

Stochastic Mortality Modeling and Securitization of Mortality Risk*

Zusammenfassung

Daniel Bauer

Department of Risk Management and Insurance, Georgia State University

35 Broad Street, 11th Floor; Atlanta, GA 30303; USA

Tel: (404)-413-7490; Fax: (404)-413-7499

Email: dbauer@gsu.edu

2. Juni 2008

Systematisches Sterblichkeitsrisiko, also das Risiko, dass zukünftige Sterblichkeitstrends von heutigen Erwartungen abweichen, stellt eine erhebliche Gefahrenquelle für Lebensversicherer und Einrichtungen der betrieblichen Altersversorgung dar. Um dieses Änderungsrisiko bei der Kalkulation angemessen beachten zu können, werden neuartige Modelle benötigt, welche die Stochastizität in den biometrischen Rechnungsgrundlagen berücksichtigen, also *stochastische Sterblichkeitsmodelle*. Darüber hinaus werden Möglichkeiten gebraucht, dieses Risiko adäquat zu handhaben. Die in der Praxis und der akademischen Literatur meistdiskutierte und teilweise auch schon umgesetzte Lösung ist die *Verbriefung*, also die Auslagerung der Risiken an den Kapitalmarkt mit Hilfe von sterblichkeitsgebundenen Wertpapieren. Auch hier sind adäquate Analyse- und Bewertungsmethoden vonnöten, die stochastische Schwankungen in der Sterblichkeitsentwicklung berücksichtigen. Das Ziel dieser Arbeit ist daher die Identifikation geeigneter Modelle zur Analyse und Bewertung von Lebensversicherungsprodukten und vor allem sterblichkeitsgebundenen Wertpapieren sowie deren Anwendung. Wir bedienen uns hierbei der Methoden der modernen Finanzmathematik, wobei wir insbesondere strukturelle Analogien zwischen Zins- und Sterblichkeitsraten ausnutzen.

Nach einem historischen Abriss über die Entwicklung der Lebensversicherung sowie einer kurzen Einführung zu sterblichkeitsgebundenen Wertpapieren grenzen wir in der Einleitung die Zielsetzung dieser Arbeit ab. Insbesondere wird hervorgehoben, dass es nicht unser Ziel ist, Verfahren zur besonders akkuraten Sterblichkeitsprojektion zu entwickeln. Vielmehr sollen Methodiken entwickelt werden, die es zulassen, Unsicherheiten solcher Trends bei der Analyse und Bewertung von Lebensversicherungsverbindlichkeiten sowie von sterblichkeitsgebundenen Wertpapieren zu berücksichtigen. Anschließend stellen wir den wissenschaftlichen Beitrag dieser Arbeit dar, indem wir unsere Hauptresultate und deren Implikationen zusammenfassen. Dabei orientieren wir uns jedoch nicht am Aufbau der Arbeit, sondern stellen unsere Ideen anhand ihrer eigentlichen Entwicklung dar. Im Gegensatz dazu fassen wir im Folgenden die einzelnen Kapitel in der im Rahmen dieser Arbeit gewählten Reihenfolge zusammen.

Kapitel 2: Stochastische Sterblichkeitsmodellierung

Ähnlich zur stochastischen Modellierung von Zinsraten führen Cairns et al. (2006a) stochastische Sterblichkeit über die Preise von gewissen sterblichkeitsgebundenen Wertpapieren, sogenannten Langlebigkeitsanleihen, ein. Obwohl es eigenartig erscheint, bei den zugrunde liegenden Definitionen von einem bisher hypothetischen liquiden Markt für solche Wertpapiere auszugehen, birgt dieses Vorgehen im Vergleich zu anderen Ansätzen viele

*Dissertation zum Dr. rer. nat. an der Universität Ulm

Vorteile. Beispielsweise können Arbitrageargumente direkt angewendet werden und verschiedene Modellklassen ergeben sich in diesem Rahmen automatisch. Darüber hinaus wird im Verlauf der Arbeit dargestellt, dass diese Herangehensweise zu anderen, weniger synthetisch anmutenden Zugängen zur stochastischen Sterblichkeit für unsere primären Anwendungen äquivalent ist.

Im ersten Abschnitt erarbeiten wir eine verallgemeinerte Version dieses Ansatzes: Wir verzichten auf die von Cairns et al. (2006a) getroffene Annahme der Unabhängigkeit der Sterblichkeitsentwicklung von der Entwicklung des Kapitalmarkts und betrachten eine verallgemeinerte Klasse von zugrunde liegenden Langlebigkeitsanleihen, deren Auszahlung von der Entwicklung der Sterblichkeit in verschiedenen, eventuell zukünftigen Zeitintervallen abhängt. Darüber hinaus präsentieren wir einige neue Ergebnisse; so formulieren wir etwa den Zusammenhang verschiedener Modellklassen im Diffusionsfall, was sich im Verlauf der Arbeit als ein wichtiges Hilfsmittel erweist.

Die Verallgemeinerung hin zu einer größeren Klasse von zugrunde liegenden Wertpapieren beruht auf der Motivation, die Sterblichkeit für die gesamte Altersstruktur, also auch für eventuell zukünftige Generationen, konsistent in einem Rahmen zu modellieren. Allerdings stellen sich unmittelbare Probleme, die sich aus verschiedenen Definitionsmöglichkeiten für scheinbar gleiche Objekte ergeben. Wir zeigen, dass verschiedene Definitionen anhand von Wertpapieren, die nur von echt zukünftigen Zeitintervallen abhängen, tatsächlich unterschiedliche Objekte liefern können und dass die Annahme der Gleichheit quasi notwendigerweise auf deterministische Modelle führt. Andererseits ergibt sich für Zeitintervalle, die in der Vergangenheit beginnen, keine Mehrdeutigkeit, und diese Einsicht erlaubt die angestrebte Verallgemeinerung des Modellrahmens. Insbesondere liefert diese Verallgemeinerung die Basis, um im weiteren Verlauf dynamische Modelle für die gesamte Alters-/Termstruktur, das heisst die Fläche von Sterblichkeitsprojektionen für alle Alter, als dynamische Gleichungen auf unendlich-dimensionalen Räumen zu beschreiben.

Spotintensitäts-Modelle

Wie oben angedeutet existieren alternative Zugänge zur stochastischen Sterblichkeitsmodellierung. In vielen Beiträgen werden etwa Gemeinsamkeiten zu gewissen Ansätzen aus der Literatur zur Kreditrisikomodellierung ausgenutzt (siehe beispielsweise Biffis (2005) oder Dahl (2004)). Hierbei wird die *Spot-Sterblichkeitsintensität* als Kompensatorprozess der zufälligen Zeit des Todes eines Individuums definiert. Wir führen diesen Ansatz in einem vereinfachten Rahmen ein, weisen aber auch auf Verallgemeinerungen hin. Anschließend diskutieren wir Unterschiede der verschiedenen Zugänge. Insbesondere geben wir eine hinreichende Bedingung für deren Äquivalenz an. Anhand der in Kapitel 3 eingeführten Klassifikation von Sterblichkeitsrisiken in der Lebensversicherung lässt sich diese Bedingung als das Nichtvorhandensein einer Risikoprämie für idiosynkratisches, das heisst durch das Gesetz der Großen Zahlen diversifizierbares, Sterblichkeitsrisiko interpretieren.

In diesem alternativen Rahmen stellen wir ein affines Spot-Sterblichkeitsmodell vor, welches in unserem ersten Anwendungskapitel 4 zur Analyse und Bewertung von sogenannten Katastrophensterblichkeitsanleihen herangezogen wird. Die Spezifikation besteht aus zwei additiven Komponenten: Zum einen eine durch eine Diffusion modellierte Basiskomponente, die reguläre Sterblichkeitsfluktuationen widerspiegelt, und zum anderen eine Katastrophenkomponente, die durch einen nicht-Gauss'schen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess modelliert wird. Durch die affine Struktur können insbesondere Sterbewahrscheinlichkeiten durch die Lösung von gewissen gewöhnlichen Differentialgleichungen effizient numerisch bestimmt werden, was als erster Vorteil der Spezifikation gewertet werden kann.

Forwardintensitäts-Modelle

Im Gegensatz zu Spotintensitäts-Modellen wird bei Forward-Sterblichkeitsmodellen die gesamte Alters-/Termstruktur modelliert. Insbesondere sind hier Sterblichkeitstrends schon in den Eingangsdaten enthalten, sodass die

Variabilität dieser Trends im Zeitverlauf modelliert wird. Wir beschränken uns hier auf Diffusionsmodelle, jedoch sind ähnlich zur Literatur zu Forward-Zinsmodellen Verallgemeinerungen möglich.

Basierend auf den Ideen von Heath et al. (1992), die als erste einen Rahmen für entsprechende Zinsmodelle lieferten, kann gezeigt werden, dass durch die spezielle Struktur die Drift-Terme solcher Modelle vollständig durch die Volatilitätsstruktur sowie den Marktpreis des Risikos determiniert sind. Dies wurde auch schon von Cairns et al. (2006a) und Miltersen und Persson (2005) aufgezeigt, deren Resultate sich als Spezialfälle unserer Darstellung wiederfinden. Allerdings ist nicht unmittelbar klar, wie die Alters-/Termstruktur hergeleitet werden kann, da die Definition auf bisher nicht gehandelten Langlebigkeitsanleihen beruht. Eine Möglichkeit liegt in der *Definition* der Preise über adäquate Bepreisungsmethoden und wird detailliert in Kapitel 3 behandelt.

Eine alternative Möglichkeit ist die Betrachtung von nicht-risikoadjustierten Projektionen, also besten Schätzwerten, für die zukünftige Sterblichkeitsentwicklung. Während solch ein Vorgehen für Zinsmodelle eigentümlich scheint, sind solche Strukturen im Lebensversicherungsbereich in der Form von Generationensterbetafeln zweiter Ordnung gebräuchlich. Wir zeigen, dass die Theorie auch im Hinblick auf die „Alters-/Termstruktur zweiter Ordnung“ interpretiert werden kann und dass hier insbesondere eine analoge Drift-Bedingung gilt. Darüber hinaus wird dargestellt, dass im Falle deterministischer Volatilitätsstrukturen und eines deterministischen Marktpreises des Risikos, die Volatilitätsstrukturen für „Forward-Modelle erster Ordnung“, das heisst unter Berücksichtigung von Risikozuschlägen, und für „Forward-Modelle zweiter Ordnung“ übereinstimmen.

Eine nahe liegende Möglichkeit, solche Modelle zu konstruieren, ist die stochastische Erweiterung von eigentlich deterministischen Sterblichkeitsgesetzen, und solche Ansätze für Spot-Sterblichkeitsmodelle wurden von einigen Autoren vorgeschlagen. Allerdings ist ein analoges Vorgehen für Forward-Modelle kritischer, da Arbitragemöglichkeiten entstehen können. Zur Untersuchung dieser Fragestellung erweitern wir entsprechende Überlegungen von Filipović (2001) für Zinsmodelle auf den Sterblichkeitsfall und leiten eine Konsistenzbedingung für parametrische Forward-Sterblichkeitsmodelle her. Es wird deutlich, dass diese Vorgehensweise im Allgemeinen keine geeigneten Modelle liefert.

Dennoch zeigt es sich, dass für praktische Anwendungen eine parametrische Darstellung von „erreichbaren“ Alters-/Termstrukturen oder „Sterblichkeitsflächen“ von Nutzen ist. Für Forward-Zinsmodelle wurde diese Fragestellung nach der Existenz von sogenannten *endlich-dimensionalen Realisierungen* für relativ allgemeine Spezifikationen untersucht (siehe beispielsweise Björk (2003) für einen Überblick). Allerdings basieren diese und andere fortgeschrittene Ergebnisse aus der Literatur zu Zinsmodellen auf einer Umformulierung des Modellrahmens bezüglich stochastischen Gleichungen auf unendlich-dimensionalen Räumen. Wir zeigen, dass ein ähnliches Vorgehen ebenfalls für Forward-Sterblichkeitsmodelle möglich ist. Analog zur entsprechenden Literatur für Zinsmodelle formulieren wir die hier betrachtete generische Dynamik als stochastische Gleichung auf einem adäquaten Hilbertraum. Insbesondere geben wir auch eine Darstellung für die Drift-Bedingung in diesem Rahmen an.

Auf dieser Basis lassen sich nun Ergebnisse zu endlich-dimensionalen Realisierungen für Zinsmodelle auf den Sterblichkeitsfall erweitern. Wir beschränken uns hier jedoch auf deterministische Volatilitätsstrukturen, da dieser Fall besonders relevant für unsere Anwendungen ist. Wir stützen uns dabei auf die Arbeit von Björk und Gombani (1999), in der diese Fragestellung für entsprechende Zinsmodelle betrachtet wurde. Für die Existenz von endlich-dimensionalen Realisierungen formulieren wir eine notwendige und hinreichende Bedingung an die Volatilitätsstruktur und stellen die Konstruktion bei der Herleitung direkt dar.

Wir schließen den Abschnitt zu Forward-Modellen mit einem detaillierten Beispiel ab. Es wird gezeigt wie die Ergebnisse angewendet werden können, und wir überprüfen insbesondere deren Korrektheit in diesem Spezialfall. Im letzten Abschnitt des Kapitels stellen wir unsere Hauptkenntnisse nochmals zusammenfassend dar. Anschließend werden einige kritische Annahmen („Temporäre Annahmen“) nochmals ausführlich diskutiert. Insbesondere weisen wir darauf hin, dass die getroffene Annahme über einen liquiden Markt von zugrunde liegenden Langlebigkeitsanleihen für den Modellrahmen nicht zwangsläufig, sondern lediglich zweckdienlich ist. Darüber hinaus erörtern wir qualitativ ob Abhängigkeiten zwischen Finanzmarkts- und Sterblichkeitsentwicklung signifikant genug sind, um diese bei der Modellierung zu berücksichtigen. Wir finden Indizien, die es sinnvoll erscheinen

lassen, solche Abhängigkeiten im allgemeinen Modellrahmen zu berücksichtigen. Da jedoch Märkte für sterblichkeitsgebundene Wertpapiere am Anfang ihrer Entwicklung stehen, scheint diese vereinfachende Annahme der Unabhängigkeit für erste Modellansätze dennoch zulänglich.

Kapitel 3: Stochastische Sterblichkeit und Lebensversicherung

Im Gegensatz zu den in Kapitel 2 betrachteten Langlebigkeitsanleihen, die rein von der aggregierten Sterblichkeitsentwicklung abhängen, sind Versicherer auch mit „anderen Sterblichkeitsrisiken“ als dem bloßen Änderungsrisiko konfrontiert. Im ersten Abschnitt erarbeiten wir daher anhand einer einfachen Überlebensfallversicherung eine Klassifizierung von Sterblichkeitsrisiken in der Lebensversicherung. Um unsere Diskussion in diesem Kapitel präzise zu halten, betrachten wir hier nur Versicherungen auf den Erlebensfall beziehungsweise Langlebigkeitsrisiken. Viele der Erkenntnisse lassen sich aber analog auf Todesfallversicherungen beziehungsweise das Kurzlebigkeitsrisiko übertragen.

Ausgehend von diesem einfachen Versicherungsvertrag und dem Versichertenportfolio einer Lebensversicherungsgesellschaft, definieren wir das Sterblichkeitsrisiko als Differenz der diskontierten, realisierten Auszahlungen und den Prämieinnahmen pro gezeichnetem Vertrag. Dieses Sterblichkeitsrisiko lässt sich nun in einen systematischen Teil (Änderungsrisiko) sowie einen nichtsystematischen Teil, der auf der Endlichkeit des Versichertenportfolios beruht, zerlegen. Des Weiteren lässt sich das nichtsystematische Risiko wiederum in echt unsystematisches Risiko und Basisrisiko zerlegen, wobei letzteres aus systematischen Unterschieden zwischen der Gesamtpopulation und der für den Versicherer relevanten Population resultiert.

Da wir vor allem an quantitativen Analysen und monetären Bewertungen interessiert sind, wenden wir uns anschließend der Frage zu, ob die einzelnen Risikoklassen einen Einfluss auf die Bepreisung von Lebensversicherungsverträgen haben. Da das echt unsystematische Risiko im Rahmen des Gesetzes der Großen Zahlen diversifizierbar ist, finden wir aus ökonomischer Sicht Hinweise darauf, dass dieser Teil des Risiko keine Risikoprämie nach sich zieht. Für das Basisrisiko stellen wir fest, dass es im Hinblick auf die „richtige“ Basispopulation kaum vom echt unsystematischen Risiko zu unterscheiden ist. Daher finden wir ebenfalls Indizien für die Irrelevanz dieser Risikoklasse für die Lebensversicherungsbepreisung. Eine Prämie für das Änderungsrisiko scheint andererseits in Versicherungspreisen enthalten zu sein. Unter der so resultierenden Annahme, dass nur systematisches Risiko in der Prämie berücksichtigt wird, kann also der Marktpreis des (systematischen) Sterblichkeitsrisikos aus Versicherungspreisen isoliert werden. Dies lässt wiederum Rückschlüsse auf eine adäquate Bepreisung von sterblichkeitsgebundenen Wertpapieren und insbesondere Langlebigkeitsanleihen zu.

Bepreisung von Langlebigkeitsanleihen

In den ersten Teilen dieses Abschnitts betrachten wir in der Literatur vorgeschlagene Methoden zur Bewertung beziehungsweise Bepreisung von sterblichkeitsgebundenen Wertpapieren, angepasst auf den für uns relevanten Fall von Langlebigkeitsanleihen. Für den detailliert betrachteten Ansatz von Milevsky et al. (2005) zeigen wir, dass er in unserem Fall letztendlich äquivalent zu einem konstanten Marktpreis des Risikos ist. Allerdings geben die Autoren keine Hinweise, wie dieser Parameter zu bestimmen ist. Im Unterschied dazu schlagen Lin und Cox (2005) vor, die Überlebensverteilung „zweiter Ordnung“ mit Hilfe der sogenannten Wang-Transformation zu verzerren, um eine risikoadjustierte Verteilung zu gewinnen. Dabei wird der Transformationsparameter an den Marktpreis einer Rentenversicherung angepasst.

Allerdings erscheint die Anwendung der Wang-Transformation unmotiviert und wir zeigen im letzten Unterabschnitt sogar anhand eines Spezialfalles, dass solch ein Transformationsansatz aus theoretischer Sicht im Allgemeinen problematisch ist. Die Idee, Versicherungspreise als Basis zur Bepreisung von Langlebigkeitsanleihen zu verwenden, stellt sich im Hinblick auf die Diskussion aus dem ersten Abschnitt dieses Kapitels jedoch als sinnvoll dar: Unter den getroffenen Annahmen bezüglich der Bepreisung von Versicherungsverträgen zeigen wir anhand

eines einfachen Zahlungsstrommodells, dass Preise von Langlebigkeitsanleihen durch Versicherungspreise impliziert werden.

Die in Kapitel 2 vorgestellte Theorie lässt sich nun auch bezüglich dieser *definierten* Preise für Langlebigkeitsanleihen in einem im Allgemeinen unvollständigen Markt interpretieren. Die risikoadjustierte Alters-/Termstruktur wird hier durch die Festlegung des Marktpreises des Risikos beziehungsweise mittels Transformationen aus der „Alters-/Termstruktur zweiter Ordnung“ gewonnen, wobei der zweite Ansatz, wie angedeutet, zu Problemen führen kann.

Stochastische Sterblichkeitsmodelle in der Versicherungspraxis

Auf welche Art und Weise stochastische Sterblichkeitsmodelle in der Versicherungspraxis angewendet werden können oder sogar sollten, hängt stark vom gewählten Modell beziehungsweise der gewählten Modellklasse ab. Gewissermaßen lassen sich Spotintensitäts-Modelle als stochastische, stetige Version von Perioden-Sterbetafeln auffassen, während Forward-Modelle im gleichen Sinne Generationen Sterbetafeln entsprechen. Insbesondere impliziert die letzte Feststellung, dass die klassischen Bewertungsformeln für gewöhnliche Rentenprodukte auch für stochastische Forward-Sterblichkeitsmodelle gelten, das heisst sie können ohne explizite Berücksichtigung der Stochastizität angewendet werden. Daher stellt sich der Forward-Zugang als natürliche Erweiterung der klassischen aktuariellen Theorie dar. Im Gegensatz zu den Bewertungsformeln, die auf der Auswertung gewisser erster Momente beruhen, stimmen jedoch Formeln für höhere Momente und insbesondere die Varianz nicht überein. Dasselbe gilt für die Bewertung von sterblichkeitsabhängigen Optionen in Rentenprodukten – hier muss die Stochastizität explizit beachtet werden. Darüber hinaus stellen wir Inkonsistenzen zwischen den Interpretationsmöglichkeiten von Generationentafeln und quasi jeglichem stochastischen Sterblichkeitsmodell in unserem Rahmen fest.

Für die Bewertung von sterblichkeitsabhängigen Garantien, wie etwa garantierten Verrentungsoptionen in konventionellen Policen oder sogenannten *Guaranteed Minimum Benefits* in fondsgebundenen Verträgen, stellt sich ebenso der Forward-Ansatz als geeigneter Modellrahmen heraus. Basierend auf Ideen von Cairns et al. (2006a) und Pelsser (2003) leiten wir approximative Bewertungsformeln für gebräuchliche Garantien im Falle von deterministischen Volatilitätsstrukturen her. Für die numerische Bewertung von komplexeren Optionen oder für allgemeinere Modellstrukturen bieten Forward-Modelle ebenfalls wichtige Vorteile, da hier im Allgemeinen keine ineinander geschachtelten Simulationen notwendig sind.

Im letzten Abschnitt werden wiederum die Hauptkenntnisse zusammengefasst und kritische Annahmen diskutiert. Dabei stellen wir insbesondere heraus, dass auch dann Versicherungspreise als Bewertungsbasis für sterblichkeitsgebundene Wertpapiere herangezogen werden können, wenn Basispopulationen beziehungsweise deren Sterblichkeiten nicht übereinstimmen, sondern nur Trends in denselben.

Kapitel 4: Verbriefung von Katastrophensterblichkeitsrisiken

Katastrophensterblichkeitsanleihen sind eine relativ neue Anlagenklasse, die Versicherern und Rückversicherern die Möglichkeit bietet, Katastrophensterblichkeitsrisiken von der Passivseite ihrer Bilanz auf den Kapitalmarkt zu transferieren. Bisherige Transaktionen unterscheiden sich zwar in Größe und Zusammensetzung der zugrunde liegenden Referenzpopulation, doch die eigentliche Struktur ist die gleiche: Auf der Basis von Sterblichkeitsdaten, wie sie von öffentlichen Einrichtungen in den einzelnen zur Referenzpopulation gehörigen Ländern veröffentlicht werden, wird ein gewisser Sterblichkeitsindex berechnet. Falls dieser Index ein gewisses, relativ hohes Niveau überschreitet, werden die Einlagen der Investoren in der Anleihe reduziert. Im Gegenzug erhalten die Investoren Zinszahlungen, wobei die jeweiligen Kupons einen Aufschlag für das angenommene Risiko enthalten.

Bisher gab es fünf öffentliche Transaktionen über eine Gesamtsumme von circa 1,5 Milliarden Euro. In vier davon war die Rückversicherungsgesellschaft Swiss Re involviert. Insbesondere war sie die erste, die Ende 2003 mit solchen Anleihen auf den Markt kam. Seit dieser ersten Transaktion, bei der nur eine Tranche mit einer relative

geringen Risikoexposition emittiert wurde, hat sich der Markt beträchtlich entwickelt. Bei kürzlichen Transaktionen wurden mehrere Tranchen mit verschiedenen Risikoprofilen emittiert und die Bandbreite an Investoren hat sich deutlich ausgeweitet.

Eine bedeutende Rolle bei solchen Transaktionen spielen sogenannte Risikomodellierungsfirmen, die für die Berechnung des Sterblichkeitsindex verantwortlich sind, aber auch Risikokenngrößen, wie etwa die Ausfallwahrscheinlichkeit, für potentielle Investoren und vor allem Ratingagenturen zur Verfügung stellen. Wir stellen zwei solche Risikomodellierer vor, die bis dato als einzige Anbieter in Erscheinung getreten sind. Die jeweiligen Modellierungsansätze unterscheiden sich fundamental.

Wir verwenden das in Kapitel 2 vorgestellte Spotintensitäts-Modell zur Analyse und Bewertung solcher Transaktionen. Unserer Kenntnis nach ist dies der erste dynamische Modellierungsansatz für die Untersuchung von Katastrophensterblichkeitsanleihen, der in der wissenschaftlichen Literatur vorgestellt wird.

Kalibrierung des Modells

Es werden drei verschiedene Ansätze vorgestellt: Eine Kalibrierung an historische Daten, eine Kalibrierung an Versicherungspreise sowie eine Kalibrierung an Marktpreise solcher Anleihen. Wir betrachten nur US-amerikanische Daten und beschränken uns auf das männliche Geschlecht. Verallgemeinerungen sind jedoch möglich.

Die Unabhängigkeit der beiden Komponenten des Modells ermöglicht es, die Kalibrierung an beobachtete Daten jeweils getrennt durchzuführen. Für die Kalibrierung der Basiskomponente betrachten wir neben einer Zeitreihe von Periodensterblichkeiten auch Ideen aus der demographischen Literatur. Auf dieser Basis werden drei verschiedene Parametrisierungen hergeleitet, die verschiedenen demographischen Ansichten über zukünftige Entwicklungen entsprechen. Für die Katastrophenkomponente verwenden wir Daten, die von der Modellierungsfirma bei der Erstellung der Risikoprofile für die betrachteten Anleihen verwendet wurden. Allerdings zeigen Änderungen in gewissen zugrunde liegenden Annahmen, dass die Parameter auf dieser Basis extrem unsicher sind.

Da Sterblichkeitstrends für die Versichertenpopulation und die Gesamtbevölkerung sehr ähnlich sind, ist es nach den Erkenntnissen aus Kapitel 3 unter gewissen Annahmen möglich, risikoadjustierte Parametrisierungen aus Versicherungspreisen zu gewinnen. Als Datenbasis verwenden wir amerikanische Risikolebensversicherungen für verschiedene Alter und Versicherungsdauern. Die affine Struktur des Modells ermöglicht es, die Modellpreise effizient zu berechnen. Um nun Parameter zu bestimmen, minimieren wir den Abstand der beobachteten und der modellendogenen Preise als Funktion der Parameter im Kleinste-Quadrate-Sinn.

Schließlich betrachten wir noch Parametrisierungen, die durch Marktpreise impliziert werden. Da wir bisher nur eine Transaktion betrachten, bei der insbesondere nur ein Preis zugänglich ist, halten wir in der Kalibrierungsprozedur nur einen Parameter variabel. Diese Einschränkung erlaubt es, Monte Carlo Methoden zur Kalibrierung zu verwenden. Alternativ könnten aber Preise auch über die Invertierung von gewissen Fourier- oder Laplace-Transformationen bestimmt werden, was insbesondere bei einer größeren Datenbasis adäquat erscheint.

Ergebnisse

Da die historische Kalibrierung auf der betrachteten Datenbasis mit hohen Parameterunsicherheiten verbunden ist, führen wir neben den Berechnungen von Risikoprofilen für die vorgeschlagenen Parametrisierungen auch detaillierte Sensitivitätsanalysen durch. Es zeigt sich, dass die Risikokenngrößen für die unterschiedlichen Parametrisierungen stark voneinander abweichen. Daraus schließen wir, dass die von den Risikomodellierern bereitgestellten Risikoprofile vorsichtig interpretiert werden sollten. Insbesondere übersteigen die Ausfallwahrscheinlichkeiten für alle von uns betrachteten Parametrisierungen die „offiziellen“ Werte, obwohl es keine strukturellen Unterschiede in den Ergebnissen gibt. Dies deutet an, dass die Parametrisierungen der Risikomodellierer eher „optimistisch“ gewählt sind. Eine Zusammenarbeit von Versicherungs- und epidemiologischen Experten könnte nach unserer Einschätzung zu verlässlicheren Ergebnissen führen.

Wenn man die Verlustverteilung der Anleihen betrachtet, stellt man fest, dass diese den Verlustverteilungen von sogenannten *Collateralized Debt Obligation*-Tranchen ähnlich sind. Da solche Strukturen eine vertraute Investitionsmöglichkeit für institutionelle Investoren darstellen, scheint auch die Struktur der Katastrophensterblichkeitsanleihen attraktiv, insbesondere in Hinblick auf ihr Rendite-Risiko-Profil. Allerdings sollte in Betracht gezogen werden, dass die zugrunde liegenden Risikoverteilungen nicht äquivalent sind, sodass ein Vergleich auf der Basis von ersten Momenten irreführend sein könnte. Dennoch zeigt sich bei einem Vergleich der Marktpreise von verschiedenen, in der Vergangenheit emittierten Anleihen, dass scheinbar beträchtliche Neuigkeitsaufschläge gezahlt wurden, was das große Investoreninteresse erklärt. Die auf Basis von Versicherungsdaten bestimmten Preise sind den Marktpreisen sehr nahe. Dies weist darauf hin, dass (Rück)Versicherer diesen Risikotransfer zu sehr geringen Kosten oder sogar gegen eine Prämie wahrnehmen können. Dies erklärt wiederum das schnelle Wachstum des Marktes aus dem Blickwinkel der (Rück)Versicherer.

Im letzten Abschnitt wird, nach einer Zusammenfassung unserer Resultate, auf mögliche Verallgemeinerungen des Modells hingewiesen.

Kapitel 5: Verbriefung von Langlebighkeitsrisiken

Langlebigkeit stellt ein bedeutendes Risiko für Versicherungsgesellschaften und Einrichtungen der betrieblichen Altersversorgung dar. Es wurden etliche Möglichkeiten vorgeschlagen, dieses Risiko zu kontrollieren, etwa indem es auf den Versicherten übertragen wird. Allerdings würde auch so eine erhebliche Altlast an Langlebighkeitsrisiken aus schon existierenden Verbindlichkeiten verbleiben. Darüber hinaus sind Rentner ökonomisch in keiner günstigen Position, ihr eigenes Langlebighkeitsrisiko zu tragen, sodass die Frage, wie Langlebighkeitsrisiken im Rentenalter zu handhaben sind, bestehen bleibt. Folglich wurden Finanzinstrumente vorgeschlagen, die es Unternehmen erlauben, solche Risiken abzuschließen. Allerdings schlug Ende 2004 ein erster Versuch, eine Langlebighkeitsanleihe zu emittieren, fehl, was aber zumindest teilweise auf die mangelhafte Strukturierung zurückzuführen sein dürfte. Es gibt eine breite Übereinstimmung zwischen Praktikern und Wissenschaftlern, dass es nur eine Frage der Zeit ist, bis sich ein Markt für Langlebighkeitsrisiken entwickelt, und zurzeit arbeiten etliche Banken und andere Finanzdienstleister an geeigneten Lösungen.

Im ersten Abschnitt erörtern wir Unzulänglichkeiten der in 2004 angekündigten Langlebighkeitsanleihe. Auf Basis dieser Diskussion und der erfolgreichen Struktur von Katastrophensterblichkeitsanleihen, schlagen wir anschließend ein neuartiges Langlebighkeitsderivat vor. Die Hauptmerkmale unseres Vorschlags sind die Einbindung einer Rückversicherungsgesellschaft zur Diversifikation des Basisrisikos und optionsartige Auszahlungen an Versicherer beziehungsweise Investoren. Kombinationen dieser Derivate scheinen geeignet, Langlebighkeitsrisiken im Rentenalter zu managen.

Der Forward-Ansatz

Für die Berechnung von Risikoprofilen und für die Bewertung solcher Finanztitel, aber auch um die Effektivität von Absicherungsstrategien beurteilen zu können, bedarf es an Modellen, die differenzierte Änderungsmuster in der Alters-/Termstruktur der Sterblichkeit zulassen. Forward-Modelle erscheinen daher auch hier als der naheliegende Ansatz. Insbesondere lassen sich für deterministische Volatilitätsstrukturen geschlossene Bewertungs- und Risikomessformeln für das vorgestellte Langlebighkeitsderivat herleiten.

Wir stellen dar, wie Forward-Modelle konstruiert und angewendet werden können, indem man die *Volatilität der Sterblichkeit* spezifiziert. Darüber hinaus stellen wir Kalibrierungsprozeduren auf der Basis von historischen Daten für „Forward-Modelle zweiter Ordnung“ vor. Im Falle von deterministischen Volatilitätsstrukturen lässt sich ein Maximum-Likelihood Schätzverfahren herleiten, welches effizient numerisch umgesetzt werden kann. Für allgemeine Volatilitätsstrukturen präsentieren wir ein simulationsbasiertes Pseudo-Maximum-Likelihood-Verfahren. Insgesamt zeichnen sich deterministische Volatilitätsmodelle als besonders dienlich ab. Zwar ergibt sich hier der theoretische Nachteil, dass negative Sterblichkeitsintensitäten mit geringer Wahrscheinlichkeit möglich sind, doch

ein Kalibrierungsalgorithmus für „Modelle zweiter Ordnung“ kann effizient umgesetzt werden. Darüber hinaus stimmen Volatilitätsstrukturen für „Modelle erster“ und „zweiter Ordnung“ unter gewissen Annahmen über den Marktpreis des Risikos überein, sodass Bewertungsmodelle und oft sogar Bewertungsformeln direkt hergeleitet werden können.

Anwendungen und Ergebnisse

Trotz der erläuterten Vorteile wurde unserer Kenntnis nach in der Literatur bisher kein anwendungsorientiertes stetiges Forward-Sterblichkeitsmodell vorgestellt. Wir schlagen zwei Volatilitätsstrukturen vor – eine deterministische und eine nicht-deterministische – die auf demographischen und epidemiologischen Einsichten beruhen. Obwohl solch ein Vorgehen eine gewisse Willkür mit sich bringt und Kompromisse erfordert, lassen die resultierenden Modelle differenzierte Änderungsmuster zu, und wir sind der festen Überzeugung, dass unsere Modelle einen adäquaten Ausgangspunkt für zukünftige Weiterentwicklungen darstellen.

Die Anwendungen der vorgeschlagenen Kalibrierungsprozeduren liefern strukturell ähnliche Resultate und Größenordnungen, allerdings entstehen Probleme aufgrund von feinen Unterschieden in den beobachteten Daten und in den im Modellrahmen „erreichbaren“ Sterblichkeitsflächen. Hier „lösen“ wir diese Probleme, indem wir im deterministischen Volatilitäts-Fall einen stark reduzierten Datensatz verwenden und im allgemeinen Volatilitäts-Fall relativ großzügige Abstandsrestriktionen zulassen, doch diese „Lösungen“ könnten verzerrte Ergebnisse nach sich ziehen. Insbesondere führen beide Spezifikationen zu signifikanten Unterschieden in den betrachteten Risikomaßen für das vorgestellte Langlebigkeitsderivat, was wohl auf diese Problematik zurückzuführen ist. Unsere Ergebnisse zu endlich-dimensionalen Realisierungen aus Kapitel 2 stellen jedoch zumindest für deterministische Volatilitäten das theoretische Fundament für geeignetere Lösungen des Kalibrierungsproblems dar, da Abweichungen, die nicht vom Modell aufgefangen werden, durch Glättung herausgefiltert werden können. Die Umsetzung eines solchen Ansatzes ist eines der primären Ziele unserer zukünftigen Forschungsbemühungen. Darüber hinaus lassen sich basierend auf der Formulierung von Forward-Modellen im Rahmen von stochastischen Gleichungen in unendlich-dimensionalen Räumen auch entsprechende Ergebnisse für nicht-deterministische Volatilitätsstrukturen herleiten.

Für die Bewertung des Derivats unter der deterministischen Volatilitätsstruktur und der Annahme eines deterministischen Marktpreises des Risikos ist es nun ausreichend, die in Kapitel 2 eingeführten Langlebigkeitsanleihen zu bepreisen. Wir greifen hierzu auf die in Kapitel 3 vorgestellten Ansätze von Lin und Cox (2005) und Milevsky et al. (2005) zurück, wobei wir im letzteren Fall Schätzungen des (konstanten) Marktpreises des Risikos aus Aktienmärkten verwenden. Ähnliche Ansätze wurden von verschiedenen Autoren zur Preisanalyse der in 2004 angekündigten Langlebigkeitsanleihe angewendet, wobei sich ihre Schlussfolgerungen diametral unterscheiden. Indem wir unsere Ergebnisse für beide Fälle vergleichen, können wir diese unterschiedlichen Folgerungen erklären. Darüber hinaus stellen wir fest, dass das vorgeschlagene Sterblichkeitsderivat eine Absicherung gegenüber extremen Sterblichkeitsverbesserungen zu moderaten Kosten bieten könnte.

Schließlich werden im letzten Abschnitt die wesentlichen Ideen und Ergebnisse nochmals zusammenfassend dargestellt. Darüber hinaus zeigen wir zukünftige Forschungsmöglichkeiten auf.

Literatur

- Biffis, E., 2005. Affine processes for dynamic mortality and actuarial valuation. *Insurance: Mathematics and Economics*, 37: 443-468.
- Björk, T., 2003. *On the Geometry of Interest Rate Models*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin.
- Björk, T., Gombani, A., 1999. Minimal realizations of interest rate models. *Finance and Stochastics*, 3: 413-432.

- Cairns, A.J., Blake, D., Dowd, K., 2006a. Pricing Death: Frameworks for the Valuation and Securitization of Mortality Risk. *ASTIN Bulletin*, 36: 79-120.
- Dahl, M., 2004. Stochastic mortality in life insurance: market reserves and mortality-linked insurance contracts. *Insurance: Mathematics and Economics*, 35: 113-136.
- Filipović, D., 2001. Consistency Problems for Heath Jarrow Morton Interest Rate Models. *Lecture Notes in Mathematics*, 1760. Springer, Berlin.
- Heath, D., Jarrow, R., Morton, R., 1992. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claim valuation. *Econometrica*, 60: 77-105.
- Lin, Y., Cox, S., 2005. Securitization of Mortality Risks in Life Annuities. *The Journal of Risk and Insurance*, 72: 227-252.
- Milevsky, M.A., Promislow, S.D., Young, V.R., 2005. Financial Valuation of Mortality Risk via the Instantaneous Sharpe Ratio. Working Paper, York University and University of Michigan.
- Miltersen, K.R., Persson, S.A. , 2005. Is mortality dead? Stochastic force of mortality determined by no arbitrage. Working Paper, University of Bergen.
- Pelsser, A. , 2003. Pricing and Hedging Guaranteed Annuity Options via Static Option Replication. *Insurance: Mathematics and Economics*, 33: 283-296.