

# Zusammenfassung der Diplomarbeit zum Thema „Effiziente Monte-Carlo-Methoden für konvexe Risikomaße“

Jörn Dunkel

## Einführung

Die verlässliche Bewertung von Portfoliorisiken ist Grundvoraussetzung für die Auswahl erfolgreicher bzw. zulässiger Investitionsstrategien (Caoutte et al., 1998; Pearson, 2002). Letzteres gilt insbesondere für Banken und Versicherungen, die neben ökonomischen Ertragskriterien auch gesetzlichen Regulationsbestimmungen unterliegen. Die während des letzten Jahrzehnts entwickelte axiomatische Risikomaßtheorie (Artzner et al., 1999; Föllmer und Schied, 2004) liefert den Rahmen, um finanzielle Risiken auf mathematisch systematische Weise zu behandeln. Vermöge dieser Theorie lassen sich praxisrelevante Risikomaße nach allgemeinen Merkmalen klassifizieren und vergleichen. Darüberhinaus haben die auf diesem Wege gewonnenen Erkenntnisse zur Entwicklung neuer praxisrelevanter Risikomaße beigetragen (Acerbi und Tasche, 2001; Föllmer und Schied, 2002a,b). Die Suche nach Risikomaßen mit verbesserten Eigenschaften wurde u.a. dadurch motiviert, daß traditionelle Risikomaße wie *Value-at-Risk* (Jorion, 2000) das Risiko großer Verluste oftmals nur in unzulänglicher Weise quantifizieren.

Die Verbindung der axiomatischen Risikomaßtheorie mit konkreten probabilistischen Marktmodellen bietet eine wertvolle Möglichkeit zur *a priori* Abschätzung potentieller Portfoliorisiken. Aufgrund weitreichender struktureller Parallelen gilt dies sowohl für die Anlage- und Kreditrisikobewertung von Banken als auch für das Asset Liability Management von Versicherungen. Möchte man auf der Basis realitätsnaher Modellen zu praxisrelevanten Risikobewertungen gelangen, so sind zumeist zeitaufwendige Monte-Carlo-Simulationen<sup>1</sup> erforderlich (Glasserman, 2004; Jäckel, 2002; Joshi, 2004; Tuor, 2003). In Abhängigkeit von der Struktur der jeweils interessierenden Größe(n) kann die effektiv benötigte Rechenzeit gegebenenfalls durch entsprechende Vorüberlegungen wesentlich verkürzt werden. Dies ist insbesondere dann von Bedeutung, wenn das Risiko großer Verluste abgeschätzt werden soll, da letztere oftmals mit relativ selten auftretenden Ereignissen (z. B. Naturkatastrophen) verknüpft sind.

Eine zur Charakterisierung des Risikos großer Verluste besonders geeignete Teilklasse von Risikomaßen sind die unten noch genauer erläuterten *konvexen* Risikomaße. Vor diesem Hintergrund bestand das Hauptanliegen der Diplomarbeit darin, effiziente numerische Monte-Carlo-Methoden zu entwickeln, mittels derer sich konvexe Risikomaße für die Standardrisikomodelle *CreditRisk+* (CSFP, 1997) und *CreditMetrics* (Gupton et al., 1997) auf effektive Weise berechnen lassen. Als Orientierungshilfe dienten dabei Arbeiten von Glasserman et al. (2000a,b, 2001) und Glasserman und Li (2003a,b), in denen kürzlich analoge Fragestellungen für das populäre, i.a. jedoch nicht-konvexe Risikomaß *Value-at-Risk* untersucht wurden.

## (Konvexe) Risikomaße

Die moderne mathematische Theorie der Risikomaße geht auf Artzner et al. (1999) zurück. Diese Autoren schlugen einen axiomatischen Zugang vor, der es erlaubt, verschiedene Risikomaße gemäß allgemeiner Eigenschaften wie Konvexität, Homogenität oder Kohärenz zu klassifizieren (Föllmer und Schied, 2004). Wir wollen dies kurz veranschaulichen:

<sup>1</sup>Diese Bezeichnung erklärt sich daraus, daß im Fall probabilistischer Modelle die entsprechenden numerischen Algorithmen auf der Verwendung von (Pseudo-)Zufallszahlen basieren.

Sei  $\mathcal{D}$  der Raum der finanziellen Positionen. Ein Risikomaß weist jeder Position  $X \in \mathcal{D}$  eine reelle Zahl zu, die als Meßwert für das mit dieser Position verbundene Risiko interpretiert wird. Wir werden nachfolgend annehmen, daß  $\mathcal{D}$  einem Vektorraum integrierbarer Zufallsvariablen entspricht.<sup>2</sup>

**Definition 1** Eine Abbildung  $\hat{\rho} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  wird verteilungsinvariantes Risikomaß genannt, wenn sie für alle  $X_1, X_2 \in \mathcal{D}$  folgenden Bedingungen genügt:

- *Inverse Monotonie:* Falls  $X_1 \leq X_2$ , dann  $\hat{\rho}(X_1) \geq \hat{\rho}(X_2)$ .
- *Cash-Invarianz:* Wenn  $m \in \mathbb{R}$ , dann  $\hat{\rho}(X_1 + m) = \hat{\rho}(X_1) - m$ .
- *Verteilungsinvarianz:* Wenn die Verteilungen von  $X_1$  und  $X_2$  übereinstimmen, dann  $\hat{\rho}(X_1) = \hat{\rho}(X_2)$ .

Eine Position  $X \in \mathcal{D}$  ist akzeptabel bezüglich  $\hat{\rho}$ , wenn  $\hat{\rho}(X) \leq 0$ .

Monotonie bedeutet, daß sich das Risiko verringert, wenn sich das Auszahlungsprofil erhöht. Cash-Invarianz formalisiert die Vorstellung, daß Risiken auf einer monetären Skala gemessen werden: Wird ein risikofreier Geldbetrag  $m$  zur Position  $X$  addiert, dann reduziert sich das Risiko um  $m$ . Verteilungsinvarianz bedeutet, daß zwei Positionen, die den selben Verteilungen genügen, durch das selbe Risiko charakterisiert sind. Weitere Klassifizierungseigenschaften für Risikomaße lauten wie folgt:

- *Konvexität* formalisiert die Idee, daß Diversifikation risikoreduzierend wirkt. Sei  $X_1, X_2 \in \mathcal{D}$  und  $\alpha \in [0, 1]$ . Die Position  $\alpha X_1 + (1 - \alpha)X_2$  wird dann als diversifiziert bezeichnet. Das Risikomaß  $\hat{\rho}$  ist konvex, wenn das Risiko einer diversifizierten Position niemals größer als die gewichtete Summe der Teilrisiken ist, d.h., wenn für alle  $X_1, X_2 \in \mathcal{D}$  und  $\alpha \in [0, 1]$  gilt

$$\hat{\rho}(\alpha X_1 + (1 - \alpha)X_2) \leq \alpha \hat{\rho}(X_1) + (1 - \alpha) \hat{\rho}(X_2).$$

- *Positive Homogenität* ist eine oftmals verwendete mathematische Eigenschaft, jedoch aus ökonomischer Sicht manchmal weniger sinnvoll. Positive Homogenität bedeutet, daß das Risiko einer Position proportional mit ihrer Größe wächst, d.h.,  $\hat{\rho}$  ist positiv homogen, wenn für alle  $X \in \mathcal{D}$  und  $\lambda \geq 0$  gilt

$$\hat{\rho}(\lambda X) = \lambda \hat{\rho}(X).$$

Man beachte, daß diese Eigenschaft folgender Asymmetrie zwischen Gewinnen und Verlusten nicht gerecht wird: Vergrößert sich die Position um einen Faktor  $\lambda$ , so kann das mit ihr assoziierte Risiko stärker als  $\lambda$  wachsen, sofern die Kosten zur Verlustkompensation schneller als die Verlustgröße ansteigen (je größer eine Position, desto teurer wird es typischerweise, sie zu liquidieren).

- *Kohärenz* bedeutet, daß ein Risikomaß sowohl konvex als auch positiv homogen ist.
- *Invarianz unter Randomisierung* formalisiert die folgende Idee: Angenommen  $X_1, X_2 \in \mathcal{D}$  sind akzeptierbar bezüglich  $\hat{\rho}$ , d.h.  $\hat{\rho}(X_1) \leq 0$  und  $\hat{\rho}(X_2) \leq 0$ . Man betrachte nun die randomisierte Position

$$X = \begin{cases} X_1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \alpha, \\ X_2 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \alpha, \end{cases} \quad \alpha \in (0, 1),$$

wobei der „ $\alpha$ -Münzwurf“ unabhängig von  $X_1$  und  $X_2$  erfolgen soll. Geht man vom (normativen) Standpunkt einer finanziellen Institution aus, dann sollte auch die randomisierte Position  $X$  akzeptabel sein. Analog dazu, falls die individuellen Positionen nicht akzeptabel sind, d.h.  $\hat{\rho}(X_1) > 0$  und  $\hat{\rho}(X_2) > 0$ , dann sollte auch  $X$  nicht akzeptabel sein. Dementsprechend

<sup>2</sup>Beispielsweise könnten wir für  $\mathcal{D}$  den Raum der beschränkten Finanzpositionen  $L^\infty$  oder den Raum der Finanzpositionen mit beschränkter Varianz  $L^2$  wählen.

wird ein Risikomaß als „invariant unter Randomisierung“ bezeichnet, wenn randomisierte Positionen, die sich aus (un)akzeptablen Positionen ergeben, wiederum (un)akzeptabel sind. Diese Eigenschaft ist eng mit der Frage nach einer konsistenten dynamischen Risikobewertung verknüpft (Weber, 2004b).

Zur weiteren Illustration wollen wir die Beispiele *Value-at-Risk* (VaR) und *(Utility-based) Shortfall Risk* (SR) betrachten, wobei folgende Konventionen gelten sollen. Zu jeder Position  $X \in \mathcal{D}$  sei  $L := -X$  das zugehörige Verlustprofil. Dann ergibt das entsprechende Risikomaß für  $L$  gemäß der Vorschrift  $\rho(L) := \hat{\rho}(-L)$ . Nachfolgend werden wir  $L$  als primäre Größe ansehen und uns auf den Fall beziehen, wo  $L$  den Gesamtverlust eines Kredit- oder Versicherungsportfolios während eines festgelegten Zeitintervalls  $\Delta t$  darstellt. Es genügt dann,  $L$  als eine auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  definierte Zufallsvariable anzusehen (auf konkrete Modelle für die Berechnung von  $L$  werden wir später noch kurz eingehen).

**Beispiel 2** *Value-at-Risk* (VaR) ist das derzeit in der Praxis wohl am weitesten verbreitete Risikomaß. Für eine gegebene Verlustvariable  $L$ , kann VaR zum Niveau  $\lambda \in (0, 1)$  durch<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \rho(L) := \text{VaR}_\lambda(L) &:= \inf\{c \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}[L > c] \leq \lambda\} \\ &= \inf\{c \in \mathbb{R} \mid \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{L > c\}}] \leq \lambda\} \end{aligned} \quad (1)$$

definiert werden. Hierbei bezeichnet  $\mathbb{E}$  den Erwartungswert bezüglich des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\mathbb{P}$ , und  $\mathbf{1}_{\{L > c\}}$  ist die Indikatorfunktion für das Ereignis  $\{L > c\}$ , wobei  $c$  ein Schwellwert ist. VaR entspricht somit dem  $\lambda$ -Quantil der Verlustverteilung. Anders ausgedrückt, für jeden Wert  $\lambda \in (0, 1)$  entspricht  $\text{VaR}_\lambda(L)$  dem kleinsten risikofreien Geldbetrag, den man hinzufügen müßte, um sicherzustellen, daß die Verlustwahrscheinlichkeit den Wert  $\lambda$  nicht übersteigt. Hinsichtlich obiger Klassifizierung ist VaR sowohl verteilungsinvariant also auch invariant unter Randomisierung und positiv homogen – es ist jedoch i.a. *nicht* konvex und kann somit Diversifikation auch als negativ bewerten.<sup>4</sup> Ferner, wie bereits aus Gl. (1) ersichtlich, ist VaR unempfindlich gegenüber der Verlusthöhe (d.h., VaR charakterisiert den „tail“ der Verlustverteilung in unzureichender Weise).<sup>5</sup>

Aufgrund dieser Defizite von VaR empfiehlt es sich, solche Risikomaße zu betrachten, die eine vergleichsweise genauere Charakterisierung des Risikos großer Verluste erlauben. Eine vielversprechende Alternative in dieser Hinsicht ist *(Utility-based) Shortfall Risk* (SR), welches im Mittelpunkt der Diplomarbeit stand.

**Beispiel 3** Sei  $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine konvexe Verlustfunktion und  $\lambda$  ein Punkt im Inneren des Bildbereichs von  $\ell$ . Typische Beispiele für konvexe Verlustfunktionen sind

$$\ell_\beta^{\text{exp}}(x) = \exp(\beta x), \quad \beta > 0, \quad (2a)$$

$$\ell_\gamma^{\text{poly}}(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}, \quad \gamma > 1, \quad (2b)$$

wobei jeweils  $\lambda > 0$ . Ferner sei der Raum der Finanzpositionen  $\mathcal{D}$  so gewählt, daß für  $X \in \mathcal{D}$  der Erwartungswert  $\mathbb{E}[\ell(-X)]$  wohldefiniert und endlich ist. Dann ist SR mit Verlustfunktion  $\ell$  zum Niveau  $\lambda$  wie folgt definiert

$$\text{SR}_{\ell, \lambda}(L) := \inf\{c \in \mathbb{R} \mid \mathbb{E}[\ell(L - c)] \leq \lambda\}. \quad (3)$$

Formal erhält man die SR-Definition (3), indem man die Indikatorfunktion in Gl. (1) durch die konvexe Verlustfunktion  $\ell$  ersetzt. Diese Ersetzung hat zur Folge, daß SR sensibel auf die Höhe

<sup>3</sup>Typische in der Praxis benutzte Werte sind  $\lambda = 0.05$  oder  $\lambda = 0.01$ .

<sup>4</sup>Für Zusatzbedingungen an  $\mathcal{D}$ , unter denen VaR konvex sein kann, siehe Embrechts et al. (2002)

<sup>5</sup>Siehe auch entsprechende Diskussion in Föllmer und Schied (2004) bzw. in Acerbi und Tasche (2001, 2002); Tasche (2002).

der Verluste reagiert, wohingegen VaR lediglich anzeigt, ob der Verlust  $L$  eine gewisse Schwelle  $c$  mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens  $\lambda$  übersteigt. Folglich kann Portfoliooptimierung auf der Basis von SR das Risiko hoher Verluste auch in solchen Fällen minimieren, wo VaR ein zu grobes Maß darstellt (Giesecke et al., 2005).

Hinsichtlich der obigen Klassifizierungseigenschaften erweist sich SR als ein konvexes Risikomaß<sup>6</sup> und bewertet daher eine Portfoliodiversifikation niemals als nachteilhaft. Ferner ist SR invariant unter Randomisierung.<sup>7</sup> Allgemeiner kann sogar gezeigt werden, daß SR-Maße die *einzigsten* verteilungsinvarianten konvexen Risikomaße darstellen, die gleichzeitig auch invariant unter Randomisierung sind (Weber, 2004b). Dies hat u.a. zur Folge, daß innerhalb der Klasse statischer verteilungsinvarianter Risikomaße nur SR-Maße eine konsistente dynamische Risikomessung erlauben.

Schließlich läßt sich noch bemerken, daß SR konzeptionell eng mit der von-Neumann-Morgenstern-Theorie des Erwartungsnutzens verknüpft ist. Genauer gesagt, mittels  $u(x) := -\ell(-x)$  erhält man aus der konvexen Verlustfunktion  $\ell$  eine konkave Bernoulli-Nutzenfunktion  $u$ , wie sie im Mittelpunkt der von-Neumann-Morgensternschen Theorie steht (Föllmer und Schied, 2004). Mit der Erwartungsnutzenfunktion  $U(X) = \mathbb{E}[u(X)]$  läßt sich (3) in der Form

$$\text{SR}_{\ell,\lambda}(L) := \inf\{c \in \mathbb{R} \mid U(-L + c) \geq -\lambda\}$$

schreiben. Somit ist  $\text{SR}_{\ell,\lambda}(L)$  die kleinste Geldmenge, die zu einem Portfolio hinzugefügt werden muß, damit sein Erwartungsnutzen zumindest  $-\lambda$  beträgt.

Angesichts der gerade erläuterten positiven Eigenschaften der SR-Risikomaße, erschien es sowohl aus theoretischer als auch aus praktischer Sicht sinnvoll, sich im Rahmen einer Diplomarbeit mit der Entwicklung entsprechender Monte-Carlo-Methoden zu befassen.

## Risikomodelle

Das zunehmende betriebswirtschaftliche Interesse an der Modellierung und Koordinierung finanzieller Risiken hat zur Entwicklung verschiedener kommerzieller Risikomodelle geführt. Zwei prominente Beispiele sind *CreditMetrics* von JP Morgan (Gupton et al., 1997) und *CreditRisk<sup>+</sup>* von Credit Suisse Financial Products (CSFP, 1997).<sup>8</sup> Beide Modelle wurden entwickelt, um das Verlustrisiko abzuschätzen, welches einer Bank durch den Ausfall von Firmenkunden (z. B. durch Bankrott) innerhalb eines fixierten Zeitraums  $\Delta t$  (z. B. ein Jahr) entsteht. Die Modelle basieren auf der Annahme, daß sich der Gesamtverlust  $L$  in der Form<sup>9</sup>

$$L(\omega) = \sum_{i=1}^n v_i D_i(\omega) \quad \text{bzw.} \quad L(\omega) = \sum_{i=1}^n v_i \bar{D}_i(\omega) \quad (4)$$

darstellen läßt, wobei  $\omega \in \Omega$  ein mögliches Szenario symbolisiert. Im Fall von *CreditMetrics* bezeichnet  $n$  beispielsweise die Anzahl der Kreditnehmer in dem betrachteten Portfolio und  $v_i$  den partiellen Nettoverlust, der der Bank beim Ausfall des  $i$ ten Kunden nach Abzug eventueller Sicherheiten entsteht. Die Zufallsvariablen  $D_i \in \{0, 1\}$  spielen die Rolle von Indikatorvariablen für den potentiellen Ausfall des  $i$ ten Kunden im Zeitraum  $\Delta t$ , wobei  $D_i = 1$  das Ausfallereignis signalisiert. Im Gegensatz zu *CreditMetrics* können bei *CreditRisk<sup>+</sup>* die Indikatorvariablen  $\bar{D}_i$  Werte in  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  annehmen. Entsprechend symbolisiert dann jeder Index  $i$  in Gl. (4) nicht mehr nur einen einzelnen Kunden, sondern stattdessen gleich eine ganze Kundenklasse: Fällt ein Kreditnehmer aus der  $i$ ten Klasse aus, dann entsteht für die Bank der Nettoverlust  $v_i$ , bei Ausfall eines

<sup>6</sup>SR ist zwar immer konvex, jedoch i.a. nicht positiv homogen.

<sup>7</sup>Im Gegensatz zu VaR und SR ist das gleichfalls bekannte Risikomaß *Average-Value-at-Risk* (AVaR) – auch als *Conditional-Value-at-Risk* oder *Expected Shortfall* bekannt – *nicht* invariant unter Randomisierung. Es sei hierbei noch bemerkt, daß AVaR im Gegensatz zu SR kein nutzenbasiertes Risikomaß darstellt; eine detaillierte Diskussion von AVaR findet man in Föllmer und Schied (2004)

<sup>8</sup>Siehe auch Kurth und Tasche (2003) für einen Diskussion von *CreditRisk<sup>+</sup>*.

<sup>9</sup>Bürgisser et al. (2001) modellieren auch die partiellen Ausfallbeträge  $v_i$  stochastisch.

zweiten Kunden aus derselben Klasse erhöht sich der Verlust dann auf  $2v_i$  usw.. Die Variablen  $\bar{D}_i$  sind daher im Fall von  $CreditRisk^+$  als Ausfallzähler zu interpretieren.

Obwohl ursprünglich zur Abschätzung von Kreditrisiken entwickelt, lassen sich beide Modelle auch im versicherungstheoretischen Kontext anwenden. Beispielsweise würde man vom Standpunkt einer Versicherung aus die Größen  $v_i$  als die jeweilige (Netto-)Versicherungssumme der  $i$ ten Portfolioposition interpretieren, während die Zufallsvariablen  $D_i$  bzw.  $\bar{D}_i$  Indikatoren für den Eintritt des Schadensfalls darstellen.

Ein wichtiger Aspekt von  $CreditMetrics$  und  $CreditRisk^+$  besteht darin, daß jeweils versucht wird, mögliche Abhängigkeiten zwischen den verschiedenen Ausfallindikatoren  $D_i$  bzw. Ausfallzählern  $\bar{D}_i$  zu berücksichtigen (Frey und McNeil, 2002a,b). Dies geschieht in beiden Fällen mittels sogenannter latenter Hilfsvariablen  $Z(\omega) = (Z_1(\omega), \dots, Z_d(\omega)) \in \mathbb{R}^d$ . Die Hilfsgrößen  $Z_i$  werden auch als gemeinsame (*Risiko-*)*Faktoren* bezeichnet; sie sollen z. B. Auswirkungen von Naturkatastrophen oder ähnliche Einflüsse modellieren, die zu Korrelationen zwischen den Ausfällen verschiedener Portfoliopositionen führen können.

Aus mathematischer Sicht ist die folgende strukturelle Gemeinsamkeit von  $CreditMetrics$  und  $CreditRisk^+$  bemerkenswert: Den Modellen liegt jeweils als Annahme zugrunde, daß die Komponenten der Zufallsvektoren  $D = (D_1, \dots, D_n) \in \{0, 1\}^n$  bzw.  $\bar{D} = (\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_n) \in \mathbb{N}_0^n$ , bedingt auf die Faktoren  $Z$ , unabhängige Zufallsvariablen darstellen. Abgesehen von den jeweils verschiedenen Wertebereichen, Interpretationen und Verteilungen der Ausfallvariablen  $D_i$  und  $\bar{D}_i$  in der Verlustformel (4), unterscheiden sich  $CreditMetrics$  und  $CreditRisk^+$  letztendlich jedoch auch dadurch, wie die Abhängigkeiten zwischen den Ausfallvariablen  $D_i$  bzw.  $\bar{D}_i$  mittels der Faktoren  $Z = (Z_1, \dots, Z_d)$  im Detail modelliert werden (dies ist ausführlich im Kapitel 2.2 der Diplomarbeit beschrieben).

## Monte-Carlo-Methoden und Ergebnisse

Das Hauptziel der Diplomarbeit bestand nun darin, effiziente Monte-Carlo-Methoden zu konstruieren, die zur numerischen Abschätzung von konvexen SR-Risikomaßen im Rahmen von  $CreditRisk^+$  und  $CreditMetrics$  benutzt werden können. Als Einstieg in diese Thematik wurden in Kapitel 4 der Arbeit die allgemeinen Grundprinzipien verschiedener Monte-Carlo-Methoden anhand von Standardbeispielen wie *importance sampling* und *stratified sampling* erläutert. Anschließend erfolgte die Anwendung auf die Risikomodelle  $CreditRisk^+$  und  $CreditMetrics$ . Wie in den Kapiteln 5 und 6 ausgeführt, reduziert sich die numerische Berechnung von SR-Risikomaßen auf die numerische Bestimmung der eindeutigen Nullstelle  $s_*$  der Funktion (Föllmer und Schied, 2004; Weber, 2004a)

$$f_\lambda(s) := \mathbb{E}[\ell(L - s)] - \lambda,$$

wobei sowohl die konvexe Verlustfunktion  $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  als auch das Niveau  $\lambda$  vorgegeben sind und  $L$  den zufälligen Gesamtportfolioverlust darstellt, der sich je nach Modell unterschiedlich berechnet. Damit ergeben sich folgende zwei Teilaufgaben:<sup>10</sup>

1. Iterative Approximation der Nullstelle  $s_*$  durch eine gegen  $s_*$  konvergierende Folge  $\{s_0, s_1, \dots\}$ .
2. Numerische Abschätzung des Erwartungswertes  $\mathbb{E}[\ell(L - s)]$  bei fixiertem Parameter  $s = s_k$ .

Zur Lösung der ersten Teilaufgabe existieren verschiedene Standardverfahren (Schwarz, 1997), wobei sich im Fall der SR-Risikomaße das Sekantenverfahren als besonders vorteilhaft erweist. Hauptgegenstand der Untersuchungen in den Kapiteln 5 und 6 blieb daher die Konstruktion geeigneter Schätzer zur effizienten numerischen Bestimmung des Erwartungswertes  $\mathbb{E}[\ell(L - s)]$ . Zur Lösung dieser zweiten Teilaufgabe wurde die *importance sampling*-Methode *exponential twisting* verwendet (Glasserman, 2004). Die Entscheidung für dieses sowohl theoretisch als auch numerisch gut handhabbare Varianzreduktionsverfahren war in erster Linie durch die von Glasserman und Li (2003a,b) für VaR erzielten Resultate motiviert. Im Verlauf der Diplomarbeit hat sich

<sup>10</sup>Diese Aufgabenteilung bleibt grundsätzlich auch bei der SR-Bestimmung in anderen Modellen erhalten, d.h., es würde je nach Modell lediglich eine andere Verteilung von  $L$  in die Erwartungswertberechnung eingehen.

jedoch gezeigt, daß diese Methode auch im Fall der SR-Maße sehr zufriedenstellende Ergebnisse liefert. Durch numerische Simulation von Testportfolios konnte demonstriert werden, daß die in den Kapiteln 5 und 6 konstruierten Algorithmen gegenüber naiven Algorithmen stark verbesserte Konvergenzeigenschaften aufweisen. Insbesondere bei den selten auftretenden hohen Verlusten arbeiten die mittels *exponential twisting* konstruierten Schätzer deutlich effektiver als vergleichbare naive Schätzer. So verringerte sich in den betrachteten Beispielen die zur Erreichung vergleichbarer Genauigkeiten erforderliche Stichprobengröße um mindestens zwei Größenordnungen (d.h., bei Verwendung des auf *exponential twisting* basierenden Schätzers reduzierte sich die effektiv benötigte Simulationszeit in etwa um einen Faktor 100).

Abschließend bietet es sich an, kurz auf eventuelle Erweiterungs- und Anwendungsmöglichkeiten der erzielten Ergebnisse einzugehen. Die eigentliche Motivation zur Entwicklung von Monte-Carlo-Algorithmen besteht zweifellos darin, Zeitersparnisse bei der numerischen Lösung realer Probleme zu erzielen. Die in der Diplomarbeit für SR-Risikomaße entwickelten Methoden können – als Ergänzung zur traditionellen Risikobewertung mittels VaR – einen Beitrag zur verbesserten Abschätzung von Portfoliorisiken leisten. Aufgrund konzeptioneller Parallelen umfaßt der potentielle Anwendungsbereich sowohl das Portfoliomanagement von Banken als auch das Asset Liability Management von Versicherungen. Darüberhinaus sollten sich durch eine Verknüpfung mit den von Weber (2003, 2004b) gefundenen Ergebnissen relativ problemlos effiziente numerische Verfahren konstruieren lassen, die konsistente Risikoabschätzungen für mehrperiodige (dynamische) Modelle ermöglichen.

## Literatur

- Acerbi, C. und Tasche, D. (2001). Expected shortfall: a natural coherent alternative to value at risk. *Economic Notes*, 31(2):379–388.
- Acerbi, C. und Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, 26(7):1487–1503.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. und Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9(3):203–228.
- Bürgisser, P., Kurth, A. und Wagner, A. (2001). Incorporating severity variations into credit risk. *Journal of Risk*, 3(4):5–31.
- Caoutte, J. B., Altman, E. I. und Narayanan, P. (1998). *Managing Credit Risk*. John Wiley & Sons.
- CSFP (1997). *CreditRisk<sup>+</sup>: A CreditRisk Management Framework*. Credit Suisse Financial Products, London.
- Embrechts, P., McNeil, A. und Strautman, D. (2002). Correlation and dependency in risk management: Properties and pitfalls. In Dempster, M., editor, *Risk Management: Value at Risk and Beyond*. Cambridge University Press.
- Föllmer, H. und Schied, A. (2002a). Convex measures of risk and trading constraints. *Finance and Stochastics*, 6(4):429–447.
- Föllmer, H. und Schied, A. (2002b). Robust representation of convex measures of risk. In *Advances in Finance and Stochastics. Essays in Honour of Dieter Sondermann*, pages 39–56. Springer-Verlag.
- Föllmer, H. und Schied, A. (2004). *Stochastic Finance - An Introduction in Discrete Time*. Number 27 in de Gruyter Studies in Mathematics. Walter de Gruyter, 2. edition.
- Frey, R. und McNeil, A. J. (2002a). Dependence modelling, model risk and model calibration in models of portfolio credit risk. Working paper, <http://www.mathematik.uni-leipzig.de/MI/frey/publications-frey.html>.
- Frey, R. und McNeil, A. J. (2002b). Var und expected shortfall in portfolios of dependent credit risks: conceptual and practical insights. *Journal of Banking & Finance*, 26:1317–1334.

- Giesecke, K., Schmidt, T. und Weber, S. (2005). Measuring the risk of extreme events. In Avellaneda, M., editor, *Event Risk*. Risk Books.
- Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Number 53 in Applications of Mathematics. Springer, New York.
- Glasserman, P., Heidelberger, P. und Shahabuddin, P. (2000a). Importance sampling and stratification for value-at-risk. In Abu-Mostafa, Y. S., Baron, B. L., Lo, A. W., & Weigend, A., editors, *Computational Finance 1999*, pages 7–24. MIT Press.
- Glasserman, P., Heidelberger, P. und Shahabuddin, P. (2000b). Variance reduction techniques for estimating value-at-risk. *Management Science*, 46(10):1349–1364.
- Glasserman, P., Heidelberger, P. und Shahabuddin, P. (2001). Efficient Monte Carlo methods for value-at-risk. In *Mastering Risk*, volume 2. Financial Times - Prentice Hall.
- Glasserman, P. und Li, J. (2003a). Importance sampling for a mixed Poisson model of portfolio credit risk. In Chick, S., Sánchez, P. J., Ferrin, D. und Morrice, D. J., editors, *Proceedings of the 2003 Winter Simulation Conference*, Piscataway (NJ). IEEE Press.
- Glasserman, P. und Li, J. (2003b). Importance sampling for portfolio credit risk. <http://www-1.gsb.columbia.edu/faculty/pglasserman/Other/>.
- Gupton, C., Finger, C. und Bhatia, M. (1997). *CreditMetrics Technical Document*. J. P. Morgan & Co., New York. [www.riskmetrics.com](http://www.riskmetrics.com).
- Jäckel, P. (2002). *Monte Carlo Methods in Finance*. Wiley Finance Series. John Wiley & Sons, Chichester.
- Jorion, P. (2000). *Value at Risk*. McGraw-Hill Companies, 2. edition.
- Joshi, M. (2004). *C++ Design Patterns and Derivatives Pricing*. Cambridge University Press.
- Kurth, A. und Tasche, D. (2003). Bestimmung von kreditrisikobeiträgen. *Deutsches Risk*, S. 32–37.
- Pearson, N. D. (2002). *Risk Budgeting*. John Wiley & Sons.
- Schwarz, H. R. (1997). *Numerische Mathematik*. B. G. Teubner, Stuttgart, 4. edition.
- Tasche, D. (2002). Expected shortfall and beyond. *Journal of Banking & Finance*, 26(7):1519–1533.
- Tuor, R. (2003). *Genauigkeit versus Rechenaufwand – Ein Vergleich Monte-Carlo-basierter Value-at-Risk-Methoden*. PhD thesis, Universität St. Gallen, Hochschule für Wirtschafts-, Rechts- und Sozialwissenschaften. Dissertation Nr. 2834.
- Weber, S. (2003). Distribution-invariant dynamic risk measures. Working paper, Humboldt-Universität zu Berlin.
- Weber, S. (2004a). Distribution-invariant risk measures, entropy, and large deviations. Working paper, Humboldt-Universität zu Berlin.
- Weber, S. (2004b). Distribution-invariant risk measures, information, and dynamic consistency. Working paper, Humboldt-Universität zu Berlin.