il metodo Chain Ladder base, che era risultata pari a 12.933.460.

Renshaw e Verral (1998) hanno dimostrato analiticamente che il modello di Poisson riproduce le stime del Chain Ladder. La dimostrazione richiede anzitutto di ipotizzare che per ciascun anno di differimento osservato il totale dei sinistri incrementali sia non negativo:

$$\sum_{i=1}^{T-j+1} y_{ij} \geq 0 \quad \forall j. {}^6$$

Gli stimatori di massima verosimiglianza  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\alpha}_i$  e  $\hat{\beta}_j$  consentono di stimare direttamente il totale dei sinistri per generazione, cioè il valore dei sinistri cumulati all'ultimo anno di differimento possibile  $T$ , come segue

$$\hat{C}_{iT} = C_{i,T-i} + \sum_{j=T-i+1}^T \exp(\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j), \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, T.$$

Si dimostra che gli stessi stimatori  $\hat{C}_{iT}$  si possono ottenere massimizzando la funzione di verosimiglianza condizionale subordinatamente all'assunzione fondamentale del Chain Ladder di stazionarietà della legge di liquidazione dei sinistri rispetto all'anno di generazione.

Per prima cosa esplicitiamo la funzione di verosimiglianza per il modello di Poisson applicato ai sinistri cumulati  $C_{i,j}$ .

Sotto l'ipotesi che

$$p_{i,j} \sim \text{Poisson con } E[p_{i,j}] = \frac{z_i y_j}{\sum_{k=0}^{T-i} y_k} \text{ e } \sum_{k=0}^T y_k = 1.$$

---

<sup>6</sup> Abbiamo volutamente lasciato il termine  $y_{ij}$  nelle formule della dimostrazione, ad indicare l'applicabilità del procedimento anche ad una variabile risposta diversa dall'importo dei sinistri incrementali  $p_{ij}$ . Ad esempio si potrebbe scegliere come variabile risposta il numero dei sinistri liquidati, anziché l'ammontare dei risarcimenti.

La funzione di verosimiglianza è:

$$L = \prod_{i=0}^T \prod_{j=0}^{T-i} \left[ \frac{(z_i y_j / S_{T-i})^{p_{i,j}} \exp(-z_i y_j / S_{T-i})}{p_{i,j}!} \right]$$

dove  $S_m = \sum_{k=0}^m y_k$ .

Possiamo riscrivere la  $L$  come segue:

$$\begin{aligned} L &= \prod_{i=0}^T \left\{ z_i^{\sum_{j=0}^{T-i} p_{i,j}} \cdot \exp\left(-\frac{z_i \sum_{j=0}^{T-i} y_j}{S_{T-i}}\right) \cdot \prod_{j=0}^{T-i} \left[ \frac{(y_j / S_{T-i})^{p_{i,j}}}{p_{i,j}!} \right] \right\} \\ &= \prod_{i=0}^T \left\{ z_i^{C_{i,T-i}} \cdot \exp(-z_i) \cdot \prod_{j=0}^{T-i} \left[ \frac{1}{p_{i,j}!} \cdot (y_j / S_{T-i})^{p_{i,j}} \right] \right\} \\ &= \prod_{i=0}^T \left\{ \frac{z_i^{C_{i,T-i}} \cdot \exp(-z_i)}{C_{i,T-i}!} \cdot \left[ \frac{C_{i,T-i}!}{\prod_{j=0}^{T-i} p_{i,j}!} \cdot \prod_{j=0}^{T-i} (y_j / S_{T-i})^{p_{i,j}} \right] \right\} \\ &= L_D L_C, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} L_D &= \prod_{i=0}^T \left\{ \frac{z_i^{C_{i,T-i}} \cdot \exp(-z_i)}{C_{i,T-i}!} \right\}, \\ L_C &= \prod_{i=0}^T \left[ \frac{C_{i,T-i}!}{\prod_{j=0}^{T-i} p_{i,j}!} \cdot \prod_{j=0}^{T-i} (y_j / S_{T-i})^{p_{i,j}} \right]. \end{aligned}$$

L'espressione della verosimiglianza condizionale  $L_C$  può anche essere scritta

$$L_C = \prod_{i=0}^T \left( \frac{C_{i,T-i}!}{\prod_{j=0}^{T-i} p_{ij}!} \prod_{j=0}^{T-i} (q_{(i),j})^{p_{ij}} \right)$$

dove con il termine  $q_{(i),j}$  indichiamo la probabilità che un sinistro appartenente alla coorte  $i$ -esima sia liquidato nel corso del  $j$ -esimo anno di sviluppo. Per l'assunzione di stazionarietà della legge di liquidazione vale

$$q_{(i),j} = \frac{y_j}{S_{T-i}} = \frac{y_j}{\sum_{k=0}^{T-i} y_k},$$

dove  $q_j$  indica la probabilità che un sinistro, indipendentemente dalla coorte di appartenenza, sia liquidato con  $j$  anni di differimento. Questa definizione spiega il motivo dell'ipotesi di non negatività dei risarcimenti totali per anno di sviluppo, in quanto, altrimenti, non potremmo dare alle  $q_j$  un'accezione di probabilità.

Massimizzando la funzione di verosimiglianza condizionale  $L_C$  si ottengono le seguenti stime dei risarcimenti totali per generazione:

$$\hat{C}_{i,T} = \frac{C_{i,T-i}}{1 - \sum_{j=T-i+1}^T \hat{q}_j}, \quad \text{con } i = 1, \dots, T,$$

essendo  $\hat{q}_j$  lo stimatore per  $q_j$ .

Per ricavare operativamente tali stime di massima verosimiglianza possiamo fare riferimento alla tecnica ricorsiva formulata da Rosenberg (1999), che ci consente di scrivere analiticamente le espressioni degli stimatori per  $q_j$ :

$$\begin{aligned} \hat{q}_j &= \frac{y_{0j} + y_{1j} + \dots + y_{T-j,j}}{C_{0,T} + \frac{C_{1,T-1}}{1-\hat{q}_T} + \dots + \frac{C_{T-j,j}}{1-\hat{q}_j - \dots - \hat{q}_T}} \\ &= \frac{y_{0j} + y_{1j} + \dots + y_{T-j,j}}{C_{0,T} + \hat{C}_{1,T} + \dots + \hat{C}_{T-j,T}}. \end{aligned}$$

La prima stima che dà inizio al calcolo ricorsivo è

$$\hat{q}_T = \frac{y_{0,T}}{C_{0,T}},$$

i cui fattori sono noti direttamente dal triangolo di run-off.

È dimostrabile che i risultati così ottenuti coincidono con gli stimatori di massima verosimiglianza per la funzione di verosimiglianza condizionale  $L_C$ . Abbiamo quindi ottenuto un'espressione semplice delle stime di massima verosimiglianza per il modello di Poisson, che ora confrontiamo con i risultati del Chain Ladder.

Per prima cosa osserviamo dalla definizione di  $\hat{C}_{i,T}$  la seguente relazione tra i fattori di sviluppo del Chain Ladder e le stime delle  $\hat{q}_j$ :

$$\prod_{h=0}^T m_{j+h+1} = \frac{1}{1 - \sum_{h=0}^T \hat{q}_{j+h+1}}^7$$

da cui ricaviamo

$$m_j = \frac{1}{1 - \hat{q}_j \cdot \prod_{h=0}^T m_{j+h+1}}.$$

Si dimostra per induzione completa che l'espressione di  $m_j$  appena ricavata equivale alla formulazione classica del Chain Ladder<sup>8</sup>.

Infatti l'equivalenza è certamente verificata per  $j = T$ , valendo

$$m_T = \frac{1}{1 - \hat{q}_T} =$$

<sup>7</sup> In base al Chain Ladder abbiamo infatti definito  $\hat{C}_{i,k} = C_{i,j} \cdot \prod_{h=0}^{T-k} m_{j+h+1}$  (cfr capitolo 2)

<sup>8</sup> Intendendo con formulazione classica la  $m_j = \frac{\sum_{i=0}^{T-j} c_{i,j}}{\sum_{i=0}^{T-j} c_{i,j-1}}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1 - \frac{y_{0,T}}{C_{0,T}}} \\
&= \frac{C_{0,T}}{1 - y_{0,T}} \\
&= \frac{C_{0,T}}{C_{0,T-1}},
\end{aligned}$$

che è esattamente l'espressione del fattore di sviluppo per l'ultimo anno di sviluppo osservato in base al metodo Chain Ladder. Possiamo supporre che ciò valga anche per  $j + 1, j + 2, \dots, T$ .

Riformuliamo quindi

$$\hat{q}_j = \frac{y_{0j} + y_{1j} + \dots + y_{T-j,j}}{C_{0,T} + C_{1,T-1} \cdot m_T + \dots + C_{T-j,j} \cdot \prod_{h=0}^T m_{j+h+1}},$$

che sostituita nella relazione appena dimostrata ci dà

$$m_j = \frac{1}{1 - \frac{y_{0j} + y_{1j} + \dots + y_{T-j,j}}{C_{0,T} + C_{1,T-1} \cdot m_T + \dots + C_{T-j,j} \cdot \prod_{h=0}^T m_{j+h+1}} \cdot \prod_{h=0}^T m_{j+h+1}}.$$

Poiché si dimostra che vale

$$C_{0,T} + C_{1,T-1} \cdot m_T + \dots + C_{T-j,j} \cdot \prod_{h=0}^T m_{j+h+1} = \left( \prod_{h=0}^T m_{j+h+1} \right) \cdot \left( \sum_{i=0}^{T-j} C_{ij} \right),$$

semplificando la precedente si ottiene

$$m_j = \frac{1}{1 - \frac{y_{0j} + y_{1j} + \dots + y_{T-j,j}}{\sum_{i=0}^{T-j} C_{ij}}}$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{T-j} C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{T-j} C_{i,j} - (y_{0j} + y_{1j} + \dots + y_{T-j,j})}$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{T-j} C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{T-j} C_{i,j-1}} \blacksquare$$

Nonostante il risultato delle stime sia analogo al metodo deterministico di riferimento, il modello di Poisson può non essere adeguato a descrivere gli importi dei risarcimenti in base a motivazioni teoriche.

Anzitutto la teoria del rischio adotta la distribuzione di Poisson per descrivere il numero dei sinistri e non gli importi pagati; prassi, questa, consolidata grazie ad evidenze empiriche.

In secondo luogo, il modello si può applicare, per natura stessa del supporto della variabile aleatoria in questione, solo a numeri aleatori positivi. In linea teorica, però, il triangolo di run-off potrebbe presentare anche elementi negativi. È il caso, ad esempio, di pagamenti a carico dei riassicuratori o di azioni di rivalsa da parte della Compagnia.

Inoltre, come abbiamo già avuto modo di sottolineare, la varianza della distribuzione coincide con il suo valore atteso. Spesso invece i dati evidenziano una cosiddetta sovra dispersione, mostrando quindi l'esigenza di introdurre un parametro atto a descriverla. Si rimanda al capitolo 4 per la descrizione di modelli di Poisson sovra dispersi.

## IL MODELLO GAMMA-LOGARITMO PER LE RISERVE

Il modello Gamma è adatto a descrivere variabili risposta che, per loro natura, possono assumere solo valori non negativi. La densità di probabilità di una variabile aleatoria Gamma è

$$f(y; \mu, \varphi) = \frac{y}{\Gamma(1/\varphi)} \left(\frac{y}{\mu\varphi}\right)^{1/\varphi} \exp\left(-\frac{y}{\mu\varphi}\right)^\varphi.$$

In notazione canonica della famiglia esponenziale questa può essere riscritta come segue:

$$f(y; \mu, \varphi) = \exp \left\{ \frac{y/\mu - (-\ln y)(\varphi + 1)}{-\varphi} \ln y - \frac{\ln \varphi}{\varphi} - \ln \Gamma \left( \frac{1}{\varphi} \right) \right\}.$$

Il legame canonico risulta

$$\theta = \mu^{-1}.$$

Applichiamo il modello nuovamente al TRIANGOLO 1 che funge da esempio guida per la nostra esposizione.

Definiamo le seguenti caratteristiche del modello:

- Variabile risposta:  $Y_{ij} = p_{ij}$
- Variabili esplicative: anno di accadimento (anno\_accadimento) e anno di sviluppo (anno\_sviluppo).
- Distribuzione di probabilità: Gamma
- Funzione link: Log.
- Struttura di regressione  $E(Y_{ij}) = \mu_{ij} = \exp(\mu + \alpha_{ij} + \beta_{ij})$ , con entrambe le variabili di tipo *factor*.

Scegliamo quindi di non applicare il legame canonico ma la funzione link logaritmo. La scelta della funzione di collegamento è libera, ed in questo caso è dettata dal comportamento dei dati osservati, che sappiamo declinare al crescere del ritardo nel pagamento (anno di sviluppo).

Riportiamo l'output di SPSS per la base di dati di riferimento.

---

<sup>9</sup> Con  $\Gamma(1/\varphi)$  si intende, in questo contesto, la funzione Gamma  $\Gamma(1/\varphi) = \int_0^{+\infty} y^{1/\varphi-1} e^{-y} dy$ .

**Parameter Estimates**

| Parameter               | B                 | Std. Error | 95% Wald Confidence Interval |        | Hypothesis Test |    |      | Exp(B)   | 95% Wald Confidence Interval for Exp(B) |          |
|-------------------------|-------------------|------------|------------------------------|--------|-----------------|----|------|----------|---|----------|
|                         |                   |            | Lower                        | Upper  | Wald Chi-Square | df | Sig. |          | Lower                                   | Upper    |
| (Intercept)             | 11,967            | ,4471      | 11,091                       | 12,844 | 716,469         | 1  | ,000 | 157536,7 | 65586,200                               | 378400,1 |
| [anno_accadimento=2000] | -,118             | ,3363      | -,777                        | ,541   | ,124            | 1  | ,725 | ,888     | ,460                                    | 1,717    |
| [anno_accadimento=2001] | ,105              | ,3379      | -,558                        | ,767   | ,096            | 1  | ,757 | 1,110    | ,573                                    | 2,153    |
| [anno_accadimento=2002] | ,006              | ,3388      | -,658                        | ,670   | ,000            | 1  | ,986 | 1,006    | ,518                                    | 1,954    |
| [anno_accadimento=2003] | ,045              | ,3418      | -,625                        | ,715   | ,017            | 1  | ,896 | 1,046    | ,535                                    | 2,044    |
| [anno_accadimento=2004] | ,005              | ,3427      | -,666                        | ,677   | ,000            | 1  | ,988 | 1,005    | ,514                                    | 1,968    |
| [anno_accadimento=2005] | ,067              | ,3525      | -,623                        | ,758   | ,037            | 1  | ,848 | 1,070    | ,536                                    | 2,135    |
| [anno_accadimento=2006] | ,099              | ,3677      | -,622                        | ,819   | ,072            | 1  | ,789 | 1,104    | ,537                                    | 2,269    |
| [anno_accadimento=2007] | 0 <sup>a</sup>    | .          | .                            | .      | .               | .  | .    | 1        | .                                       | .        |
| [anno_sviluppo=0]       | ,825              | ,3363      | ,166                         | 1,484  | 6,019           | 1  | ,014 | 2,282    | 1,180                                   | 4,411    |
| [anno_sviluppo=1]       | 1,702             | ,3362      | 1,043                        | 2,361  | 25,632          | 1  | ,000 | 5,485    | 2,838                                   | 10,601   |
| [anno_sviluppo=2]       | 1,660             | ,3393      | ,995                         | 2,325  | 23,931          | 1  | ,000 | 5,258    | 2,704                                   | 10,225   |
| [anno_sviluppo=3]       | 1,824             | ,3451      | 1,147                        | 2,500  | 27,933          | 1  | ,000 | 6,195    | 3,150                                   | 12,183   |
| [anno_sviluppo=4]       | 1,156             | ,3438      | ,482                         | 1,830  | 11,303          | 1  | ,001 | 3,177    | 1,619                                   | 6,233    |
| [anno_sviluppo=5]       | ,828              | ,3451      | ,152                         | 1,504  | 5,756           | 1  | ,016 | 2,289    | 1,164                                   | 4,501    |
| [anno_sviluppo=6]       | ,709              | ,3806      | -,037                        | 1,455  | 3,468           | 1  | ,063 | 2,032    | ,963                                    | 4,284    |
| [anno_sviluppo=7]       | 0 <sup>a</sup>    | .          | .                            | .      | .               | .  | .    | 1        | .                                       | .        |
| (Scale)                 | ,087 <sup>b</sup> | ,0202      | ,055                         | ,137   | .               | .  | .    | .        | .                                       | .        |

Dependent Variable: pij  
 Model: (Intercept), anno\_accadimento, anno\_sviluppo

I parametri legati all'anno di accadimento risultano essere non significativamente diversi da zero; tale risultato in effetti è coerente con la scelta di privilegiare nel modello l'effetto dell'anno di sviluppo, attraverso la scelta di una funzione legame non canonica. In base alla devianza e al valore della statistica chi-quadro notiamo un'aderenza ai dati migliore di quella ottenuta con il modello di Poisson.

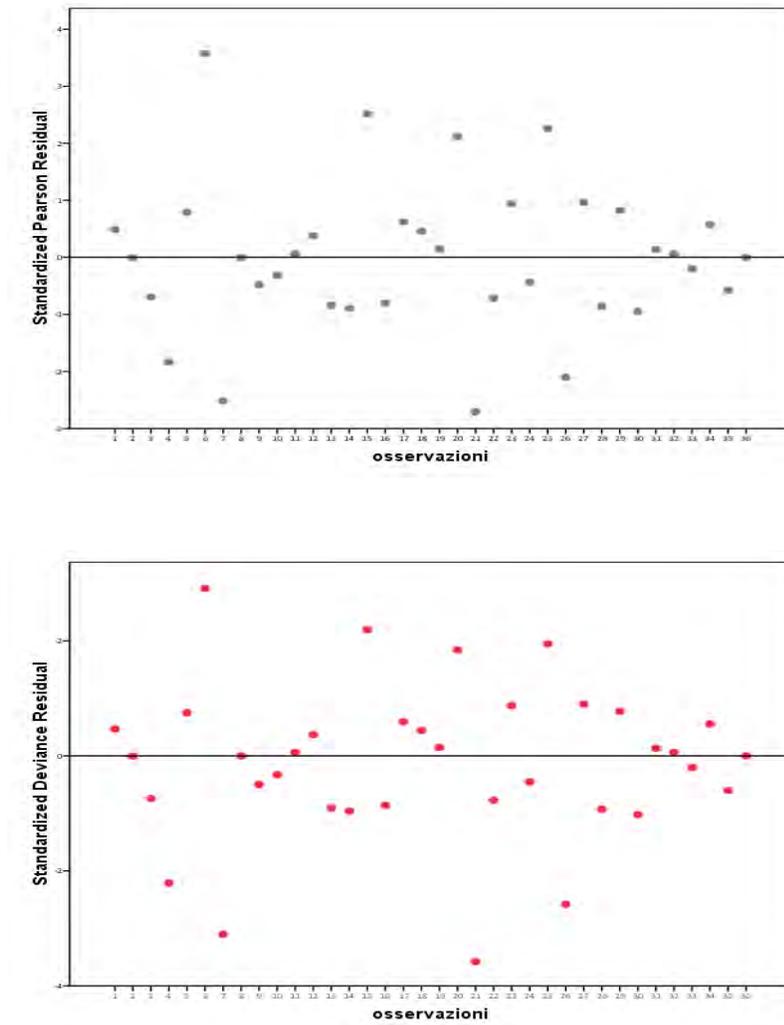
**Goodness of Fit**

|                                      | Value    | df | Value/df |
|--------------------------------------|----------|----|----------|
| Deviance                             | 3,171    | 21 | ,151     |
| Scaled Deviance                      | 36,521   | 21 |          |
| Pearson Chi-Square                   | 2,959    | 21 | ,141     |
| Scaled Pearson Chi-Square            | 34,086   | 21 |          |
| Log Likelihood <sup>a</sup>          | -483,435 |    |          |
| Akaike's Information Criterion (AIC) | 998,870  |    |          |
| Finite Sample Corrected AIC (AICC)   | 1027,502 |    |          |
| Bayesian Information Criterion (BIC) | 1024,206 |    |          |
| Consistent AIC (CAIC)                | 1040,206 |    |          |

Dependent Variable: pij  
 Model: (Intercept), anno\_accadimento, anno\_sviluppo

Tuttavia un'indagine più formale basata sui residui standardizzati, di Pearson e di devianza, mostra una distribuzione dei residui ancora lontana da quella ottimale, seppure migliorata rispetto al modello di Poisson.

Riportiamo dei seguito i grafici dei residui in base ad entrambe le definizioni.



Applichiamo quindi una struttura di regressione del tipo  $E(Y_{ij}) = \exp(\mu + \alpha \cdot i + \beta_j)$ , in cui la variabile anno di generazione è utilizzata come variabile numerica e l'anno di sviluppo continua ad essere di tipo *factor*.

Otteniamo il seguente output:

| Parameter Estimates |                   |            |                              |        |                 |    |      |           |   |          |
|---------------------|-------------------|------------|------------------------------|--------|-----------------|----|------|-----------|---|----------|
| Parameter           | B                 | Std. Error | 95% Wald Confidence Interval |        | Hypothesis Test |    |      | Exp(B)    | 95% Wald Confidence Interval for Exp(B) |          |
|                     |                   |            | Lower                        | Upper  | Wald Chi-Square | df | Sig. |           | Lower                                   | Upper    |
| (Intercept)         | -24,998           | 60,8836    | -144,327                     | 94,332 | ,169            | 1  | ,681 | 1,39E-011 | 2,09E-063                               | 9,3E+040 |
| [anno_sviluppo=0]   | ,903              | ,3378      | ,240                         | 1,565  | 7,139           | 1  | ,008 | 2,466     | 1,272                                   | 4,782    |
| [anno_sviluppo=1]   | 1,797             | ,3347      | 1,141                        | 2,453  | 28,812          | 1  | ,000 | 6,029     | 3,129                                   | 11,619   |
| [anno_sviluppo=2]   | 1,753             | ,3351      | 1,097                        | 2,410  | 27,374          | 1  | ,000 | 5,775     | 2,994                                   | 11,138   |
| [anno_sviluppo=3]   | 1,929             | ,3370      | 1,269                        | 2,590  | 32,775          | 1  | ,000 | 6,885     | 3,557                                   | 13,328   |
| [anno_sviluppo=4]   | 1,246             | ,3399      | ,580                         | 1,912  | 13,443          | 1  | ,000 | 3,477     | 1,786                                   | 6,769    |
| [anno_sviluppo=5]   | ,898              | ,3488      | ,215                         | 1,582  | 6,633           | 1  | ,010 | 2,456     | 1,240                                   | 4,865    |
| [anno_sviluppo=6]   | ,865              | ,3703      | ,139                         | 1,590  | 5,452           | 1  | ,020 | 2,374     | 1,149                                   | 4,906    |
| [anno_sviluppo=7]   | 0 <sup>a</sup>    | .          | .                            | .      | .               | .  | .    | 1         | .                                       | .        |
| anno_accadimento    | ,018              | ,0304      | -,041                        | ,078   | ,366            | 1  | ,545 | 1,019     | ,960                                    | 1,081    |
| (Scale)             | ,091 <sup>b</sup> | ,0211      | ,058                         | ,144   |                 |    |      |           |   |          |

Dependent Variable: pij

Model: (Intercept), anno\_sviluppo, anno\_accadimento

a. Set to zero because this parameter is redundant.

b. Maximum likelihood estimate.

Malgrado applicando questa struttura di regressione anche il parametro dell'intercetta risulta non significativamente diverso da zero, notiamo un miglioramento nei parametri degli anni di sviluppo; infatti ora tutti i parametri di differimento risultano significativi.

In termini di devianza e chi-quadro notiamo invece un miglioramento rispetto al modello con due variabili *factor*:

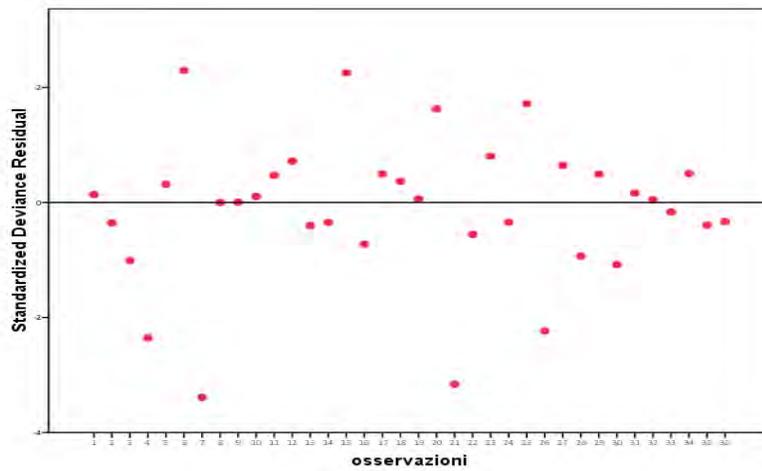
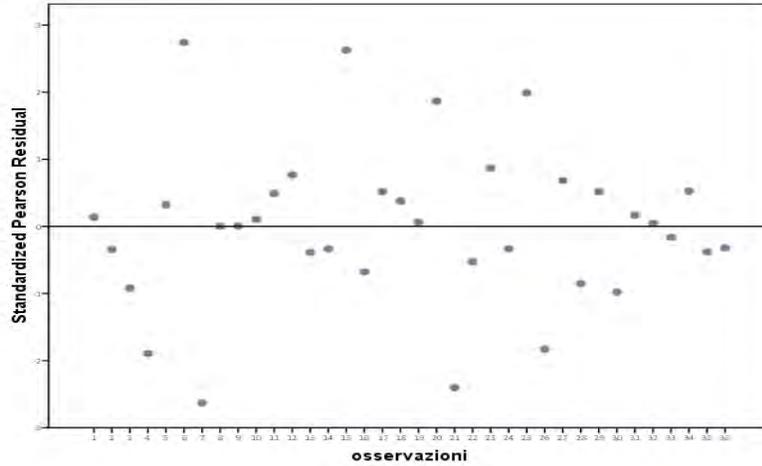
#### Goodness of Fit

|                                      | Value    | df | Value/df |
|--------------------------------------|----------|----|----------|
| Deviance                             | 3,327    | 27 | ,123     |
| Scaled Deviance                      | 36,546   | 27 |          |
| Pearson Chi-Square                   | 2,948    | 27 | ,109     |
| Scaled Pearson Chi-Square            | 32,385   | 27 |          |
| Log Likelihood <sup>a</sup>          | -484,314 |    |          |
| Akaike's Information Criterion (AIC) | 988,628  |    |          |
| Finite Sample Corrected AIC (AICC)   | 997,428  |    |          |
| Bayesian Information Criterion (BIC) | 1004,463 |    |          |
| Consistent AIC (CAIC)                | 1014,463 |    |          |

Dependent Variable: pij

Model: (Intercept), anno\_sviluppo, anno\_accadimento

Anche i grafici dei residui inducono a ritenere questo modello migliore, come si evince dalla loro variabilità, visibilmente inferiore.



Scegliamo pertanto il secondo modello per ricavare le stime del triangolo inferiore della matrice di run-off dei sinistri incrementali e cumulati, ottenendo i risultati che riportiamo di seguito.

|                                |      | anno di sviluppo |           |         |           |         |         |         |         |        |
|--------------------------------|------|------------------|-----------|---------|-----------|---------|---------|---------|---------|--------|
| $p_{ij}$                       |      | 0                | 1         | 2       | 3         | 4       | 5       | 6       | 7       | $R_i$  |
| anno di denuncia (accadimento) | 2000 | 357.848          | 766.940   | 610.542 | 482.940   | 527.326 | 574.398 | 146.342 | 139.950 | 67.948 |
|                                | 2001 | 352.118          | 884.021   | 933.894 | 1.183.289 | 445.745 | 320.996 | 527.804 | 174.921 |        |
|                                | 2002 | 290.507          | 1.001.799 | 926.219 | 1.016.654 | 750.816 | 146.923 | 321.901 | 158.452 |        |
|                                | 2003 | 310.608          | 1.108.250 | 776.189 | 1.562.400 | 272.482 | 377.051 | 334.692 | 164.749 |        |
|                                | 2004 | 443.160          | 693.190   | 991.983 | 769.488   | 503.135 | 362.430 | 321.714 | 158.360 |        |
|                                | 2005 | 396.132          | 937.085   | 847.498 | 1.044.054 | 535.462 | 385.718 | 342.385 | 168.535 |        |
|                                | 2006 | 440.832          | 847.631   | 914.242 | 1.077.039 | 552.379 | 397.903 | 353.202 | 173.860 |        |
|                                | 2007 | 359.480          | 864.114   | 828.407 | 975.919   | 500.518 | 360.545 | 320.041 | 157.537 |        |

|                                |      | anno di sviluppo |           |           |           |           |           |           |           |        |
|--------------------------------|------|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------|
| $C_{ij}$                       |      | 0                | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         | $R_i$  |
| anno di denuncia (accadimento) | 2000 | 357.848          | 1.124.788 | 1.735.330 | 2.218.270 | 2.745.596 | 3.319.994 | 3.466.336 | 3.606.286 | 67.948 |
|                                | 2001 | 352.118          | 1.236.139 | 2.170.033 | 3.353.322 | 3.799.067 | 4.120.063 | 4.647.867 | 4.822.788 |        |
|                                | 2002 | 290.507          | 1.292.306 | 2.218.525 | 3.235.179 | 3.985.995 | 4.132.918 | 4.454.819 | 4.613.271 |        |
|                                | 2003 | 310.608          | 1.418.858 | 2.195.047 | 3.757.447 | 4.029.929 | 4.406.980 | 4.741.672 | 4.906.421 |        |
|                                | 2004 | 443.160          | 1.136.350 | 2.128.333 | 2.897.821 | 3.400.956 | 3.763.386 | 4.085.100 | 4.243.461 |        |
|                                | 2005 | 396.132          | 1.333.217 | 2.180.715 | 3.224.769 | 3.760.232 | 4.145.949 | 4.488.335 | 4.656.870 |        |
|                                | 2006 | 440.832          | 1.288.463 | 2.202.705 | 3.279.744 | 3.832.123 | 4.230.026 | 4.583.228 | 4.757.088 |        |
|                                | 2007 | 359.480          | 1.223.594 | 2.052.001 | 3.027.920 | 3.528.437 | 3.888.983 | 4.209.024 | 4.366.561 |        |

Con l'ormai nota procedura abbiamo stimato le riserve per generazione e l'ammontare della riserva complessiva, ottenendo risultati non distanti da quelli del Chain Ladder e del modello di Poisson (tabella delle  $R_i$ ).

|      | $R_i$      |
|------|------------|
| 2000 | 67.948     |
| 2001 | 174.921    |
| 2002 | 480.353    |
| 2003 | 876.492    |
| 2004 | 1.345.640  |
| 2005 | 2.476.155  |
| 2006 | 3.468.625  |
| 2007 | 4.007.081  |
| $R$  | 12.897.214 |

Si notano infatti (GRAFICO 3) sporadiche differenze delle stime del modello Gamma logaritmo dai corrispondenti valori del modello deterministico e del modello di Poisson. Nel complesso otteniamo un ammontare più basso, sebbene la variazione rispetto al Chain Ladder sia inferiore al 3%.

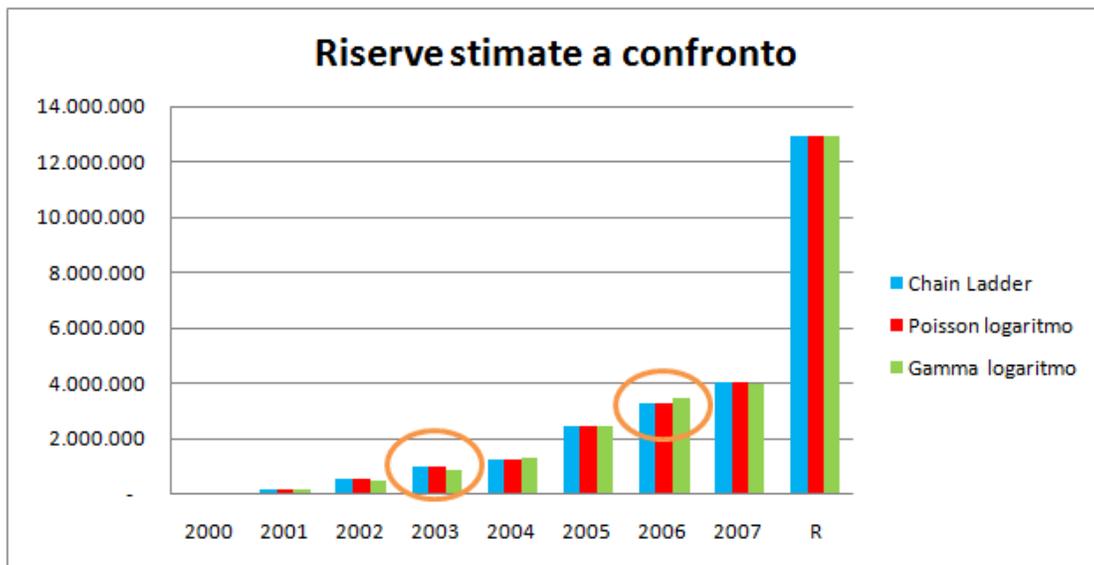


GRAFICO 3

## INTERPRETAZIONE DEL CHAIN LADDER COME GLM

Illustrando il modello di Poisson abbiamo visto come lo stesso conducesse alle stesse stime del Chain Ladder e come, in buona sostanza, potesse essere interpretato come un modello stocastico sottostante la tecnica deterministica Chain Ladder.

Vediamo ora un'altra interpretazione stocastica del modello deterministico, basata sulla parametrizzazione di Kremer (1982).

Ricordiamo brevemente i passaggi fondamentali del metodo Chain Ladder, al fine di riformulare la procedura di stima come un modello lineare generalizzato. Ciò faciliterà i confronti dei modelli stocastici che saranno presentati nel capitolo 4, con la tecnica deterministica di riferimento.

L'ipotesi fondamentale del modello abbiamo visto essere l'esistenza di una legge di progressione dei sinistri cumulati  $C_{i,j}$  invariante per tutte le generazioni dei sinistri.

Pertanto, a meno di variazioni aleatorie, valgono le seguenti uguaglianze dei rapporti tra sinistri cumulati di anni di differimento consecutivi:

$$\frac{C_{0,j}}{C_{0,j-1}} = \frac{C_{1,j}}{C_{1,j-1}} = \dots = \frac{C_{T,j}}{C_{T,j-1}} \quad \forall j = 0, \dots, T.$$

Sotto tale ipotesi vengono stimati i fattori di sviluppo per la proiezione dei dati mediante approccio *link ratio*, secondo la

$$m_j = \frac{\sum_{i=0}^{T-j} C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{T-j} C_{i,j-1}}.$$

I rapporti  $m_j$  individuano i parametri che descrivono la legge di progressione da una colonna della matrice dei sinistri cumulati a quella successiva:

$$\hat{C}_{i,k} = C_{i,j} \cdot \prod_{h=0}^{T-k} m_{j+h+1}, \quad \forall i, \text{ con } k = j + 1, \dots, T.$$

Di conseguenza il modello alla base di questa tecnica si può riassumere con la seguente

$$E(C_{i,j} | C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,j-1}) = m_j \cdot C_{i,j-1},$$

in base alla quale si evidenziano un effetto colonna, espresso dal fattore di sviluppo  $m_j$ , e un effetto riga, rappresentato dal termine  $C_{i,j-1}$ , che costituisce la base di partenza per la proiezione *link ratio* dei sinistri cumulati.

Dal momento che il metodo Chain Ladder coglie due effetti, il modello lineare proposto quale sua reinterpretazione deve anzitutto avere due parametri.

Consideriamo i dati non cumulati  $p_{i,j}$ , più facili da interpretare nell'ambito di un modello di regressione. In accordo con la struttura moltiplicativa del *link ratio*, poniamo

$$E(p_{i,j}) = \Xi_i \lambda_j$$

dove  $\Xi_i$  individua il parametro di riga e  $\lambda_j$  rappresenta il parametro di colonna.

In particolare  $\lambda_j$  rappresenta la proporzione attesa dei risarcimenti complessivi effettuati con  $j$  anni di differimento. Pertanto deve valere  $\sum_{j=1}^T \lambda_j = 1$ .

Il parametro di riga  $\Xi_i$  rappresenta invece il risarcimento atteso complessivo relativo alla generazione  $i$ -esima.

Ponendo

$$\lambda_j = \begin{cases} 1 / \prod_{h=2}^T m_h & \text{per } j = 1 \\ m_{j-1} / \prod_{h=j}^T m_h & \text{per } j \geq 2 \end{cases}$$

$$\Xi_i = E(C_{i,T})$$

si dimostra valere il seguente modello lineare per i logaritmi dei risarcimenti incrementali:

$$E(Z_{i,j}) = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

con

$$Z_{i,j} = \ln p_{i,j}.$$

I fattori  $\alpha_i$  e  $\beta_j$  possono quindi essere stimati come parametri di un modello lineare.

Invertendo infine la trasformazione logaritmica si ottengono le stime degli  $\Xi_i$ :

$$\Xi_i = E(C_{i,T}) = (\exp \alpha_i) \cdot (\exp \mu) \cdot \sum_{j=1}^k (\exp \beta_j),$$

che, combinate con i valori  $\lambda_j$  calcolabili a partire dai fattori di sviluppo del Chain Ladder, restituiscono i  $\hat{p}_{ij}$  tramite la

$$\hat{p}_{ij} = E(p_{i,j}) = \Xi_i \lambda_j.$$

L'utilizzo della trasformazione logaritmica fa sì che spesso in letteratura ci si riferisca a questo modello con la denominazione di modello log-normale.

Il modello lineare appena descritto produce esattamente le stesse stime del Chain Ladder, essendone la riformulazione secondo la logica dei modelli lineari. Tuttavia, applicando il modello lineare, si ha la certezza della correttezza delle stime, in quanto questa è una proprietà delle stime di massima verosimiglianza. Di fatto comunque non vi è alcuna differenza tra i risultati prodotti dall'uno o dall'altro modello.



---

## 4. MODELLI STOCASTICI

### IL METODO BOOTSTRAP PER LA RISERVA SINISTRI

La tecnica Bootstrap si basa sull'estrazione ripetuta di campioni casuali con ripetizione dai dati disponibili, finalizzata alla stima di una misura di variabilità degli stimatori.

Questo metodo è caratterizzato da grande versatilità, dal momento che può essere adattato a molti modelli. In particolare, nel caso dei GLM, può essere applicato sia direttamente alle osservazioni (*Paired Bootstrap*) sia ai residui (*Residual Bootstrap*).

Nel contesto della stima della riserva sinistri solo l'applicazione ai residui è possibile, per via della dipendenza tra alcune osservazioni e le stime dei parametri.

Una volta ottenute le stime  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\alpha}_i$ ,  $\hat{\beta}_j$  e  $\hat{\varphi}$  del generico modello adottato per i dati, la procedura applicata al triangolo di run-off prevede i seguenti passi:

1. Si determinano le stime  $\hat{\mu}_{ij}$  secondo il modello adottato in corrispondenza delle osservazioni  $y_{ij}$ .
2. Si calcolano i residui  $r_{ij} = r(y_{ij}, \hat{\mu}_{ij})$ .

La formulazione più usata per  $r(y_{ij}, \hat{\mu}_{ij})$  è quella di Pearson  $r_i^P$  (cfr. capitolo 3) nella versione standardizzata  $r_i^{P*}$  data da

$$r_i^{P*} = \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\sqrt{V(\hat{\mu}_i)}} = \frac{r_i^P}{\sqrt{1 - h_{ij}}}$$

con  $h_{ij}$  elemento della matrice  $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{W}$ , dove  $\mathbf{W}$  è una matrice diagonale di elementi

$$\left( V(\mu_{ij}) \left( \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial \mu_{ij}} \right)^2 \right)^{-1}.$$

3. Si completa il triangolo inferiore della matrice di run-off in base al modello dei dati, ottenendo un  $\hat{\mu}_{ij}$  per ogni combinazione anno di generazione-anno di sviluppo.
4. Si esegue un campionamento casuale con ripetizione dai residui calcolati al punto 2, ottenendo un nuovo set di residui  $r_{ij}^{(1)}$ . Con il numero posto ad apice si indica il numero di iterazioni svolte fino a questo passo.
5. Si creano degli pseudo-dati  $y_{ij}^{(1)}$  invertendo la  $r_{ij}^{(1)} = r(y_{ij}, \hat{\mu}_{ij})$ .
6. Si stimano i parametri del modello validi per il nuovo set di pseudo dati, ricavando, in base a questi, le nuove stime per  $\hat{\mu}_{ij}^{(1)}$ . I risultati ottenuti a questo punto devono essere salvati per essere utilizzati nella stima della variabilità delle stime.
7. Si ripetono i passi 4-6 per un numero  $B$  di iterazioni sufficientemente elevato. Come per tutte le tecniche di simulazione non esiste un modo per determinare il valore di  $B$ , che deve essere valutato di volta in volta.

I dati salvati per le  $B$  iterazioni fungono da distribuzione di probabilità prevista, dalla quale si ricavano empiricamente le misure di variabilità desiderate. Ad esempio la  $\text{var}(\hat{\mu}_i)$  e la  $\text{var}(\hat{\mu})$  si ricavano come media delle varianze empiriche corrispondenti sperimentate nelle  $B$  iterazioni.

Le stime così ottenute devono essere corrette attraverso il fattore correttivo  $N/(N - p)$ , essendo  $N$  il numero di osservazioni del triangolo di run-off e  $p$  il numero dei parametri del modello lineare generalizzato scelto per i dati.

## INTRODUZIONE AI MODELLI CHAIN LADDER

Si usa denominare modelli Chain Ladder quei modelli stocastici che riproducono le stime del metodo Chain Ladder. Essi comprendono anche la formulazione di Kremer (1982) ed il modello di Poisson che abbiamo introdotto nel capitolo 3.

La tecnica Chain Ladder è un metodo deterministico per la stima della riserva sinistri e pertanto non esiste un modello stocastico ad essa sottostante. L'interesse a trovare modelli stocastici che forniscano risultati analoghi risiede nella necessità di conoscere l'errore di previsione; concetto questo, estraneo alle procedure deterministiche e proprio invece dei metodi stocastici.

L'errore di previsione delle stime della riserva sinistri, che misura la variabilità delle stime stesse, non ha solo una finalità statistica, ma anche un interesse attuariale nell'ottica di un giudizio sull'eventuale necessità di costituire riserve aggiuntive prudenti.

Un metodo stocastico per la stima della riserva sinistri prevede, dopo la scelta di una struttura parametrica appropriata, l'accostamento di tale struttura ai dati disponibili (nel nostro caso al triangolo superiore, noto). L'approccio tipico è quella della stima dei parametri della struttura, vera ma incognita, con il metodo della massima verosimiglianza.

La pratica attuariale illustra tradizionalmente i metodi deterministici a partire dai triangoli di *run-off* dei sinistri cumulati, ma è solo una questione di disponibilità dei dati. Nel seguito i modelli stocastici saranno invece illustrati in base al triangolo dei sinistri incrementali, in quanto permette di apprezzare meglio le considerazioni riguardo la forma delle distribuzioni. Di fatto ciò è irrilevante, poiché l'obiettivo dell'introduzione di modelli stocastici non è tanto quello di completare il triangolo, quanto piuttosto quello

di approdare a stime della riserva sinistri analoghe ai metodi deterministici di riferimento, siano essi Chain Ladder o sue opportune varianti.

Indichiamo, in base alla notazione adottata nei capitoli precedenti, con  $p_{ij}$  l'ammontare pagato dalla Compagnia per sinistri generati nell'anno  $i$ , con  $i = 1, \dots, T$ , pagati nel corso del  $j$ -esimo anno di sviluppo, con  $j = 1, \dots, n - i + 1$ , senza per il momento distinguere tra sinistri riportati, liquidati e pagati. Tale distinzione sarà invece rilevante nel seguito, a proposito della riserva per i cosiddetti sinistri IBNR.

Con  $C_{ij}$  indichiamo il risarcimento complessivo cumulato, vale a dire dovuto per sinistri generati nell'anno  $i$  e pagati con un ritardo di al massimo  $j$  anni.

## IL MODELLO DI POISSON SOVRADISPERSO

La variabile aleatoria di Poisson trova frequente applicazione nell'ambito della teoria del rischio. Evidenze empiriche infatti attribuiscono al numero dei sinistri una distribuzione di frequenza ben accostabile a tale variabile.

Il modello di Poisson semplice non si dimostra però pienamente efficace per modellizzare l'andamento dei risarcimenti incrementali, come abbiamo già avuto modo di illustrare nel capitolo 3.

Una variante alla distribuzione di Poisson semplice è la Poisson sovra dispersa, caratterizzata da varianza proporzionale alla media. England e Verrall (2002) applicano tale modello direttamente ai sinistri incrementali, superando alcuni limiti del modello di Poisson classico.

Il processo si basa sull'ipotesi che i sinistri incrementali  $p_{ij}$  si distribuiscono come variabili aleatorie di Poisson sovradisperse con parametri:

$$E[p_{ij}] = \mu_{ij} = x_i y_j$$

$$\text{Var}[p_{ij}] = \varphi \mu_{ij} = \varphi x_i y_j,$$

dove  $x_i$  rappresenta il risarcimento atteso complessivo pagato per sinistri generati nell'esercizio  $i$ -esimo, e  $y_j$  la proporzione di tale ammontare pagata nell'anno di sviluppo  $j$ -esimo. Vale naturalmente

$$\sum_{j=0}^T y_j = 1,$$

con  $T$  ultimo anno di sviluppo considerato dal triangolo; in altre parole si suppone che tutti i sinistri siano pagati entro il  $T$ -esimo anno dalla data di accadimento.

Inoltre la forma della varianza impone automaticamente la non negatività degli  $y_j$ , che indirettamente comporta che la somma per colonna dei sinistri incrementali sia positiva per qualunque  $j$ . Questa è certo un limite del modello, anche se i casi di risarcimenti negativi per tutto lo sviluppo  $j$ -esimo sono nella pratica relegati a particolarissime condizioni del portafoglio (contenziosi, anticipazione di pagamenti, sinistri da ammortizzare).

Questa ipotesi permette di dare un'accezione di probabilità agli  $y_j$ ; d'altro canto è un atteggiamento non prudente da un punto di vista attuariale, perché non si considera la possibilità di eventuali code della liquidazione dei sinistri.

Secondo questa formulazione il valore atteso ha pertanto una struttura moltiplicativa, i cui fattori hanno, come mostrato, una precisa interpretazione. In generale si può ricondurre il parametro media ad una combinazione lineare, di fatto riconducibile ad una trasformazione logaritmica:

$$\log(\mu_{ij}) = c + \alpha_i + \beta_j.$$

Considerando quindi che

- $p_{ij} \sim \text{Poisson}(\mu_{ij})$
- $\log(\mu_{ij}) = c + \alpha_i + \beta_j = \eta$

Se il predittore  $\eta$  è lineare, allora si ha un GLM.

In questo modo il modello stocastico sottostante si traduce in un modello lineare generalizzato, pur conservando una struttura di tipo Chain Ladder, nel senso che il contributo per riga e il contributo per colonna sono separati (sebbene non siano in questa forma facilmente interpretabili da un punto di vista attuariale).

La sovra dispersione introdotta dal parametro  $\varphi$ , che pure deve essere stimato, non influenza la stima di  $x_i$  ed  $y_j$ , che risulteranno uguali a quelli ottenibili per un modello di Poisson semplice, ma solo la stima dello standard error degli stimatori dei parametri; infatti la forma della funzione di verosimiglianza è la stessa di quella per il modello di Poisson semplice, e quindi lo sono anche le soluzioni del sistema di verosimiglianza.

Sia

$$\mathcal{L}(\mu; y; \varphi) \propto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-i+1} \frac{1}{\varphi} (p_{ij} \log \mu_{ij} - \mu_{ij})$$

la funzione di log-verosimiglianza del modello di Poisson sovra disperso (nel seguito ODP).

Essa è identica a quella per un modello di Poisson semplice a meno di una costante moltiplicativa (nel nostro caso  $1/\varphi$ ), poiché basta dividere per il parametro (costante) di sovra dispersione la variabile Poisson sovra dispersa per ottenere una variabile casuale Poisson semplice:

$$E \left[ \frac{p_{ij}}{\varphi} \right] = \frac{\mu_{ij}}{\varphi}$$

e

$$\text{Var} \left[ \frac{p_{ij}}{\varphi} \right] = \frac{\text{Var}[p_{ij}]}{\varphi^2} = \frac{\varphi \mu_{ij}}{\varphi^2} = \frac{\mu_{ij}}{\varphi} = E \left[ \frac{p_{ij}}{\varphi} \right].$$

Una stima del parametro di sovra dispersione  $\varphi$  è basata sui residui di Pearson, e risulta:

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{gdl} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-i+1} \left( \frac{p_{ij} - \hat{p}_{ij}}{\sqrt{\hat{p}_{ij}}} \right)^2$$

I gradi di libertà (*gdl*) delle stime sono pari alla differenza tra il numero delle osservazioni ed il numero di parametri usati nel modello. Il numero delle osservazioni è immediato:  $n(n+1)/2$ . Il numero dei parametri, considerato che la matrice dei dati consta di  $n$  righe ed altrettante colonne e che gli  $y_j$  sono soggetti alla condizione  $\sum_{k=1}^n y_k = 1$ , è pari a  $2n - 1$ ; pertanto  $gdl = n(n-3)/2 + 1$ .

Rispetto all'impostazione precedente England e Verral (2002) hanno proposto una versione più sofisticata del modello ODP che considera il parametro di scala non costante. Vediamo le considerazioni che fanno approdare gli autori a tale conclusione.

Il metodo Chain Ladder insiste su un'interpretazione dei  $p_{ij}$  come risultato della combinazione di un effetto riga espressivo della generazione di sinistri e di un effetto colonna espressivo del ritardo del pagamento. Secondo l'approccio collettivo della teoria del rischio, possiamo invece intendere  $p_{ij}$  come la somma di tutti i singoli pagamenti:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{ij}} X_{ij}^{(k)}$$

dove con  $N_{ij}$  si indica il numero aleatorio di pagamenti individuali riferiti a sinistri generati nell'anno  $i$  e pagati nel  $j$ -esimo anno di sviluppo, e con  $X_{ij}^{(k)}$  l'ammontare del singolo pagamento, cioè il costo del sinistro  $k$ -esimo.

Dalla teoria del rischio sono inoltre note le relazioni che legano i momenti delle grandezze aleatorie di interesse, ed in particolare:

$$E[p_{ij}] = E[N_{ij}]E[X_{ij}]$$

e

$$Var[p_{ij}] = E[N_{ij}]Var[X_{ij}] + Var[N_{ij}](E[X_{ij}])^2.$$

È necessario a questo punto formulare alcune ipotesi su  $N_{ij}$  e  $X_{ij}^{(k)}$  al fine di mostrare la relazione esistente tra media e varianza di  $p_{ij}$ . Questa conoscenza è cruciale, come già visto, al momento di stabilire quale sia la variabile aleatoria più adatta a descriverne l'andamento.

Il problema è stato ampiamente discusso nell'ambito della teoria del rischio, al cui proposito la letteratura frequentemente ipotizza per  $N_{ij}$  un modello ODP, e per gli  $X_{ij}^{(k)}$  una distribuzione Gamma.

Ne consegue che la varianza del numero aleatorio di sinistri è proporzionale alla media,

$$Var[N_{ij}] = \psi E[N_{ij}],$$

e che la varianza del costo sinistri è proporzionale al quadrato della media,

$$Var[X_{ij}] = v(E[X_{ij}])^2.$$

Possiamo quindi riscrivere l'espressione della varianza dei pagamenti complessivi dei sinistri alla luce delle espressioni appena ricavate:

$$\begin{aligned}
Var[p_{ij}] &= E[N_{ij}]Var[X_{ij}] + Var[N_{ij}](E[X_{ij}])^2 \\
&= E[N_{ij}]v(E[X_{ij}])^2 + \psi E[N_{ij}](E[X_{ij}])^2 \\
&= [E[X_{ij}](v + \psi)]E[N_{ij}]E[X_{ij}] \\
&= \varphi_{ij}E[p_{ij}].
\end{aligned}$$

Si dimostra quindi che sotto opportune ipotesi la varianza del carico sinistri è effettivamente proporzionale alla media, come in una variabile di Poisson sovra dispersa. Il fattore di proporzionalità però ha una differenza sostanziale con quello del modello ODP, in quanto tale fattore dipende da  $i$  e da  $j$ .

Ora, è ragionevole ritenere che tale fattore in realtà non cambi al crescere di  $i$ ; ciò equivale ad ipotizzare che di anno in anno le caratteristiche del business non cambiano. In effetti per validare questa assunzione è necessario anche che le politiche di liquidazione della Compagnia non subiscano un radicale cambiamento tale da modificare, da un esercizio all'altro, il comportamento del carico sinistri. D'altro canto questo parametro varierà sicuramente al crescere di  $j$ , perché all'aumentare dell'anno di sviluppo, e quindi al crescere del ritardo di pagamento del sinistro, non è legittimo assumere lo stesso comportamento della variabilità.

Queste considerazioni ci portano a modificare l'espressione della varianza con

$$Var[p_{ij}] = \varphi_j E[p_{ij}].$$

Dal momento che il parametro di sovra dispersione non è più lo stesso per tutto il triangolo dei sinistri incrementali, si rende necessario un procedimento di stima basato sull'iterazione della massimizzazione della funzione di verosimiglianza. A riguardo facciamo riferimento a Verral (2008).

L'espressione della log-verosimiglianza è analoga a quella già vista per il modello ODP, con la variante del parametro di sovra dispersione:

$$\mathcal{L}(\mu; y; \varphi) \propto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-i+1} \frac{1}{\varphi_j} (p_{ij} \log \mu_{ij} - \mu_{ij}),$$

da cui si ricavano le stime dei parametri  $\mu_{ij}$  ponendo inizialmente  $\varphi_j = 1$ ; il sistema delle condizioni di prim'ordine si semplifica in:

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-i+1} \frac{p_{ij}}{\mu_{ij}} - n = 0$$

Inizialmente quindi si risolve il sistema di massima verosimiglianza del tutto analogo a quello del modello di Poisson semplice, avendo posto  $\varphi_j = 1 \forall j$ . Ottenute così una prima stima dei parametri del predittore, si procede alla stima del set di parametri di sovra dispersione, utilizzando ad esempio i residui di Pearson.

A questo punto i  $\hat{\varphi}_j$  vengono sostituiti nella funzione di log-verosimiglianza dalla cui massimizzazione si ottengono nuove stime dei parametri del predittore. Si affronta quindi di nuovo la stima dei parametri di sovra dispersione in base allo stesso approccio utilizzato al passo precedente.

Applichiamo questa versione del modello ODP al nostro TRIANGOLO 1 (cfr capitolo2).

Abbiamo di fatto già svolto il primo passo nel contesto del modello Poisson-logaritmo (cap.3), perciò sulla base di quelle stime del predittore, siamo in grado di calcolare i residui di Pearson e ottenere da essi un primo set di stimatori dei parametri di sovra dispersione  $\varphi_j^{(1)}$  che riportiamo di seguito.

|                         | anno di sviluppo |         |          |          |           |           |           |           |
|-------------------------|------------------|---------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\hat{\varphi}_j$       | 0                | 1       | 2        | 3        | 4         | 5         | 6         | 7         |
| $\hat{\varphi}_j^{(1)}$ | 15123,82         | 9268,08 | 18748,13 | 85014,63 | 102089,29 | 218382,08 | 121622,08 | 121622,08 |

Utilizziamo queste stime come variabile di scala per stimare nuovamente i parametri del predittore. Riportiamo un estratto dell'output di SPSS dal quale notiamo un immediato miglioramento in termini di adattamento ai dati del modello.

Tralasciamo di riportare tutti i risultati intermedi che riassumiamo brevemente a parole: le stime dei parametri non cambiano, perché infatti l'introduzione di parametri di dispersione non modifica le equazioni del sistema di verosimiglianza. Tuttavia cambiano gli intervalli di confidenza per gli stimatori. Inoltre alcuni parametri risultano non significativi.

Gli indicatori sintetici di accettabilità del modello mostrano valori già molto vicini a quelli teorici:

**Goodness of Fit**

|                                      | Value   | df | Value/df |
|--------------------------------------|---------|----|----------|
| Deviance                             | 6E+010  | 21 | 3E+009   |
| Scaled Deviance                      | 20,331  | 21 |          |
| Pearson Chi-Square                   | 6E+010  | 21 | 3E+009   |
| Scaled Pearson Chi-Square            | 21,000  | 21 |          |
| Log Likelihood <sup>a</sup>          | -3E+010 |    |          |
| Akaike's Information Criterion (AIC) | 6E+010  |    |          |
| Finite Sample Corrected AIC (AICC)   | 6E+010  |    |          |
| Bayesian Information Criterion (BIC) | 6E+010  |    |          |
| Consistent AIC (CAIC)                | 6E+010  |    |          |

Dependent Variable: pij

Model: (Intercept), anno\_accadimento, anno\_sviluppo

a. The full log likelihood function is displayed and used in computing information criteria.

b. Information criteria are in small-is-better form.

Applichiamo lo stesso procedimento per tre iterazioni, ottenendo le seguenti stime dei parametri di sovra dispersione.

| $\phi_j$       | anno di sviluppo |         |          |          |           |           |           |           |
|----------------|------------------|---------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|                | 0                | 1       | 2        | 3        | 4         | 5         | 6         | 7         |
| $\phi_j^{(1)}$ | 15123,82         | 9268,08 | 18748,13 | 85014,63 | 102089,29 | 218382,08 | 121622,08 | 121622,08 |
| $\phi_j^{(2)}$ | 17602,70         | 7358,44 | 22702,49 | 84120,56 | 202812,72 | 223130,53 | 144047,09 | 144047,09 |
| $\phi_j^{(3)}$ | 19687,25         | 8113,71 | 25598,18 | 83648,02 | 180399,09 | 221254,78 | 176717,28 | 176717,28 |
| $\phi_j^{(4)}$ | 19177,30         | 8164,03 | 24180,16 | 83668,51 | 166692,80 | 221718,63 | 178184,37 | 178184,37 |

Decidiamo di arrestare al quarto passo il procedimento iterativo, perché il confronto grafico degli stimatori  $\hat{\phi}_j$  ai differenti stadi mostra di fatto la convergenza delle stime. Notiamo infatti un solo caso in cui le stime al quarto passo sono sensibilmente diverse da quelle ottenute al terzo.

Si tratta degli stimatori per il quinto anno di sviluppo, come evidenziato nel grafico che segue.

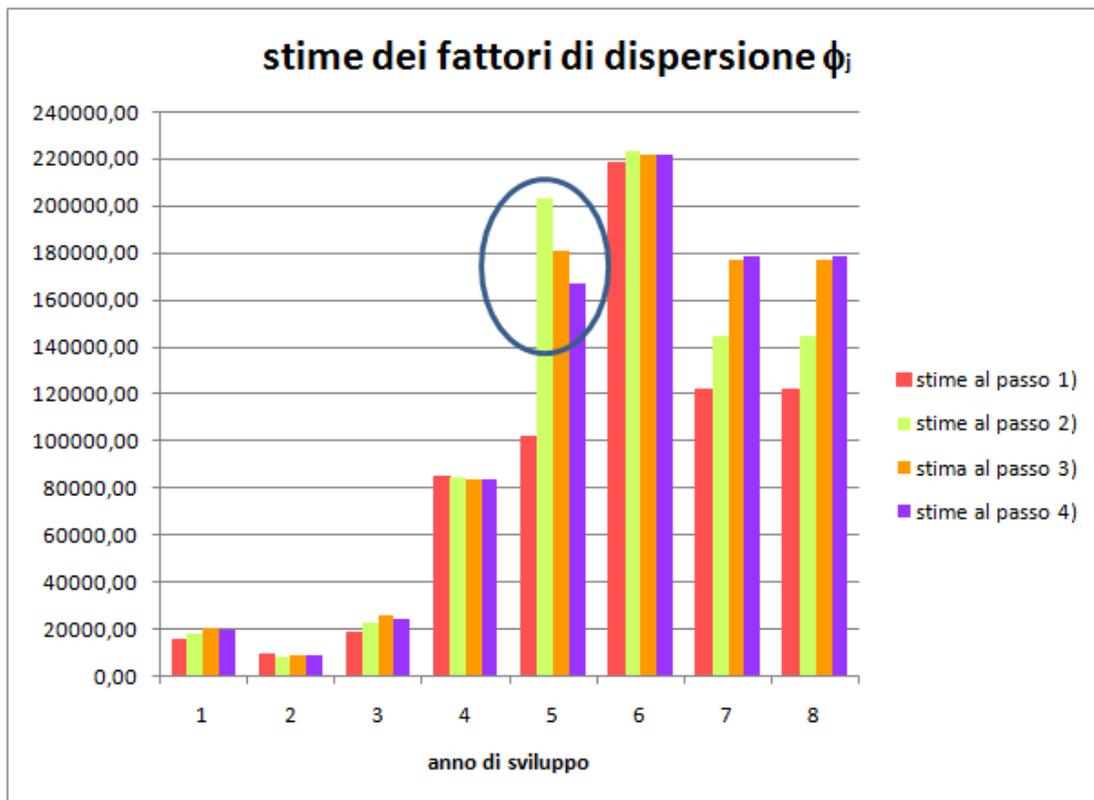


GRAFICO 4

L'iterazione delle stime deve essere perseguita fino alla convergenza, ma nella pratica questo non è un risultato facile da ottenere. Generalmente quindi si sceglie di interrompere il *loop* ad un fissato numero di iterazioni, anche basso, accontentandosi di stime non perfettamente convergenti.

Pertanto può rendersi necessario un livellamento, per così dire, manuale: i  $\hat{\mu}_{ij}$  stimati vengono accostati alle corrispondenti stime del Chain Ladder e tenuti fissi mentre si procede ad un'ulteriore stima  $\hat{\phi}_j^*$  dei parametri di sovra dispersione attraverso i residui. Dal confronto grafico tra i  $\hat{\phi}_j$  ottenuti con il procedimento iterativo e i  $\hat{\phi}_j^*$ , è immediato individuare quali stime si collocano "fuori dal coro". Esse verranno dunque aggiustate in ragione del trend individuabile sul grafico.

Non è raro infatti che alcuni  $\hat{\phi}_j$  siano particolarmente distanti dai corrispondenti  $\hat{\phi}_j^*$  e dalla linea di tendenza delle altre stime. Tuttavia, trattandosi di dati aggregati per generazioni, non è possibile stabilire il motivo dell'anomalia di tali stime.

Con riferimento al nostro esempio, notiamo senza sorpresa che tali valori critici si riscontrano proprio in corrispondenza del quinto anno di sviluppo, dove le stime presentano la maggiore difficoltà a convergere. Purtroppo però non siamo in grado di individuare le cause di tale discontinuità.

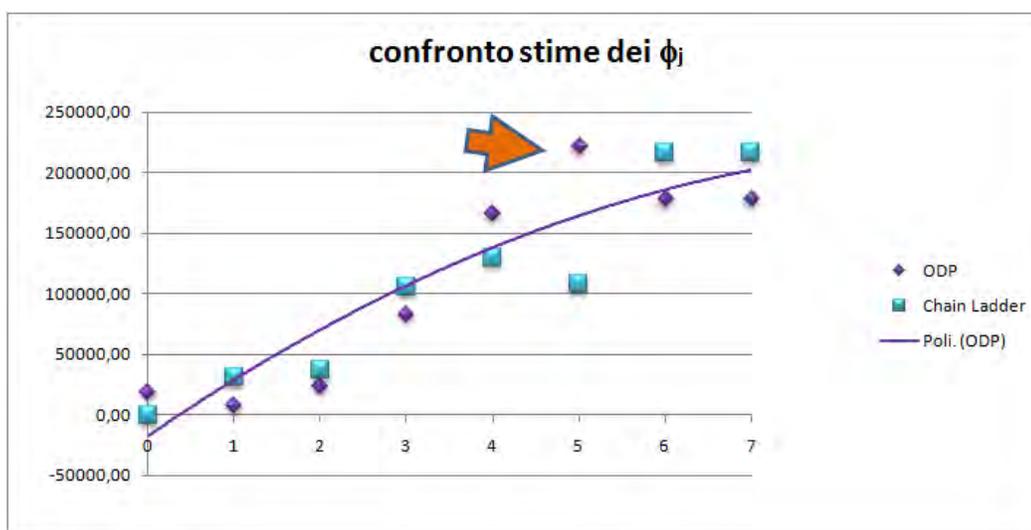


GRAFICO 5

Un'ulteriore possibilità di aggiustamento dei  $\hat{\varphi}_j$  è dato dall'impiego della tecnica bootstrap, tramite la quale è possibile simulare la distribuzione di tali stimatori ed il relativo standard error.

## IL MODELLO BINOMIALE NEGATIVO E L'APPROSSIMAZIONE NORMALE

La stessa logica della sovra dispersione vista per il modello ODP ispira il modello binomiale negativo per i sinistri incrementali. Si ipotizza che essi si distribuiscano come una variabile binomiale negativa la cui varianza è accresciuta in ragione di un fattore moltiplicativo. Per coerenza con quanto commentato a proposito dei modelli di Poisson ed ODP indichiamo questo parametro di sovra dispersione con il simbolo  $\varphi$ .

Verral (2000) ha illustrato questo modello legando i parametri della binomiale negativa al triangolo dei sinistri incrementali  $p_{ij}$  e ai fattori di sviluppo  $m_j$  calcolabili con la tecnica Chain Ladder.

i risarcimenti incrementali  $p_{ij}$  si ipotizzano distribuiti come una binomiale negativa di media e varianza:

$$E(p_{ij}) = (m_j - 1)C_{i,j-1}$$

$$\text{var}(p_{ij}) = \varphi m_j (m_j - 1) C_{i,j-1}$$

Va notato che  $m_j > 1$ , per via del termine  $(m_j - 1)$  che compare nella varianza. Sapendo che gli  $m_j$  sono i fattori di sviluppo del Chain Ladder, questa condizione equivale ad imporre che i totali per colonna dei sinistri incrementali siano sempre positivi, che è esattamente una delle condizioni del modello ODP.

Ciò non sorprende, in quanto il modello binomiale negativo è stato originalmente ricavato da Verral (2000) proprio come forma ricorsiva del modello ODP.

In effetti è piuttosto intuitivo pensare a strutture ricorsive quando si fa riferimento ai sinistri cumulati, in quanto per definizione vale che

$$C_{ij} = C_{i,j-1} + p_{ij}$$

e  $C_{i,j-1}$  è un ammontare noto per tutti gli  $j \leq T - i$  (in altre parole per tutte le osservazioni del triangolo superiore della matrice di run-off)

Sempre Verral (2000) ha dimostrato che il modello ricorsivo riconducibile alla binomiale negativa riproduce le stime della riserva sinistri ottenibili con la tecnica Chain Ladder, come del resto il modello ODP.

Possiede però il vantaggio, rispetto a quest'ultimo, di un numero molto minore di parametri da stimare. Infatti, anziché considerare sia parametri di riga sia parametri colonna, questo approccio prevede la stima di soli parametri colonna ( $m_j$ ) dal momento che i  $C_{i,j-1}$  sono noti  $\forall j = 1, \dots, T - i + 1$ . Il numero dei parametri da stimare risulta pertanto  $T - 1$ , anziché i  $2T - 1$  parametri del modello ODP.

Per riscrivere il modello nella forma di GLM, consideriamo il valore atteso

$$E(p_{ij}) = \mu_{ij} = (m_j - 1)C_{i,j-1}$$

utilizzando la trasformazione logaritmica. Otteniamo

$$\ln(\mu_{ij}) = \ln(m_j - 1) + \ln(C_{i,j-1}).$$

Ponendo

$$\ln(m_j - 1) = c + \alpha_{j-1}$$

possiamo riscrivere

$$\ln(\mu_{ij}) = c + \alpha_{j-1} + \ln(C_{i,j-1}),$$

che individua un GLM con funzione *link* logaritmica e struttura probabilistica binomiale negativa.

Anche in questo caso di norma si utilizza il criterio di stima della massima verosimiglianza, dove la funzione di log-verosimiglianza assume la seguente forma:

$$\mathcal{L}(m; y; \varphi) \propto \frac{1}{\varphi} \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^{T-i+1} \left( -C_{i,j-1} \log(m_j) + p_{ij} \log \left( 1 - \frac{1}{m_j} \right) \right).$$

Il modello appena descritto ha un limite in comune con il modello ODP da cui deriva, ed è quello della condizione sulla non negatività dei totali per colonna degli incrementi. Nel caso del modello binomiale negativo tale limitazione è espressa da  $m_j \geq 1$ .

Per superare questo limite è necessario ricorrere ad una distribuzione il cui supporto non sia limitato a valori non negativi. Una variabile aleatoria che si presta allo scopo è certamente la Normale, anche se evidenze empiriche tendono a rifiutare l'ipotesi di distribuzioni dei sinistri simmetriche.

L'utilizzo della Normale è certamente un'approssimazione, resa più efficace da un'opportuna scelta della forma dei parametri. Per quanto riguarda la media si adotta la stessa forma del modello binomiale, mentre per la varianza occorre una scelta ragionata. Anzitutto la varianza dovrà essere proporzionale a  $C_{i,j-1}$ , in accordo con il modello binomiale negativo; inoltre deve prevedere un parametro di dispersione e contemporaneamente dipendere dall'anno di sviluppo  $j$ , senza però essere influenzata dai  $m_j$ . Unendo queste ultime due esigenze si giunge alla scelta di includere un parametro di dispersione in funzione dell'anno di sviluppo, che indichiamo con  $\varphi_j$ .

Media e varianza risulteranno quindi:

- nel caso si voglia descrivere i sinistri incrementali  $p_{i,j}$

$$E(p_{ij}) = (m_j - 1)C_{i,j-1}$$

$$\text{var}(p_{ij}) = \varphi_j C_{i,j-1}$$

- nel caso invece si voglia applicare il modello ai sinistri cumulati  $p_{i,j}$

$$E(C_{ij}) = m_j C_{i,j-1}$$

$$\text{var}(C_{ij}) = \varphi_j C_{i,j-1}$$

Valgono le stesse considerazioni sulla ricorsività del modello formulate per la binomiale negativa, in quanto  $C_{i,j-1}$  sono valori noti dalle osservazioni.

#### LA CURVA DI HOERL E IL MODELLO DI WRIGHT

Com'è noto il metodo Chain Ladder stima un coefficiente di proporzionalità per ogni anno di sviluppo ed essenzialmente ciascuno di tali fattori viene trattato indipendentemente dagli altri. Una soluzione comune a questa elevata parametrizzazione consiste nell'individuare una curva da accostare ai coefficienti di proporzionalità, la cui forma generalmente è rapidamente crescente fino ad un massimo e poi decrescente esponenzialmente. La funzione Gamma si presta, per il suo andamento, allo scopo.

Un approccio di questo tipo, detto curva di Hoerl, è in effetti molto lontano da quello della tecnica Chain Ladder, in quanto formula un'ipotesi, appunto quella della forma di una Gamma, a riguardo dell'evoluzione del numero di sinistri per anno di sviluppo. Al contrario, l'unica assunzione richiesta dal metodo Chain Ladder è che l'evoluzione del pagamento dei sinistri non cambi in funzione dell'anno di generazione.

Per il modello ODP, per il quale la funzione link è di tipo logaritmico, la curva di Hoerl si ottiene ponendo il predittore lineare pari a :

$$\eta_{ij} = c + \alpha_i + \beta_j \log(j) + \gamma_j j.$$

L'anno di sviluppo  $j$  compare come covariata continua, a differenza che nel contesto Chain Ladder nel quale il predittore lineare fornisce un parametro per ogni  $j$ , con il vantaggio di poter ottenere parametri validi anche al di fuori dell'intervallo di sviluppo dei dati osservati. In particolare questa proprietà è apprezzata nel caso in cui si desideri stimare parametri associati ad effetti posti sulla coda destra della distribuzione.

In realtà è assai raro che la curva di Hoerl si accosti in modo soddisfacente per tutti gli anni di sviluppo considerati; tuttavia si verifica un notevole miglioramento lasciando liberi i primi anni di sviluppo e adattando la curva parametrica ai soli anni che seguono il punto di massimo.

Il modello di Wright , con riferimento al modello di teoria del rischio illustrato sopra, modella il numero aleatorio di sinistri con una Poisson semplice (ponendosi quindi nel caso particolare in cui  $\varphi = 1$ ) tale che:

$$E[N_{ij}] = e_j a_j k_j j^{A_j} \exp(-b_j j),$$

in cui  $k_j$   $A_j$   $b_j$  sono costanti da stimare, mentre  $e_j$  ed  $a_j$  hanno un significato attuariale preciso;  $e$  esprime infatti una misura dell'esposizione, mentre  $a_j$  è un termine correttivo noto, i cui valori sono determinati dall'autore sulla base di considerazioni tecniche.

Il costo sinistri è invece descritto da una distribuzione Gamma tale che:

$$E[X_{ij}] = \exp(\delta t) \kappa d^\lambda,$$

dove  $\kappa$  e  $\lambda$  sono costanti non note, mentre il termine  $\exp(\delta t)$  vuole essere espressivo della possibile inflazione sinistri, che infatti dipende dall'anno di calendario  $t = i + j$  e

dal tasso di inflazione sinistri stimato  $\delta$ . Con  $d$  si indica invece il ritardo (*delay*) nel pagamento del sinistro; ritardo che assumerà i seguenti valori:

$$d = \begin{cases} 0,5 & j = 1 \\ j - 1 & j > 1 \end{cases}$$

per tenere conto del convenzionale ritardo di sei mesi, riportato qualora il pagamento avvenga già nel primo anno di sviluppo.

Il valore di  $\lambda$ , essendo funzione potenza, incide sulla forma della curva di incidenza del ritardo, vale a dire sul modo in cui il ritardo nel pagamento accresce l'ammontare medio del pagamento stesso. Essa rappresenta quindi il peso dell'inflazione sul costo medio.

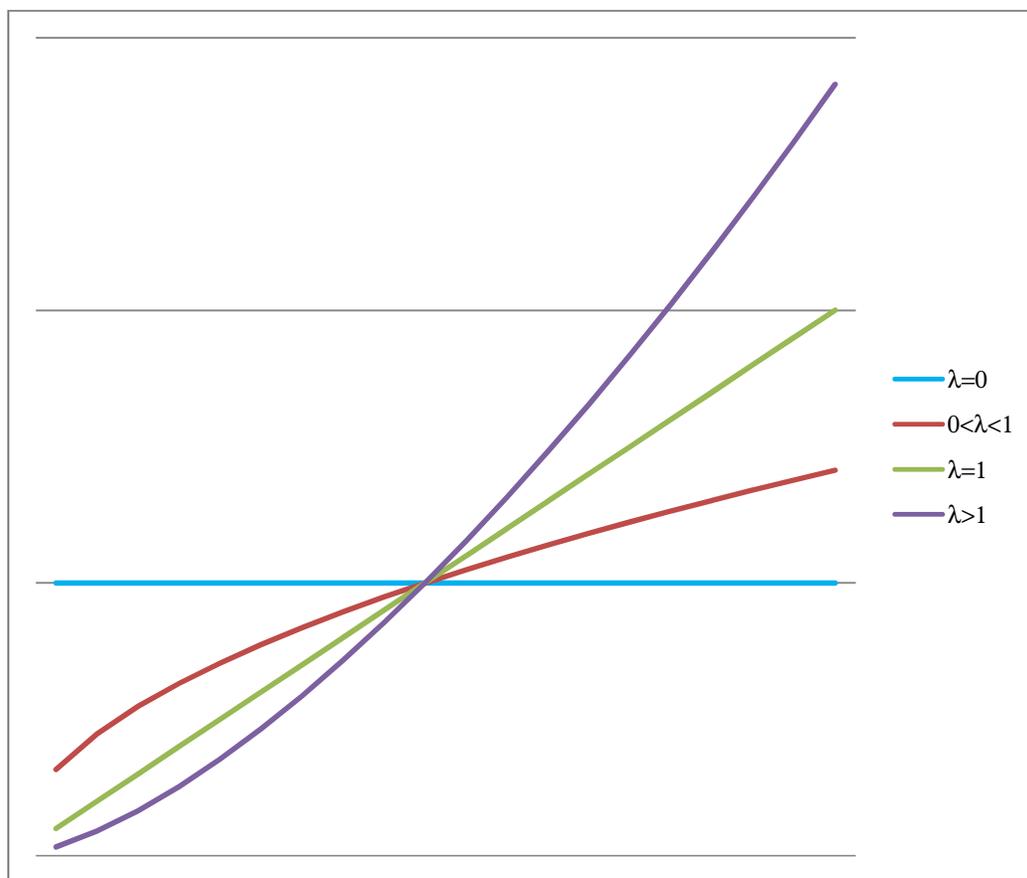


GRAFICO 6

Dalla combinazione di numero medio e costo medio sinistri ed in base alle relazioni note dalla teoria del rischio

$$E[p_{ij}] = E[N_{ij}]E[X_{ij}]$$

e

$$Var[p_{ij}] = E[N_{ij}]Var[X_{ij}] + Var[N_{ij}](E[X_{ij}])^2,$$

le espressioni di media e varianza dei sinistri incrementali  $p_{ij}$  risultano

$$E[p_{ij}] = \mu_{ij} = e_j a_j k_j^{A_j} \exp(-b_j) \exp(\delta t) k d^\lambda$$

e

$$Var[p_{ij}] = (1 + v) k d^\lambda \exp(\delta t) E[p_{ij}],$$

che, con un'opportuna riparametrizzazione, permettono di impostare il problema come un modello lineare generalizzato. A questo scopo seguiamo l'impostazione di Renshaw (1994), in base alla quale si riformula

$$E[p_{ij}] = \exp(u_{ij} + c + a_i + b_j \log(d) + \gamma_i d + \delta t)$$

e

$$Var[p_{ij}] = \varphi_{ij} E[p_{ij}] = \varphi_{ij} \mu_{ij},$$

dove i  $\varphi_{ij}$  sono gli ormai familiari parametri di scala del modello ODP.

Il modello lineare generalizzato per la variabile risposta  $p_{ij}$  utilizza una funzione legame logaritmica:

$$\log(E[p_{ij}]) = \eta_{ij},$$

dove il predittore lineare è

$$\eta_{ij} = u_{ij} + c + a_i + b_j \log(d) + \gamma_i d + \delta t.$$

Tralasciando i termini  $u_{ij}$ , che rappresentano piccole correzioni tecniche note, e il termine facoltativo  $\delta t$ , espressivo dell'inflazione, si ritrova la curva di Hoerl. La differenza sta nel fatto che questo modello considera per variabile risposta direttamente i sinistri incrementali, anziché una loro trasformazione (logaritmica nel caso della curva di Hoerl).

A riguardo dell'interpretazione dei parametri in una logica Chain Ladder, è utile riformulare:

$$E[p_{ij}] = e_j a_j k_j^{A_j} \exp(-b_j) \exp(\delta t) k d^\lambda$$

da cui:

$$\ln(E[p_{ij}]) = \ln(e_j) + \ln(a_j) + \delta t + \ln(k) + \ln(k_j) + (\lambda + a_j) \ln(d) - b_j d$$

dove:

- $\ln(k) + \ln(k_j)$  è l'effetto dell'anno di generazione (contributo di riga);
- $(\lambda + a_j) \ln(d) - b_j d$  rappresenta la forma dell'andamento dell'estinzione dei sinistri.

Se si utilizzano invece dati già corretti dell'inflazione, il modello GLM per la media risulta semplificato come segue:

$$\ln(E[p_{ij}]) = \ln(a_j) + \mu + a_j + \beta_{1i} \ln(d) - \beta_{2i} d$$

e il modello per la varianza risulta ancora del tipo

$$Var[p_{ij}] = \varphi_{ij} E[p_{ij}],$$

con

$$\ln(\varphi_{ij}) = \delta t + \ln(k(v + \psi)) + \lambda \ln(d).$$

Dal punto di vista applicativo si tratta di considerare l'anno di origine come variabile di tipo *factor* e l'anno di differimento come variabile numerica.

Le variabili esplicative del modello saranno l'anno di origine e anno di differimento, come di consueto, con l'aggiunta dei logaritmi dell'anno di differimento.

## IL MODELLO DI MACK

Mack (1993) ha proposto un modello in cui non si formula un'ipotesi sulla forma della distribuzione dei sinistri incrementali o cumulati, ma si specificano solo i primi due momenti dei sinistri cumulati  $C_{ij}$ .

A tale proposito l'autore pone

$$E[C_{i,j} | C_{i,0}, \dots, C_{i,j-1}] = \lambda_j C_{i,j-1}$$

da cui è immediato dedurre

$$E[C_{i,T} | C_{i,0}, \dots, C_{i,T-i}] = C_{i,j-1} \prod_{h=0}^{i-1} \lambda_{T-h}.$$

Attraverso l'espressione della media condizionata si vuole sottolineare il fatto che nei problemi di stima della riserva sinistri i dati osservati fino al momento della valutazione sono parte della grandezza oggetto di stima, ovvero  $C_{ij}$ .

Il secondo momento è posto pari a

$$\text{var}[C_{ij} | C_{i,0}, \dots, C_{i,j-1}] = \sigma_j^2 C_{i,j-1},$$

dove i  $\sigma_j^2$  sono parametri da stimare per ciascun  $j = 0, \dots, T - 1$ .

A riguardo delle stime dei parametri del modello, è immediato cogliere che ponendo le stime  $\hat{\lambda}_j$  pari ai fattori di sviluppo  $m_j$  del Chain Ladder, la formula per la  $E[C_{i,T} | C_{i,0}, \dots, C_{i,T-i}]$  si riduce all'algoritmo Chain Ladder.

Uno stimatore non distorto per i parametri  $\sigma_j^2$  è stata individuata in

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{T-j-1} \sum_{i=0}^{T-j-1} C_{i,j} \left( \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{m}_j \right)^2, \quad \text{con } j = 0, 1, \dots, T-1,$$

Quest'ultima è facilmente interpretabile come media pesata dei residui, dove i pesi sono gli importi cumulati dei sinistri  $C_{i,j}$ , corretta tramite un fattore moltiplicativo pari al reciproco del numero dei residui. Si nota l'assenza di correzioni dovute al numero dei parametri.

Per  $j = T$  il discorso è diverso: se ipotizziamo infatti che  $T$  sia effettivamente il numero massimo di anni di differimento ammissibile per il portafoglio in esame, implicando quindi che entro  $T$  anni dall'entrata nella collettività (accadimento o denuncia, a seconda del database disponibile) tutti i sinistri siano liquidati, allora possiamo porre

$$\hat{\sigma}_T^2 = 0.$$

Se al contrario sono ammesse code nella distribuzione dei sinistri cumulati, allora una soluzione comune è quella di porre

$$\hat{\sigma}_T^2 = \min \left( \frac{\hat{\sigma}_{T-1}^4}{\hat{\sigma}_{T-2}^2}; \min(\hat{\sigma}_{T-1}^2; \hat{\sigma}_{T-2}^2) \right).$$

Un'ulteriore assunzione è che i vettori riga della matrice di run-off siano indipendenti, vale a dire la legge di smontamento dei sinistri non dipende dalla coorte di appartenenza; ricordiamo come questa ipotesi sia alla base anche del metodo Chain Ladder.

Questo modello è definito *distribution-free*, nel senso che non si richiede di specificare a priori la forma della distribuzione sottostante i dati osservati. Ciò può essere considerato senz'altro un pregio del modello, perché non impone la restrizione derivante dalle aspettative dell'attuario. Al tempo stesso però è un limite, nella misura in cui la stima è ridotta ai soli primi due momenti. Infatti, in assenza di una distribuzione teorica, tali stime non sono in grado di dare informazioni sulla forma vera e propria della distribuzione, quali ad esempio asimmetria e curtosi.

Anche questo modello è ritenuto una versione stocastica del Chain Ladder, riproducendo stime per i  $C_{i,j}$  analoghe. Come si può notare media e varianza hanno formulazione molto simile a quelle dell'approssimazione normale per il modello binomiale negativo. Tuttavia Mack e Venter (2000), nell'ambito del dibattito riguardo al considerare il modello ODP un caso particolare di questo approccio o meno, hanno sottolineato alcune differenze tra i due modelli, ritenute sostanziali.

Tra queste, in primo luogo si fa notare che il modello *distribution-free* di Mack richiede la stima di un numero inferiore di parametri, pari a  $T - 1$ , rispetto al modello ODP, che invece implica  $2T - 1$  parametri da stimare.

Inoltre il modello di Mack richiede la sola assunzione di indipendenza della legge di smontamento dei sinistri dalla coorte di appartenenza, a differenza del modello ODP in cui si deve anche assumere che i sinistri incrementali totali per anno di accadimento siano non negativi.

Sebbene entrambi i metodi riproducano gli stessi stimatori del Chain Ladder, le differenze tra i due sono tali da determinare un'espressione dell'errore di previsione diversa, come vedremo nel paragrafo seguente.

## L'ERRORE DI PREVISIONE

L'utilizzo di modelli stocastici nei problemi di stima della riserva sinistri ha lo scopo di formulare delle previsioni sui risarcimenti futuri a partire dai dati osservati, come abbiamo avuto modo di illustrare nel corso di questo capitolo e del precedente. Individuare un modello stocastico sottostante i dati osservati permette, a differenza dei metodi deterministici, di quantificare l'incertezza delle stime, calcolando il cosiddetto errore di previsione.

È proprio questa possibilità ad indurre alla ricerca di appropriati modelli stocastici, e che spiega il motivo che rende auspicabile modelli aleatori in grado di riprodurre le stime del metodo deterministico di differimento, ovvero il Chain Ladder. Ciò infatti dimostra quanto l'attenzione non sia posta sulle stime in sé, le quali d'altro canto possono essere calcolate deterministicamente nella maggior parte dei casi, quanto piuttosto sulla misura dell'incertezza di tali stime.

Di volta in volta abbiamo usato il valore atteso come stimatore della variabile di interesse (sinistri incrementali, sinistri cumulati o numero di sinistri denunciati/generati). Si definisce *errore di previsione* la radice dell'errore quadratico medio di previsione, che per la generica variabile aleatoria  $y$  è

$$E[(y - \hat{y})^2] = E\left[\left((y - E[y]) - (\hat{y} - E[\hat{y}])\right)^2\right].$$

Sostituendo  $E[\hat{y}]$  ad  $E[y]$  nel secondo addendo e svolgendo il quadrato riscriviamo

$$E[(y - \hat{y})^2] \approx E(y - E[y])^2 + E(\hat{y} - E[\hat{y}])^2 - 2E(y - E[y])(\hat{y} - E[\hat{y}]).$$

Infine, assumendo che le osservazioni future della variabile  $y$  siano indipendenti da quelle passate possiamo semplificare l'ultimo addendo, trovando così

$$E[(y - \hat{y})^2] \approx E(y - E[y])^2 + E(\hat{y} - E[\hat{y}])^2.$$

Riassumiamo quindi la misura di variabilità della previsione come somma di due componenti: la prima,  $E(y - E[y])^2$ , è la varianza della  $y$ , mentre la seconda,  $E(\hat{y} - E[y])^2$ , è la varianza delle stime.

Talvolta si fa riferimento a quanto abbiamo appena descritto con il termine di *standard error*, anche se propriamente quest'ultimo indica la radice quadrata della varianza delle stime. In realtà la definizione di errore di previsione presentata sopra, includendo la variabilità presente nei dati iniziali, è più completa, in quanto mostra come l'incertezza della previsione sia influenzata anche dal comportamento delle osservazioni che costituiscono la base di dati.

L'errore di previsione per le singole unità statistiche è quindi dato da

$$\begin{aligned}\sqrt{E[(y_{ij} - \hat{\mu}_{ij})^2]} &\approx \sqrt{E(y_{ij} - E[y_{ij}])^2 + E(\hat{\mu}_{ij} - E[\hat{\mu}_{ij}])^2} = \\ &= \sqrt{\text{var}(y_{ij}) + \text{var}(\hat{\mu}_{ij})}.\end{aligned}$$

Può risultare interessante conoscere anche le grandezze aggregate di tali errori, tipicamente per anno di generazione o sulla totalità della collettività di riferimento. Definiamo le prime

$$\sqrt{E[(y_i. - \hat{\mu}_{i.})^2]} \approx \sqrt{\text{var}(y_i.) + \text{var}(\hat{\mu}_{i.})},$$

e le seconde

$$\sqrt{E[(y. - \hat{\mu}.)^2]} \approx \sqrt{\text{var}(y.) + \text{var}(\hat{\mu}.)},$$

indicando con il simbolo  $\cdot$  il totale delle unità interessate.

Ripercorriamo ora alcuni modelli stocastici finora presentati, esplicitando per ciascuno l'espressione dell'errore di previsione.

## 1. Modello ODP

Consideriamo il modello di Poisson sovra disperso con parametro di scala  $\varphi$  costante per ogni  $i$  e per ogni  $j$ . Si può naturalmente estendere quanto segue anche alla variante che prevede diversi  $\varphi_j$  al variare dell'anno di sviluppo. Abbiamo definito il modello con la struttura di un GLM, in cui

$$\log(\mu_{ij}) = c + \alpha_i + \beta_j.$$

Sappiamo inoltre valere

$$E[p_{ij}] = \mu_{ij}$$

$$\text{var}[p_{ij}] = \varphi \mu_{ij}.$$

L'errore di previsione con riferimento all'  $i$ -esimo anno di generazione ed al  $j$ -esimo anno di sviluppo è dato da

$$e. p. (\hat{p}_{ij})_{ODP} = \sqrt{E[(p_{ij} - \hat{p}_{ij})^2]} \approx \sqrt{\text{var}[p_{ij}] + \text{var}[\hat{p}_{ij}]},$$

di cui il primo termine è pari a  $\varphi \mu_{ij}$  per la definizione del modello stesso.

Il secondo addendo si dimostra equivalere invece a

$$\text{var}[\hat{p}_{ij}] = (\hat{p}_{ij})^2 \cdot \text{var}[\hat{\mu}_{ij}],$$

il cui ultimo termine,  $\text{var}[\hat{\mu}_{ij}]$ , è solitamente selezionabile dall'output del software statistico utilizzato per la stima dei modelli. Ad esempio SPSS riconsegna lo scarto quadratico medio.

Facendo riferimento al nostro TRIANGOLO 1, stimiamo anzitutto i parametri del modello con SPSS. Nel set di parametri oggetto di stima includiamo anche il parametro di dispersione  $\varphi$ , di cui leggiamo la stima all'ultima riga della tabella di output che segue.

Attraverso le stime così ottenute calcoliamo i valori del predittore lineare e di conseguenza le stime  $\hat{p}_{ij}$  del modello. Sappiamo che quest'ultime conducono a valori stimati per la riserva sinistri analoghi a quelli del Chain Ladder, per le proprietà del modello.

| Parameter Estimates     |                        |            |                              |        |                 |    |      |          |   |          |
|-------------------------|------------------------|------------|------------------------------|--------|-----------------|----|------|----------|---|----------|
| Parameter               | B                      | Std. Error | 95% Wald Confidence Interval |        | Hypothesis Test |    |      | Exp(B)   | 95% Wald Confidence Interval for Exp(B) |          |
|                         |                        |            | Lower                        | Upper  | Wald Chi-Square | df | Sig. |          | Lower                                   | Upper    |
| (Intercept)             | 12,045                 | ,8585      | 10,362                       | 13,728 | 196,841         | 1  | ,000 | 170249,1 | 31645,508                               | 915920,1 |
| [anno_accadimento=2000] | -,196                  | ,4903      | -1,157                       | ,765   | ,160            | 1  | ,689 | ,822     | ,314                                    | 2,149    |
| [anno_accadimento=2001] | ,097                   | ,4851      | -,853                        | 1,048  | ,040            | 1  | ,841 | 1,102    | ,426                                    | 2,852    |
| [anno_accadimento=2002] | ,067                   | ,4862      | -,886                        | 1,020  | ,019            | 1  | ,891 | 1,069    | ,412                                    | 2,772    |
| [anno_accadimento=2003] | ,136                   | ,4860      | -,817                        | 1,088  | ,078            | 1  | ,780 | 1,145    | ,442                                    | 2,969    |
| [anno_accadimento=2004] | -,047                  | ,4921      | -1,011                       | ,918   | ,009            | 1  | ,925 | ,955     | ,364                                    | 2,504    |
| [anno_accadimento=2005] | ,061                   | ,4979      | -,915                        | 1,037  | ,015            | 1  | ,902 | 1,063    | ,401                                    | 2,821    |
| [anno_accadimento=2006] | ,051                   | ,5160      | -,961                        | 1,062  | ,010            | 1  | ,922 | 1,052    | ,383                                    | 2,892    |
| [anno_accadimento=2007] | 0 <sup>a</sup>         | .          | .                            | .      | .               | .  | .    | 1        | .                                       | .        |
| [anno_sviluppo=0]       | ,747                   | ,7374      | -,698                        | 2,193  | 1,027           | 1  | ,311 | 2,111    | ,498                                    | 8,958    |
| [anno_sviluppo=1]       | 1,626                  | ,7266      | ,202                         | 3,050  | 5,008           | 1  | ,025 | 5,084    | 1,224                                   | 21,121   |
| [anno_sviluppo=2]       | 1,580                  | ,7275      | ,154                         | 3,005  | 4,715           | 1  | ,030 | 4,853    | 1,166                                   | 20,193   |
| [anno_sviluppo=3]       | 1,755                  | ,7268      | ,330                         | 3,179  | 5,831           | 1  | ,016 | 5,783    | 1,392                                   | 24,034   |
| [anno_sviluppo=4]       | 1,041                  | ,7404      | -,410                        | 2,493  | 1,979           | 1  | ,160 | 2,833    | ,664                                    | 12,092   |
| [anno_sviluppo=5]       | ,715                   | ,7604      | -,775                        | 2,206  | ,885            | 1  | ,347 | 2,045    | ,461                                    | 9,078    |
| [anno_sviluppo=6]       | ,722                   | ,7818      | -,811                        | 2,254  | ,852            | 1  | ,356 | 2,058    | ,445                                    | 9,526    |
| [anno_sviluppo=7]       | 0 <sup>a</sup>         | .          | .                            | .      | .               | .  | .    | 1        | .                                       | .        |
| (Scale)                 | 69510,816 <sup>b</sup> |            |                              |        |                 |    |      |          |   |          |

Dependent Variable: pij

Model: (Intercept), anno\_accadimento, anno\_sviluppo

a. Set to zero because this parameter is redundant.

b. Computed based on the Pearson chi-square.

Sulla base delle formule illustrate sopra siamo in grado di determinare gli errori di previsione per le singole unità statistiche, che per comodità raccogliamo nella seguente matrice.

| e.p. ( $\hat{p}_{ij}$ ) <sub>ODP</sub> | anno di sviluppo |           |         |           |         |         |         |         |
|--|------------------|-----------|---------|-----------|---------|---------|---------|---------|
|  | 0                | 1         | 2       | 3         | 4       | 5       | 6       | 7       |
| 2000                                   | 357.848          | 766.940   | 610.542 | 482.940   | 527.326 | 574.398 | 146.342 | 139.950 |
| 2001                                   | 352.118          | 884.021   | 933.894 | 1.183.289 | 445.745 | 320.996 | 527.804 |         |
| 2002                                   | 290.507          | 1.001.799 | 926.219 | 1.016.654 | 750.816 | 146.923 |         |         |
| 2003                                   | 310.608          | 1.108.250 | 776.189 | 1.562.400 | 272.482 |         |         |         |
| 2004                                   | 443.160          | 693.190   | 991.983 | 769.488   |         |         |         |         |
| 2005                                   | 396.132          | 937.085   | 847.498 |           |         |         |         |         |
| 2006                                   | 440.832          | 847.631   |         |           |         |         |         |         |
| 2007                                   | 359.480          |           |         |           |         |         |         |         |

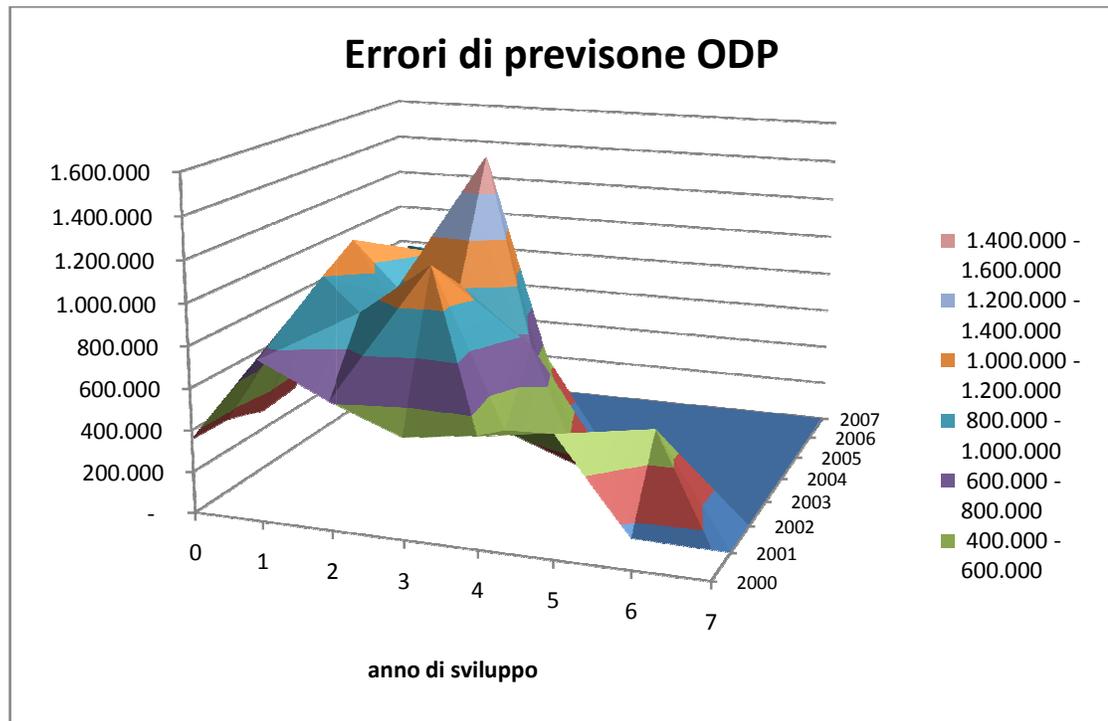


GRAFICO 7

Inoltre calcoliamo anche gli errori di previsione aggregati per generazione e per l'intera collettività riportati sotto.

| ODP  | Ri            | errore di previsione | % Ri |
|------|---------------|----------------------|------|
| 2000 | 67.948,00     | -                    |      |
| 2001 | 187.653,18    | 568.398,65           | 303% |
| 2002 | 556.467,14    | 535.987,41           | 96%  |
| 2003 | 995.186,12    | 535.987,41           | 54%  |
| 2004 | 1.289.763,62  | 529.267,09           | 41%  |
| 2005 | 2.483.246,76  | 448.809,43           | 18%  |
| 2006 | 3.325.723,84  | 299.269,30           | 9%   |
| 2007 | 4.027.471,56  | 158.075,13           | 4%   |
| R    | 12.933.460,21 | 1.320.762,80         | 10%  |

In termini percentuali notiamo un'elevata incertezza a riguardo delle riserve sinistri stimate, specialmente per gli anni di generazione meno recenti, in corrispondenza dei quali l'ammontare delle riserve è più basso. Nonostante per i primi anni di generazione le previsioni siano svolte su un numero maggiore di unità statistiche, data la forma triangolare della base dei dati, si riscontra una variabilità elevata degli scostamenti delle stime dai corrispondenti valori osservati.

## 2. Modello Binomiale Negativo

Utilizziamo la formulazione del modello in forma di GLM per eseguire anzitutto le stime dei parametri. Consideriamo pertanto

$$\ln(\mu_{ij}) = c + \alpha_{j-1} + \ln(C_{i,j-1}),$$

con

$$\ln(m_j - 1) = c + \alpha_{j-1}$$