

UNIVERSITE LYON I - ISFA

Ecole Doctorale Management Information Finance

THESE

Présentée pour obtenir le titre de

Docteur en SCIENCES de Gestion

de l'Université Lyon 1

par

Olivier LE COURTOIS

Impact des Evènements Informatifs
sur
l'Activité Financière des Entreprises

Soutenue publiquement le 4 décembre 2003 devant le jury composé de :

Pr. Jean-Claude AUGROS	Université de Lyon I	
Pr. Gérard CHARREAUX	Université de Bourgogne	
Pr. Hubert DE LA BRUSLERIE	Université de Paris I	
Pr. Hans-Ulrich GERBER	HEC Lausanne	(Rapporteur)
Pr. Jean-Paul LAURENT	Université de Lyon I	(Directeur)
Pr. Patrice PONCET	Université de Paris I	(Rapporteur)
Pr. François QUITTARD-PINON	Université de Lyon I	(Co-Directeur)

à l'Institut de Science Financière et d'Assurances - Université Lyon I

Remerciements

Je tiens à remercier le Professeur Jean-Paul Laurent pour avoir accepté de diriger ma thèse. Que le soutien et la confiance qu'il m'a accordés tout au long de ce travail trouvent ici l'expression de ma plus sincère gratitude. Les discussions avec lui ont toujours été profitables; sa culture - encyclopédique - a été non seulement marquante mais aussi éclairante pour son élève en doctorat.

Je tiens à remercier le Professeur François Quittard-Pinon pour avoir été mon co-directeur de thèse. Il a constamment été à mon écoute, m'a accompagné dans l'écriture de plusieurs articles et a activement participé à ma formation scientifique. Les discussions avec lui ont été innombrables et ses conseils m'ont toujours été particulièrement utiles. Qu'il trouve ici le témoignage de mon respect, de ma considération et de mon amitié.

Je remercie les Professeurs Hans-Ulrich Gerber et Patrice Poncet pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je remercie également les Professeurs Charreaux et de La Bruslerie pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie enfin le Professeur Jean-Claude Augros, directeur de l'ISFA, pour avoir accepté de faire partie de mon jury et pour les nombreux conseils prodigués durant ces quatre dernières années, depuis le début de mon DEA.

Je tiens à exprimer le respect entier et la grande admiration que je ressens à l'égard des Professeurs Paul McGill et Philippe Picard. Ces très grands scientifiques sont pour moi des modèles pour des raisons distinctes mais bien établies. Je ne saurais rentrer ici dans les détails, mais je leur adresse ma plus profonde considération.

Je souhaite remercier les membres de l'ISFA avec qui j'ai eu des discussions, à la fois scientifiques et générales, pour leur présence. A Yannick Malevergne, je présente le témoignage de mon amitié. A Rivo Randrianarivony, je dis bon courage pour la suite. A Idriss Tchabda, je souhaite de

pouvoir s'accomplir dans son nouveau métier. A Carole Bernard, j'exprime ma confiance dans sa réussite future. Enfin, à Didier Rullière, en guise de message crypté, j'annonce que je me chargerai du tableau une fois prochaine. J'ai également une pensée pour les personnes qui m'ont entouré durant cette période et que je ne peux citer toutes ici.

Ces remerciements seraient absolument incomplets si je ne mentionnais pas le soutien continu des membres de ma famille. Je leur dédie ce travail du fond du cœur.

Table des matières

Introduction Générale	9
I Impact sur la Valeur des Actions et de leurs Dérivés	17
1 Modélisation des Cours d'Actions	21
1.1 Introduction	22
1.2 Résultats Généraux	26
1.2.1 Présentation des Processus de Lévy	26
1.2.2 Représentation des Cours	27
1.3 L'Approche Stable	29
1.3.1 Travaux et Idées de Benoît Mandelbrot	29
1.3.2 Le modèle de Carr et Wu	32
1.4 Les Approches de Type Général Hyperbolique	33
1.4.1 Les Lois Générales Hyperboliques	34
1.4.2 Particularités du Modèle Hyperbolique	36
1.4.3 Particularités du Modèle Normal Inverse Gaussien	37
1.4.4 Une Etude Proche: le Modèle de Schoutens	38
1.5 Les Approches par Densité de Lévy	39
1.5.1 Construction des Processus Variance Gamma	39
1.5.2 Le Modèle CGMY	41
1.6 Une Nouvelle Approche	44
1.6.1 Aspects Induits de Marché	44
1.6.2 Illustration par des Processus de Poisson Composés	46
1.6.3 Mouvements de Lévy α - β	48
1.7 Conclusion	51
1.8 Annexe A: Lois Infiniment Divisibles et Processus de Lévy	53
1.9 Annexe B: Lois et Processus Stables	62
2 Evaluation des Produits Dérivés	73
2.1 Introduction	74
2.2 Evaluation des Options en Finance Classique	74
2.2.1 De l'Importance des Mesures et de leurs Changements	74
2.2.2 Précisions sur les Changements de Mesure	78

2.2.3	Les Changements de Numéraire	79
2.3	Evaluations dans l'Univers Historique	81
2.3.1	Présentation	81
2.3.2	Identification du Numéraire	82
2.3.3	Généralisation aux Déflateurs ou Noyaux d'Evaluation	83
2.4	Introduction aux Transformées d'Esscher	84
2.4.1	Présentation	84
2.4.2	Utilisation	85
2.4.3	Compléments	86
2.5	Processus de Lévy et Changements de Mesure	87
2.5.1	Les Caractéristiques comme Mode de Représentation	87
2.5.2	Des Semimartingales aux Processus de Lévy	89
2.5.3	Changements de Mesure	90
2.6	Evaluation des Produits Dérivés	93
2.6.1	Transformées d'Esscher	93
2.6.2	Formule de Gerber et Shiu	96
2.6.3	Méthode Générale d'Evaluation	97
2.6.4	Illustration	99
2.6.5	Obtention Directe de la Mesure Risque-Neutre	101
2.7	L'Approche Stable	103
2.7.1	Méthode Classique	104
2.7.2	Retour sur le Modèle de Carr et Wu	104
2.8	Modèles Combinés Sauts - Temps Financier	105
2.9	Conclusion	106
2.10	Annexe A : Approche Intégré-Différentielle	108
2.11	Annexe B : Démonstrations	113

II Impact sur le Risque des Firmes 117

3 Structure et Risque de la Firme 121

3.1	Introduction	122
3.2	La Question de la Structure Financière Optimale	122
3.2.1	Le Résultat de Modigliani et Miller	122
3.2.2	Coûts de Faillite et Economies d'Impôts	124
3.2.3	La Théorie de l'Agence	126
3.3	Les Modèles de Valorisation de la Dette	128
3.3.1	Travaux Fondateurs	128
3.3.2	Idées Fondamentales de Leland et Toft	130
3.3.3	Expressions Structurelles	132
3.3.4	Apport de Hilberink et Rogers	135
3.4	La Firme du Point de Vue des Managers	138
3.4.1	Structure de la Firme et Politique Managériale	138
3.4.2	Analyse de la Structure Financière de la Firme	141

3.5	La Firme du Point de Vue des Investisseurs	145
3.5.1	Présentation du Modèle	146
3.5.2	Analyse des Valeurs de Marché	150
3.6	Compléments	154
3.6.1	Quand les Managers Anticipent sur le Marché	154
3.6.2	Calcul des Coûts d'Agence	156
3.7	Conclusion	158
3.8	Annexe A: Factorisation de Wiener-Hopf	161
3.9	Annexe B: Transformée de Laplace inverse	169
4	Théorie du Risque des Compagnies d'Assurance	173
4.1	Introduction	174
4.2	Théorie de la Ruine Classique	174
4.2.1	Le Cadre Actuariel	174
4.2.2	Calcul des Probabilités de Ruine	177
4.2.3	Approximation de Cramer-Lundberg	181
4.3	Approches Perturbatives	184
4.3.1	Perturbations Browniennes	184
4.3.2	Perturbations Stables	186
4.4	Approches Directes	187
4.4.1	Processus Gamma et Autres Subordinateurs	187
4.4.2	Processus NIG et Changements de Mesure	189
4.4.3	Approche de Kluppelberg, Kyprianou et Maller	191
4.5	Une Nouvelle Approche	192
4.5.1	Outils Fondamentaux	193
4.5.2	Probabilités de Ruine et de Survie	195
4.5.3	Méthode de Calcul	196
4.6	Analyse des Résultats	198
4.6.1	Résultats à Horizon Fini	198
4.6.2	Résultats à Horizon Infini	201
4.6.3	Lien avec la Théorie Financière du Défaut	203
4.7	Conclusion	204
	Conclusion Générale	207

Introduction Générale

Human behaviour is a main factor in how markets act. Indeed, sometimes markets act quickly, violently, with little warning.

Alan Greenspan,
Chairman of the Federal Reserve

Les marchés financiers, à l'instar des cours d'actions, présentent des mouvements brutaux et imprévisibles. Ces mouvements sont provoqués par les agents économiques qui réagissent à l'arrivée d'informations nouvelles. Pouvoir comprendre les marchés et mener des politiques de risque adaptées nécessite donc de savoir décrire les perceptions et comportements des acteurs. Par ailleurs, il convient de bien distinguer entre un évènement et la réaction qu'il provoque. En effet, face à un évènement donné, les acteurs peuvent soit ne pas agir, soit agir de manière modérée ou bien excessive. Les conséquences sur les cours seront donc fonction non seulement de l'évènement, mais aussi de la façon dont il est perçu et traité.

Une des caractéristiques principales des marchés financiers est la rapidité à laquelle se fait la réaction à la survenue d'information nouvelle. On peut concevoir qu'à l'arrivée, par nature instantanée, d'une nouvelle information, correspond une réaction qui est également instantanée - ou du moins quasi-instantanée. Cette réaction du marché, sur un cours ou un ensemble de cours, est la réaction agrégée des différents intervenants. Elle se traduit par un changement de valeur d'un niveau à un autre, et ceci de manière instantanée ou quasi-instantanée comme écrit plus haut.

Il apparaît ainsi clairement qu'une réflexion sur le fonctionnement des marchés financiers doit prendre en compte l'idée de *rupture* et ne saurait

se limiter à la considération d'*évolutions* possibles. Les exemples d'évènements brutaux impliquant des ruptures sur les cours sont quotidiens. On peut citer l'exemple du résultat négatif du référendum sur l'euro en Suède le dimanche quatorze septembre 2003 qui a provoqué un décrochement brutal de la couronne suédoise face à l'euro lors des premiers échanges du lundi matin suivant. Un autre exemple encore plus typique est l'effet des attentats du onze septembre 2001 sur l'ensemble de la capitalisation boursière mondiale. Il existe ainsi de nombreuses situations où un évènement majeur va être associé à un saut important sur un cours. De la même manière, un évènement perçu comme d'importance intermédiaire se traduira par un saut de taille moyenne. Etudier l'effet de l'arrivée d'informations, c'est ainsi notamment concevoir les dynamiques des prix comme des séquences de sauts. Raisonner en termes d'évolutions aléatoires continues, c'est rendre compte de l'existence d'incertitude, mais c'est en revanche négliger les effets instantanés et brutaux qu'ont les évènements économiques sur les cours.

Une approche se fondant sur une modélisation directe des ruptures ou sauts peut être trouvée dans la théorie de la ruine des compagnies d'assurance. Cette théorie a été développée à partir des travaux réalisés par Lundberg [84] en 1903. Lundberg a proposé de modéliser les sinistres encourus par une compagnie d'assurance de manière directe par un processus à sauts, plus précisément un processus de type Poisson composé. L'intérêt de cette modélisation réside incontestablement dans le fait qu'elle est menée de manière *ad hoc*. Les sinistres sont l'élément discriminant pour le risque d'une compagnie d'assurance. Ils sont de taille finie et donc la meilleure façon de les représenter est bien par des sauts. La théorie de la ruine des compagnies d'assurance a connu un essor formidable au cours du vingtième siècle, avec l'apport notable de Cramer [35] en 1930. Elle est devenue de plus en plus complexe, prenant en compte de plus en plus d'éléments actuariels ou financiers, tel que la distribution de dividendes. Cependant, elle n'a jamais renié son caractère fondamental qui est de toujours modéliser les évènements de manière directe ou microscopique plutôt que de postuler des dynamiques séduisantes du point de vue mathématique mais dont l'emploi serait irréaliste.

La théorie financière a été construite de manière totalement différente de la théorie de la ruine des compagnies d'assurance. Bachelier [6], dans sa thèse d'état soumise en 1900, est parti d'une représentation des cours par un mouvement brownien. Cet objet était pressenti à l'époque comme d'importance potentielle dans de nombreux domaines des sciences. En 1905, Einstein l'a ainsi utilisé en physique statistique et depuis il est devenu l'un des modes de représentation les plus populaires de la physique. Le sens le plus couramment admis qui peut être associé au mouvement brownien est celui d'un bruit. Le mouvement brownien est ainsi attaché à la description d'évolutions aléatoires. Il est un objet «macroscopique», quoique l'on puisse

de manière mathématique le construire à partir de considérations «microscopiques», dans le sens où il modélise un comportement global aléatoire. C'est dans ce sens que Bachelier l'a employé pour représenter l'aléa subi par les cours d'actions. On a donc dès le départ deux approches heuristiques notablement différentes en assurance et en finance. En assurance, on s'est attaché à décrire les phénomènes instantanés, ruptures ou sauts. En finance, on a préféré une perception globale en terme d'évolutions certes aléatoires mais continues.

La représentation des cours d'action de manière directe par des mouvements browniens est imparfaite dans le sens où les cours seraient aussi souvent négatifs que positifs, ce que l'on n'observe bien sûr pas en pratique. Pour pallier cet inconvénient, Samuelson [114] a proposé en 1965 de modéliser les cours d'actions par des mouvements browniens géométriques, c'est-à-dire par des exponentielles de mouvement brownien. Ces dynamiques sont toujours positives et permettent une représentation d'ensemble des cours plus réaliste. Le mouvement brownien géométrique est devenu l'objet fondamental de la finance à partir de 1973 quand Black, Scholes [17] et Merton [95] l'ont employé pour l'évaluation des produits dérivés. Depuis l'obtention de la formule de Black et Scholes, le mouvement brownien est omniprésent dans les représentations des dynamiques, que ce soit de manière quasi-directe avec le mouvement brownien géométrique ou de manière indirecte avec l'emploi d'équations différentielles stochastiques. De nombreuses améliorations ont été apportées au modèle de Black et Scholes, telle que la prise en compte de dynamiques pour les taux d'intérêt ou pour la volatilité; cependant ce modèle est resté au cœur de la finance contemporaine car il fournit un cadre de référence. Aujourd'hui encore, quand on cherche à évaluer un produit optionnel complexe tel qu'une option parisienne, le réflexe est de commencer par se situer dans ce cadre. Un prix obtenu avec les hypothèses de Black et Scholes n'est pas ce qui se fait de plus raffiné, néanmoins il donne un ordre de grandeur de ce que doit être une valeur juste.

A l'origine du choix dans les années soixante du mouvement géométrique pour représenter les cours d'actions se trouve le souhait de continuer à employer des lois normales. En effet, si pour cette dynamique les distributions de cours ne sont plus gaussiennes, en revanche les rendements, eux, sont gaussiens. Ce caractère gaussien des rendements est alors paru très séduisant. Nous pouvons ici rappeler le point de vue de Poincaré selon lequel les mathématiciens pensent que la loi gaussienne est fondamentale car c'est une loi de la nature, tandis que les physiciens considèrent qu'elle est intéressante parce qu'elle provient des mathématiques... En dépit de ses nombreux emplois, la loi normale n'est qu'une représentation parmi d'autres. Pour Mandelbrot [88], cette loi n'était justement pas la plus adaptée pour représenter les rendements des cours d'actions.

Au début des années soixante, cet auteur, observant que les distributions des rendements d'action possèdent des queues assez épaisses, a proposé de rejeter l'approche gaussienne et d'employer d'une modélisation stable. Selon lui, les rendements d'actions sont bien représentés par des lois stables et possèdent des dynamiques de type mouvement α -stable. Les processus stables sont des processus à sauts et cela est un avantage en termes de réalisme par rapport au mouvement brownien géométrique continu. Deux critiques non négligeables ont été opposées à l'approche de Mandelbrot. Tout d'abord, aucune loi stable ne possède de variance. Or, on peut toujours de manière empirique associer une variance finie à une distribution de rendement. Par ailleurs les processus stables sont fractals : ils admettent le même comportement quelle que soit l'échelle envisagée. Autrement dit, un cours d'action serait décrit de la même manière à l'échelle de la minute ou de l'année. Or, si l'on conçoit que les cours sont la conséquence d'une gestion des acteurs de marchés, on conçoit aisément que cet aspect théorique n'est pas réaliste. En effet, la gestion d'un portefeuille d'actions ne se réalise pas de la même manière selon que l'horizon envisagé soit d'un mois ou d'une journée. Pour ces raisons, l'approche de Mandelbrot n'a pas connu de succès majeur en finance. On peut toutefois remarquer ici que les modélisations stable et gaussienne des rendements sont toutes deux porteuses d'une certaine vraisemblance. Chacune rend compte d'aspects différents mais importants concernant les cours. Cela est une illustration du fait qu'un modèle n'est jamais «juste» ou «faux». Un modèle est toujours plus ou moins réaliste, plus ou moins pertinent par rapport au problème abordé; il traite certains aspects en détail et en néglige d'autres par hypothèse. Dans tous les cas, ce qui est le plus important est d'en connaître les fondements et limitations.

Au cours des années soixante dix, des évolutions sensibles des représentations ont pu être pressenties en assurance et en finance. En assurance, Gerber [56] a en 1970 proposé de prendre en compte un bruit gaussien pour la modélisation des réserves. Par ailleurs, en finance, Merton [94] a en 1976 suggéré de modéliser l'arrivée de sauts en superposant un processus de Poisson composé aux dynamiques lognormales. Ces évolutions ont correspondu à un début de modification des paradigmes sous-jacents. Ainsi, en finance, il s'est agi de rendre compte des ruptures et de proposer une analyse plus fine, tandis qu'au contraire, en assurance, le but a été d'avoir une représentation d'ensemble plus réaliste.

Il a fallu attendre les années quatre vingt dix et le début des années deux mille pour que des études détaillées s'attachent à une réelle remise en cause des paradigmes financier et actuariel. Ces études ont proposé de modéliser les rendements et les réserves de manière directe par des processus à sauts du type processus de Lévy. L'avantage incontestable de cette approche est

qu'elle permet à la fois d'avoir une perception d'ensemble et une description fine des sauts impactant les dynamiques. La classe des processus de Lévy est celle qui étend de manière la plus naturelle les modèles historiques, en effet ces processus incluent les processus de Poisson composés et peuvent posséder une partie brownienne continue. Ils peuvent être stables ou non stables. Le plus souvent, ce sont des processus non stables qui ont été employés, l'hypothèse de stabilité n'étant en général pas utile et présentant les inconvénients cités plus haut.

Les auteurs ayant le plus contribué à l'emploi des processus de Lévy en finance peuvent être répartis en deux écoles. La première école, «nordique», s'est constituée autour d'Ole Barndorff-Nielsen et de Ernst Eberlein. Ces auteurs ont utilisé en finance des dynamiques auparavant employées par Barndorff-Nielsen pour modéliser les vents de sable. La seconde école, dont les principaux membres sont Peter Carr, Hélyette Geman, Dilip Madan et Marc Yor, s'est attachée à construire une classe de processus de Lévy fondée sur l'emploi de processus gamma, et à montrer que cette classe apporte une meilleure modélisation que le cadre de Black et Scholes. Un des enseignements les plus fructueux des conclusions de ces derniers auteurs est qu'il n'est en fait pas nécessaire de prendre en compte, même partiellement, une diffusion lors de la modélisation d'un cours d'action. Ainsi, pour peu que les processus envisagés présentent suffisamment de petits sauts, les petites fluctuations des cours peuvent être bien rendues, et il n'est plus utile de les représenter par une diffusion.

En théorie de la ruine, deux types d'extensions ont vu le jour ces dernières années. Certains auteurs, comme Dufresne et Gerber [42] ou Furrer [51] ont proposé de conserver l'hypothèse d'une survenue de sinistres de type Poisson composé, mais d'ajouter des perturbations, brownienne ou stable, pour tenir compte de l'incertitude sur les sinistres et les primes. Dans une seconde approche, il s'est agit, comme en finance, d'employer de manière *ad hoc* des processus de Lévy assez généraux. On peut citer le travail de Dufresne, Gerber et Shiu [43] où le processus des réserves est modélisé par un processus gamma ainsi que le papier de recherche de Kluppelberg, Kyprianou et Maller [70] apparu en 2003. Ce papier propose de modéliser le processus des réserves par un processus de Lévy très général à une restriction près : ce processus doit dériver vers l'infini quand l'horizon de gestion devient infini.

Cette hypothèse du modèle de Kluppelberg, Kyprianou et Maller est en fait une hypothèse commune à la théorie de la ruine depuis 1903. Cette théorie suppose que le processus des réserves admet un "bon" comportement à l'infini : d'une certaine manière, si la ruine n'a pas lieu au bout de quelques années, elle devient extrêmement peu probable ensuite. Cet aspect théorique, qui nous semble assez discutable, n'a jamais été remis en question jusqu'à

présent. Nous reviendrons sur ce point dans le corps de cette thèse.

Les questions soulevées et résolues par la théorie de la ruine des compagnies d'assurance sont des questions qui se posent également en finance. En effet, la théorie de la ruine trouve son parallèle dans la théorie du défaut structurel qui vise à évaluer les obligations en tenant en compte du risque de faillite de l'entreprise. La théorie du défaut est relativement récente en finance. Les premiers développements remontent aux années soixante dix et aux travaux de Merton [96] et de Black et Cox [16]. Selon ces derniers auteurs, la faillite de l'entreprise a lieu quand la valeur des actifs atteint un seuil donné, par exemple le montant facial de la dette. Les obligations sont alors évaluées en prenant en compte ce risque de faillite; ce risque se traduit par l'existence de marges de défaut par rapport aux obligations non risquées. On voit ici clairement que les théories de la ruine et du défaut procèdent de la même manière en s'attachant à décrire le franchissement ou l'atteinte par une dynamique d'un seuil donné. Dans le premier cas la dynamique est celle, discontinue, des réserves d'une compagnie d'assurance; dans le second cas, elle est celle, continue, des actifs d'une compagnie quelconque.

La théorie du défaut a connu deux types de prolongements. Le premier de ces prolongements est la théorie réduite du défaut où les arrivées de sauts déclenchant la faillite sont modélisées par des intensités. Ces modèles qui visent en premier lieu à évaluer les produits dérivés de crédit ont une approche essentiellement exogène. Ils ne reposent pas sur une étude de la structure de l'entreprise et ne cherchent pas à expliciter les raisons économiques qui ont conduit à la faillite. Le second type de prolongement de la théorie du défaut est la théorie structurelle du défaut. Cette théorie vise à inscrire l'évaluation des obligations et l'estimation du risque de faillite dans le cadre d'une appréhension structurelle endogène de la firme.

La question de l'existence et de la détermination d'une structure financière optimale de l'entreprise est au cœur des problématiques de la finance d'entreprise depuis une cinquantaine d'années. Modigliani et Miller [98] ont d'abord postulé, en 1958, qu'il n'existait pas de structure financière optimale de l'entreprise, mais dans un cadre restreint où ne sont pas pris en compte coûts de faillite et économies d'impôts. Cependant, on ne peut raisonnablement faire de telles hypothèses, sauf à considérer des entreprises tellement idéales qu'elles ne puissent exister en réalité. Dès lors que l'on fait intervenir les économies d'impôts et les coûts de faillite, il existe une structure optimale de financement de l'entreprise. Il existe d'autres façons de justifier l'existence d'une structure financière optimale que la prise en compte des éléments précités. En particulier la théorie de l'agence permet de préciser le calcul de la valeur optimale de la firme par la prise en compte des coûts d'agence. Ces coûts correspondent à l'existence de contrats explicites

ou implicites liant les divers agents concernés par la gestion de l'entreprise : dirigeants, actionnaires, obligataires. Un dirigeant ne mènera pas toujours une gestion optimale du point de vue des actionnaires et obligataires. Aux diverses mesures non-optimales qu'il peut être amené à prendre sont donc associés des coûts d'agence des fonds propres et de la dette.

Ce n'est que dans les années quatre vingt dix que des modèles fondés sur la recherche d'une structure financière optimale de l'entreprise et visant à calculer la valeur des obligations ont vu le jour. Leland [78] dans son article de 1994 tient compte des coûts de faillite et des économies d'impôt pour obtenir les valeurs optimales de l'entreprise et de sa dette et calculer la valeur des obligations risquées. Dans le modèle qu'il propose, les obligations sont de maturité infinie; cette hypothèse a été levée dans un document de recherche qu'il a écrit la même année et dans le célèbre article de Leland et Toft [81] paru en 1996. L'approche de Leland est très intéressante dans le sens où elle part des fondamentaux économiques de l'entreprise pour proposer une évaluation de la dette. Cependant, un reproche lui est souvent adressé : elle ne permet pas, à l'instar d'autres modèles gaussiens, d'expliquer l'existence de marges de crédit importantes aux courtes maturités. Hilberink et Rogers [61] sont partis du document de recherche de 1994 de Leland [79] pour proposer un modèle rendant compte de ce fait empirique et conservant un caractère structurel. Ces auteurs postulent que le processus des rendements des actifs est bien représenté par un processus de Lévy ne sautant que vers le bas. Cette hypothèse peut sembler peu réaliste : si l'on admet que la valeur des actifs subit des sauts vers le bas, alors elle devrait également subir des sauts vers le haut.

A l'inverse de la théorie de l'agence qui établit une distinction entre les différents agents concernés par la gestion de l'entreprise, la théorie structurelle du défaut considère de manière implicite que les dirigeants ne visent qu'à maximiser la valeur des fonds propres et sont donc des mandataires qui réalisent pleinement les souhaits des actionnaires. Un modèle structurel de défaut repose essentiellement sur une spécification du processus des actifs. Or, les actionnaires n'ont accès qu'à une information limitée concernant ce processus. Il est généralement admis que les dirigeants sont en revanche bien informés sur la nature des actifs. Il semble donc raisonnable, dans une modélisation fondée sur la connaissance des actifs, de distinguer entre les dirigeants et les actionnaires. Par ailleurs, au-delà de la différence d'information séparant ces acteurs, une claire distinction s'impose entre les actifs et la façon dont on les représente. En effet l'évolution des actifs n'est pas un processus stochastique, elle est *représentée* par un processus stochastique. Cette remarque est certes de bon sens, toutefois la littérature insiste peu sur la distinction entre l'objet étudié et la façon dont on se le représente. Nous insistons sur ce point pour la raison suivante : les acteurs ne conduisent pas leur

gestion en fonction des dynamiques mais en fonction de la perception qu'ils ont des dynamiques. Vouloir comprendre le fonctionnement d'un marché ou la politique d'un dirigeant c'est donc d'abord étudier les comportements, perceptions et réactions des agents face à la survenue d'évènements informatifs.

Les objectifs de ce travail sont d'abord de proposer une synthèse sur la prise en compte des ruptures, ou sauts, en finance et assurance; de montrer que les théories du défaut et de la ruine ne sont qu'une; d'initier une réflexion sur la prise en compte des perceptions des agents économiques. Cette thèse comporte deux parties développant les points précités respectivement en finance de marché et en finance d'entreprise.

En première partie, nous nous intéressons d'abord à la modélisation des rendements des actions par des processus de Lévy. Nous proposons notamment un nouveau modèle où les processus de Lévy sous-jacents sont construits à partir des perceptions des agents de marché. Remarquer que ces éléments peuvent également être d'intérêt pour la modélisation d'autres dynamiques telles que celles des taux d'intérêt ou des taux de change. Nous exposons alors comment peuvent être évalués les produits dérivés portant sur des actions ainsi modélisées.

La seconde partie est consacrée à l'étude des théories du défaut et de la ruine. Nous commençons par envisager le défaut sous l'angle d'un nouveau modèle structurel où dirigeants et actionnaires ont une perception distincte des actifs. Nous modélisons notamment le processus des actifs par un processus de Lévy stable; une telle approche théorique permet d'obtenir des structures par terme des marges de crédit analogues à celles observées de manière empirique. Cette approche est replacée dans le contexte de la théorie de l'agence. Nous passons ensuite à l'étude de la théorie de la ruine et proposons une extension de cette théorie par la modélisation du processus des réserves de nouveau par un processus de Lévy stable. Cette approche permet de réexaminer sensiblement les hypothèses usuelles de la théorie de la ruine.

Première partie

Impact sur la Valeur des
Actions et de leurs Dérivés

Cette partie est consacrée à l'étude de l'impact des événements informatifs en finance de marché. Cette étude est menée en deux temps : elle porte d'abord sur les cours d'actions, puis sur l'évaluation des produits dérivés.

Dans un premier chapitre, nous détaillons plusieurs représentations des rendements des cours d'actions. Après un rappel des étapes importantes de la modélisation financière qu'ont été les travaux de Bachelier, de Samuelson et de Black et Scholes, nous passons à l'étude des modèles où les cours d'actions peuvent présenter des ruptures, des sauts. Nous considérons une classe particulière de processus à sauts dont le réalisme et l'emploi relativement aisé sont des atouts substantiels : la classe des processus de Lévy. Nous passons en revue les modèles récents de modélisation des cours qui utilisent cette forme de représentation et distinguons entre deux approches fondées respectivement sur une spécification des distributions de rendement et une spécification des taux d'arrivée de sauts. Partant de la seconde approche, nous proposons un nouveau modèle de représentation des cours où les processus de rendement sont construits directement en fonction des perceptions des divers agents de marché.

Dans un second chapitre, nous nous intéressons à l'évaluation des produits dérivés portant sur des sous-jacents modélisés par le biais de processus de Lévy. De nouveau, nous partons de l'approche standard lognormale pour expliquer de manière didactique comment procéder dans un cadre plus large où les sauts sont pris en compte. Nous détaillons notamment les changements de mesure qui permettent de fournir une solution, fermée ou semi-fermée, à la plupart des problèmes d'évaluation rencontrés en finance. En particulier, les changements de mesure de type transformée d'Esscher apparaissent bien adaptés à l'évaluation des produits dérivés quand les rendements des actions sont représentés par des processus de Lévy. Nous concluons ce chapitre par une présentation du récent modèle de Carr et Wu [27] qui réintroduit de manière élégante l'approche stable en finance de marché, ainsi que par une discussion du "temps financier" qui est une manière de représenter l'agitation subie par les marchés et de rendre compte d'une manière alternative de la volatilité dite stochastique.

Chapitre 1

Modélisation des Cours d'Actions

1.1 Introduction

Ce chapitre traite de l'emploi des processus de Lévy dans le cadre de la finance. Avant de détailler les objectifs poursuivis, nous allons d'abord rappeler quelques faits historiques concernant le mouvement brownien, qui est à la fois un outil central et une représentation courante en finance comme dans de nombreux autres domaines d'étude. Le nom brownien provient de Richard Brown, un botaniste qui a étudié le mouvement des pollens dans des liquides au début du dix-neuvième siècle. Mais ce n'est que plus tard, dans la première moitié du vingtième siècle, que des physiciens tels qu'Einstein, Perrin, Smoluchovsky, et des mathématiciens tels que Lévy ou Wiener ont pu établir une description détaillée du mouvement brownien.

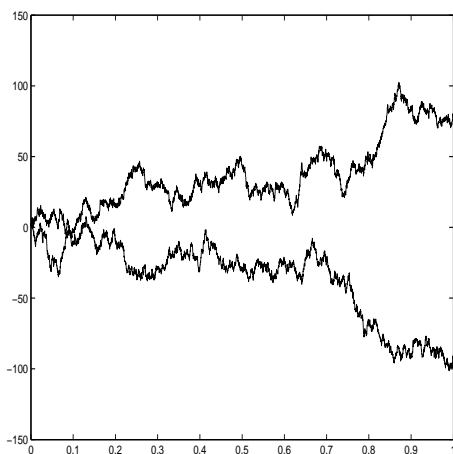


FIG. 1.1 – *Trajectoires de mouvements browniens arithmétiques*

Parmi les propriétés du mouvement brownien sont souvent citées la stationnarité et l'indépendance de ses incréments. Ce sont de fait ces propriétés qui définissent un processus de Lévy. Ainsi un mouvement brownien est-il un cas particulier de processus de Lévy. Le mouvement brownien arithmétique (c'est-à-dire général avec une dérive) a vu sa première utilisation en finance en 1900, lorsque Louis Bachelier [6] l'a utilisé pour modéliser les cours des actions. Des trajectoires de mouvements browniens ont été tracées en figure (1.1). Il apparaît de manière immédiate que ces chemins visitent les valeurs négatives aussi souvent qu'ils visitent les zones positives : une modélisation directe des cours des actions par des mouvements browniens reviendrait à supposer l'existence récurrente de prix négatifs pour les actifs en question. Ce type de modélisation n'est certes pas réaliste. Si l'on ne peut procéder ainsi, rien n'empêche en revanche d'utiliser le mouvement brownien de manière *indirecte* pour la modélisation des cours d'actifs.

En 1965, Samuelson, prolongeant les idées d'Osborne, a suggéré d'utiliser le mouvement brownien géométrique (représenté en figure (1.2)) à la place du mouvement brownien arithmétique pour modéliser les cours des actions. Cela a été l'une des étapes majeures de la finance de marché : le mouvement brownien géométrique fournit une représentation raisonnable du cours des actions, il ne visite jamais les valeurs négatives; et surtout, il est le fondement axiomatique le plus important du modèle de Black et Scholes. Ce modèle, quoique n'offrant pas un cadre adéquat à toutes les situations, reste néanmoins une référence importante : l'on construit souvent un modèle particulier en fonction des améliorations qu'il apporte au modèle de Black et Scholes. Ainsi face à l'hypothèse de mouvement brownien géométrique pour le cours du sous-jacent, l'on peut décider de supposer que la volatilité est elle-même stochastique : cette extension au-delà du modèle de Black et Scholes va alors permettre de prendre en compte les périodes d'activité faible ou élevée que l'on observe couramment sur les marchés...

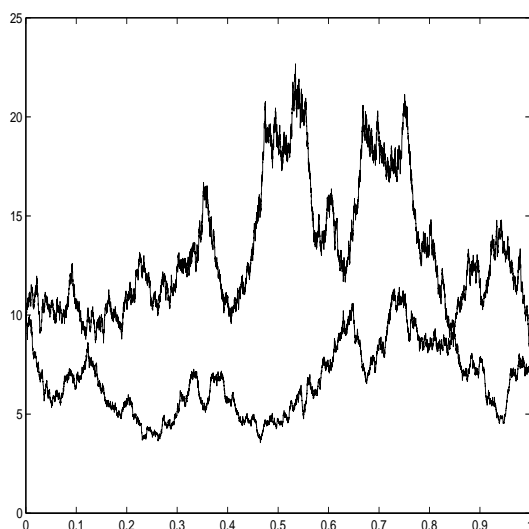


FIG. 1.2 – *Trajectoires de mouvements browniens géométriques*

L'aspect le plus remarquable du mouvement brownien géométrique est qu'il ne présente jamais de sauts : ce processus, bien que chutant ou montant parfois rapidement sur de courtes plages de temps, est toujours continu. L'on peut considérer cela comme une approximation par rapport à une réalité des marchés où les cours passent instantanément d'une valeur à une autre, parfois fort différente. Ainsi, la modélisation des actions par des mouvements browniens géométriques ne permet-elle pas la prise en compte de sauts dans leurs dynamiques.

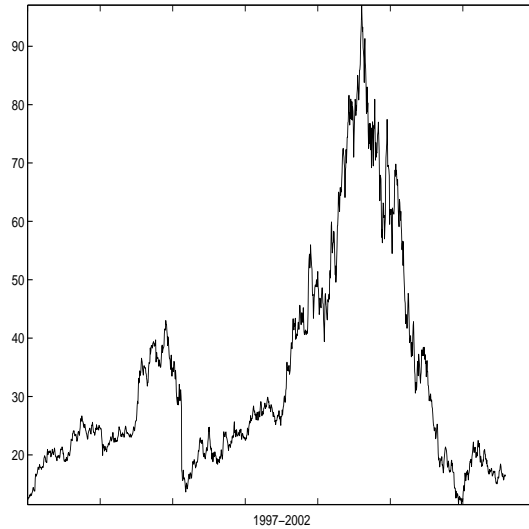


FIG. 1.3 – *Dynamique de l'action Alcatel*

Pour modéliser les dynamiques des cours de manière plus précise, il convient donc de prendre en compte les sauts lors de la modélisation. La question qui se pose alors est la suivante : "quelle dynamique choisir comme substitut aux mouvements browniens arithmétique ou géométrique?". Cette question est à ce stade très générale et mérite un certain nombre de développements et commentaires.

Tout d'abord, remarquons qu'il y a de nombreuses façons de construire des processus à sauts. Par ailleurs, il y a d'autres aspects stylisés des dynamiques qui méritent d'être modélisés - comme la dépendance, les changements d'activité... Enfin, l'on ne peut envisager de modéliser indistinctement un taux d'intérêt Libor, le cours d'une action, le cours d'une obligation... Les représentations choisies doivent s'adapter aux problèmes traités.

On voit donc bien à quelle problématique l'on est confronté : il est impossible de construire un processus stochastique qui puisse être assez générique pour modéliser n'importe quelle dynamique de produit financier tout en étant assez spécifique pour modéliser tel ou tel aspect particulier - sauf à fabriquer un objet tellement complexe qu'il en deviendrait inopérant. Il s'agit donc plutôt d'obtenir des processus ni trop génériques, ni trop spécifiques par rapport aux contraintes en présence. Ces processus doivent être assez complexes pour bien décrire une réalité financière, mais pas trop afin de pouvoir être utilisés de manière discriminante par rapport aux différents sous-domaines des sciences de gestion. Si l'on considère les mouvements browniens géomé-

triques, l'on se rend compte que ce sont en fait des blocs de base de la théorie des processus stochastiques et qu'ils ne peuvent prendre en compte qu'un nombre restreint d'effets - de là le nombre important d'articles scientifiques qui s'attachent à apporter des corrections au modèle de Black et Scholes pour lui apporter la précision de description qui lui manque à cause de son hypothèse fondamentale de lognormalité du sous-jacent. Nous pensons que les processus de Lévy, c'est-à-dire la famille de processus dont les accroissements sont indépendants et stationnaires et qui comprend en particulier le mouvement brownien, ainsi que leurs exponentielles, sont particulièrement adaptés à la problématique en question. Ainsi, ces processus présentent des sauts, portent des distributions marginales sous-jacentes aux formes variées et sont d'usage assez aisé, lors de l'évaluation de prix d'options par exemple.

Ici une précision s'impose. Il n'y a pas aujourd'hui une seule banque ou un seul laboratoire de finance qui n'utilise le mouvement brownien en matière de modélisation quantitative. Pour autant, il n'y a pas non plus une seule de ces banques ou un seul de ces laboratoires qui se contenterait de représenter la dynamique d'une action ou d'un taux Libor par un simple mouvement brownien standard. De la même manière, nous n'affirmons aucunement que tout actif est représentable de manière directe par un processus de Lévy. Nous affirmons en revanche que ces processus peuvent être utilisés en tant que sur-classe, que substitut au mouvement brownien et ceci dans le cadre d'aménagements adéquats et nécessaires (tels que le passage à l'exponentielle...).

Dans un premier temps, nous présenterons les principales caractéristiques des processus de Lévy et nous montrerons de quelle manière ils peuvent être utilisés pour représenter les cours des actions. Suite à cette exposition d'ensemble, nous nous intéresserons au cas particulier des processus de Lévy stables qui ont été une représentation suggérée dès le début des années soixante. Nous passerons alors à l'étude des modèles apparentés aux lois "générales hyperboliques" et qui ont été développés autour d'Ole Barndorff-Nielsen et de Ernst Eberlein au milieu des années quatre-vingt-dix. Ensuite, nous traiterons le cas des modèles de type variance gamma et CGMY qui partent de processus gamma *étendus*. Enfin, une dernière section portera sur le choix optimal de processus de Lévy pour la modélisation des cours des actions et introduira à cet effet quelques nouvelles paramétrisations. En annexe, pourront être trouvés quelques rappels de nature plus technique sur les processus de Lévy eux-mêmes.

1.2 Résultats Généraux

Nous menons dans un premier temps une présentation globale des processus de Lévy et de leurs principales propriétés : les éléments fondamentaux donnés ici seront utilisés non seulement dans ce chapitre mais dans tout le corps de la thèse. Pour plus de détails techniques, et concernant notamment l'activité et la variation, nous invitons le lecteur à se référer aux annexes A et B. Dans un second temps, nous expliquons de quelle manière les processus de Lévy peuvent être utilisés pour la modélisation des dynamiques d'actions.

1.2.1 Présentation des Processus de Lévy

Les processus de Lévy forment une *classe* de processus stochastiques vérifiant la propriété définissante suivante : leurs accroissements sont indépendants et stationnaires. On les appelle ainsi souvent des "PAIS" - processus à accroissements indépendants et stationnaires. Ils sont continus en probabilité, et l'on peut toujours en choisir une version dont les trajectoires sont "càdlàg" c'est-à-dire continues à droite et ayant une limite à gauche en chaque point. La classe des processus de Lévy est une sous-classe des semimartingales qui sont les processus stochastiques par rapport auxquels on peut correctement construire des intégrales stochastiques. Ce sont également des processus de Markov. Le mouvement brownien - objet standard de la finance - et les processus de Poisson et Poisson composés - objets standards de l'assurance - en sont des exemples typiques et bien connus.

Les processus de Lévy peuvent être caractérisés par la distribution d'une seule variable aléatoire du processus. La connaissance d'une loi marginale, telle que celle de X_1 par exemple, suffit à déterminer toutes les distributions finies (c'est-à-dire les n-uplets $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}\}$) et donc le processus. Dans le cas particulier du mouvement brownien, la loi de X_1 est la loi normale. Dans le cas général, les distributions sous-jacentes aux processus de Lévy sont des distributions infiniment divisibles (voir l'annexe A pour plus de détails). Ainsi, si l'on veut construire un processus de Lévy, l'on peut partir d'une distribution infiniment divisible particulière - bien adaptée à la grandeur que l'on souhaite modéliser de manière probabiliste. Cependant, on ne dispose pas en général d'expressions explicites pour ces distributions. Se pose donc alors la question de pouvoir caractériser de manière simple une distribution infiniment divisible et le processus de Lévy qui lui est afférent. Cette question a été résolue en terme de fonction caractéristique, c'est-à-dire de transformée de Fourier. La fonction caractéristique de toute distribution infiniment divisible peut s'exprimer de manière explicite, simple et concise. L'on peut donc réaliser son choix de distribution et de processus par une spécification de la fonction caractéristique.

L'expression explicite de cette fonction caractéristique s'appelle la formule de Lévy-Khintchine. Elle a été obtenue et prouvée de manière probabiliste par Lévy au début des années trente. Khintchine a quant à lui fourni une démonstration analytique plus simple. Rappelons l'expression de cette formule :

$$E(e^{iuX_t}) = e^{ibtu - \frac{1}{2}ctu^2 - t \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux\mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}}) \nu(dx)} \quad (1.1)$$

où :

$$\begin{cases} b \in \mathbb{R} \\ c \in \mathbb{R}^+ \\ \int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1) \nu(dx) < +\infty \end{cases}$$

L'on voit que cette formule dépend de trois paramètres (au sens large) : b , c et ν . b correspond à une simple dérive linéaire déterministe. c représente quant à lui la partie diffusive - brownienne - du processus. Noter que la partie continue d'un processus de Lévy ne peut donc être qu'un mouvement brownien arithmétique. Finalement, ν est une mesure, appelée couramment mesure de Lévy, qui décrit l'arrivée des sauts. Cette mesure est centrale pour tout processus de Lévy : l'originalité d'un tel processus réside dans ses sauts. Nous supposons en général que la mesure de Lévy possède une densité et nous parlerons alors de densité de Lévy. Remarquer finalement que b n'est pas toujours unique (se reporter à la classification de Satō en annexe B pour plus de détails). Il le sera néanmoins pour les processus utiles à la finance que nous étudierons par la suite.

Concluons cette sous partie en remarquant qu'il y a deux manières fondamentales de spécifier un processus de Lévy. L'on peut procéder de manière directe en choisissant une forme particulière de distribution infiniment divisible. L'on peut également choisir une mesure de Lévy ν particulière et avoir recours à la formule de Lévy-Khintchine (1.1). L'on établira ainsi une distinction entre une approche par distribution et une approche dite de Lévy-Khintchine pour le second cas.

1.2.2 Représentation des Cours

Venons-en maintenant à la modélisation des cours proprement dite. De quelle manière peut-on utiliser les processus de Lévy pour modéliser les cours d'actions? Avant de répondre à cette question, rappelons de quelle manière s'expriment les dynamiques des actions dans le contexte financier standard, c'est-à-dire dans le cadre de Black et Scholes.

Dans une première sous-approche, les prix sont modélisés comme des solutions d'équations différentielles stochastiques. Ainsi, dans le cadre du modèle de Black et Scholes, un prix d'action correspond à la solution de l'équation suivante :

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dz_t)$$

Dans une seconde sous-approche, les prix sont donnés de manière directe et explicite par une équation du type :

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma z_t}$$

Ces deux façons de procéder sont équivalentes. De manière standard, on peut passer de la première à la seconde en se servant du lemme d'Itô.

On procède par analogie pour construire un modèle utilisant des processus de Lévy. Les deux sous-approches sont notamment envisageables. On peut ainsi partir d'une équation différentielle stochastique du type :

$$dS_t = S_{t-} (\mu dt + \sigma d\mathcal{L}_t)$$

où \mathcal{L} est un processus de Lévy et S le cours de l'action que l'on cherche à modéliser.

Cette approche a été développée par Chan [28]. La résolution de cette équation différentielle stochastique fournit des exponentielles de Doléans-Dade (ou exponentielles stochastiques).

Dans la plupart des publications, c'est la seconde sous-approche qui a été choisie comme point de départ. Un cours d'action y est représenté de la manière suivante :

$$S_t = S_0 e^{\mathcal{L}_t}$$

où \mathcal{L} est un processus de Lévy quelconque - comportant potentiellement une dérive - et S est le cours que l'on modélise.

Nous nous fonderons sur cette approche dans tout ce chapitre. De même que l'on parle dans le cadre standard de prix log-normaux, l'on pourra parler de prix du type "log-Lévy", puisque la simple application d'un logarithme au cours de l'action redonne un processus de Lévy.

Remarquons finalement que quand l'on souhaite sortir la dérive du processus de Lévy pour la faire apparaître de manière explicite, alors on a recours à une modélisation du type :

$$S_t = S_0 e^{\mu t} \frac{e^{\mathcal{L}_t}}{E(e^{\mathcal{L}_t})}$$

où μ est le coefficient de dérive.

1.3 L'Approche Stable

Nous exposons ici l'approche par processus de Lévy stables qui remonte aux travaux fondateurs réalisés par Benoît Mandelbrot dans les années soixante. C'est à partir de ces travaux que l'idée d'utiliser des processus à sauts en substitut au mouvement brownien a émergé. Cette partie sera surtout le lieu d'une exposition et d'une critique des nombreux concepts que Mandelbrot a proposés; à l'inverse cette partie ne sera pas un exposé de méthodes. Les idées et travaux de Mandelbrot ont été largement mal perçus par le monde financier. Certaines de ses idées ont été d'actualité ou sont en train de le redevenir de manière non explicite du fait de nombreux auteurs; d'autres semblent avoir été invalidées. Nous tâcherons de faire la part des choses et de les présenter de la manière la plus objective possible. Le lecteur intéressé par une présentation générale des lois et processus stables peut consulter l'annexe B.

1.3.1 Travaux et Idées de Benoît Mandelbrot

Les travaux de Benoît Mandelbrot en finance ont été particulièrement nombreux dans les années soixante. Ils s'inscrivaient dans la problématique de l'époque qui était de trouver un processus stochastique autre que le simple mouvement brownien arithmétique de Bachelier pour modéliser les cours d'actions. Osborne puis Samuelson avaient alors proposé le mouvement brownien géométrique, lequel a connu un succès spectaculaire en finance pendant une trentaine d'années à travers le modèle de Black et Scholes. Mandelbrot quant à lui avait proposé de modéliser les rendements financiers par des processus de Lévy stables. Pour avoir un aperçu des travaux de Mandelbrot, l'on peut consulter son récent livre [89] ou son modèle de 1963 publié dans le *Journal of Business* [88]. Mandelbrot au cours de ces travaux a introduit de nombreux concepts dont la portée dépasse le cadre de ses propres modèles. Avant d'aborder le paradigme stable, et la controverse qu'il a depuis quarante ans suscitée, nous exposerons ce qui nous semble des idées importantes apportées par Mandelbrot. Commençons par les définitions des effets Noé et Joseph données dans [89] :

"Rappelons d'abord l'essentiel de l'effet Noé, ... : le prix d'une action ou d'une obligation, ainsi qu'un taux d'intérêt et de change peuvent, si les cir-

constances l'exigent, varier instantanément."

et :

"Continuons par l'essentiel de l'effet Joseph: les grandes variations de prix ne s'étaient pas dans le temps de façon plus ou moins régulière, mais se concentrent dans de courtes sous-périodes, et les données ont un comportement non périodique mais clairement cyclique, y compris des cycles très lents."

Comme leur nom l'indique, ces effets correspondent à des paraboles de la bible; Noé pour une inondation soudaine, Joseph pour des périodes de vaches maigres suivies de périodes de vaches grasses. En termes plus financiers, l'effet Noé décrit l'arrivée de sauts dans les dynamiques des cours d'actions. L'effet Joseph, pour sa part, décrit les cycles qui affectent la valeur d'un cours et sa variabilité.

L'effet Noé est ainsi au cœur de nombreux travaux financiers contemporains et de cette thèse, où nous tentons d'étudier l'impact des sauts sur la valeur en finance et en assurance.

L'effet Joseph, quand il est relatif à la variabilité cyclique des cours d'actions, est de son côté sous-jacent aux nombreux modèles dits à "volatilité stochastique" (voir par exemple le modèle d'Heston [60]). Nous reviendrons sur cet aspect dans le cours de cette thèse bien que l'effet Joseph, contrairement à l'effet Noé, ne soit pas au cœur de cette étude.

Tels sont donc deux effets empiriques importants qui ont motivé de nombreuses recherches et des centaines d'articles en finance - mais qui ne sont pourtant cités que de manière extrêmement rare dans la littérature. Venons-en maintenant aux concepts qui sont plus particuliers aux modèles développés par Mandelbrot lui-même.

Des études empiriques sur les rendements menées à la fin des années cinquante et au début des années soixante, il est ressorti que les distributions des cours d'actions présentent des queues plus épaisses que les queues de la distribution normale. En d'autres termes, la représentation gaussienne ne permet pas de prendre en compte des quantités importantes de valeurs extrêmes. Alors que de nombreux auteurs, conscients de la présence de ces queues épaisses, suggéraient de les négliger et de considérer les valeurs empiriques extrêmes comme "aberrantes" et sans contenu informatif, Benoît Mandelbrot a poursuivi dans la direction d'une modélisation de ces queues de distributions épaisses. S'inspirant du modèle parétien qui rend compte des distributions des salaires, il a suggéré qu'aux rendements boursiers devaient

également être associées des queues de type Pareto. Il a donc postulé un comportement asymptotique du type fonction puissance pour les distributions. X représentant un rendement, cela revient à dire que :

$$P(X > x) \sim Cx^{-\alpha}$$

Pour modéliser ce hasard qu'il a appelé "sauvage", Mandelbrot a représenté les dynamiques de rendements par la sous-classe *stable* des processus de Lévy. En particulier, la stabilité quand elle s'applique à une distribution correspond à la définition mathématique suivante :

$$AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} CX + D$$

c'est-à-dire qu'en loi, une combinaison linéaire de variables aléatoires stables est encore une variable aléatoire stable de même distribution à un changement d'échelle et une translation près. Cette définition peut être étendue à des combinaisons d'un plus grand nombre d'éléments - voir l'annexe B pour une présentation détaillée. Noter en particulier que les distributions stables possèdent des queues asymptotiquement de type Pareto.

Telle est donc l'hypothèse formulée par Mandelbrot pour la représentation des rendements des cours d'action. Cette hypothèse a suscité une vive controverse et a été la cause du rejet des travaux de Mandelbrot par les milieux financiers. De fait, il est loin d'apparaître que les processus de Lévy stables sont les meilleurs candidats pour la représentation des rendements. Le premier point délicat est le syndrome de la variance infinie : la plupart des moments des distributions stables sont infinis, hormis la seule espérance. Vouloir représenter une donnée à variance empirique nécessairement finie (quoique peut-être grande) par un objet théorique à variance infini est déjà discutable.

Un autre point semble nettement plus problématique bien qu'il soit moins relevé dans la littérature : l'invariance d'échelle associée à cette approche. En effet, la stabilité des processus pris en considération apporte un caractère fractal au modèle. De manière plus explicite, cela présuppose que les comportements aux différentes échelles de temps sont les mêmes. Or, il paraît tout à fait discutable que les dynamiques réelles possèdent cet aspect fractal et de plus, cela reviendrait à dire que le trading sur une échelle d'une minute, une semaine, une année... se fait selon des mécanismes sinon identiques, du moins analogues. On peut, de même que dans de nombreux domaines de la physique, douter du fait qu'à différentes échelles de grandeur correspondent toujours le même type de mécanisme sous-jacent et de représentation mathématique. De fait, les tests empiriques ne semblent pas confirmer la présence d'un caractère fractal sur toute la gamme des échelles de temps.

De ce qui vient d'être dit sur les aspects fractal et de variance infinie, on ne peut aboutir à un rejet total du modèle fractal de Mandelbrot. D'une part, ce modèle, présente de nombreux autres aspects intéressants tels la prise en compte des sauts, le faible nombre de paramètres faciles à estimer... et d'autre part, les aspects négatifs peuvent être tempérés : il est par exemple possible d'envisager un caractère localement fractal des dynamiques financières.

La modélisation des rendements des actifs par des processus de Lévy stables a donné lieu à une ample littérature. Nous renvoyons à la thèse de Belkacem [10] et au livre de Lévy-Véhel et Walter [85] pour plus de renseignements sur le sujet.

1.3.2 Le modèle de Carr et Wu

Carr et Wu [27] ont récemment proposé un modèle dans lequel les rendements des actions sont modélisés par des processus de Lévy stables spectralement négatifs (c'est-à-dire à sauts uniquement négatifs, voir l'annexe A) mais où les prix de ces actions conservent des moments de tout ordre. Il s'agit d'une avancée intéressante par rapport aux précédents modèles fondés sur des représentations des rendements par des processus de Lévy stables symétriques et pour lesquels l'existence des moments des actions n'étaient pas garantis.

Nous présentons l'argument de Carr et Wu dans cette partie et nous renvoyons au chapitre deux pour une application à l'évaluation des produits optionnels.

Carr et Wu postulent les dynamiques de cours suivantes :

$$S_T = S_0 e^{rT + \mu T + \sigma L_T^{\alpha, -1}}$$

où r est le taux d'intérêt sans risque, μ un paramètre de convexité, autrement dit un paramètre permettant de rendre le cours martingale, et σ un paramètre d'échelle caractérisant les fluctuations du cours. $L_T^{\alpha, -1}$ est une variable aléatoire stable centrée réduite de coefficient de queue $\alpha \in [1, 2]$ et de coefficient d'asymétrie $\beta = -1$.

Calculons d'abord μ , on doit avoir :

$$E(S_T) = S_0 e^{rT}$$

Soit :

$$E(e^{\sigma L_T^{\alpha, -1}}) = e^{-\mu T}$$

On utilise un argument de symétrie classique (voir Samorodnitsky et Taqqu [113]) pour mettre le terme de gauche sous la forme d'une transformée de Laplace bilatérale, ou fonction génératrice des moments :

$$E(e^{\sigma L_T^{\alpha,-1}}) = E(e^{-\sigma L_T^{\alpha,1}})$$

Or on sait que la transformée de Laplace bilatérale pour L n'est définie que pour $\beta = 1$ comme :

$$E(e^{-\sigma L_T^{\alpha,1}}) = e^{-T \frac{\sigma^\alpha}{\cos(\frac{\pi\alpha}{2})}}$$

d'où l'on déduit :

$$\mu = \frac{\sigma^\alpha}{\cos(\frac{\pi\alpha}{2})}$$

De la connaissance de μ et de l'argument sur la transformée de Laplace bilatérale, on peut obtenir l'expression des moments de tout ordre :

$$E(S_T^n) = S_0^n e^{nrT + T(n-n^\alpha) \frac{\sigma^\alpha}{\cos(\frac{\pi\alpha}{2})}} < +\infty$$

Ainsi, dans l'unique cas où les rendements sont modélisés par des processus de Lévy stables complètement asymétriques à gauche (pour $\alpha \in [1,2]$, noter que L admet un support non borné), on peut obtenir une modélisation du cours où les moments de tout ordre existent. Certes, les rendements continuent à ne pas posséder de variance, et ils ne sont peut-être pas modélisés de la façon la plus réaliste possible, mais les cours admettent eux une représentation plus vraisemblable que dans le cadre postulé par Mandelbrot et repris par d'autres auteurs.

1.4 Les Approches de Type Général Hyperbolique

Après avoir exposé le cas de la modélisation par processus de Lévy stables, nous passons à l'étude des modèles qui ne supposent pas l'hypothèse de stabilité pour les rendements. Comme nous l'avons déjà vu, cette hypothèse est à la fois contraignante et discutable en terme de modélisation. Dans cette section, nous nous concentrons sur une approche dite de type général hyperbolique : nous passons en revue les modèles général hyperbolique [106], normal inverse gaussien [8], hyperbolique [45] ainsi qu'un modèle proche, celui proposé par Schoutens [117]. Ces modèles, qui utilisent des processus de Lévy non stables, ont la particularité de s'intéresser en premier lieu aux distributions des rendements.

1.4.1 Les Lois Générales Hyperboliques

Les premiers modèles détaillés, où des processus de Lévy de type assez général ont été employés, datent du début des années quatre-vingt dix. Nous entendons par là des modèles qui ne consistent pas à ajouter un processus de Poisson composé à une diffusion comme cela a été réalisé par Merton [94] dans les années soixante-dix. Plus précisément nous faisons référence à l'emploi de processus de Lévy dont les taux (quantité par unité de temps) d'arrivée de sauts ne sont pas finis comme c'est le cas pour les processus de Poisson composés.

Parmi les premiers de ces modèles à processus de Lévy généraux et non stables sont ceux reposant sur les distributions générales hyperboliques. Ils ont été développés au Danemark et en Allemagne dans la droite ligne des travaux de Barndorff-Nielsen sur les vents de sable, travaux datant des années soixante-dix. Ces modèles ont été construits dans l'idée de permettre une bonne modélisation des distributions empiriques observées sur les rendements. Ainsi, ils prennent en compte les aspects d'asymétrie et de leptocurticité des distributions du monde financier réel, distributions qui sont désormais reconnues être fort éloignées de la distribution normale. Une étude détaillée de l'emploi des distributions générales hyperboliques en finance a été menée dans la thèse de Karsten Prause [106].

Les distributions générales hyperboliques admettent des densités de la forme:

$$\rho(x) = e^{\beta(x-\mu)} \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{\lambda}{2}} (\delta^2 + (x - \mu)^2)^{\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{4}} K_{\lambda - \frac{1}{2}}(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2})}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda - \frac{1}{2}} \delta^\lambda K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}$$

Ici, K est une fonction de Bessel modifiée du troisième ordre. Prause établit une courte note sur les fonctions de Bessel. Il est également possible de se référer à un ouvrage de mathématiques de type "handbook" [2] pour obtenir plus de détails sur cette classe de fonctions spéciales à l'usage très étendu.

La densité donnée ci-dessus possède cinq paramètres $(\alpha, \beta, \delta, \mu, \lambda)$, qui ne sont pas d'une interprétation directe comme l'illustre notamment l'expression du premier moment associé à ces distributions :

$$E(X) = \mu + \frac{\beta \delta K_{\lambda+1}(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}{K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$$

Cependant on peut, comme le montre Prause, se ramener à des interprétations plus intuitives où alors les paramètres peuvent être perçus comme des représentations de l'asymétrie, de la leptocurticité... L'expression des paramètres ne change en tout cas rien aux formes possibles prises par ces

distributions et, dans la pratique, ces formes correspondent bien aux formes des distributions empiriques.

Noter à propos des distributions générales hyperboliques le résultat important suivant : elles correspondent au mélange d'autres lois, à savoir d'une loi normale par une loi générale inverse gaussienne. Ecrivant Θ la densité de la distribution générale inverse gaussienne - infiniment divisible - on a :

$$\Theta(x) = \frac{(\psi/\chi)^{\frac{\lambda}{2}}}{2K_{\lambda}(\sqrt{\psi\chi})} x^{\lambda-1} e^{-\frac{1}{2}(\chi x^{-1} + \psi x)}$$

pour tout x réel positif. Remarquer que pour $\chi = 0$, on obtient une loi gamma et pour $\lambda = -\frac{1}{2}$, une loi inverse gaussienne.

On obtient la densité de la distribution générale hyperbolique par le "mélange" suivant :

$$\rho(x) = \int_0^{+\infty} N_{(\mu+\beta\omega, \omega)}(x) \Theta_{(\lambda, \chi=\delta^2, \psi=\alpha^2-\beta^2)}(\omega) d\omega$$

Les distributions générales hyperboliques possèdent la propriété d'infinie divisibilité. De ce fait elles peuvent être utilisées en principe pour la construction de processus de Lévy, en spécifiant notamment la distribution marginale au temps 1. Cependant il faut faire bien attention au fait suivant : ce n'est pas parce que la distribution est générale hyperbolique au temps 1 qu'elle le sera à un temps quelconque t . Autrement dit, et en général, les lois générales hyperboliques ne sont pas stables par convolution. Si l'on souhaite obtenir la distribution à un temps t donné, l'on pourra procéder par exemple par transformée de Fourier de la fonction caractéristique afférente; quoi qu'il en soit, il faudra recourir à une méthode numérique. Pour plus de détails sur les distributions infiniment divisibles et leur lien avec les processus de Lévy, l'on pourra se reporter à l'annexe A.

Noter également la forme de la fonction caractéristique associée à une loi générale hyperbolique :

$$E(e^{iuX_1}) = e^{i\mu u} \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + iu)^2} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{K_{\lambda}(\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2})}{K_{\lambda}(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}$$

pour tout u réel.

Nous verrons dans tout le corps de ce texte que l'aspect spectral, c'est-à-dire la connaissance des transformées de Fourier ou Laplace des distributions, est central pour l'étude et la mise en oeuvre des processus de Lévy, par exemple lors de l'évaluation d'options quand on travaille avec des transformées d'Esscher. Ici, nous pouvons remarquer que l'on connaît la fonction

génératrice des moments des lois générales hyperboliques. Alors que la fonction caractéristique correspondait à une transformée de Fourier, on peut faire correspondre à cette dernière fonction une transformée de Laplace bilatérale. La fonction génératrice des moments, qui nous renseigne donc sur l'aspect spectral attaché à une distribution, peut s'écrire ici sous une forme très proche de la formule du dessus :

$$E(e^{uX_1}) = e^{\mu u} \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + u)^2} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{K_\lambda(\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2})}{K_\lambda(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}$$

pour tout u réel et tel que $-\beta - \alpha < u < \alpha - \beta$.

Dans le cadre d'une approche fondée sur l'emploi d'une distribution, et ici d'une distribution générale hyperbolique, il n'est pas nécessaire d'obtenir une forme explicite pour la densité de Lévy du processus. Si nous donnons maintenant la densité de Lévy attachée à une loi générale hyperbolique, nous le faisons à titre d'illustration et seulement dans le cas où λ est positif :

$$\nu(x) = \frac{\lambda e^{-\alpha|x|+\beta x}}{|x|} + \frac{e^{\beta x}}{|x|} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-|x|\sqrt{2y+\alpha^2}}}{\pi^2 y [J_\lambda^2(\delta\sqrt{2y}) + Y_\lambda^2(\delta\sqrt{2y})]} dy$$

avec J et Y des fonctions de Bessel.

L'on voit clairement que la densité de Lévy admet ici une forme compliquée et difficile à interpréter de manière intuitive (et c'est encore pire pour un λ quelconque). Pour une démonstration de ce résultat, l'on peut consulter Prause [106].

Pour conclure sur les lois générales hyperboliques, on peut rappeler que leurs queues de distributions sont "semi-légères". C'est-à-dire qu'elles admettent des expressions asymptotiques qui correspondent à un mélange de fonctions exponentielle et puissance. On a ainsi :

$$\rho(x) \underset{\infty}{\approx} |x|^{\lambda-1} e^{-\alpha|x|+\beta x}$$

Une queue "légère" correspond à un écrasement asymptotique fort, autrement dit à une fonction exponentielle. Une queue "épaisse" correspond au contraire à un écrasement asymptotique faible, c'est-à-dire à une fonction puissance. C'est le cas des lois stables que nous avons étudiées précédemment. Les lois générales hyperboliques correspondent donc à un compromis, à un écrasement de probabilité asymptotique médian. C'est ce type de comportement qui est observé de manière empirique sur les marchés.

1.4.2 Particularités du Modèle Hyperbolique

Le modèle hyperbolique est un modèle où les rendements des actions sont décrits par des lois hyperboliques simples. Il s'agit donc d'un sous-cas du mo-

dèle précédent car les lois hyperboliques sont des exemples particuliers (une sous-paramétrisation) des lois générales hyperboliques. Eberlein - *et alii* - a été le premier à détailler ce modèle [44].

Une distribution hyperbolique admet pour densité :

$$\rho(x) = \frac{e^{\beta(x-\mu)}}{2\alpha\delta} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} e^{-\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}}$$

où l'on a fixé $\lambda = 1$ dans l'expression de la distribution générale hyperbolique. Cette forme, qui ne possède que quatre paramètres, est plus simple à comprendre intuitivement que la forme générale. Par ailleurs, cela permet d'éviter une "surparamétrisation" où de trop nombreux paramètres sont à la fois difficiles à calibrer, expliquer et utiliser (pour l'évaluation d'options notamment). Remarquer que si l'on prend le logarithme de cette expression, l'on obtient l'équation d'une hyperbole. C'est là l'origine du nom *hyperbolique*.

Des études extensives sur le marché d'actions allemand ont montré que ce modèle décrit beaucoup mieux la réalité que le modèle de Black et Scholes. Remarquer toutefois la forme des queues:

$$\rho(x) \approx e^{-\alpha|x| + \beta x}$$

qui sont du type exponentiel. Cela est sûrement l'aspect le plus discutable du modèle: ces queues peuvent paraître trop légères par rapport aux queues empiriques semi légères. Cependant, malgré ces queues légères, les aspects d'asymétrie et de kurtosis sont retrouvés et cela est déjà, comme dit ci-dessus, une amélioration par rapport à l'hypothèse de normalité des rendements du modèle de Black et Scholes.

1.4.3 Particularités du Modèle Normal Inverse Gaussien

Le modèle normal inverse gaussien est le second cas le plus connu de sous-paramétrisation du modèle général hyperbolique. C'est également le modèle le plus facilement utilisable de toute cette classe de modèles. Il a été développé principalement par Ole Barndorff-Nielsen [8, 9]; son nom correspond au fait que les lois normales inverses gaussiennes sont des lois mélanges de lois normales par des lois inverses gaussiennes.

Remarquer qu'ici on fixe $\lambda = -\frac{1}{2}$ dans l'expression des distributions générales hyperboliques pour obtenir la forme des distributions normales inverses gaussiennes, qui admettent donc pour densité :

$$\rho(x) = \frac{\alpha\delta}{\pi} e^{\beta(x-\mu)} e^{\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \frac{K_1(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2})}{\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}}$$

où l'on obtient de nouveau une distribution à quatre paramètres, comme dans le cas hyperbolique simple.

Les lois normales inverses gaussiennes fournissent une meilleure représentation des rendements que les lois hyperboliques. En particulier, leurs queues admettent une forme semi-légère telle que :

$$\rho(x) \approx \frac{e^{-\alpha|x|+\beta x}}{|x|^{3/2}}$$

Les distributions normales inverses gaussiennes sont les seules parmi les distributions générales hyperboliques à posséder une propriété très importante : la stabilité par convolution. Ainsi, pour ce cas-là, on peut, connaissant la distribution au temps $t = 1$, connaître de manière immédiate la distribution en un temps t quelconque. Cela permet de réduire l'usage de méthodes numériques, en particulier lors de l'évaluation de produits dérivés. En conclusion, il apparaît que les lois normales inverses gaussiennes sont les meilleures candidates, au sein de la classe des lois générales hyperboliques, pour la modélisation des rendements des actions.

1.4.4 Une Etude Proche : le Modèle de Schoutens

Nous terminons cette section sur les modèles de type général hyperbolique par le modèle proposé par Schoutens [117] et reposant sur une approche par distributions de Meixner. Bien que les distributions de Meixner ne soient pas une sous-classe des distributions générales hyperboliques, nous incluons ce modèle ici car il est très proche, en construction et en manipulation, des modèles précédents.

Les distributions de Meixner admettent la forme suivante :

$$\rho(x) = \frac{(2 \cos(\frac{b}{2}))^{2d}}{2a\pi\Gamma(2d)} e^{\frac{b(x-m)}{a}} \left| \Gamma\left(d + \frac{i(x-m)}{a}\right) \right|^2$$

leur fonction caractéristique a pour expression :

$$E(e^{iuX_1}) = \left(\frac{\cos(\frac{b}{2})}{\cosh(\frac{au-ib}{2})} \right)^{2d} e^{imu}$$

et la densité de Lévy correspondante s'écrit sous une forme particulièrement simple :

$$\nu(x) = \frac{d}{x} \frac{e^{\frac{bx}{a}}}{\sinh(\frac{\pi x}{a})}$$

Noter que comme les distributions générales hyperboliques, les distributions de Meixner ont des queues semi-légères. Les processus construits à partir des distributions de Meixner sont à variation infinie (voir annexe A). Ce modèle peut être perçu comme une alternative aux modèles précédents. Les tests empiriques montrent qu'il permet d'évaluer convenablement les prix des options (quitte à introduire une volatilité stochastique pour retrouver parfaitement le smile).

1.5 Les Approches par Densité de Lévy

Dans cette section, nous expliquons la construction du modèle CGMY qui est une extension du modèle Variance Gamma par une nouvelle spécification de densité de Lévy. Nous supposons systématiquement ici que la mesure de Lévy admet une densité.

1.5.1 Construction des Processus Variance Gamma

L'emploi des processus Variance Gamma pour modéliser les rendements de cours d'actions remonte aux travaux de Madan et Seneta [87] et de Madan et Milne [86]. Ces auteurs ont été les premiers à fournir un cadre complètement détaillé pour la modélisation des rendements avec des processus de Lévy plus généraux que des processus de Poisson composés, et avant les auteurs cités dans la précédente section. Suite à ces travaux de Madan, Seneta et Milne, une seconde classe de processus Variance Gamma étendue a été proposée par Carr, Chang et Madan [22]. Ces derniers processus constituent maintenant le cœur de ce qui est appelé le "modèle Variance Gamma". C'est donc cette classe étendue que nous allons considérer par la suite.

Examinons donc ici la construction des processus Variance Gamma. Soit un mouvement brownien arithmétique :

$$X(t) = \theta t + \sigma W_t$$

Soit maintenant un processus gamma :

$$\gamma(t, 1, \nu)$$

c'est-à-dire un processus de Lévy dont les incréments admettent des lois de type gamma (où leur moyenne est ici rendue unitaire).

Pour construire un processus Variance Gamma, l'on substitue au temps du mouvement brownien géométrique, le processus gamma du dessus :

$$VG(t, \sigma, \nu, \theta) = \theta \gamma(t, 1, \nu) + \sigma W_{\gamma(t, 1, \nu)}$$

où le processus gamma est un processus de Lévy strictement croissant - un subordonateur - et cette opération est couramment appelée subordination.

Remarquons que la fonction caractéristique et la densité de Lévy associées à ce processus admettent des formes simples selon :

$$E(e^{iuVG_t}) = \frac{1}{\left(1 - i\theta\nu u + \frac{\nu\sigma^2 u^2}{2}\right)^{\frac{t}{\nu}}}$$

et

$$\nu(x) = \frac{e^{\frac{\theta x}{\sigma^2}} e^{-\frac{|x|\sqrt{\frac{2}{\nu} + \frac{\theta^2}{\sigma^2}}}{\sigma}}}{\nu|x|}$$

Il est possible de calculer les moments associés aux distributions des rendements à partir de l'expression de la fonction caractéristique; et l'on notera la simplicité de toutes ces expressions par rapport aux expressions correspondantes du cas général hyperbolique :

$$\begin{cases} m = t\theta \\ v = t(\theta^2\nu + \sigma^2) \\ s = tv^{-\frac{3}{2}}(2\theta^3\nu^2 + 3\sigma^2\theta\nu) \\ k = 3 + tv^{-2}(3\sigma^4\nu + 12\sigma^2\theta^2\nu^2 + 6\theta^4\nu^3) \end{cases}$$

Les processus Variance Gamma construits ici dépendent de trois paramètres. Le paramètre σ , suivant les conventions standards, correspond au degré d'agitation du processus. Le paramètre ν permet une quantification de la kurtosis. Cela peut s'interpréter de manière intuitive : ν correspond au taux de variance du processus de changement de temps et il paraît alors raisonnable qu'une grande agitation pour le processus de changement de temps produise un effet de grande queue ou kurtosis sur le processus final. Finalement, l'introduction du troisième paramètre θ correspond à la nécessité de pouvoir prendre en compte un effet de skewness. Remarquer que dans la première approche des processus Variance Gamma, seuls σ et ν étaient présents; la kurtosis, mais non la skewness, pouvait alors seulement être prise en compte.

Il est important de remarquer qu'il existe une représentation en loi des processus Variance Gamma. Ils peuvent en effet s'exprimer comme la différence de deux processus gamma indépendants, soit comme :

$$VG(t, \sigma, \nu, \theta) \stackrel{loi}{=} \gamma(t, \mu_p, \nu_p) - \gamma(t, \mu_n, \nu_n)$$

Chaque partie de cette décomposition est un subordonateur, un processus de Lévy strictement croissant et positif. Cela permet une interprétation

particulièrement simple du processus Variance Gamma. La première partie correspond aux sauts positifs du processus tandis que la deuxième partie (retranchée à la première) correspond aux sauts négatifs. Une remarque s'impose ici : nous voyons apparaître quatre paramètres dans cette description, alors qu'un processus Variance Gamma en admet trois comme dit précédemment. Il existe donc nécessairement une contrainte entre ces quatre paramètres.

A cette représentation simple en termes de processus gamma peut être associée une expression simple pour la densité de Lévy d'un processus Variance Gamma :

$$\nu(x) = \begin{cases} \frac{\mu_n^2 e^{-\frac{\mu_n}{\nu_n}|x|}}{\nu_n|x|} & \forall x < 0 \\ \frac{\mu_p^2 e^{-\frac{\mu_p}{\nu_p}|x|}}{\nu_p|x|} & \forall x > 0 \end{cases}$$

Cette expression de la densité de Lévy utilisant des rapports de fonctions exponentielles par des fonctions puissances sera amplement utilisée par la suite. Ces formes de densité de Lévy permettent notamment d'obtenir des processus à activité infinie et variation finie.

Concluons sur cette dernière expression. Si les processus Variance Gamma peuvent être construits par un changement de temps appliqué à partir de deux processus simples, l'on voit qu'il est également possible de les construire par une spécification directe d'une densité de Lévy. L'expression "approche par densité de Lévy" prend donc tout son sens ici. En particulier, l'on peut envisager de ne pas procéder par des choix de distributions compliquées ou par des changements de temps pour construire des processus de Lévy *ad hoc*. Au contraire, partir de la densité de Lévy semble un choix tout à fait justifiable, notamment si l'on souhaite intégrer la dimension "arrivée des sauts" dans le modèle. Ce type de construction sera au cœur des prochains développements.

1.5.2 Le Modèle CGMY

Dans la continuité du modèle Variance Gamma un nouveau modèle a rapidement émergé à la fin des années quatre-vingt-dix. Il s'agit d'un modèle plus général, englobant le précédent, et désormais connu dans la littérature sous le nom de modèle CGMY, d'après les noms de ses quatre auteurs : Carr, Geman, Madan and Yor [23]. Le modèle CGMY correspond comme précédemment à un choix de processus de Lévy pour modéliser les rendements des actions. Il ne part pas de la spécification d'une distribution de probabilité ni d'un changement de temps de mouvement brownien. Au contraire, il est construit par le choix direct d'une fonction caractéristique - en d'autres

termes d'une densité de Lévy, le choix de densité de Lévy étant alors central au modèle et à tous les développements qui y sont afférents. Remarquer que Dufresne, Gerber et Shiu [55] avaient déjà en 1991, dans le cadre de la théorie de la ruine, fait référence au même type de processus de Lévy.

La densité de Lévy du modèle CGMY prend donc la forme suivante :

$$\nu(x) = \begin{cases} C \frac{e^{-G|x|}}{|x|^{1+Y}} & \forall x < 0 \\ C \frac{e^{-M|x|}}{|x|^{1+Y}} & \forall x > 0 \end{cases}$$

Sous un tel choix, on peut aisément obtenir une expression simple pour la fonction caractéristique :

$$E(e^{iuCG_t}) = e^{tC\Gamma(-Y)[(M-iu)^Y - M^Y + (G+iu)^Y - G^Y]}$$

où CG_t correspond à un processus CGMY - dont l'activité sera infinie et la variation finie en prenant Y dans $]0,1[$.

Remarquer que les distributions attachées aux marginales du processus peuvent être obtenues par inversion numérique (c'est-à-dire par la méthode "Fast Fourier Transform" - transformée de Fourier rapide) de la fonction caractéristique du dessus. Noter aussi que les queues dans ce type de modèles sont semi-légères, comme dans le cas général hyperbolique, et ceci dû à la forme de la densité de Lévy.

Les premiers moments, dans le cas où le processus CGMY est à variation finie et où il est pur, autrement dit sans composante diffusive, admettent la forme suivante :

$$\begin{cases} m = tC\Gamma(1-Y) \left[\frac{1}{M^{1-Y}} - \frac{1}{G^{1-Y}} \right] \\ v = tC\Gamma(2-Y) \left[\frac{1}{M^{2-Y}} + \frac{1}{G^{2-Y}} \right] \\ s = tv^{-\frac{3}{2}}C\Gamma(3-Y) \left[\frac{1}{M^{3-Y}} - \frac{1}{G^{3-Y}} \right] \\ k = 3 + tv^{-2}C\Gamma(4-Y) \left[\frac{1}{M^{4-Y}} + \frac{1}{G^{4-Y}} \right] \end{cases} \quad (1.2)$$

Il apparaît que les paramètres C et Y ont un impact de taille global sur tous les moments. Les paramètres G et M , quant à eux, quantifient l'asymétrie apportée par la densité de Lévy. Quand G est plus grand que M , la densité est biaisée à droite (dû à l'écrasement de la partie gauche par le facteur exponentiel). A l'asymétrie de la densité de Lévy, correspond une asymétrie de la distribution des rendements. Dans ce cas où G est plus grand que M , elle est également biaisée à droite. Cet aspect est illustré par la figure (1.4) où l'on a calculé les densités des distributions par inversion numérique - "Fast Fourier Transform" - de la fonction caractéristique.

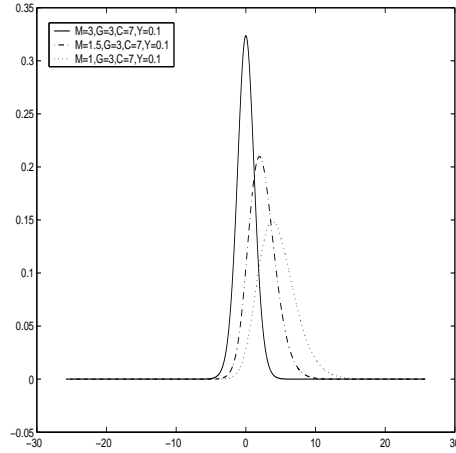


FIG. 1.4 – Distributions CGMY - impact de M / G sur l'asymétrie

Si l'on considère la forme de la densité de Lévy CGMY, l'on est tenté de conclure que le paramètre Y n'a aucun impact sur l'asymétrie des distributions des rendements. Il convient toutefois de nuancer ce point de vue : pour des distributions déjà asymétriques, une modification de Y aboutira à une modification de l'asymétrie. Autrement dit, Y a un effet de bras de levier indirect sur l'asymétrie. On peut, par exemple, se reporter à l'expression de s dans (1.2) pour une confirmation de cet effet. En figure (1.5) nous avons tracé des distributions de rendements correspondant à divers choix de Y .

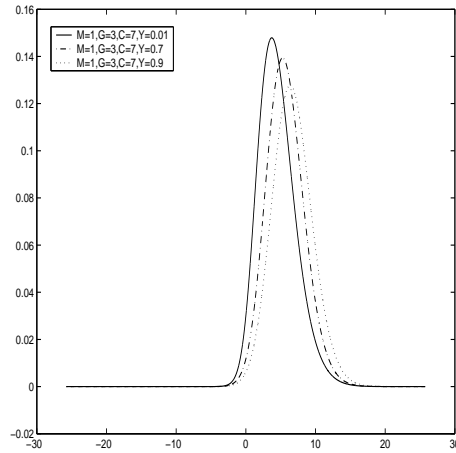


FIG. 1.5 – Distributions CGMY - impact de Y sur l'asymétrie

Partant d'une base de données des cours journaliers de l'action Alcatel

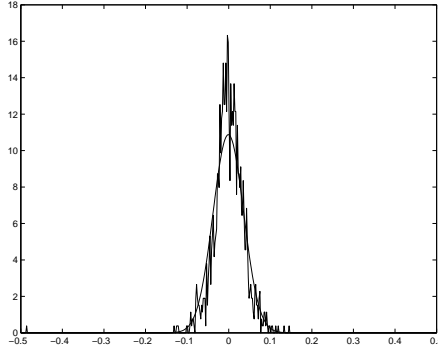


FIG. 1.6 – "Fit" des rendements Alcatel par une distribution normale

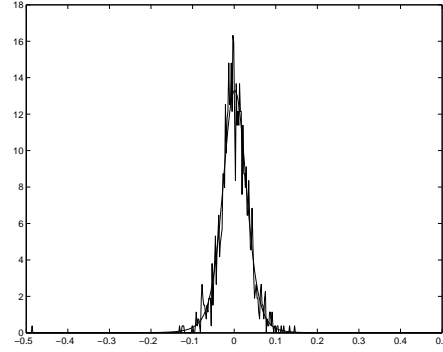


FIG. 1.7 – "Fit" des rendements Alcatel par une distribution CGMY

pour la période 1998-2002, nous avons conduits une étude empirique pour tester l'adéquation du modèle à la réalité. Nous avons déterminé les paramètres C , G , M et Y des rendements Alcatel par deux méthodes différentes : par maximisation de la vraisemblance et par minimisation de l'écart quadratique entre les distributions empirique et théorique. Les deux méthodes reposent sur l'inversion numérique de la fonction caractéristique. Nous avons observé que les deux méthodes fournissent sensiblement les mêmes estimations de paramètres. Les résultats de cette étude sont résumés de manière visuelle par les figures (1.6) et (1.7) où l'on a tracé les distributions empiriques des rendements ainsi que les ajustements par des distributions normale et CGMY. Ces figures sont assez illustratives; elles montrent que le modèle CGMY est nettement mieux adapté à la description de la réalité que le modèle de Black et Scholes - si l'on n'en tire que l'aspect modélisation des cours par un mouvement brownien géométrique. Le pic central et l'épaisseur des queues sont bien rendues, de même que l'effet "skewness" qui se manifeste ici par une queue de droite plus mince que la queue de gauche.

1.6 Une Nouvelle Approche

Nous introduisons maintenant une nouvelle famille de processus de Lévy qui englobe les processus CGMY et donc les processus Variance Gamma. Ces nouveaux processus permettent de prendre en compte des taux d'arrivée importants de sauts de taille moyenne ainsi que des distributions bossées.

1.6.1 Aspects Induits de Marché

Il ressort des précédents développements que de nombreux processus de Lévy ont été employés dans la modélisation financière des rendements d'actions. Certains modèles partent de distributions infiniment divisibles alors

que d'autres se fondent sur un choix de densité de Lévy, c'est-à-dire de fonction caractéristique. Nous nous plaçons dans le cadre de cette seconde approche et souhaitons en particulier étudier l'impact et la signification d'un certain choix de densité de Lévy.

Dans leur étude empirique, Carr, Geman, Madan et Yor remarquent que les processus de Lévy représentant les rendements sont très souvent à variation finie et à activité infinie. Ces aspects stylisés peuvent être perçus plus comme de saines hypothèses (vérifiées empiriquement), que comme de simples remarques empiriques.

On s'attend ainsi sur un marché organisé à ce que les prix, et donc les rendements, subissent de très nombreux petits mouvements, ce qui est équivalent à supposer une activité infinie ou quasi-infinie. En relation avec cela, et puisque les petits mouvements peuvent être pris en compte par la mesure de Lévy, il n'y a plus de raison de postuler une composante brownienne. En effet le mouvement brownien modélise un comportement continu bien qu'aléatoire. Or la continuité n'existe pas sur un marché financier. Les prix sont discrets et changent de manière discrète même si cela peut être par rapport à des niveaux, des "ticks", très fins. Pour qu'un paiement ait lieu, il faut que des unités soient définies, même si elles sont très faibles et correspondent à des centimes ou des centimes de centimes (points de base) : on ne peut envisager un paiement à hauteur de π euros... On peut également supposer que les rendements sont modélisés par des dynamiques relativement régulières, ce qui revient à postuler une variation finie. On peut conclure que les processus de Lévy qui peuvent être candidats à la modélisation des rendements doivent être purs - sans composante brownienne - à activité infinie et variation finie.

Dans le modèle CGMY, les densités de Lévy sont complètement monotones, ou prises comme telles par une restriction sur les paramètres. C'est une contrainte forte qui signifie que plus les sauts sont grands, plus leur taux d'arrivée sera faible et ceci de manière inconditionnelle. Il s'agit d'une hypothèse que l'on peut envisager de ne plus prendre en compte pour avoir plus de flexibilité sur le modèle. Nous pensons qu'il y a de bonnes raisons de ne plus prendre en compte cette hypothèse, raisons qui vont au-delà d'un simple gain de flexibilité.

La densité de Lévy, choisie par le modélisateur et mesurant l'arrivée instantanée des sauts, doit être en correspondance avec la psychologie et le comportement des acteurs financiers. Ce sont en effet eux qui déterminent les prix et leurs changements en se positionnant à la baisse ou à la hausse pour divers montants. La densité de Lévy sera alors une modélisation du comportement instantané de ces acteurs.

Nous postulons que les acteurs visualisent, perçoivent, se représentent les prix et leurs écarts à travers des niveaux pour eux chargés de sens. Considérons par exemple les représentations financières quotidiennes d'un individu quelconque qui réalise ses achats dans un supermarché. Pour cet individu, un euro, deux euros, dix euros ou quinze euros sont des prix chargés de sens et qui correspondent à des niveaux bien précis de valeur. En revanche, il apparaît tout de suite plus difficile d'avoir une représentation directe de la valeur attachée à vingt trois euros et quarante deux centimes... De la même manière, il paraît raisonnable de supposer que les investisseurs perçoivent la valeur de l'action d'une entreprise à travers une grille de différents niveaux de prix. Par ailleurs, si de nouvelles informations sont rendues publiques sur une entreprise, les investisseurs vont traduire cette information par une hausse ou une baisse dans leur perception puis sur les cours par leurs opérations. Ici aussi, il semble raisonnable de supposer que ces changements de prix vont se faire suivant différents niveaux correspondant à différents écarts perçus de valeur. Par exemple une bonne nouvelle peut se traduire par une hausse de un euros tandis qu'une très bonne nouvelle par une hausse de cinq euros. Nous supposons donc l'existence de niveaux préférentiels, correspondant aux représentations mentales de la valeur par les acteurs de marché, espacés de manière non linéaire très probablement, et par rapport auxquels se réalisent les prix et leurs changements.

Si l'on souhaite traduire ce qui a été dit ci-dessus en termes de modèle, cela revient à supposer que la densité de Lévy doit présenter des bosses, en correspondance avec des niveaux privilégiés d'arrivée de sauts. Cela est contradictoire avec l'hypothèse de monotonie complète, et nous pensons que cela est une très forte raison pour ne pas prendre en compte cette hypothèse. Par ailleurs, il semble logique de penser que si l'arrivée instantanée des sauts - la densité de Lévy - n'est pas complètement monotone, alors il en sera de même pour les rendements aux courtes échelles de temps. Supposant donc que la densité de Lévy présente des bosses, les distributions des rendements devraient également en présenter, probablement plus aux courtes échelles de temps et moins aux longues échelles par un effet d'agrégation et de mélange. Ce sont ces différents aspects sur lesquels nous allons pencher dans les prochaines sous-sections.

1.6.2 Illustration par des Processus de Poisson Composés

Nous construisons ici des processus de Lévy simples à activité finie, c'est-à-dire des processus de Poisson composés, par un choix *ad hoc* de mesure de Lévy. Nous construisons donc une mesure de Lévy comme une somme de fonctions créneaux telle qu'en figure (1.8). Sont pris en compte un pic cen-

tral et deux pics latéraux. Le pic central correspond à une arrivée importante de sauts de petite taille tandis que les pics latéraux correspondent à des arrivées relativement grandes de sauts - positifs ou négatifs - de taille moyenne. Des sauts d'autre taille ne sont pas exclus mais arrivent de manière moins importante. Dans ce modèle simple, les acteurs financiers ont donc une préférence pour des écarts de rendements compris entre quatre et cinq unités. Bien sûr, un modèle plus élaboré devrait prendre en compte un nombre plus important de bosses pour la mesure de Lévy, cependant le but est ici de commencer par un modèle illustratif d'un choix de mesure de Lévy non complètement monotone.

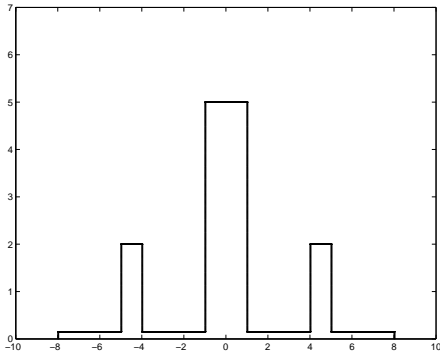


FIG. 1.8 – *Densité de Lévy*

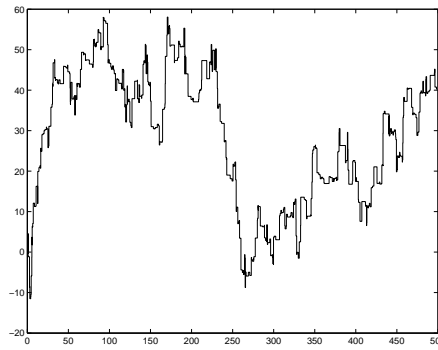


FIG. 1.9 – *Trajectoires*

En figure (1.9), nous représentons la trajectoire obtenue par simulation d'un processus de Poisson composé possédant la mesure de Lévy de la figure (1.8). Pour cela nous procédons de manière classique: nous simulons d'abord un processus de Poisson simple dont l'intensité est égale à l'intégrale sur la droite réelle de la mesure de Lévy. Dans un second temps, nous simulons les sauts du processus de Poisson composé. Ceux-ci apparaissent aux temps de saut du processus de Poisson simple et ont pour distribution la mesure de Lévy renormalisée par son intégrale sur la droite réelle. Si l'on considère la trajectoire de ce processus de rendement, l'on observe bien une importante quantité de sauts de taille comprise entre quatre et cinq unités, ce qui est tout à fait cohérent avec la mesure de Lévy prise comme hypothèse.

La fonction caractéristique de ce processus peut être aisément calculée en utilisant le fait que :

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} (e^{iux} - 1) dx = 2\lambda(\text{sinc}(\lambda u) - 1)$$

où *sinc* est la fonction sinus cardinal c'est-à-dire $\sin(x)/x$ sur \mathbb{R}^* et 1 en 0.

En se servant de cette égalité pour chaque créneau dans la formule de Lévy-Khintchine, on obtient pour la fonction caractéristique :

$$E(e^{iuX_t}) = e^{t(9.7 \operatorname{sinc}(u) - 14.8 \operatorname{sinc}(4u) + 19.5 \operatorname{sinc}(5u) + 2.4 \operatorname{sinc}(8u) - 15.8)}$$

A partir de cette expression, il est possible d'obtenir numériquement les distributions des rendements pour différentes échelles de temps. On peut observer la forme de ces distributions en figure (1.10). En accord avec ce que l'on prévoyait dans la précédente sous-section, les distributions présentent des modes aux courtes échelles de temps et ces modes s'atténuent quand on augmente le pas de temps : pour t grand la forme de la distribution devient de plus en plus proche de la forme de la gaussienne. Remarquer que pour un pas de temps très faible, la forme de la distribution se rapproche de la forme de la mesure de Lévy.

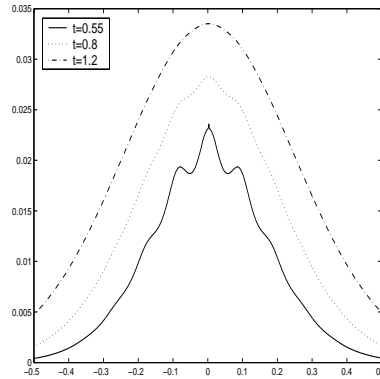


FIG. 1.10 – *Distributions à diverses échelles de temps*

Dans la sous-section suivante, nous construisons des processus de Lévy plus généraux possédant une densité de Lévy non complètement monotone; le but étant d'obtenir une modélisation réaliste des rendements d'actions.

1.6.3 Mouvements de Lévy α - β

Nous avons construit des processus de Poisson composés permettant de prendre en compte des taux d'arrivée de sauts localisés autour de niveaux de préférence. Restant dans une approche privilégiant un choix de densité de Lévy comme point de départ au modèle, nous proposons maintenant des processus de Lévy de caractère assez général et construits à partir d'une extension de la densité de Lévy du modèle CGMY. Nous proposons donc

d'utiliser une densité de Lévy du type :

$$\nu(x) = \begin{cases} C \frac{e^{-G|x|}}{|x|^{1+Y}} (\alpha - |x|^\beta)^2 & \forall x < 0 \\ C \frac{e^{-M|x|}}{|x|^{1+Y}} (\alpha - |x|^\beta)^2 & \forall x > 0 \end{cases}$$

Observer qu'il s'agit de la densité de Lévy du modèle CGMY modulée par un facteur polynomial. Il s'agit d'un choix parmi d'autres; nous avons pris ici une forme simple dans un but d'illustration. Cette densité de Lévy permet de construire des processus de Lévy dépendant de six paramètres. Une paramétrisation plus simple à cinq paramètres peut s'obtenir en prenant un α égal à un. Les paramètres α et β permettent de moduler la densité de Lévy CGMY, comme on peut le voir en figure (1.11) où l'on a tracé en trait plein la densité de Lévy étendue et en pointillés la densité de Lévy CGMY de base pour le choix de paramètres suivant : $C = 1$, $M = G = 0.7$, $Y = 0.05$, $\alpha = 0.7$ et $\beta = 0.4$.

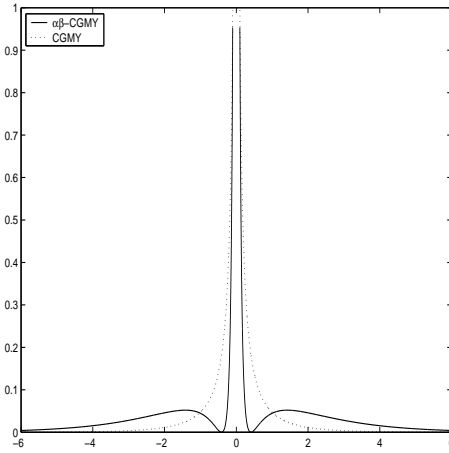


FIG. 1.11 – Densités de Lévy du modèle CGMY et CGMY $\alpha\beta$ - étendu

Les processus de Lévy possédant une telle densité sont à activité infinie et à variation finie - pourvu que β soit inférieur à $\frac{Y}{2}$. On voit bien la différence avec le modèle CGMY de base : deux bosses permettent de prendre en compte des taux d'arrivée importants de sauts de taille moyenne. Pour construire un modèle plus général encore permettant d'obtenir plus de bosses, c'est à dire plus de niveaux préférentiels, on peut envisager de multiplier la densité de Lévy du modèle CGMY par un polynôme de degré plus élevé ou par un facteur de type sinusoïdal (ce qui représente une économie en terme de nombre de paramètres du modèle).

Soit ν la densité de Lévy du modèle α - β ou modèle CGMY étendu, et soit μ la densité de Lévy du modèle CGMY. On peut exprimer la densité de

Lévy du modèle étendu en fonction de la densité de Lévy du modèle CGMY comme :

$$\nu_{(C,G,M,Y,\alpha,\beta)} = \mu_{(\alpha^2 C,G,M,Y)} + \mu_{(C,G,M,Y-2\beta)} + \mu_{(-2\alpha C,G,M,Y-\beta)}$$

Cela permet de calculer la fonction caractéristique du modèle étendu et nous obtenons :

$$\begin{aligned} E(e^{iuX_t}) &= e^{t\alpha^2 C\Gamma(-Y)[(M-iu)^Y - M^Y + (G+iu)^Y - G^Y]} \\ &\quad * e^{tC\Gamma(2\beta-Y)[(M-iu)^{Y-2\beta} - M^{Y-2\beta} + (G+iu)^{Y-2\beta} - G^{Y-2\beta}]} \\ &\quad * e^{-2t\alpha C\Gamma(\beta-Y)[(M-iu)^{Y-\beta} - M^{Y-\beta} + (G+iu)^{Y-\beta} - G^{Y-\beta}]} \end{aligned}$$

Ici aussi, pour obtenir les distributions marginales à différentes échelles de temps, nous devons inverser numériquement la fonction caractéristique donnée ci-dessus. Nous présentons les résultats de ce calcul en figure (1.12). Les distributions les plus bossées correspondent aux courtes échelles de temps tandis que les moins bossées correspondent aux grandes échelles de temps. Remarquer que les diverses courbes ont été modifiées par des paramètres d'échelle pour réaliser ce graphique et nous avons pris les mêmes paramètres que pour la figure (1.11). Noter également que β est ici assez grand; pour un β plus faible et donc pour des processus à activité infinie, les bosses sont moins marquées et les distributions plus piquées.

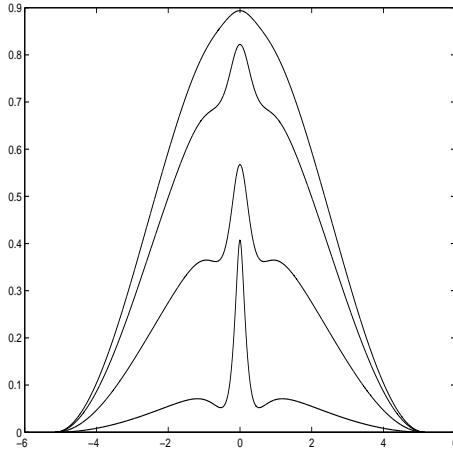


FIG. 1.12 – Distributions du modèle étendu

Nous pouvons, comme dans le modèle CGMY, calculer de manière explicite les expressions des divers moments en utilisant la forme de la fonction caractéristique. Ces expressions sont notablement plus compliquées toutefois.

Nous présentons ici celle du second moment :

$$\begin{aligned}
v &= t\alpha^2 C\Gamma(2 - Y) \left[\frac{1}{M^{2-Y}} + \frac{1}{G^{2-Y}} \right] \\
&+ tC\Gamma(2 + 2\beta - Y) \left[\frac{1}{M^{2+2\beta-Y}} + \frac{1}{G^{2+2\beta-Y}} \right] \\
&- 2t\alpha C\Gamma(2 + \beta - Y) \left[\frac{1}{M^{2+\beta-Y}} + \frac{1}{G^{2+\beta-Y}} \right]
\end{aligned}$$

On s'aperçoit donc que, comme pour les processus CGMY, on a de manière explicite les formules des moments et de la fonction caractéristique, et que pour les distributions, on doit en revanche les obtenir de manière numérique par transformée de Fourier inverse.

Le modèle proposé ici permet donc de prendre en compte des distributions bossées aux courtes échelles de temps où la non monotonie de la mesure de Lévy induit une non monotonie des distributions. Cet aspect théorique est intéressant en ce qu'il rejoint un aspect empirique qui a été observé sur les données à diverses échelles de temps. Par essence, ce modèle réalise un lien entre les différentes échelles de temps et les phénomènes qui leur sont associés. Ainsi les distributions peuvent-elles présenter de manière concomitante des formes différentes en fonction de l'horizon. Cet aspect contraste nettement avec la modélisation stable qui postule une forme invariante avec le temps (une forme fractale). En conclusion, les mécanismes sous-jacents du marché doivent différer avec l'échelle de temps (encore une fois : les prises de position à la minute ou à l'année ne sont pas les mêmes), comme les données qui en résultent et finalement comme les outils de représentation à employer de manière *ad hoc*.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons d'abord rappelé les aspects principaux à retenir sur les processus de Lévy : leur définition en tant que processus à accroissements indépendants et stationnaires, le fait qu'ils sont des processus à sauts (dès lors que l'on élimine la composante brownienne), leur description à travers la formule de Lévy-Khintchine. Nous avons également rappelé de quelle manière on peut les employer pour représenter les cours des actions de manière indirecte, c'est-à-dire par spécification du processus de rendement.

Nous nous sommes ensuite intéressés à un courant historique qui, à partir de Mandelbrot dans les années soixante, a prôné la représentation des rendements au moyen de processus de Lévy *stables*. Nous avons alors rappelé

les principaux éléments de controverse qui existent à ce sujet.

Puis, nous sommes passés à l'étude des modèles qui partent de processus de Lévy *non stables*. Nous les avons classifiés en fonction de ce à quoi ils s'attachent en priorité: soit à une description directe des distributions, soit à une description par la mesure de Lévy ou identiquement par la transformée de Fourier, c'est-à-dire à une description spectrale. Dans la première classe de modèle, nous avons donc mis les modèles général hyperbolique (et ses sous-modèles hyperbolique et normal inverse gaussien) et de Meixner. Dans la seconde, les modèles variance gamma (pris du point de vue de la mesure de Lévy) et CGMY.

Enfin, nous avons proposé une nouvelle modélisation s'inscrivant dans la seconde classe proposée précédemment. Notre modélisation ne retient pas l'hypothèse de monotonie complète de la mesure de Lévy du modèle CGMY. Elle fournit des processus qui peuvent être employés pour l'étude de marchés où les acteurs ont des préférences locales en termes de sauts (c'est-à-dire que les prix changent par des sauts de taille récurrente). Un processus de Poisson composé élémentaire a d'abord été proposé, suivi d'un processus de Lévy plus général qui est en fait une extension de processus CGMY.

1.8 Annexe A : Loix Infiniment Divisibles et Processus de Lévy

Nous présentons dans cette annexe les loix infiniment divisibles, les processus de Lévy et les principales propriétés qui leur sont attachées. Nous commençons par une présentation de la classe des loix infiniment divisibles qui regroupe la plupart des loix connues. Les ouvrages de référence en ce domaine sont les livres de Satō [116] et Bertoin [13]. Nous renvoyons le lecteur à ces ouvrages pour plus de détails ou pour une étude des démonstrations.

Loix Infiniment Divisibles

Commençons par la définition de ces loix.

Définition 1.8.0.1. *Une variable aléatoire est dite infiniment divisible si on peut la décomposer à tout ordre en une somme de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées - où nous appelons ordre le nombre d'éléments de la somme. Remarquer que suivant l'ordre de décomposition, on ne retombe pas nécessairement sur des variables aléatoires de même loi.*

On pourra ainsi écrire :

X infiniment divisible \Leftrightarrow

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* & X \stackrel{d}{=} X_{1,n} + \dots + X_{i,n} + \dots + X_{n,n} \\ \text{où } \forall n \in \mathbb{N}^* & \forall (i,j) \in [1,n]^2 & X_{i,n} \stackrel{d}{=} X_{j,n} \end{cases}$$

où l'on voit qu'à tout ordre n , on décompose X en une somme de variables aléatoires indépendantes $X_{i,n}$ qui sont identiquement distribuées selon i .

Et par ailleurs :

Remarque 1.8.0.1. attention, a priori :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* & \forall i \in [1,n] & X \stackrel{d}{\neq} X_{i,n} \\ \forall (m,n) \in \mathbb{N}^{*2} & \forall i \in [1, \inf\{m,n\}] & X_{i,m} \stackrel{d}{\neq} X_{i,n} \end{cases}$$

ce qui correspond au fait que les loix qui divisent X ne sont pas forcément les mêmes pour divers ordres n .

Soient ψ la fonction caractéristique de X et ψ_n la fonction caractéristique d'une variable aléatoire $X_{i,n}$, on a alors la propriété suivante :

Propriété 1.8.0.1.

$$\psi = (\psi_n)^n$$

où l'on aurait tout aussi bien pu partir de cette propriété pour définir les lois infiniment divisibles.

Remarquons également que :

Propriété 1.8.0.2. *Toute loi non triviale à support borné ne peut être infiniment divisible.*

De cette propriété l'on déduit que des lois simples telles les lois uniforme et binomiale ne peuvent être infiniment divisibles.

On peut également remarquer que :

Propriété 1.8.0.3. *Une distribution qui est limite de distributions infiniment divisibles est elle-même infiniment divisible.*

et que :

Propriété 1.8.0.4. *Une somme de variables aléatoires indépendantes infiniment divisibles est une variable aléatoire infiniment divisible.*

Nous terminons par la caractérisation centrale des lois infiniment divisibles : la formule de Lévy-Khintchine. Nous la donnons sous sa forme multidimensionnelle la plus générale (dans le corps de la thèse, nous utilisons en revanche la version unidimensionnelle plus simple) :

Caractérisation 1.8.0.1 (Formule de Lévy-Khintchine). *Soit X une variable aléatoire infiniment divisible à support \mathbb{R}^d . Il existe alors de manière unique : A une matrice $d \times d$ définie positive, un vecteur $\gamma \in \mathbb{R}^d$, et enfin une mesure ν sur \mathbb{R}^d vérifiant $\nu(\{0\}) = 0$ et :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} (x^2 \wedge 1) \nu(dx) < +\infty$$

pour lesquels on a la représentation de la fonction caractéristique, appelée formule de Lévy-Khintchine, de X :

$$E(e^{izX}) = e^{i\langle \gamma z \rangle - \langle zAz \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} [e^{i\langle zx \rangle} - 1 - i\langle zx \rangle \mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}}] \nu(dx)}$$

Enfin, nous présentons en page suivante un récapitulatif des principales lois infiniment divisibles.

Lois	Distribution (densité / f.r.)	Support	Condition
Laplace-Gauss	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	\mathbb{R}	
Cauchy	$\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}	
Demi-Cauchy	$\frac{2}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}^+	
t-Student	$\frac{c}{(1+x^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}}$	\mathbb{R}	$\alpha > 0$
Poisson	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	$k \geq 0$	$\lambda > 0$
Géométrique	$q^{k-1}p$	$k \geq 1$	
Exponentielle	$\lambda e^{-\lambda x}$	\mathbb{R}	$\lambda > 0$
Gamma	$\frac{\lambda}{\Gamma(p)}e^{-\lambda x}(\lambda x)^{p-1}$	\mathbb{R}^+	$(\lambda > 0, p > 0)$
Pareto	$\frac{c}{(1+x)^{\alpha+1}}$	\mathbb{R}^+	$\alpha > 0$
Gumbel	$\mu(] - \infty, x]) = e^{e^{-x}}$	\mathbb{R}^-	
Weibull	$\mu(] - \infty, x]) = 1 - e^{-x^\alpha}$	\mathbb{R}^-	$\alpha \in]0, 1]$
Log-Normale	$\frac{c}{x}e^{-\alpha(\log(x))^2}$	\mathbb{R}^+	$\alpha > 0$
Logistique	$\mu(] - \infty, x]) = \frac{1}{1+e^{-x}}$	\mathbb{R}	
Stable	Pas explicite en général	\mathbb{R}	

TAB. 1.1 – Exemples de Lois Infiniment Divisibles

Processus de Lévy

Nous commençons par donner une définition des processus de Lévy proche de celle de Satō :

Définition 1.8.0.2. *Un processus stochastique $X = \{X_t \mid t \geq 0\}$ est dit de Lévy s'il vérifie les conditions suivantes :*

- $X_0 = 0$ p.s,
- l'indépendance des incréments (sur des intervalles non recouvrant),
- la stationnarité de la loi des incréments,
- la continuité en probabilité

où l'on remarque que l'on peut toujours obtenir une modification càdlàg du processus.

Passons à la propriété importante qui fait le lien entre distributions infiniment divisibles et processus de Lévy :

Propriété 1.8.0.5. *Soit X un processus de Lévy, alors pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, X_t est infiniment divisible.*

Inversement, soit μ une distribution infiniment divisible, alors il existe un processus de Lévy X tel que $P_{X_1} = \mu$.

Attention ! Cela ne signifie pas que tout processus possédant une loi marginale infiniment divisible est un processus de Lévy.

On retrouve donc la formule de Lévy-Khintchine qui peut s'écrire pour tout X_t du processus :

$$E(e^{iuX_t}) = e^{ibtu - \frac{1}{2}ctu^2 - t \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux \mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}}) \nu(dx)} \quad (1.3)$$

avec :

$$\begin{cases} b \in \mathbb{R} \\ c \in \mathbb{R}^+ \\ \int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1) \nu(dx) < +\infty \end{cases}$$

et l'interprétation des paramètres :

- $b \leftrightarrow \sim$ dérive,
- $c \leftrightarrow$ coefficient d'agitation brownienne,
- $\nu \leftrightarrow$ taux d'arrivée des sauts

où nous allons revenir sur l'interprétation de b .

Une caractérisation importante, en termes de décomposition, des processus de Lévy est la formule de Lévy Itô :

Caractérisation 1.8.0.2 (Formule de Lévy Itô). *Soit X un processus de Lévy et μ la mesure aléatoire décrivant ses sauts, on a :*

$$X(t) = bt + W(t) + \int_{|x|<1} x(\mu(t,dx) - t\nu(dx)) + \int_{|x|\geq 1} x\mu(t,dx)$$

avec l'interprétation suivante des diverses parties de la décomposition :

- Première partie : une "dérive",
- Deuxième partie : un mouvement brownien,
- Troisième partie : une martingale décrivant les petits sauts
- Quatrième partie : un processus de Poisson composé décrivant les grands sauts

où l'on a ici découpé arbitrairement entre les sauts de taille plus petite ou plus grande que un - tout autre découpage aurait pu être envisagé.

Propriétés Importantes

Nous allons passer maintenant à un certain nombre de propriétés fondamentales des processus de Lévy.

Tout d'abord, remarquons que :

Propriété 1.8.0.6. *Si $E(X_1)$ et $Var(X_1)$ existent alors :*

$$\begin{cases} E(X_t) = tE(X_1) \\ Var(X_t) = tVar(X_1) \end{cases}$$

On a l'appartenance suivante :

Propriété 1.8.0.7. *Un processus de Lévy vérifie la propriété de Markov forte.*

Et également :

Propriété 1.8.0.8. *Tout processus de Lévy est un cas particulier de semi-martingale.*

Noter qu'on peut construire des martingales exponentielles de la manière suivante :

Remarque 1.8.0.2. *Soit X un processus de Lévy, alors :*

$$Y = \left\{ \frac{e^{iuX_t}}{E(e^{iuX_t})} \mid t \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

est une martingale.

Terminons sur les propriétés de transience et récurrence de ces processus :

Propriété 1.8.0.9 (Transience). *Un processus de Lévy X est dit transient quand :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |X_t| = +\infty \quad p.s.$$

Exemples 1.8.0.1. *Le processus de Cauchy en dimension supérieure ou égale à deux, tout processus de Lévy en dimension supérieure ou égale à trois.*

et pour la récurrence :

Propriété 1.8.0.10 (Récurrence). *Un processus de Lévy X est dit récurrent quand :*

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} |X_t| = 0 \quad p.s.$$

Exemples 1.8.0.2. *Un processus de Lévy strictement stable quand $\alpha \leq 1$, le mouvement brownien en dimension un ou deux.*

Propriété 1.8.0.11 (Trichotomie de Rogozin). *Un processus de Lévy fait nécessairement partie d'une des trois classes suivantes :*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} X_t &= +\infty \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} X_t &= -\infty \\ \limsup_{t \rightarrow +\infty} X_t &= +\infty \quad \text{et} \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} X_t = -\infty \end{aligned}$$

Dans le premier cas, on dit que le processus dérive vers $+\infty$, dans le second

cas qu'il dérive vers $-\infty$, dans le troisième cas qu'il est oscillant. Ces trois classes sont exclusives l'une de l'autre.

Propriété 1.8.0.12. *Un processus de Lévy récurrent en dimension 1 est oscillant.*

Diverses Classes de Processus de Lévy

Des éléments importants pour la classification des processus de Lévy sont la variation et l'activité.

Définition 1.8.0.3 (Activité). *Elle est définie comme :*

$$\int_{\mathbb{R}} \nu(dx)$$

ce qui se note encore par $\nu(\mathbb{R})$.

Remarque 1.8.0.3 (Processus de Poisson Composé). *Un processus de Poisson composé est un processus de Lévy tel que : $\nu(\mathbb{R}) < +\infty$*

On a pour la variation le résultat important suivant :

Lemme 1.8.0.1 (Variation Finie). *La composante de sauts d'un processus de Lévy admet une variation finie si et seulement si :*

$$\int_{[-1,1]} |x|\nu(dx) < +\infty$$

Remarquer que pour de tels processus, la formule de Lévy-Khintchine admet une forme simplifiée :

$$E(e^{iuX_t}) = e^{ibtu - \frac{1}{2}ctu^2 - t \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1)\nu(dx)}$$

Ainsi l'indicatrice qui était présente dans la formule (1.3) disparaît. Noter que, dans cette formule (1.3), une autre fonction du même type (fonction de troncation) que l'indicatrice aurait pu être employée - à chaque choix de fonction de troncation correspondant une pseudo-dérive b . Dans le cas présent, il n'y a pas d'indicatrice et plus précisément pas de fonction de troncation. Pour de tels processus, la dérive existe de manière unique, et peut s'interpréter.

Satō a séparé les processus de Lévy selon trois classes; nous les reproduisons ici :

Caractérisation 1.8.0.3 (Classification de Satō). *On définit les classes A, B, C de processus de Lévy selon :*

- *Classe A : Poisson composés / pas de composante brownienne,*
- *Classe B : activité infinie, variation finie, pas de composante brownienne,*
- *Classe C : activité infinie, variation infinie due soit au sauts, soit à la présence d'une composante brownienne, soit aux deux effets.*

Remarquer que ce sont les processus de la Classe B qui semblent adéquats pour modéliser les rendements financiers, en accord avec les conclusions empiriques de Carr, Geman, Madan et Yor [23].

Rappelons les définitions de deux classes de processus de Lévy particulièrement utiles dans les applications :

Définition 1.8.0.4 (Subordinateur). *Un subordinateur est un processus de Lévy sans composante brownienne, sans sauts négatifs ($\nu(\mathbb{R}^-) = 0$), à variation finie et dérive positive.*

Autrement dit un subordinateur est un processus de Lévy croissant (et de fait on ne pourrait pas construire de tels processus qui ne soient pas à variation finie). Les subordinateurs sont des horloges stochastiques au sens où ils servent de changement de temps pour d'autres processus. Des exemples classiques de subordinateurs sont les processus gammas et les processus inverses gaussiens.

Venons-en aux processus spectralement positifs :

Définition 1.8.0.5 (Processus Spectralement Positif). *Un processus de Lévy sera de ce type quand il ne présentera pas de sauts négatifs, c'est-à-dire quand $\nu(\mathbb{R}^-) = 0$.*

On voit que les processus de Lévy spectralement positifs ne sont pas des subordinateurs mais une classe de processus incluant entre autres les subordinateurs. En particulier sont permises une composante brownienne ou une dérive négative. De la même manière, on définit les processus de Lévy spectralement négatifs comme ne présentant pas de sauts positifs. Ces processus sont particulièrement utiles quand on veut avoir accès aux diverses

fonctionnelles, telle l'infimum du processus. Une décomposition de Wiener-Hopf simple existe notamment pour ces processus; nous détaillerons cela à l'annexe A du chapitre III.

1.9 Annexe B : Lois et Processus Stables

Nous présentons ici les lois et les processus stables ainsi que les principales propriétés qui leur sont associées.

Introduction

On veut savoir quelles sont les conditions pour qu'une loi \mathcal{L} fasse partie de la classe des lois stables.

Soient :

$$\begin{cases} X_1 \rightsquigarrow \mathcal{L} \\ X_2 \rightsquigarrow \mathcal{L} \end{cases}$$

c'est-à-dire que X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de même loi \mathcal{L} .

Soient également $A \geq 0$ et $B \geq 0$, alors on a la définition formelle suivante :

$$AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} CX + D$$

où :

$$X \rightsquigarrow \mathcal{L}$$

et $C \geq 0, D \in \mathbb{R}$.

On voit donc qu'une combinaison linéaire de deux variables aléatoires indépendantes de loi \mathcal{L} , reste, à un décalage et un changement d'échelle près, une variable aléatoire de loi \mathcal{L} . C'est cela la stabilité. Formulons cela autrement :

Définition 1.9.0.6 (Lois du même type). *Soient :*

$$\begin{cases} X \rightsquigarrow \mathcal{L}_X \\ Y \rightsquigarrow \mathcal{L}_Y \end{cases}$$

On dit que \mathcal{L}_X et \mathcal{L}_Y sont du même type quand :

$$X \stackrel{d}{=} CY + D$$

où $C \geq 0$ et $D \in \mathbb{R}$.

On peut donc reformuler la stabilité de la manière suivante : une combinaison linéaire de deux variables aléatoires indépendantes de loi \mathcal{L} est égale en loi à une variable aléatoire du même type que \mathcal{L} .

Donnons un exemple de motivation pour l'emploi des lois stables. On considère pour cela le cas de l'assurance dommage.

Soient :

$$W_1, \dots, W_N$$

des sinistres à indemniser (assimilés à des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées) et soit :

$$S = \sum_{i=0}^N W_i$$

le coût total associé.

On cherche de manière standard à déterminer la loi de S . Notons que N n'est pas un entier fixé mais une variable aléatoire qui correspond au nombre de sinistres qui sont survenus pendant un certain intervalle de temps considéré (on ne raisonne pas de manière dynamique ici, c'est-à-dire en fonction d'un certain t).

On décrit la loi de N par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = P(N = n)$$

On a donc pour la loi de S :

$$\begin{aligned} P(S \leq x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(W_1 + \dots + W_N \leq x, N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(W_1 + \dots + W_N \leq x | N = n) P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(W_1 + \dots + W_n \leq x) P_n \end{aligned}$$

De cette expression, l'on peut déduire que pour connaître la loi de S , il faut pouvoir calculer les divers $P(W_1 + \dots + W_n \leq x)$. Cela revient donc à réaliser de nombreux produits de convolution, ce qui en pratique prend beaucoup de temps (considérer par exemple des portefeuilles avec plusieurs

milliers d'assurés...).

Si l'on applique la relation de stabilité (où $A = B = 1$) $n - 1$ fois consécutives, l'on voit qu'on peut écrire :

$$W_1 + \dots + W_n \stackrel{d}{=} C_n W + D_n$$

Revenant à S , cela permet d'écrire :

$$\begin{aligned} P(S \leq x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(C_n W + D_n \leq x) P_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(W \leq \frac{x - D_n}{C_n}\right) P_n \end{aligned}$$

et l'on voit qu'ici le problème est considérablement simplifié puisque la connaissance de la loi d'un W_i suffit pour déterminer la loi de S .

Revenons maintenant à l'étude des lois stables en tant que telles.

Définitions Equivalentes

On peut montrer qu'il y a équivalence entre la définition formelle des lois stables donnée à la section précédente et la suivante (qui avait déjà été suggérée dans le cadre de l'étude des sinistres) :

Définition 1.9.0.7 (Lois stables II). *Soient $X_1, \dots, X_n \rightsquigarrow \mathcal{L}$ alors on a :*

$$X_1 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} C_n X + D_n$$

où $C_n \geq 0$, $D_n \in \mathbb{R}$, et $X \rightsquigarrow \mathcal{L}$

On peut alors faire deux remarques sur les coefficients C_n . Tout d'abord :

Remarque 1.9.0.4. *On peut prouver que $C_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ où $\alpha \in]0, 2]$.*

et par ailleurs :

Remarque 1.9.0.5. *Revenant à la première définition, on a en fait :*

$$C^\alpha = A^\alpha + B^\alpha$$

Il existe une troisième définition des lois stables qui est équivalente aux deux précédentes. Nous la donnons maintenant :

Définition 1.9.0.8 (Lois stables III). *X est de loi stable si il existe :*

- une suite de variables aléatoires Y_i indépendantes identiquement distribuées,
- une suite (a_i) à valeurs réelles,
- une suite (d_i) à valeurs strictement positives,

telles que :

$$\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{d_n} + a_n \xrightarrow{d} X$$

Remarquons que les Y_i ne sont pas forcément ici de même loi que X . Par ailleurs, pour une suite (Y_i) donnée, il n'y a pas forcément unicité ces suites (a_i) et (d_i) . On dit ici que la loi de X admet un domaine d'attraction. Autrement dit : la loi des Y_i appartient au domaine d'attraction de la loi stable de X . Si l'on dit "domaine", c'est parce que la loi de X attire vers elle plusieurs lois, y compris la sienne propre.

Nous avons vu trois définitions principales équivalentes des lois stables. Ce que nous allons présenter comme étant une caractérisation des lois stables est souvent cité comme une quatrième définition équivalente - et l'on peut effectivement montrer qu'il y a équivalence entre les diverses définitions. Cependant, nous préférons présenter le résultat suivant comme une caractérisation puisqu'il décrit, de fait, la forme de la fonction caractéristique associée à une loi stable.

Caractérisation 1.9.0.4. *Une loi stable est caractérisée par quatre paramètres $\alpha, \beta, \mu, \sigma$.*

Si X admet une loi stable, on notera : $X \rightsquigarrow S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, et on a les interprétations suivantes pour les paramètres :

- $\alpha \leftrightarrow$ espèce ou épaisseur de queue
- $\beta \leftrightarrow$ asymétrie
- $\mu \leftrightarrow$ translation
- $\sigma \leftrightarrow$ homothétie

où les valeurs admissibles pour les paramètres sont :

$\alpha \in]0, 2], \sigma \geq 0, \beta \in [-1, 1],$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

X admet la fonction caractéristique suivante quand $\alpha \neq 1$:

$$E(e^{iuX}) = e^{i\mu u - \sigma^\alpha |u|^\alpha [1 - i\beta \epsilon(u) \tan(\frac{\pi\alpha}{2})]}$$

pour $\alpha = 1$, elle admet une forme spécifique :

$$E(e^{iuX}) = e^{i\mu u - \sigma|u| \left[1 + \frac{2i\beta}{\pi} \epsilon(u) \log |u|\right]}$$

où on a noté $\epsilon(u)$ pour la fonction "signe" :

$$\epsilon(u) = \begin{cases} 1 & \text{en } u > 0 \\ 0 & \text{en } u = 0 \\ -1 & \text{en } u < 0 \end{cases}$$

Citons maintenant quelques exemples de lois stables très connues et dont les distributions admettent des densités aux formes simples:

- La Loi Normale: elle correspond au cas $\alpha = 2$ et admet pour fonction caractéristique :

$$E(e^{iuX}) = e^{i\mu u - \sigma^2 u^2}$$

Notons que la densité admet une forme similaire (de manière mathématique: "la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne à un changement d'échelle près").

- La Loi de Cauchy: elle correspond au cas $\alpha = 1$, $\beta = 0$ et admet pour fonction caractéristique :

$$E(e^{iuX}) = e^{i\mu u - \sigma|u|}$$

On en connaît la densité :

$$\rho(x) = \frac{\sigma}{\pi [(x - \mu)^2 + \sigma^2]}$$

- La Loi de Lévy: elle correspond au cas $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$, c'est-à-dire qu'elle est complètement asymétrique à droite. Elle admet pour fonction caractéristique :

$$E(e^{iuX}) = e^{i\mu u - \sqrt{\sigma|u|} [1 - i\beta\epsilon(u)]}$$

et, de même que précédemment, on en connaît la densité :

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} \frac{1}{(x - \mu)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\sigma}{2(x - \mu)}} \mathbf{1}_{] \mu, +\infty[}(x)$$

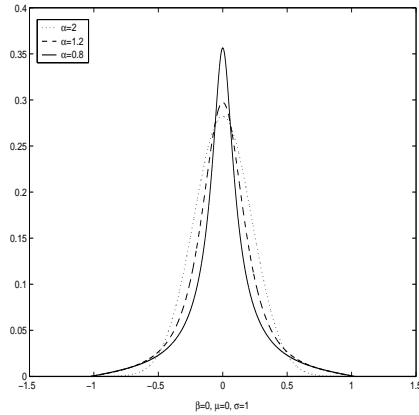


FIG. 1.13 – Distributions stables pour divers α

Remarquons que dans le cas général on ne connaît pas la densité de manière explicite. On peut cependant l'obtenir de manière numérique à partir de la fonction caractéristique (par une "FFT" - "Fast Fourier Transform").

Nous avons tracé quelques exemples de distributions stables (obtenues de manière numérique) : la première figure illustre l'importance du paramètre α qui décrit véritablement l'espèce de loi stable à laquelle on est confronté. Noter que plus α est petit, plus la distribution est piquée au centre et plus ses queues sont épaisses.

La seconde figure représente l'effet de disymétrisation apporté par le paramètre β pour un certain paramètre $\alpha > 1$. En relief, la troisième figure représente le même effet - mais lorsque $\alpha < 1$. Notons que dans ce cas (et dans ce cas seulement), si $\beta = 1$, la distribution n'est plus supportée que sur une demi-droite.

Propriétés des Lois Stables

Venons-en maintenant à l'énoncé d'un certain nombre de propriétés des lois stables.

Nous avons donné l'expression des C_n , mais les D_n restaient à expliciter. On a en fait :

$$\begin{cases} D_n = \mu(n - n^{\frac{1}{\alpha}}) & \text{en } \alpha \neq 1 \\ D_n = \frac{2\sigma\beta n}{\pi} \log(n) & \text{en } \alpha = 1 \end{cases}$$

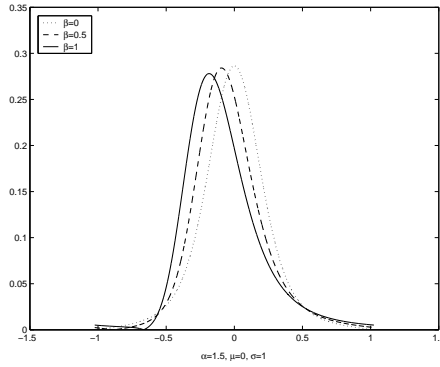


FIG. 1.14 – Effets induits par β en un $\alpha > 1$

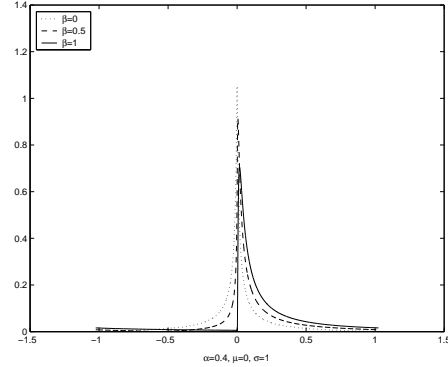


FIG. 1.15 – Effets induits par β en un $\alpha < 1$

Cela nous permet de réécrire la définition des lois stables sous une forme plus précise :

$$\begin{cases} X_1 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} n^{\frac{1}{\alpha}} X + \mu(n - n^{\frac{1}{\alpha}}) & \text{en } \alpha \neq 1 \\ X_1 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} nX + \frac{2\sigma\beta n}{\pi} \log(n) & \text{en } \alpha = 1 \end{cases}$$

Définition 1.9.0.9 (Stricte stabilité). Une loi est strictement stable quand $D = 0$, soit quand tous les D_n sont nuls.

D'où, d'après l'expression des D_n :

Propriété 1.9.0.13. On a stricte stabilité quand :

$$\begin{cases} \mu = 0 & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \beta = 0 & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Par ailleurs :

Propriété 1.9.0.14 (Loi symétrique). Une loi stable vérifie la propriété de symétrie quand $\beta = \mu = 0$.

Les propriétés qui suivent sont importantes quand on veut manipuler des lois stables :

Propriété 1.9.0.15 (Translation / Homothétie). Soit : $X \rightsquigarrow S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, alors :

$$- X + a \rightsquigarrow S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a)$$

- pour $b > 0$ et $\forall \alpha \neq 1$ $bX \rightsquigarrow S_\alpha(b\sigma, \beta, b\mu)$

On a également :

Propriété 1.9.0.16 (Somme de Lois de même Espèce). Soient deux variables aléatoires stables indépendantes de même coefficient α :

$$\begin{cases} X_1 \rightsquigarrow S_\alpha(\sigma_1, \beta_1, \mu_1) \\ X_2 \rightsquigarrow S_\alpha(\sigma_2, \beta_2, \mu_2) \end{cases}$$

Alors :

$$X_1 + X_2 \rightsquigarrow S_\alpha \left((\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \beta_2 \sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \mu_1 + \mu_2 \right)$$

Nous donnons ici la démonstration dans le cas $\alpha \neq 1$ en guise d'illustration. La propriété est vérifiée de manière classique par l'obtention d'une forme adéquate de la fonction caractéristique.

Démonstration.

$$\begin{aligned} E \left(e^{iu(X_1+X_2)} \right) &= E \left(e^{iuX_1} \right) E \left(e^{iuX_2} \right) \\ &= e^{i\mu_1 u - \sigma_1^\alpha |u|^\alpha \left[1 - i\beta_1 \epsilon(u) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right]} e^{i\mu_2 u - \sigma_2^\alpha |u|^\alpha \left[1 - i\beta_2 \epsilon(u) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right]} \\ &= e^{i(\mu_1 + \mu_2)u - (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha) |u|^\alpha + \sigma_1^\alpha |u|^\alpha i\beta_1 \epsilon(u) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + \sigma_2^\alpha |u|^\alpha i\beta_2 \epsilon(u) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \\ &= e^{i(\mu_1 + \mu_2)u - (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha) |u|^\alpha + |u|^\alpha i\epsilon(u) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) (\sigma_1^\alpha \beta_1 + \sigma_2^\alpha \beta_2)} \\ &= e^{i(\mu_1 + \mu_2)u - (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha) |u|^\alpha \left[1 - i \frac{(\sigma_1^\alpha \beta_1 + \sigma_2^\alpha \beta_2)}{(\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)} \epsilon(u) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right]} \end{aligned}$$

et on retrouve bien une forme en :

$$E \left(e^{iuX} \right) = e^{i\mu u - \sigma^\alpha |u|^\alpha \left[1 - i\beta \epsilon(u) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right]}$$

où l'on identifie les paramètres μ , σ , et β comme dans l'énoncé de la proposition. □

Une autre propriété intéressante est :

Propriété 1.9.0.17. Soient, pour $\alpha \neq 1$:

$$\begin{cases} X_1 \rightsquigarrow S_\alpha(\sigma, 1, 0) \\ X_2 \rightsquigarrow S_\alpha(\sigma, 1, 0) \\ X \rightsquigarrow S_\alpha(\sigma, \beta, 0) \end{cases}$$

Alors, on a :

$$X \stackrel{d}{=} \left(\frac{1+\beta}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} X_1 - \left(\frac{1-\beta}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} X_2$$

Cette propriété nous dit que l'on peut obtenir une variable aléatoire stable de coefficient β quelconque dès lors que l'on dispose de deux variables aléatoires stables de coefficient β égal à 1. Cette propriété s'avère donc utile en matière de simulation.

Remarquons finalement que :

Propriété 1.9.0.18. *Toute loi stable est continue.*

Passons maintenant à l'étude des processus stables.

Processus Stables

Définition 1.9.0.10 (Processus stable générique). *Un processus stable générique d'espèce α est un processus dont toutes les distributions finies sont stables d'espèce α .*

On a, de même manière que pour les processus gaussiens :

Propriété 1.9.0.19 (Caractérisation). *Pour prouver que $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ est un processus stable d'espèce α , il suffit de prouver que les combinaisons linéaires $\sum_k a_k X(t_k)$ sont stables d'espèce α pour k quelconque.*

De fait, on appelle en général processus stables ou mouvements α -stables les processus de Lévy stables. Il s'agit d'une restriction par rapport au cas général. On peut les définir de manière analogue au mouvement brownien :

Définition 1.9.0.11 (Mouvement α -stable). *C'est un processus vérifiant :*

- $X(0) = 0$,
- Indépendance des accroissements,
- $X_t - X_s \rightsquigarrow S_\alpha((t-s)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta, 0)$

Par construction, l'on voit que c'est un processus à accroissements indépendants et stationnaires - un processus de Lévy - stable.

Le cas le plus classique, et par lequel on désigne souvent les mouvements α -stables, correspond à $\beta = 0$. Les deux premières figures correspondent à la simulation de ce cas pour deux choix de α différents.

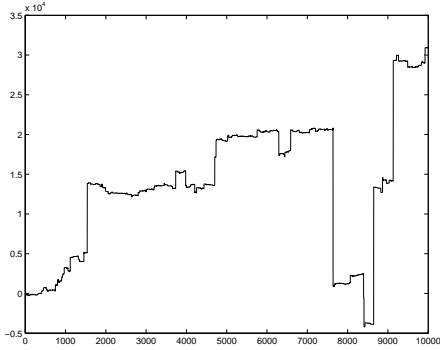


FIG. 1.16 - $\alpha = 0.9$

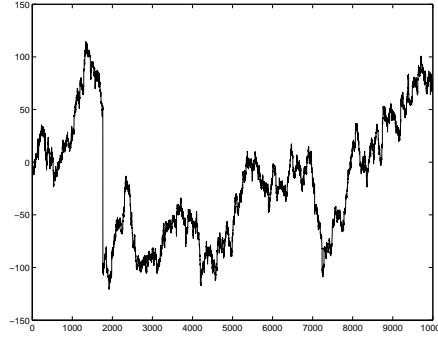


FIG. 1.17 - $\alpha = 1.8$

Le cas $\alpha = 2$ correspond au mouvement brownien. Plus l'on s'en approche, plus la trajectoire paraît agitée. Il faut remarquer que même pour des α faibles, de très nombreux sauts sont présents - à la différence près qu'ils ne sont pas visibles en raison de la taille très importante des sauts extrêmes.

Enfin, en dernière figure, nous présentons le cas de mouvements α -stables, ou plus exactement α, β -stables, pour lesquels β vaut 1 ou -1 . Notons l'intérêt de ces processus - qui présentent respectivement des grands sauts vers le haut et vers le bas - en modélisation actuarielle.

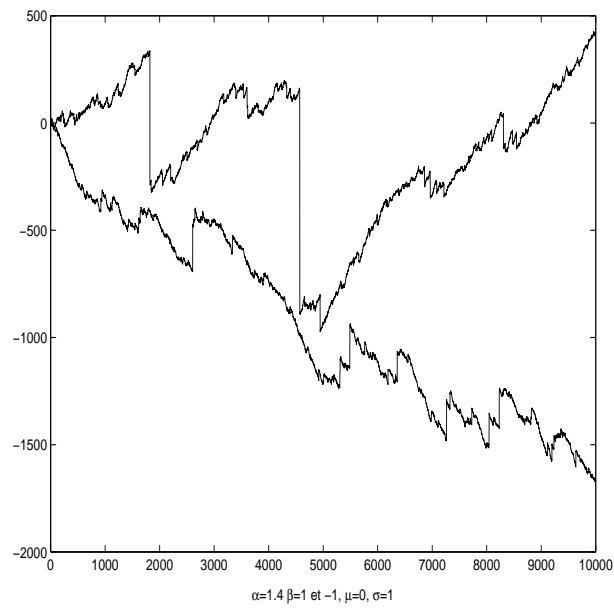


FIG. 1.18 – *Mouvements α, β - stables*

Chapitre 2

Evaluation des Produits Dérivés

2.1 Introduction

Après avoir présenté la modélisation des cours d'actions par des processus de Lévy, nous passons à l'étude de l'évaluation des produits dérivés dans un même contexte. Pour mener cette étude, un examen détaillé des changements de mesure s'impose.

Les changements de mesure sont désormais d'un emploi courant en finance et en assurance, que ce soit pour les évaluations ou les couvertures. Des techniques variées ont émergé : changements de numéraire, noyaux d'évaluation, transformées d'Esscher... cependant, quelle que soit la technique, elle n'est qu'un moyen de réaliser un changement de mesure.

Nous étudions d'abord les changements de mesure dans le cadre gaussien du modèle de Black et Scholes. Cela permet de bien les comprendre avant de passer à leur application dans un cadre non-gaussien, ici un cadre de Lévy.

Après avoir fait le tour des changements de mesure, nous les appliquons à l'évaluation des options pour des sous-jacents modélisés par des processus de Lévy géométriques (ou exponentielles de processus de Lévy). Nous montrons en particulier que les évaluations numériques doivent se faire par le biais de transformées de Fourier rapides.

Enfin, nous présentons les approches qui visent à évaluer les options quand les rendements des actions sont des processus de Lévy *stables* et celles qui modélisent le temps des cours d'action par une dynamique, éventuellement corrélée au cours lui-même.

2.2 Evaluation des Options en Finance Classique

Nous commençons par détailler les changements de mesure dans le cadre le plus classique de la finance : celui de Black et Scholes. En particulier, nous marquons les idées fondamentales qui seront au cœur des sections suivantes.

2.2.1 De l'Importance des Mesures et de leurs Changements

Comme nous l'avons dit précédemment, les changements de mesure sont d'un intérêt capital en finance de marché : ils permettent de fournir une solution à la majeure partie des problèmes d'évaluation. Plus que cela encore, ils permettent de donner du *sens* dans le cadre d'une gestion de produits dérivés. Assigner un poids à un phénomène particulier, et à travers ce poids

déterminer une *valeur*, c'est anticiper une politique de gestion. En effet, comment mener une politique de gestion sans auparavant avoir une perception de ce qu'est la valeur des éléments à gérer? Nous pensons ainsi que la perception des évènements et le poids et la valeur qui leur sont assignés à travers les mesures et leurs changements doivent être au cœur d'une réflexion sur la finance de marché, pour ne citer qu'elle ici. L'évaluation des produits dérivés apparaît alors comme un corollaire de cette réflexion sur les mesures et leurs changements. Tout le long de ce chapitre, nous reviendrons sur cette idée. Nous commençons par rappeler brièvement l'intérêt que peuvent avoir les changements de mesure dans le cadre du modèle de Black et Scholes; ce ne sera que plus tard dans ce chapitre que nous nous intéresserons à l'évaluation de produits dérivés où les cours des produits sous-jacents sont affectés par des sauts de valeur.

Nous commençons donc par l'évaluation dans le cadre de Black et Scholes d'une option européenne standard. Cette exemple est le plus simple qui puisse être en matière d'évaluation de produit dérivé. Notre but ici n'est pas en effet de mener des calculs complexes mais au contraire de montrer comment l'on procède et quel peut être le sens attaché à chaque manipulation.

Rappelons un résultat standard de la finance : en l'absence d'opportunité d'arbitrage, il existe un univers (une mesure de probabilité) appelé "risque-neutre". Qu'est-ce exactement? Un univers dans lequel les prix des actifs actualisés au taux sans risque sont des martingales. Avoir des martingales, c'est avoir un en quelque sorte un pont entre l'avenir et le présent : les prix actualisés présents peuvent s'exprimer comme des espérances, par rapport à la probabilité risque-neutre, de leur version future. Avoir une probabilité risque-neutre, c'est donc pouvoir donner des poids à des incertains futurs et à partir de ces poids en déduire de manière directe une valeur présente pour un produit dérivé. On note de manière classique Q la mesure risque-neutre et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, Q)$ l'univers risque-neutre.

Dans le modèle de Black et Scholes, les actions sont représentées par des mouvements browniens géométriques, où l'on écrit dans l'univers historique :

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$

On note r le taux d'intérêt sans risque instantané qui est supposé constant. La valeur à l'exercice d'une option d'achat européenne est $(S(T) - K)^+$. Ainsi, si l'on a une mesure Q (ici, l'on en a une et une seule) sous laquelle les prix actualisés sont des martingales, alors on peut immédiatement écrire la valeur présente de l'option :

$$V(0) = E_Q(e^{-rT}(S_T - K)^+) \quad (2.1)$$

la question qui se pose alors est celle de la détermination de la mesure de probabilité Q .

Ecrivant P la mesure de probabilité historique (correspondant au monde réel), on peut définir une nouvelle mesure Q en construisant pour chaque t la densité :

$$\left(\frac{dQ}{dP}\right)_t = e^{(\frac{r-\mu}{\sigma})z(t) - \frac{1}{2}(\frac{r-\mu}{\sigma})^2 t} \quad (2.2)$$

Cette densité est appelée densité de Radon-Nikodym, elle est d'espérance égale à un, et définit un processus qui est une P -martingale - une martingale par rapport à P .

Si l'on pose $z_Q(t) = z(t) - (\frac{r-\mu}{\sigma})t$, alors z_Q est un mouvement brownien dans l'univers risque-neutre. Cela n'est pas un résultat direct mais la conséquence d'un théorème important des probabilités : le théorème de Girsanov. On peut alors écrire le cours de l'action dans l'univers risque-neutre sous la forme :

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma dz_Q$$

On remarque que le cours de l'action est encore un mouvement brownien géométrique dans l'univers risque-neutre. Dans ce cadre, le rendement étant r , il n'y a pas de prime de rendement en échange du risque : on peut trouver ici une justification de la dénomination "risque-neutre". Une application simple du lemme d'Itô à la formule précédente permet d'exprimer directement la diffusion du cours d'action comme :

$$S_T = S_0 e^{\sigma z_Q(T) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}$$

Revenant à l'évaluation de l'option, on peut remarquer que la formule (2.1) peut se réécrire comme :

$$V(0) = e^{-rT} E_Q(S_T 1_{S_T > K}) - K e^{-rT} E_Q(1_{S_T > K}) \quad (2.3)$$

Le premier terme de cette équation n'est pas calculable directement, mais peut toutefois s'obtenir en ayant recours à un deuxième changement de probabilité. On construit ainsi une nouvelle mesure de probabilité Q_S de la même manière que précédemment en spécifiant la densité de Radon-Nikodym :

$$\left(\frac{dQ_S}{dQ}\right)_t = e^{\sigma z_Q(t) - \frac{\sigma^2}{2} t} \quad (2.4)$$

Une nouvelle application du théorème de Girsanov permet d'obtenir le mouvement brownien $z_{Q_S} = z_Q - \sigma t$ dans l'univers Q_S . Le cours de l'action admet une troisième écriture sous forme de mouvement brownien géométrique :

$$\frac{dS}{S} = (r + \sigma^2)dt + \sigma dz_{Q_S}$$

ce qui donne, par application du lemme d'Itô :

$$S_T = S_0 e^{\sigma z_{Q_S}(T) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}$$

Pour simplifier des espérances du type de celle apparaissant en première partie de (2.3), on a traditionnellement recours à la règle de Bayes :

$$E_{Q_2}(Y|F_s) = E_{Q_1} \left(Y \frac{(\frac{dQ_2}{dQ_1})_t}{E_{Q_1} \left((\frac{dQ_2}{dQ_1})_t | F_s \right)} | F_s \right)$$

qui permet de calculer les espérances sous une certaine probabilité (Q_2 par exemple) en fonction d'espérances connues sous une autre probabilité (Q_1 par exemple).

Dans notre cas, il convient de remplacer Y par $S_T 1_{(S_T > K)}$ (voir la formule (2.3)) dans la règle de Bayes et d'utiliser l'expression de la densité de (2.4) pour obtenir la valeur de l'option standard européenne :

$$V(0) = S_0 Q_S(S_T > K) - K e^{-rT} Q(S_T > K) \quad (2.5)$$

Il s'agit d'une formule très simple que l'on peut réexprimer - en remplaçant S_T par ses expressions respectives sous Q_S et Q - comme :

$$V(0) = S_0 Q_S(S_0 e^{\sigma z_{Q_S} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T} > K) - K e^{-rT} Q(S_0 e^{\sigma z_Q + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} > K)$$

Finalement, en notant \mathcal{N} la fonction de répartition normale, on obtient :

$$V(0) = S_0 \mathcal{N} \left(\frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}} \right) - K e^{-rT} \mathcal{N} \left(\frac{\log(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}} \right)$$

qui est la formule d'évaluation classique d'une option européenne standard dans le modèle de Black et Scholes.

Cet exemple nous paraît une bonne illustration de l'intérêt des méthodes de changement de mesure de probabilité pour l'évaluation des produits dérivés. En effet, par deux changements de probabilité consécutifs, on obtient le prix d'une option de manière élégante et extrêmement rapide. Par ailleurs, l'on voit avec la formule (2.5) que la valeur de l'option s'écrit comme une combinaison linéaire de deux probabilités différentes. Ainsi la connaissance du poids de l'évènement "le cours de l'action à l'échéance est supérieur au prix d'exercice" mesuré sous les deux probabilités Q_S et Q est suffisante pour évaluer l'option. Nous passons maintenant à la présentation des changements de mesure dans un cadre plus général que celui exposé ici.

2.2.2 Précisions sur les Changements de Mesure

Nous venons de réaliser quelques changements de mesure de probabilité et de construire des mouvements browniens sous ces diverses mesures. Nous détaillons ici ces manipulations de la finance contemporaine de manière plus formelle (le lecteur désireux de ne pas s'attarder sur ces considérations techniques peut passer à la sous-section suivante).

Partons donc de l'espace historique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty[}, P)$ où P est la mesure de probabilité et $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty[}$ la filtration c'est-à-dire une représentation du flux de l'arrivée d'information. Notre premier but est de construire une P -martingale $(Z_t)_{t \in [0, T]}$ (pour un horizon T fini) qui représentera le passage de la mesure de probabilité P à une autre mesure P' .

Soit $W(t)$ et $X(t)$, un mouvement brownien et un processus adaptés, où :

$$P \left(\int_0^T X^2(t) dt < +\infty \right) = 1$$

Cela permet de définir :

$$Z_t = e^{\int_0^t X(s) ds - \frac{1}{2} \int_0^t X^2(s) ds}$$

et, quand la condition suivante (dite de Novikov) est réalisée :

$$E \left(e^{\frac{1}{2} \int_0^T X^2 dt} \right) < \infty$$

alors $(Z_t)_{t \in [0, T]}$ est une P -martingale d'espérance égale à un.

On peut donc bien construire un processus de Radon-Nikodym $\{Z_t\}$ qui permet d'obtenir une mesure équivalente P' de la manière suivante :

$$\left(\frac{dP'}{dP} \right)_t = Z_t$$

où plus précisément P' vérifie :

$$P'_T(A) = E(\mathbf{1}_A Z_T) \quad \forall A \in \mathcal{F}_T$$

On a donc vu comment se réalise le changement de mesure de probabilité. Se pose maintenant la question suivante : comment obtenir un mouvement brownien sous la nouvelle mesure de probabilité? En fait, il suffit de modifier le mouvement brownien de l'univers de départ de la façon suivante :

$$W'(t) = W(t) - \int_0^t X(s) ds$$

de telle manière que $W'(t)$ est un mouvement brownien par rapport à P' , la filtration étant inchangée. Pour plus de détails et une démonstration nous renvoyons au livre de Karatzas et Schreve [69]. Ce résultat désormais bien connu des financiers est le sujet d'un théorème de Girsanov. Les financiers disent *le* théorème de Girsanov, tant il a été utilisé dans de nombreux articles pour l'évaluation des produits dérivés. Nous verrons plus loin, lorsque nous envisagerons les changements de probabilité dans le cadre où les actifs sont modélisés par des exponentielles de processus de Lévy, qu'il existe d'autres théorèmes de Girsanov.

2.2.3 Les Changements de Numéraire

Nous explicitons ici un type particulier de changement de mesure introduit par Geman, El Karoui et Rochet [52]: le changement de numéraire. Avant de réaliser un changement de numéraire, il faut d'abord bien sûr supposer l'existence d'un premier numéraire $X_1(t)$ et définir ce qu'on entend par numéraire. Soit $Z(t)$ un actif, un numéraire est autre actif $X_1(t)$ tel que le rapport des deux soit une martingale par rapport à une mesure appropriée Q_{X_1} :

$$\frac{Z(t)}{X_1(t)} = E_{Q_{X_1}} \left(\frac{Z(T)}{X_1(T)} | \mathcal{F}_t \right)$$

où l'on voit que l'actif $Z(t)$ exprimé en unités de numéraire $X_1(t)$ est invariant en espérance à travers le temps. Comme dit précédemment, il s'agit d'une propriété capitale en finance de marché où l'on cherche à calculer des prix d'options *maintenant* en fonction de poids d'évènements à venir.

Nous souhaitons ici disposer d'un second numéraire $X_2(t)$ pour que $Z(t)$ possède la propriété de martingale dans cet unité de numéraire et sous une seconde mesure de probabilité Q_{X_2} :

$$\frac{Z(t)}{X_2(t)} = E_{Q_{X_2}} \left(\frac{Z(T)}{X_2(T)} | \mathcal{F}_t \right)$$

La question du changement de numéraire se réduit donc au fait de pouvoir déterminer la mesure Q_{X_2} connaissant $X_1(t)$, $X_2(t)$ et Q_{X_1} . On sait que l'obtention de cette nouvelle mesure peut se réaliser de la façon suivante:

$$\left(\frac{dQ_{X_2}}{dQ_{X_1}} \right)_t = \frac{X_2(t)X_1(0)}{X_1(t)X_2(0)} \quad (2.6)$$

où ce processus densité est une Q_{X_1} -martingale d'espérance égale à un. Pour une démonstration de ce résultat, se reporter à la démonstration I de l'annexe B (il y est également démontré que $Z(t)/X_2(t)$ est alors bien une Q_{X_2} -martingale).

Remarquer que l'on définit parfois un numéraire comme un couple $(X_i(t), Q_{X_i})$ où $X_i(t)$ est une dynamique d'actif associée à une mesure de probabilité Q_{X_i} .

Un exemple typique de changement de numéraire est la construction d'univers forward-neutres (voir Geman, El Karoui et Rochet [52] ainsi que Jamshidian [64]) pour l'évaluation de produits dérivés de taux d'intérêt. On rappelle que les prix actualisés au taux sans-risque sont des martingales dans l'univers risque-neutre (i.e. sous la mesure Q), univers auquel on peut donc associer le facteur d'actualisation $e^{\int_0^t r(s)ds}$ comme numéraire. On peut alors construire de manière classique des mesures forward-neutres Q_W qui s'associent aux zéro-coupons $P(t, W)$ pris comme numéraires. Ainsi, si les dynamiques des zéro-coupons s'expriment sous Q comme :

$$\frac{dP}{P} = r(t)dt - \sigma(t, T)dz_Q$$

alors la densité qui relie les probabilités risque-neutre et forward-neutre s'écrit :

$$\left(\frac{dQ_W}{dQ} \right)_t = \frac{P(t, W)}{P(0, W)e^{\int_0^t r(s)ds}} = e^{-\int_0^t \sigma(u, W)dz_Q(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(u, W)du}$$

Cette méthode est extrêmement puissante : on peut, en prenant les mesures forward-neutres, évaluer la plupart des produits dérivés de taux d'intérêt. Cela peut notamment être utile pour "ramener" un modèle à un cadre de Black et Scholes : on peut citer à cet effet le modèle de Brace, Gatarek et Musiela [20] qui force le caractère lognormal des taux libors en les exprimant chacun sous un univers forward-neutre distinct. Ce modèle est une formidable extension du cadre de Heath, Jarrow et Morton [59] ; il décrit les dynamiques existantes des taux libors et non les taux forwards instantanés.

Revenons maintenant au cas de l'option européenne standard évaluée telle qu'en (2.5) au début de cette section. On peut réécrire l'expression de la densité (cf. (2.4)) permettant de passer de Q à Q_S de la manière suivante :

$$\left(\frac{dQ_S}{dQ} \right)_t = e^{\sigma z_Q - \frac{\sigma^2}{2}t} = e^{\int_0^t ((r - \frac{\sigma^2}{2})ds + \sigma dz_Q(s))} e^{-\int_0^t r ds} = \frac{S(t)}{S(0)e^{\int_0^t r ds}}$$

où l'on voit que l'on retombe sur une forme particulière de la formule (2.4) : on avait en fait de manière sous-jacente déjà réalisé un changement de numéraire. Remarquer que le numéraire associé à la mesure Q_S est le cours de l'action S lui-même - il est difficile d'envisager un numéraire plus compliqué.

Dans cette section, nous avons donc illustré l'emploi des changements de mesure, et notamment des changements de numéraire, dans le cadre de

l'évaluation des produits dérivés et quand les actifs sous-jacents sont modélisés par des diffusions. Il apparaît de manière très claire que l'obtention de formules d'évaluation sous des formes du type :

$$V(0) = S_0 Q_S(S_T > K) - K e^{-rT} Q(S_T > K)$$

est intéressant par deux aspects. D'une part la méthode est simple. D'autre part, et au-delà de la simple méthode, on associe à un problème d'évaluation un contenu informatif précis : la connaissance des pondérations $Q_S(S_T > K)$ et $Q(S_T > K)$ attachées à l'évènement "le cours à l'échéance est supérieur au prix d'exercice" est clairement équivalent à la connaissance du prix de l'option.

Avant de passer à l'évaluation des produits dérivés portant sur des sous-jacents modélisés par des processus de Lévy géométriques, nous nous intéressons à la possibilité de mener des évaluations sans passer par des changements de probabilité.

2.3 Evaluations dans l'Univers Historique

Nous nous concentrons dans cette section sur l'évaluation des produits dérivés lorsque l'on se place et que l'on reste dans l'univers historique. Des numéraires sont certes cherchés, mais dans le sens d'unités par rapport auxquelles exprimer les actifs : on ne cherche pas de nouvelles probabilités associées à ces numéraires. Pour une présentation générale des déflateurs, voir Duffie [40]; pour deux articles fondamentaux sur le "numéraire portfolio", Long [82], et Bajoux et Portait [7].

2.3.1 Présentation

On se place dans le cadre de Black et Scholes où le prix d'une option d'achat standard s'écrit :

$$C(S,0) = E_Q [e^{-rT} (S(T) - K)^+].$$

ce qui peut être réécrit sous la forme :

$$C(S,0) = E_P \left[e^{-rT} \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{r-\mu}{\sigma} \right)^2 ds + \int_0^T \frac{r-\mu}{\sigma} dz \right) (S_T - K)^+ \right]$$

On pose :

$$\delta(t) = e^{-rt} \quad \beta(t) = e^{rt} \quad \eta = \frac{r-\mu}{\sigma}$$

$$L(t) = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \eta^2 ds + \int_0^t \eta dz \right)$$

$$H(t) = \delta(t)L(t)$$

Avec ces notations, on a donc :

$$C(S,0) = E_P [H(T)(S(T) - K)^+]$$

et plus généralement :

$$H(t)C(S,t) = E_P^t [H(T)(S(T) - K)^+] \quad (2.7)$$

ce qui prouve que le prix de l'option d'achat exprimé en unité de numéraire $1/H(t)$ est une martingale sous la mesure historique de départ P . Cette espérance conditionnelle se calcule aisément et permet de récupérer la formule de Black et Scholes sans changer de mesure.

Remarquer que la formule (2.7) peut être prouvée par différentiation de HC et par l'emploi de l'équation aux dérivées partielles de Black et Scholes. Après calcul, on obtient :

$$d(HC) = H[\sigma S C_S + C \frac{r - \mu}{\sigma}] dz$$

ce qui prouve bien que HC est une martingale sous P , et permet de déduire l'équation (2.7).

2.3.2 Identification du Numéraire

Considérons maintenant un portefeuille où l'on investit le poids w dans l'actif sans risque et le poids $1 - w$ dans l'actif risqué. Dans ce contexte, la valeur W du portefeuille suit dans l'univers historique la dynamique :

$$dW = (Ww(\mu - r) + rW)dt + w\sigma W dz$$

avec w constant et égal à $\frac{\mu - r}{\sigma^2}$, la solution de cette EDS s'écrit :

$$W(t) = W_0 \beta(t) e^{\frac{1}{2}(\frac{\mu - r}{\sigma})^2 t + \frac{\mu - r}{\sigma} z(t)}$$

Quand $W_0 = 1$, la valeur $W(t)$ de ce portefeuille coïncide avec $1/H(t)$.

Ainsi, ce portefeuille est-il la solution du problème de maximisation de l'utilité espérée de la richesse terminale quand la fonction d'utilité est logarithmique. Nous argumentons ici cette assertion. Par une approche martingale du problème de choix de portefeuille, on sait que: $W^*(T) = \frac{W_0}{H(T)}$ et :

$$H(t)W^*(t) = E_P^t[H(T)W^*(T)] = W_0$$

Le portefeuille optimal de poids w^* investi dans l'actif sans risque est tel que :

$$E_P^t[H(T)W^*(T)] = W_0 + \int_0^t H(s)W^*(s)[w^*\sigma + \frac{r - \mu}{\sigma}]dz$$

avec :

$$w^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2}$$

Il est intéressant de remarquer qu'une approche par martingale peut être reliée à une approche par utilité espérée. $1/H$ peut être ainsi interprété comme le portefeuille optimal maximisant l'utilité logarithmique de la richesse terminale.

2.3.3 Généralisation aux Déflateurs ou Noyaux d'Evaluation

Rappelons que dans une économie de Black et Scholes, il peut être montré pour tout actif contingent de paiement terminal $V(T)$ qui est F_T -mesurable que l'on a :

$$V(t)H(t) = E_P^t[H(T)V(T)] \quad (2.8)$$

Le processus H est appelé déflateur de prix d'état ou noyau d'évaluation. De nombreux concepts introduits en finance: mesures martingales équivalentes, noyaux d'évaluation, et numéraires sont intimement liés et caractérisent les marchés sans opportunités d'arbitrage.

Nous allons maintenant préciser ce lien entre les noyaux d'évaluation, les mesures martingales et les changements de numéraire. Soit une économie avec n actifs risqués et un actif sans risque où les prix S des actifs risqués suivent des diffusions. Nous supposons qu'il y a autant d'actifs risqués que de sources d'incertitudes données par la dimension du mouvement brownien. Le marché considéré ici est parfait, complet et les actifs risqués ne distribuent pas de dividendes.

On rappelle qu'une mesure \mathcal{N} est une mesure martingale si $\mathcal{N} \sim P$ et s'il existe un numéraire N tel que SN soit une martingale sous \mathcal{N} . Alors, la semimartingale strictement positive Z est un noyau d'évaluation si le processus SZ est une martingale sous la mesure historique Π .

Sous une condition d'économie continue, c'est-à-dire d'économie où les trajectoires des actifs sont continues, une conséquence importante de la théorie de l'arbitrage est que si pour tout choix de numéraire il existe une unique mesure martingale équivalente alors le marché ne présente pas d'opportunités d'arbitrage. Par ailleurs, l'unicité de la mesure martingale est équivalente à la complétude du marché. Dans ce contexte, la formule (2.8) est toujours valide et, sous des conditions d'intégrabilité, on a pour les numéraires (N, \mathcal{N}) , (M, \mathcal{M}) et le noyau d'évaluation H :

$$V(t) = \frac{1}{H(t)} E_P^t [H(T)V(T)] = M(t) E_M^t \left[\frac{V(T)}{M(T)} \right] = N(t) E_N^t \left[\frac{V(T)}{N(T)} \right]$$

Ceci est donc une illustration du fait que l'évaluation par noyaux ou par numéraires permet d'obtenir les mêmes prix pour les actifs contingents. Il y a une équivalence générale entre les déflateurs de prix d'état, les mesures martingales équivalentes et les paires de numéraires où le changement de mesure est donné tel qu'en (2.6). Le choix d'un numéraire repose essentiellement sur la facilité de calcul qu'il apporte.

Dans la prochaine section, nous étudions une nouvelle méthode qui s'avèrera particulièrement utile lors de l'évaluation d'options dans un cadre de processus à sauts.

2.4 Introduction aux Transformées d'Esscher

Dans cette section nous montrons que les transformées d'Esscher peuvent être introduites directement à partir du théorème de Girsanov et qu'elles permettent de passer aisément à l'univers risque-neutre d'évaluation. Une référence importante sur les transformées d'Esscher est l'article de Gerber et Shiu [55].

2.4.1 Présentation

On rappelle ici l'expression de la densité de Radon-Nikodym qui permet de passer d'une mesure de probabilité à une autre :

$$\left(\frac{dQ_2}{dQ_1} \right)_t = e^{\int_0^t X_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t X_s^2 ds}$$

Le processus densité associé est une martingale d'espérance égale à un (en supposant la condition de Novikov). Noter maintenant que cette densité

peut s'écrire comme :

$$\left(\frac{dQ_2}{dQ_1}\right)_t = \frac{e^{\int_0^t X_s dW_s}}{E_{Q_1}\left(e^{\int_0^t X_s dW_s}\right)}$$

Cette densité peut donc s'écrire sous la forme d'une l'exponentielle d'une intégrale d'Itô renormalisée par l'espérance de cette même exponentielle. De fait, une transformée d'Esscher correspond exactement à ce type de densité. Soit $S(t) = e^{X(t)}$ une dynamique d'actif. On réalise une transformée d'Esscher (pour réaliser un changement de mesure) par un processus densité de Radon-Nikodym s'écrivant comme :

$$\left(\frac{dQ_2}{dQ_1}\right)_t = \frac{e^{\theta X(t)}}{E_{Q_1}(e^{\theta X(t)})} = \frac{S(t)^\theta}{E_{Q_1}(S(t)^\theta)} \quad (2.9)$$

où l'on voit que le choix de changement de mesure se ramène à une spécification du paramètre θ .

Nous venons donc de voir la définition d'une transformée d'Esscher (un moyen de changer de mesure en posant un processus densité égal, à une renormalisation par espérance près, au cours de l'actif sous-jacent élevé à une certaine puissance θ) et nous avons observé qu'il s'agit en fait de la réécriture d'un changement de mesure standard.

2.4.2 Utilisation

Nous savons que dans un marché complet il existe une et une seule mesure rendant martingales les prix actualisés au taux sans risque - une unique mesure risque-neutre. La question qui se pose ici est donc de savoir si l'on peut construire cette mesure risque-neutre par une transformée d'Esscher. De manière équivalente, peut-on trouver un paramètre θ permettant de retrouver la mesure Q par un changement de mesure du type (2.9)?

On cherche donc un θ_Q convenable permettant de rendre les prix actualisés martingales. P étant la mesure historique, on peut écrire :

$$S_0 = E_Q(e^{-rt}S(t)) = E_P\left(e^{-rt}S(t)\left(\frac{dQ}{dP}\right)_t\right) = E_P\left(e^{-rt}S(t)\frac{S(t)^{\theta_Q}}{E_P(S(t)^{\theta_Q})}\right)$$

ce qui nous permet d'obtenir une relation entre r et θ_Q :

$$S_0 e^{rt} = E_P\left(\frac{S(t)^{1+\theta_Q}}{E_P(S(t)^{\theta_Q})}\right)$$

On suppose un cours S lognormal :

$$S_t = S_0 e^{\sigma z(t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}$$

et dans ce cas on peut obtenir après quelques étapes (voir la démonstration II de l'annexe B) :

$$\theta_Q = \frac{r - \mu}{\sigma^2}$$

La transformée d'Esscher avec le paramètre θ_Q du dessus permet donc de trouver la mesure risque-neutre - qui est unique dans ce contexte. De fait, la densité de Radon-Nikodym peut s'écrire comme en (2.2).

2.4.3 Compléments

Rappelons un résultat utile obtenu par Gerber and Shiu. Soit g une fonction borélienne, k et θ des constantes. On a alors :

$$E \left[S_t^k g(S_t); \theta \right] = E \left[S_t^k; \theta \right] E [g(S_t); \theta + k] \quad (2.10)$$

où l'on voit que cet éclatement de l'espérance peut être utile pour évaluer de nombreux produits dérivés. Voir ici la démonstration III de l'annexe B.

Utilisant θ_Q qui rend martingales les prix actualisés, le prix à l'instant t d'une option standard d'achat peut s'écrire comme :

$$V(0) = E \left[(S_T - K)^+ e^{-rT}; \theta_Q \right] = E \left[S_T e^{-rT} \mathbf{1}_{S_T > K}; \theta_Q \right] - K e^{-rT} E \left[\mathbf{1}_{S_T > K}; \theta_Q \right]$$

soit en prenant $g(S_T) = \mathbf{1}_{S_T > K}$ dans la formule (2.10) :

$$V(0) = E \left[S_T e^{-rT}; \theta_Q \right] E \left[\mathbf{1}_{S_T > K}; \theta_Q + 1 \right] - K e^{-rT} E \left[\mathbf{1}_{S_T > K}; \theta_Q \right]$$

qui s'exprime également comme :

$$V(0) = S_0 Q_{\theta_Q + 1}(S_T > K) - K e^{-rT} Q_{\theta_Q}(S_T > K) \quad (2.11)$$

Nous retrouvons ici une formule très générale pour le prix de l'option et cela mérite quelques commentaires. Tout d'abord, on retrouve une forme extrêmement similaire à celle de l'équation (2.5). De fait, la mesure Q_{θ_Q} est la mesure risque-neutre Q et il est facile de prouver en se servant du théorème de Girsanov que $Q_{\theta_Q + 1}$ est la mesure Q_S dans une économie de Black et Scholes. Ainsi, quand les cours sont modélisés par des diffusions, la méthode standard et la méthode par transformée d'Esscher sont équivalentes et il n'y a aucune différence entre les formules extrêmement efficaces (2.5) et (2.11).

Nous verrons qu'avec des processus de Lévy, il n'y a plus unicité de la mesure risqué-neutre. Toutefois, dans ce cadre il sera toujours possible d'obtenir des prix par transformée d'Esscher. Cela sera discuté dans les prochaines sections qui sont consacrées à l'évaluation des produits dérivés quand les sous-jacents sont modélisés par des processus de Lévy géométriques.

2.5 Processus de Lévy et Changements de Mesure

Dans cette section nous quittons le cadre standard de la finance où les prix des actifs sont représentés par des diffusions. Nous supposons à partir de maintenant que les cours des actifs sont représentés par des exponentielles de processus de Lévy et explicitons les changements de mesure qui peuvent être utiles dans ce contexte. Nous commençons par présenter les caractéristiques des semimartingales puis des processus de Lévy comme mode intéressant de représentation de ces derniers. Nous passons ensuite à l'explicitation des changements de mesure eux-mêmes.

2.5.1 Les Caractéristiques comme Mode de Représentation

Nous partons de résultats standards sur les semimartingales et leurs caractéristiques pour introduire le sous-cas des processus de Lévy. Cette présentation repose essentiellement sur les résultats donnés dans le livre de Jacod and Shiryaev [63].

Les semimartingales forment la classe la plus large de processus stochastiques qui puissent être utilisés comme intégrateurs au sein d'intégrales stochastiques. On notera \mathcal{S} la classe des semimartingales et S un de ses éléments particuliers. Une semimartingale S peut être décomposée de la manière suivante :

$$S = S_0 + M + A \tag{2.12}$$

où M appartient à \mathcal{L} , c'est-à-dire que M initiée à zéro ($M_0 = 0$) est une martingale locale - une martingale le long d'une suite de temps d'arrêt croissant vers l'infini. Par ailleurs A est dans \mathcal{V} ce qui signifie que A initiée à zéro est un processus à variation bornée - ici aussi de manière locale. Remarquer que quand A est prédictible, alors la décomposition du dessus est unique.

On peut également décomposer d'une autre manière les semimartingales en deux parties : une partie correspondant aux grands sauts au reste de la semimartingale diminuée des grands sauts. Noter que cette deuxième partie ne correspond pas qu'aux petits sauts : une composante continue de type mouvement brownien pouvant aussi être présente. Nous utiliserons donc les

vocables suivants par la suite : "partie des grands sauts" et "partie restante".

Nous aurons besoin par la suite de fonctions de troncation. Ce sont des fonctions bornées à support compact vérifiant $f(x) = x$ au voisinage de zéro. On peut comprendre à partir de cette définition que les fonctions de troncation seront un moyen de couper la contribution des grands sauts en gardant intacte la contribution de la partie restante.

La partie des grands sauts (qui est dans \mathcal{V}) et la partie restante sont ainsi construites par rapport à une fonction de troncation h . Nous les notons respectivement $\tilde{S}(h)$ et $S(h)$ et détaillons leur construction ci-dessous :

$$\begin{cases} \tilde{S}(h) = \sum_{s \leq t} [\Delta S_s - h(\Delta S_s)] \\ S(h) = S - \tilde{S}(h) \end{cases}$$

où ΔS_s correspond à un saut de S à l'instant s .

Nous pouvons maintenant passer à la définition des caractéristiques d'une semimartingale. Les caractéristiques d'une semimartingale forment un unique triplet (B, C, ν) qui la représente ou la caractérise, comme indiqué par leur nom.

Le *premier* élément du triplet provient de la décomposition de $S(h)$ au sens de la formule (2.12). C'est l'unique élément B (fonction de h) prédictible de cette décomposition qui se trouve dans \mathcal{V} . Remarquer maintenant qu'il est possible d'extraire d'une semimartingale S une unique martingale locale continue initiée à zéro que l'on notera S^c . Le *second* élément du triplet est la variation quadratique de cet élément S^c . Finalement, en associant une mesure aléatoire μ aux sauts de la semimartingale, on peut construire un compensateur ν de μ , dans le sens que la mesure diminuée de ce compensateur permettra de fournir des martingales locales. Le *troisième* élément du triplet est ainsi le compensateur ν .

On peut alors obtenir une écriture de la semimartingale S en fonction de ses caractéristiques :

$$S = S_0 + S^c + h * (\mu - \nu) + B + (x - h(x)) * \mu$$

Récapitulons en allant de la droite vers la gauche : $(x - h(x)) * \mu$ est la partie des grands sauts, élément de \mathcal{V} . Vient ensuite la partie restante qui se décompose elle-même en B , élément de \mathcal{V} , $h * (\mu - \nu)$, élément purement discontinu de \mathcal{L} , S^c , élément continu de \mathcal{L} . S'ajoute une condition de départ S_0 .

2.5.2 Des Semimartingales aux Processus de Lévy

Nous en venons maintenant à la description des processus de Lévy par des triplets canoniques de caractéristiques. Les processus de Lévy formant un sous-groupe particulier de la classe des semimartingales, on peut leur allouer un triplet de caractéristiques. Dans ce cas, les caractéristiques sont déterministes et admettent la forme suivante :

$$\begin{cases} B = b t \\ C = c t \\ \nu(dt, dx) = dt \nu'(dx) \end{cases}$$

avec en dimension un :

$$\begin{cases} b \in \mathbb{R} \\ c \in \mathbb{R}^+ \\ \int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1) \nu'(dx) < +\infty \\ \nu'(\{0\}) = 0 \end{cases}$$

où dans un but de simplicité nous noterons ν au lieu de ν' par la suite.

Ces caractéristiques, au-delà d'une simple représentation, peuvent être associées à une compréhension intuitive des processus de Lévy. La *première* caractéristique peut en général s'interpréter comme une dérive. La *deuxième* correspond elle à un mouvement brownien, de telle sorte que les deux premières caractéristiques correspondent ensemble à un mouvement brownien arithmétique. Enfin, la *troisième* caractéristique est une représentation du taux d'arrivée de sauts, fonction de la taille des sauts affectant le processus. Bien noter que la seule composante continue possible pour un processus de Lévy est un mouvement brownien arithmétique.

En se fondant sur ce qui vient d'être dit sur les caractéristiques des processus de Lévy et en choisissant $h(x) = x \mathbf{1}_{(|x| < 1)}$ comme fonction de troncation, on peut adapter la représentation des semimartingales à ces processus. Notant L un processus de Lévy quelconque, on a donc :

$$L(t) = W(t) + \int_{|x| < 1} x(\mu(t, dx) - t\nu(dx)) + bt + \int_{|x| \geq 1} x\mu(t, dx)$$

Cette représentation, connue sous le nom de décomposition de Lévy-Itô, est un des résultats les plus importants et les plus connus sur les processus de Lévy. Elle fournit une bonne compréhension des différentes parties qui composent ces processus. Analysons donc cette formule de la gauche vers la droite : on trouve d'abord une composante brownienne (martingale continue), puis une martingale discontinue représentant les petits sauts, puis une

dérive linéaire (à variation bornée nécessairement), et enfin une partie discontinue à variation bornée représentant les grands sauts.

Nous avons jusqu'à présent vu deux manières distinctes de représenter les processus de Lévy : les caractéristiques et la décomposition de Lévy-Itô. Il existe en fait une troisième représentation courante que nous avons déjà abordée au sein du premier chapitre : la formule de Lévy-Khintchine qui est la fonction caractéristique associée à une loi infiniment divisible, c'est-à-dire à une distribution d'un élément marginal X_t quelconque d'un processus de Lévy. Nous rappelons cette formule ici :

$$E(e^{iuX_t}) = e^{t(ib u - \frac{1}{2}cu^2 - \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux\mathbf{1}_{[-1,1]}(x))\nu(dx)} \quad (2.13)$$

où l'on retrouve bien les caractéristiques dans l'argument de l'exponentielle : la dérive, la partie brownienne et également la mesure de taux d'arrivée des sauts au sein de l'intégrale.

Les trois représentations des processus de Lévy vues plus haut sont intimement liées et facilement interprétables. La représentation par caractéristiques est la plus simple des trois et regroupe sous une forme dense toute l'information utile attachée à un processus de Lévy. Nous utiliserons pleinement cette représentation par la suite lorsque nous nous intéresserons aux changements de mesure.

2.5.3 Changements de Mesure

Nous précisons d'abord le cadre dans lequel nous allons étudier les changements de mesure.

Rappelons brièvement un acquis du premier chapitre : les modèles qui visent à représenter les cours d'actions en se servant de processus de Lévy peuvent être classés en deux groupes. Le premier de ces groupes consiste en une spécification des distributions de rendements et correspond de manière synthétique à l'emploi de distributions générales hyperboliques (qui contiennent entre autres les distributions hyperbolique, normale inverse gaussienne...) qui possèdent une expression générale et complexe de la forme :

$$\rho(x) = e^{\beta(x-\mu)} \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{\lambda}{2}} (\delta^2 + (x - \mu)^2)^{\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{4}} K_{\lambda - \frac{1}{2}}(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2})}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda - \frac{1}{2}} \delta^{\lambda} K_{\lambda}(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}$$

où K est une fonction de Bessel modifiée du troisième type.

Le deuxième groupe de modèles part lui d'une spécification des caractéristiques et en particulier de la mesure de Lévy du processus des rendements.

Le modèle dit CGMY fait partie de ce groupe et est basé sur le choix de mesure de Lévy suivant :

$$\nu(x) = \begin{cases} C \frac{e^{-G|x|}}{|x|^{1+Y}} & \forall x < 0 \\ C \frac{e^{-M|x|}}{|x|^{1+Y}} & \forall x > 0 \end{cases}$$

Une classification par types de processus incluerait le modèle variance gamma dans le premier de ces groupes, cependant notre approche le fait appartenir au second. En effet, il correspond de manière heuristique à une spécification de mesure de Lévy - laquelle est un sous-cas de la mesure de Lévy CGMY où il suffit de prendre un Y égal à zéro. Le modèle variance gamma est donc bien un modèle à trois paramètres.

Nous nous concentrons ici sur les changements de mesure réalisés dans le cadre du second groupe de modèles. Nous cherchons donc à savoir comment s'opèrent les changements de mesure dans un contexte où les processus sont décrits et spécifiés à travers leur mesure de Lévy.

Plus précisément, nous cherchons à déterminer de quelle manière sont changées les caractéristiques et en particulier la mesure de Lévy sous un changement de mesure. Nous souhaitons en particulier réaliser des changements de mesure "conservatifs" dans le sens où un processus de Lévy restera un processus de Lévy sous la nouvelle mesure construite. Ecrit différemment, les rendements des actifs étant modélisés par des processus de Lévy dans l'univers historique, nous cherchons à obtenir des rendements qui soient toujours modélisés par des processus de Lévy dans l'univers risque-neutre.

Soient (B, C, ν) les caractéristiques d'un processus de Lévy par rapport à la mesure historique P . Sous un changement absolument continu de mesure, on obtient un nouveau processus de Lévy possédant les caractéristiques (B', C', ν') par rapport à la nouvelle mesure Q de la manière suivante :

$$\begin{cases} B' = B + KC + \int_{|x| \leq 1} x(Y(x) - 1)\nu(dx) \\ C' = C \\ \nu'(dx) = Y(x)\nu(dx) \end{cases} \quad (2.14)$$

où K est une constante réelle, $Y(x)$ une fonction borélienne et l'on a conservé la même fonction de troncation qu'auparavant. Ce résultat est obtenu comme un sous-cas d'un résultat similaire portant sur les semimartingales et donné dans le livre de Jacod et Shiryaev [63].

Si nous venons d'expliquer comment sont modifiées les caractéristiques d'un processus de Lévy sous un changement de mesure, il reste à expliciter le changement de mesure lui-même. Comme on peut le voir dans le chapitre

II de la thèse de Raible [109], le processus densité peut s'exprimer comme l'exponentielle stochastique d'un processus N défini comme :

$$N = KW + (Y(x) - 1) * (\mu - \nu)$$

Dans le cadre de ce chapitre, nous ne nous intéressons pas à ce mode général de changement de mesure reposant sur des exponentielles stochastiques. Nous nous concentrerons sur un sous-cas *ad hoc* plus simple introduit en section suivante.

Nous concluons cette section par une illustration didactique. Soit un processus de Lévy sans sauts modélisé par les caractéristiques $(0, C, 0)$: il s'agit d'un simple mouvement brownien sans dérive que l'on représentera comme :

$$L(t) = \sqrt{C}w(t)$$

où w est un mouvement brownien *standard* (remarquer que : $\langle L(t) \rangle = Ct$).

Dans ce cas, on pose $K = 1$ et avec $N(t) = \sqrt{C}w(t)$, le processus densité s'écrit :

$$Z_t = e^{\sqrt{C}w(t) - \frac{Ct}{2}}$$

On reconnaît alors le changement classique de mesure qui s'emploie de manière extensive en finance de marché. Les caractéristiques du processus de Lévy sous la nouvelle mesure prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} B' = C \\ C' = C \\ \nu'(dx) = 0 \end{cases}$$

Et, ici aussi, on retrouve un résultat standard de la finance : suite à un changement de mesure, un mouvement brownien devient un mouvement brownien arithmétique de même variance et possédant une dérive. Vu différemment, si l'on retranche cette dérive au mouvement brownien de départ, on obtient un mouvement brownien (éventuellement standard) sous la mesure d'arrivée. Il s'agit du théorème de Girsanov bien connu appliqué aux mouvements browniens.

Dans cette section, nous avons donc réduit le théorème de Girsanov des semimartingales à un théorème de Girsanov des processus de Lévy. Puis, dans l'exemple, nous avons opéré une seconde réduction du théorème de Girsanov des processus de Lévy vers les mouvements browniens. En section suivante, nous utiliserons une version simple du changement de mesure défini tel qu'en (2.14) pour l'appliquer à l'évaluation des produits dérivés dans un modèle à processus de Lévy.

2.6 Evaluation des Produits Dérivés

Nous détaillons l'évaluation des produits dérivés portant sur des sous-jacents affectés par des sauts, et modélisés par des processus de Lévy du type géométrique (c'est-à-dire des exponentielles de processus de Lévy). La méthode proposée repose de manière importante sur les changements de mesure explicités plus haut et notamment sur les transformées d'Esscher que nous appliquons dans le cadre des modèles reposant sur une spécification de mesure de Lévy.

2.6.1 Transformées d'Esscher

Nous supposons ici que les actifs sont modélisés par des exponentielles de processus de Lévy. Cette hypothèse est loin d'être anodine : elle empêche toute construction d'un marché complet, sauf à se restreindre à des processus de Poisson composés ou, dans une direction opposée, à construire un modèle peu manipulable. En l'absence d'un marché complet, on se trouve en présence de plusieurs mesures d'évaluation dites "risque-neutres". Le choix de la mesure d'évaluation est ainsi capital car à des choix distincts sont associés des gammes de prix distinctes.

Il existe deux approches connues de détermination de la mesure risque-neutre dans ce type de cadre d'évaluation. Dans la première approche (cf [23]), la mesure risque-neutre est extraite directement du marché, c'est-à-dire d'un ensemble de prix d'options. Le calcul des produits dérivés se fait alors par intégration numérique du paiement à l'échéance par rapport à cette mesure. Cette approche a été employée pour des sous-jacents du type variance gamma et CGMY. Nous détaillerons cette approche en section suivante.

La seconde approche consiste quant à elle à déterminer la mesure risque-neutre au moyen d'une transformation d'Esscher (cf [106]). Cette approche a déjà été employée pour des sous-jacents de type général hyperbolique et nous savons que dans un cadre diffusif elle s'avère particulièrement opérante.

Nous partons de la seconde approche, c'est-à-dire de l'emploi de transformées d'Esscher pour le calcul de la mesure risque-neutre; cependant nous appliquons cette approche aux modèles qui supposent des sous-jacents de type variance gamma, CGMY, CGMY étendu... donc aux modèles partant d'une spécification de la mesure de Lévy.

Rappelons qu'un changement de mesure par transformée d'Esscher cor-

respond au choix de densité de Radon-Nikodym suivant :

$$\left(\frac{dQ}{dP}\right)_t = \frac{e^{\theta X(t)}}{E(e^{\theta X(t)})}$$

Avec un tel choix de processus densité, on peut facilement calculer la fonction caractéristique associée au processus de Lévy sous la nouvelle mesure. Nous verrons plus loin que cela s'avère important quand les actifs sont modélisés en partant de la formule de Lévy-Khintchine. Nous pouvons donc calculer la fonction caractéristique de l'univers risque-neutre χ_Q en fonction de celle de l'univers historique χ_P selon :

$$\chi_Q(u) = E_Q(e^{iuX_t}) = \frac{\chi_P(u - i\theta)}{\chi_P(-i\theta)}$$

A noter qu'une expression similaire relie la fonction génératrice des moments de l'univers risque-neutre M_Q à la fonction génératrice des moments de l'univers historique M_P :

$$M_Q(u) = E_Q(e^{uX_t}) = \frac{M_P(u + \theta)}{M_P(\theta)}$$

La démonstration de la première formule pour les fonctions caractéristiques est donnée en annexe B (cf. démonstration IV). Remarquer que les différents termes en jeu correspondent à des intégrales complexes et que l'on suppose donc l'existence de ces intégrales dans la démonstration. La seconde formule se démontre quant à elle de la même manière; plus précisément les deux démonstrations peuvent se réduire à une seule à condition d'étendre la fonction caractéristique au domaine complexe ou à un sous-domaine sur lequel les intégrales peuvent bien être définies.

Nous pouvons maintenant utiliser la relation entre les fonctions caractéristiques sous les univers P et Q pour obtenir une relation entre les caractéristiques du processus sous la probabilité Q connaissant ces mêmes caractéristiques sous la probabilité P . Nous obtenons donc (cf. annexe B, démonstration V) les caractéristiques sous l'univers risque-neutre selon :

$$\begin{cases} B_Q = B_P + \theta C_P + \int_{|x| \leq 1} x(e^{\theta x} - 1)\nu_P(dx) \\ C_Q = C_P \\ \nu_Q(dx) = e^{\theta x}\nu_P(dx) \end{cases}$$

La transformée d'Esscher permet une interprétation simple de l'action du changement de mesure sur le processus de Lévy : la mesure de Lévy sous Q est la mesure de Lévy sous P multipliée par un facteur exponentiel. En d'autres termes, la mesure de probabilité et la mesure de Lévy sont modifiées de manière identique sous une transformation d'Esscher. Autrement dit, une

forme de symétrie agréable sous-tend ce type de changement de mesure - le décalage qui affecte les mesures de probabilité est répercuté sur les mesures des sauts, les mesures de Lévy.

Cet aspect est particulièrement remarquable quand l'on prend pour hypothèse des dynamiques du type CGMY. La mesure de Lévy du processus CGMY sous l'univers risque-neutre s'écrit ainsi :

$$\nu_Q(x) = \begin{cases} C \frac{e^{-(G+\theta)|x|}}{|x|^{1+Y}} & \forall x < 0 \\ C \frac{e^{-(M-\theta)|x|}}{|x|^{1+Y}} & \forall x > 0 \end{cases}$$

On peut observer à partir de cette expressions que seuls les paramètres G et M sont affectés par un changement de mesure du type Esscher. Ce changement correspond donc à un biais d'asymétrie qui se traduit par une translation des paramètres de l'exponentielle de la mesure de Lévy. On peut résumer cela en écrivant les paramètres du processus CGMY dans l'univers risque-neutre Q comme :

$$\begin{cases} C_Q = C_P \\ G_Q = G_P + \theta \\ M_Q = M_P - \theta \\ Y_Q = Y_P \end{cases} \quad (2.15)$$

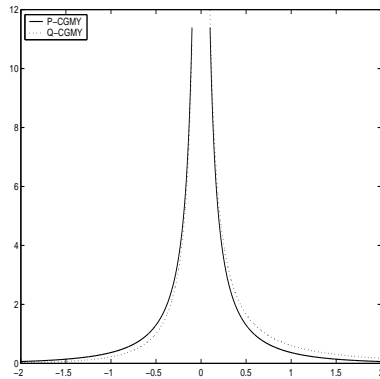


FIG. 2.1 – Mesures de Lévy CGMY sous P et Q

L'effet du changement de mesure de type Esscher sur la mesure des sauts peut être visualisé en figure (2.1) : quand la proportion des sauts (positifs par exemple) de toute taille dans une direction est augmentée, alors la proportion des sauts (négatifs dans le même exemple) de toute taille dans l'autre direction est diminuée. Le biais qu'introduit le changement d'Esscher sur les mesures de probabilité se retrouve donc au niveau des mesures de taux

d'arrivée de sauts. Remarquer toutefois le peu de flexibilité permise : un seul paramètre, θ , décrit le biais qui s'applique de manière globale.

Remarquer également que sous un changement de mesure du type Esscher, la conservation des paramètres C et Y correspond au fait que la nouvelle mesure est équivalente à la mesure de départ (les ensembles négligeables par rapport à la mesure P le sont par rapport à la mesure Q et réciproquement) : la transformée d'Esscher permet de construire des changements équivalents de mesure.

Nous passons à l'évaluation des produits dérivés quand la mesure risque-neutre est obtenue par transformée d'Esscher. Avant de considérer le cas général où le processus des rendements est décrit à partir de ses caractéristiques et en particulier à partir de sa mesure de Lévy, nous présentons un exemple simple où une formule d'évaluation fermée peut être obtenue.

2.6.2 Formule de Gerber et Shiu

Nous commençons par réécrire la formule d'évaluation (2.11), en notant par $F(x, \theta)$ la fonction de répartition associée à S_T , comme suit :

$$V(0) = S_0(1 - F(K, \theta^* + 1)) - Ke^{-rT}[1 - F(K, \theta^* + 1)]$$

Dans certains cas, cette formule permet d'aboutir à une évaluation explicite comme dans le cadre du modèle de Black et Scholes. Il en est ainsi si l'on modélise les rendements des titres par des processus de Lévy de type inverse gaussien (voir Gerber et Shiu [55]).

Les rendements peuvent s'exprimer comme : $X_t = Y_t - ct$ où Y_t est un processus inverse gaussien pur de paramètres a et b , associé à la fonction de répartition suivante :

$$J(x, a, b) = N\left(-\frac{a}{\sqrt{2x}} + \sqrt{2bx}\right) + e^{2a\sqrt{b}} N\left(-\frac{a}{\sqrt{2x}} - \sqrt{2bx}\right) \quad \forall x > 0$$

de telle manière que :

$$F(x, t) = J(x + ct, a, b)$$

Les résultats suivants s'obtiennent aisément :

$$E[e^{zX_t}] = e^{at(\sqrt{b} - \sqrt{b-z}) - ctz} \quad \forall z < b$$

et :

$$E[e^{zX_t} | \theta] = e^{at(\sqrt{b-\theta} - \sqrt{b-\theta-z}) - ctz} \quad \forall z < b - \theta$$

On peut donc observer que X_t reste un processus inverse gaussien sous la nouvelle mesure Q_θ . Le paramètre θ^* qui rend les prix actualisés Q_{θ^*} -martingale est donné par l'équation implicite en θ^* suivante :

$$r = a(\sqrt{b - \theta^*} - \sqrt{b - \theta^* - 1}) - c$$

En prenant $b^* = b - \theta^*$, Gerber et Shiu obtiennent la formule d'évaluation de l'option d'achat standard :

$$V(0) = S_0 \left[1 - J \left(\log\left(\frac{K}{S_0}\right) + cT, aT, b^* - 1 \right) \right] - K e^{-rT} \left[1 - J \left(\log\left(\frac{K}{S_0}\right) + cT, aT, b^* \right) \right] \quad (2.16)$$

2.6.3 Méthode Générale d'Evaluation

Nous passons maintenant à l'étude d'une méthode très générale d'évaluation des produits dérivés portant sur des sous-jacents modélisés par des processus de Lévy géométriques. Nous détaillons les différentes étapes de notre approche qui est de nature mixte comme expliqué précédemment.

Rappelons d'abord la forme qu'est supposé admettre un sous-jacent S :

$$S_t = S_0 e^{X_t}$$

où X est un processus de Lévy.

Le prix d'une option standard d'achat s'exprime de manière classique comme :

$$V(0) = E_Q (e^{-rT} (S(T) - K)^+) \quad (2.17)$$

A ce niveau se pose le problème de la détermination de la mesure risque-neutre d'évaluation Q . Supposant qu'elle est donnée par une transformée d'Esscher, le problème se réduit à celui du calcul de θ .

Dans notre contexte financier, les prix actualisés devant être des martingales sous Q , on doit avoir nécessairement :

$$S_0 = E_Q (S_0 e^{X_t} e^{-rt})$$

qui fournit une contrainte sur θ . Plus précisément, on peut écrire :

$$S_0 = S_0 E_P \left(\left(\frac{dQ}{dP} \right)_t e^{X_t} e^{-rt} \right) = S_0 E_P \left(\frac{e^{\theta X_t}}{E_P(e^{\theta X_t})} e^{X_t} e^{-rt} \right)$$

Finalement, en prenant un temps t égal à un et en notant M_P la fonction génératrice des moments sous P , on obtient la contrainte suivante:

$$e^r = \frac{M_P(\theta + 1)}{M_P(\theta)} \quad (2.18)$$

où il reste à déterminer θ par une méthode de recherche de racine.

Revenons à la formule (2.17); nous pouvons l'écrire sous une forme intégrale plus détaillée quand la distribution sous-jacente admet une densité:

$$V(0) = S_0 e^{-rT} \int_k^{+\infty} (e^s - e^k) f_{\lambda_i}(s) ds \quad (2.19)$$

où $f_{\lambda_i}(\cdot)$ est la densité de la distribution X_T sous Q , λ_i est l'ensemble des paramètres caractérisant le processus de Lévy X , s est la variable d'intégration correspondant à X_T , et:

$$k = \ln \left(\frac{K}{S_0} \right)$$

Pour calculer le prix de l'option, deux étapes sont nécessaires. Il convient d'abord de calculer les paramètres risque-neutres λ_i du processus de Lévy ainsi que la densité $f_{\lambda_i}(\cdot)$ dépendante de ces paramètres. On peut ensuite calculer le prix de l'option par simple intégration numérique de la formule (2.19).

Nous commençons par aborder le problème de la détermination des paramètres λ_i . Soit par exemple un cours d'action dont le rendement est modélisé par un processus CGMY. Dans ce cas, les paramètres C , G , M et Y sont ceux de l'univers historique; on peut donc les noter C_P , G_P , M_P et Y_P . Cependant les paramètres λ_i que l'on cherche à calculer sont ceux de l'univers risque-neutre: dans le cas présent il s'agit des paramètres risque-neutres C_Q , G_Q , M_Q et Y_Q .

Dans une première étape, on peut estimer les paramètres C_P , G_P , M_P et Y_P à partir de données sur le cours de l'action par une méthode du type maximisation de vraisemblance. Alors, on peut calculer C_Q , G_Q , M_Q et Y_Q comme en (2.15), où le paramètre d'Esscher θ aura été obtenu par la résolution de (2.18).

Ces paramètres C_Q , G_Q , M_Q et Y_Q permettent de calculer la fonction caractéristique (2.13) du processus CGMY dans l'univers risque-neutre. Il convient alors de réaliser une inversion de cette fonction caractéristique pour pouvoir obtenir la densité $f_{\lambda_i}(\cdot)$; pour ceci on a recours à la méthode dite

"Fast Fourier Transform". Finalement, il ne reste plus qu'à réaliser l'intégration numérique pour calculer le prix de l'option.

Nous avons présenté cette méthode en deux étapes parce qu'elle est d'interprétation aisée. Cependant, il faut noter qu'elle nécessite deux intégrations successives (FFT puis intégration par rapport au *payoff*). Cette méthode est donc plus lourde en termes de temps de calcul qu'une méthode par intégration simple. Or, il existe des méthodes permettant de calculer les prix d'options par une unique intégration. Le lecteur peut consulter l'ouvrage de Boyarchenko et Levendorskii [19] pour un traitement complet des méthodes de calcul des transformées de Fourier généralisées (qui incluent les transformées de Fourier et de Laplace inverse). Citons également la méthode désormais classique de Carr et Madan [25] qui exprime la valeur d'une option d'achat comme :

$$V_0 = \frac{e^{-\alpha k - rT}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuk} \left(\frac{\psi_X(u - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 - \alpha - u^2 + i(2\alpha + 1)u} \right) du$$

où k est le logarithme du strike, ψ_X la fonction caractéristique du processus de Lévy X et α un paramètre positif introduit de manière *ad hoc* afin de pouvoir évaluer l'option par transformée de Fourier rapide.

2.6.4 Illustration

Nous calculons ici quelques figures de smile théorique en guise d'illustration des méthodes d'évaluation de produits dérivés portant sur des sous-jacents modélisés par des processus de Lévy géométriques. Pour réaliser cela, nous spécifions les divers paramètres, y compris les paramètres risque-neutres du sous-jacent qui est supposé suivre une dynamique du type exponentielle de processus CGMY, et calculons les prix des options au moyen de l'équation (2.19) pour différents niveaux de strike. Alors, en inversant ces prix par la formule de Black et Scholes, nous obtenons les volatilités implicites correspondantes et nous les représentons en fonction du niveau de strike.

Nous choisissons ainsi les valeurs suivantes pour les paramètres :

S_0	r	T	K	C_Q	G_Q	M_Q	Y_Q
10	0.01	1	6:14	1:1.4	5	5	0.1

Les smiles théoriques résultants sont présentés en figure 2.2 où l'axe des abscisses correspond au strike et les différentes courbes à divers niveaux du

paramètre C . Remarquer qu'on est en présence d'une forme concave standard et que cette dernière n'est pas affectée par la valeur du paramètre C .

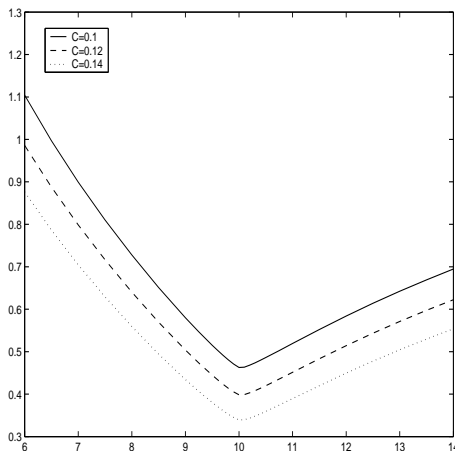


FIG. 2.2 – *Smile théorique pour des rendements du type CGMY*

Nous souhaitons maintenant comparer la forme que présente le smile sous une hypothèse de représentation des rendements par des processus CGMY à la forme qu'il peut présenter dans un modèle similaire où cette fois les rendements sont représentés par des processus CGMY α, β -étendus.

Nous supposons ainsi que la densité de Lévy associée aux rendements est du type :

$$\nu(x) = \begin{cases} C \frac{e^{-G|x|}}{|x|^{1+Y}} (\alpha - |x|^\beta)^2 & \forall x < 0 \\ C \frac{e^{-M|x|}}{|x|^{1+Y}} (\alpha - |x|^\beta)^2 & \forall x > 0 \end{cases}$$

Nous rappelons les motivations qui ont conduit à postuler une telle mesure de Lévy (voir le premier chapitre). Il s'est agi de dépasser l'hypothèse de monotonie complète du modèle CGMY afin de pouvoir prendre en compte des mesures de Lévy "bossées" qui sont en relation avec des distributions de rendements potentiellement "bossées" elles-mêmes. Nous rappelons également que ce choix de paramétrisation en est un parmi de nombreux autres.

Les smiles calculés dans ce cadre peuvent être observés en figure 2.3 en fonction du strike et ceci pour différents niveaux de β . Ils sont significatifs en terme de "pricing" : l'introduction d'un ou de plusieurs facteurs polynomiaux au sein de la mesure de Lévy n'apporte pas *in fine* de modification substantielle à la forme du smile. En d'autres termes, les paramètres G et

M de l'exponentielle de la mesure de Lévy les dominant. Remarquer que ce sont ceux qui caractérisent un processus gamma double ou processus variance gamma.

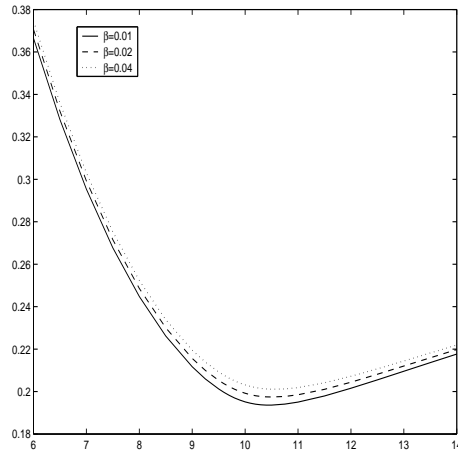


FIG. 2.3 – *Smile théorique pour des rendements du type CGMY α, β -étendus*

En ce qui concerne le paramètre C , il intervient par un impact global, comme on a pu s'en rendre compte sur la première figure. Les paramètres Y , α , et β sont donc intéressants en termes de modélisation fine du processus des rendements (en particulier pour les derniers aux courtes échelles de temps); cependant et pour des produits optionnels à maturité relativement grande, ce ne sont pas eux qui auront un impact le plus grand sur les prix de ces produits.

Pour pouvoir disposer de formes plus complexes de smile, la modélisation des rendements par processus de Lévy ne suffit plus. Il convient alors de changer de temps ces processus, ce qui est équivalent à une hypothèse de volatilité stochastique. Nous reviendrons sur ce point dans une prochaine section.

2.6.5 Obtention Directe de la Mesure Risque-Neutre

Jusqu'à présent, nous nous sommes concentrés sur la transformation d'Esscher pour le passage de l'univers historique à l'univers risque-neutre. Cette approche, qui s'applique aussi bien dans les cadres diffusifs que de Lévy, est particulièrement esthétique. Elle est simple et intuitive, et permet par ailleurs de bien voir les correspondances avec les changements de numé-

raire classiques.

Ainsi, comme noté précédemment, on a correspondance entre Q_θ et Q , et entre $Q_{\theta+1}$ et Q_S . On peut mener des calculs formels par le biais de cette transformation. Elle apparaît donc indiquée pour toute étude théorique d'un problème d'évaluation d'options portant sur des sous-jacents de type Lévy géométrique.

Cependant, il faut remarquer que la transformation d'Esscher fournit *une* mesure risque-neutre et qu'en présence de marché incomplet, on peut avoir plusieurs mesures risque-neutres. Se pose notamment la question de pouvoir retrouver parfaitement la mesure risque-neutre réelle à partir d'une transformation d'Esscher. On peut essayer de le faire par calibrage du θ mais il faut bien noter que ce calibrage ne porte que sur un seul paramètre, et donc par définition n'incorpore pas nécessairement toute l'information de marché.

Nous présentons à présent une seconde approche pour obtenir les dynamiques des cours dans l'univers risque-neutre. C'est l'approche utilisée par Carr, Geman, Madan et Yor [23].

Exprimons les cours d'actions dans l'univers risque-neutre comme :

$$S_t = S_0 e^{rt + \omega t + L_{(C_Q, G_Q, M_Q, Y_Q)}}$$

où $L_{(C_Q, G_Q, M_Q, Y_Q)}$ est un processus de Lévy CGMY dans l'univers risque-neutre et ω un facteur permettant d'avoir :

$$E(S_t) = S_0 e^{rt}$$

soit la condition de martingale dans l'univers risque-neutre.

On a donc nécessairement :

$$e^{\omega t} E\left(e^{L_{(C_Q, G_Q, M_Q, Y_Q)}}\right) = 1$$

soit :

$$\omega t = -\log(\psi_Q(-i))$$

par ailleurs, on a la définition classique :

$$\psi_Q(u) = E\left(e^{iuL_{(C_Q, G_Q, M_Q, Y_Q)}}\right)$$

Pour résumer :

$$S_t = S_0 e^{rt - \log(\psi_Q(-i)) + L_{(C_Q, G_Q, M_Q, Y_Q)}} \quad (2.20)$$

L'obtention des paramètres C_Q , G_Q , M_Q et Y_Q s'effectue par calibrage sur les données de marché, c'est-à-dire sur une base de données de cours d'options.

On peut par exemple procéder par une minimisation de l'écart quadratique entre les cours d'options enregistrés dans la base de données et ceux, théoriques, calculés avec les paramètres C_Q , G_Q , M_Q et Y_Q pour en obtenir des valeurs estimées. Notant par O_{th} un cours d'option théorique et par O_{emp} un cours d'option observé empiriquement, Σ étant la somme par rapport aux diverses valeurs observées, on peut réaliser :

$$\min_{(C_Q, G_Q, M_Q, Y_Q)} \sum (O_{\text{th}} - O_{\text{emp}})^2 \quad (2.21)$$

Ce qui nous permet alors de connaître la dynamique du cours telle qu'écrite en formule (2.20). Disposant de cette dynamique, on peut calculer de nouveaux prix d'options par la méthode standard.

Cette méthode est générale et s'applique à d'autres processus que les processus CGMY pris en exemple ici. Remarquons que dans le cas des processus CGMY α, β - étendus, les formules (2.20) et (2.21) tiennent encore où il suffit de remarquer :

$$\begin{aligned} -\log(\psi_Q(-i)) = & -C\Gamma(-Y)[(M-1)^Y - M^Y + (G+1)^Y - G^Y] \\ & - C\Gamma(2\beta - Y)[(M-1)^{Y-2\beta} - M^{Y-2\beta} + (G+1)^{Y-2\beta} - G^{Y-2\beta}] \\ & - C\Gamma(\beta - Y)[(M-1)^{Y-\beta} - M^{Y-\beta} + (G+1)^{Y-\beta} - G^{Y-\beta}] \end{aligned}$$

Nous passons maintenant à l'étude de l'évaluation des produits dérivés portant sur des sous-jacents modélisés par des processus de Lévy géométriques d'un type bien particulier : les processus de Lévy stables.

2.7 L'Approche Stable

Nous détaillons ici deux méthodes d'évaluation des produits dérivés quand le processus des rendements est de type Lévy stable. La première de ces méthodes est désormais standard (voir Belkacem [10]) et repose sur la simulation d'équations différentielles stochastiques. La seconde méthode, développée par Carr et Wu [27], est plus récente et constitue une extension des méthodes d'évaluation développées par Madan et ses coauteurs.

2.7.1 Méthode Classique

Dans l'approche classique d'évaluation des options dans un modèle stable, les prix des actifs sont modélisés par des équations différentielles du type :

$$dS_t = \mu(t, S_t) dt + \gamma(t, S_t) dL_\alpha(t)$$

où L_α est un mouvement α -stable symétrique avec $\alpha > 1$, et où μ et γ vérifient des conditions d'intégrabilité *ad hoc*.

Ces équations différentielles stochastiques peuvent être simulées par méthode d'Euler, c'est-à-dire par une discrétisation du type :

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} + \mu(t_i, S_{t_i})\Delta t + \gamma(t_i, S_{t_i})\Delta L_\alpha((\Delta t)^{\frac{1}{\alpha}})$$

Belkacem évalue ainsi des options d'achat standard par méthode de Monte-Carlo, c'est-à-dire par moyenne de tirages de la solution d'une équation différentielle stochastique discrétisée telle que ci-dessus. En particulier, il suppose pour ses évaluations des dynamiques simples du type :

$$dS_t = \mu S_t dt + \gamma S_t dL_\alpha(t)$$

où il rappelle qu'un mouvement α -stable symétrique peut également être perçu comme un mouvement brownien subordonné (changé de temps) par un mouvement $(\frac{\alpha}{2}, 1)$ -stable.

Remarquer que, bien qu'il soit éventuellement possible d'analyser le rendement comme un processus de Lévy stable symétrique, on ne retrouve pas pour le cours du sous-jacent une forme du type exponentielle de processus de Lévy - autrement dit une forme pleinement analysable de manière intuitive.

Remarquer également que les évaluations réalisées dans ce cadre, comme dans tout cadre de Lévy, permettent de retrouver l'effet de smile.

2.7.2 Retour sur le Modèle de Carr et Wu

Nous avons vu au chapitre I que Carr et Wu ont introduit dans leur récent article du Journal of Finance [27] une représentation des rendements d'actions par des processus de Lévy stables. Cette représentation permet de manière innovante d'obtenir des cours dont tous les moments sont finis - ce qui n'est pas le cas dans les autres approches stables existantes.

L'application à l'évaluation des options dans un tel cadre est similaire aux approches précédentes : les options peuvent être calculées au moyen de

transformées de Fourier rapide. L'intérêt principal de ce modèle est qu'il permet de rendre compte d'aspects nouveaux sur la forme du smile.

Par smile, on entend souvent : graphe de la volatilité implicite par rapport au strike. Cependant, c'est oublier l'importance de la maturité. On peut en fait tracer un smile en trois dimensions qui représente la volatilité implicite par rapport au strike et la maturité des options.

Carr et Wu ont observé pour des options portant sur l'indice S&P 500 que la volatilité implicite décroît lentement par rapport à la maturité, contrairement à ce que prédisent la plupart des modèles. De fait, pour de grandes maturités, on observe une convergence gaussienne des modèles actuels y compris des modèles à processus de Lévy : une convergence gaussienne correspond à une convergence vers le modèle de Black et Scholes et donc à une disparition du smile.

C'est pour pallier ce problème que Carr et Wu ont introduit des rendements stables : aux grandes échelles de temps, les distributions stables par définition restent non gaussiennes et permettent donc de rendre compte du faible déclin empirique de la volatilité implicite par rapport au smile.

Carr et Wu ont donc construit un modèle possédant peu de paramètres et permettant de rendre compte de cet aspect particulier du smile. Ils ont montré qu'il était au moins aussi performant que tout autre modèle compliqué (du type combiné sauts - temps économiques, voir la section suivante), mais reste pour autant posée la question de la justesse de la modélisation des rendements par des processus de Lévy stables complètement asymétriques.

2.8 Modèles Combinés Sauts - Temps Financier

Un aspect important des dynamiques financières est la prise en compte d'un temps de marché. Cette idée remonte à Samuelson et Mandelbrot mais n'a été prise en compte qu'assez récemment dans les modèles financiers. Le temps "financier" ou "économique" correspond à la remarque suivante : il existe des phases d'agitation intense du marché suivies de phases de calme très marqué.

Une des formes que peut prendre ce temps financier est la *volatilité stochastique* : les cours d'actions, pris individuellement, présentent également des périodes de calme et de forte agitation. Au début des années quatre-vingt dix, cet aspect a été pris en compte par l'introduction dans les dynamiques d'actions d'une volatilité qui est elle-même une dynamique, un processus sto-

chastique. Le modèle d'Heston [60] est le plus connu des modèles à volatilité stochastique; il introduit dans la dynamique lognormale du cours sous-jacent une volatilité corrélée qui suit un processus de Cox-Ingersoll-Ross.

La question que nous pouvons nous poser à ce niveau est : peut-on construire un modèle où les rendements des cours seraient modélisés par des processus de Lévy et où le temps serait rendu par un processus stochastique, typiquement une fonctionnelle de processus Cox-Ingersoll-Ross? C'est-à-dire y-a-t'il moyen de construire un modèle incorporant les aspects "sauts" et "temps financier"?

De fait, et contre toute attente, cela ne présente pas de difficulté particulière dès lors que l'on peut calculer la fonction caractéristique associée au processus stochastique de rendement présentant ces deux aspects. Comme l'on montré Carr, Geman, Madan et Yor [24], si l'on écrit le processus de rendement Z comme $Z_t = X(Y_t)$ où X est un processus de Lévy et Y son changement de temps, la fonction caractéristique de Z s'écrit simplement.

Ainsi on a :

$$\psi_Z(u) = \psi_Y(-i\psi_X(u))$$

et alors la connaissance de la fonction caractéristique ψ_Z permet de calculer les prix d'options par transformée de Fourier rapide et de la même manière qu'explicité plus haut. Noter que la prise en compte d'une corrélation (typiquement négative sur les marchés d'actions) entre le rendement et son changement de temps ne présente guère plus de difficultés; pour plus de détails à ce sujet, consulter le papier de recherche de Carr et Wu [26].

Remarquer finalement que cette méthode peut s'employer pour de nombreux modèles, comme le modèle des processus CGMY α, β -étendus que nous introduisons au chapitre I et pour lequel on connaît la fonction caractéristique ψ_X .

2.9 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre comment il est possible d'associer un prix à un produit dérivé portant sur sous-jacent présentant des sauts.

Dans ce contexte, les changements de mesure apparaissent comme extrêmement importants. Nous avons pu montrer que ce ne sont pas seulement des outils de calcul. Ils sont bien plus que cela : des modes de représentation de la valeur. Ainsi, la considération des produits dérivés n'est-elle pas seulement intéressante pour le praticien de marché. Toute réflexion sur la contingence

et sur l'évaluation des droits attachés à un contrat passe par l'étude de ces produits. La gestion de droits attachés à des contrats, qui inclut notamment la protection à assurer face à un positionnement sur ces droits, ne peut se passer d'une réflexion sur la valeur et sur la perception de cette dernière.

Nous avons donc considéré dans ce chapitre les moyens classiques permettant de changer de mesure : changements de numéraire, noyaux d'évaluation, transformées d'Esscher... Nous les avons d'abord étudiés pour des cours d'actions modélisés par des diffusions avant de passer à un cadre où les processus sont admis à sauter.

Dès lors que l'on considère des processus à sauts, la mesure risque-neutre n'est plus (le plus souvent) unique. Il convient donc de disposer d'un moyen efficace de l'obtenir. Jusqu'à présent, deux approches principales permettent de le faire dans un cadre de Lévy : l'approche par transformée d'Esscher et le calibrage direct de la mesure aux données de marché des options.

Quelle que soit la méthode envisagée pour obtenir la mesure-risque neutre, l'évaluation des options aura systématiquement lieu de la même manière : en se servant de la représentation duale qu'est la fonction caractéristique - transformée de Fourier - associée au processus de Lévy sous-jacent. L'évaluation numérique se réalise donc le plus souvent en pratique pour les options standards par un algorithme de transformée de Fourier rapide.

Nous avons conclu ce chapitre par la présentation de deux nouvelles approches. L'approche stable originale de Carr et Wu [27] permet de réconcilier les tenants d'une modélisation réaliste où les cours d'action possèdent une variance et les tenants de la modélisation stable. Carr et Wu montrent ainsi que l'on peut se servir de processus stables pour modéliser les rendements d'actions tout en conservant une variance finie pour l'action correspondante. Enfin, l'approche combinée sauts - temps financier permet à la fois de prendre en compte les sauts affectant les actifs et les effets d'accélération / décélération du marché.

Le prochain chapitre, consacré à l'étude de la structure de la firme, présentera une nouvelle application des processus stables et se concentrera sur la perception de la valeur par les différents acteurs économiques.

2.10 Annexe A : Approche Intégro-Différentielle

Partant des travaux de Raible [109], nous montrons comment obtenir une équation intégro-différentielle pour évaluer une option standard quand le sous-jacent est un processus de Lévy géométrique. Pour faciliter la lecture, nous commençons par rappeler le traitement très classique du cadre de Black et Scholes avant de passer à l'extension au modèle de Lévy géométrique.

Nous passons ensuite à l'obtention d'une équation intégro-différentielle donnant le prix d'une option asiatique arithmétique en suivant la méthode de Vecer [121].

Equation de Black et Scholes

Soient $V(t) = V(S_t, t)$ le prix de l'option dans l'univers risque-neutre à l'instant t , et S_t le processus de l'action défini classiquement dans le modèle de Black et Scholes par un mouvement brownien géométrique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dz_t$$

où z est un mouvement brownien standard.

$e^{-rt}V(t)$ est une martingale par définition de Q et admet la différentielle suivante :

$$d(e^{-rt}V(t)) = -re^{-rt}V(t)dt + e^{-rt}dV(t)$$

d'où, par application du lemme d'Itô (les indices x et t correspondent aux dérivées par rapport aux variables cours et temps respectivement) :

$$d(e^{-rt}V(t)) = -re^{-rt}V(t)dt + e^{-rt} \left[V_x(t)dS_t + V_t(t)dt + \frac{1}{2}V_{xx}(t)d \langle S \rangle_t \right]$$

soit :

$$d(e^{-rt}V(t)) = -re^{-rt}V(t)dt + e^{-rt} \left[V_x(t)(S_t r dt + S_t \sigma dz_t) + V_t(t)dt + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} V_{xx}(t) dt \right]$$

regroupons les termes :

$$d(e^{-rt}V(t)) = e^{-rt} \left[\left(-rV(t) + S_t V_x(t)r + V_t(t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} V_{xx}(t) \right) dt + S_t V_x(t) \sigma dz_t \right]$$

La condition de martingale sur le prix actualisé de l'option implique alors :

$$-rV(t) + S_t V_x(t)r + V_t(t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} V_{xx}(t) = 0 \quad (2.22)$$

qui est l'équation de Black et Scholes bien connue.

Equation Intégro-Différentielle des Processus de Lévy

Nous supposons maintenant que le cours de l'action suit la dynamique :

$$S_t = S_0 e^{L_t}$$

où L est un processus de Lévy de triplet caractéristique (b, σ^2, ν) avec b le compensateur du processus, $\sigma^2 = \langle L^c \rangle_1$ la composante brownienne, et ν la mesure de Lévy qui est le compensateur de la mesure aléatoire des sauts μ .

Nous notons $V(t) = V(L_t, t)$ le prix de l'option qui dépend ici du rendement de l'action et non de l'action elle-même.

Ici aussi, $e^{-rt}V(t)$ est une martingale par définition de Q et admet pour différentielle :

$$d(e^{-rt}V(t)) = -re^{-rt}V(t)dt + e^{-rt}dV(t)$$

Pour développer plus avant, on se sert de la formule d'Itô avec sauts et on écrit :

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}V(t)) = & -re^{-rt}V(L_{t-}, t)dt + \\ & e^{-rt} \left[V_x(L_{t-}, t) dL_t + V_t(L_{t-}, t) dt + \frac{1}{2}V_{xx}(L_{t-}, t) d\langle L^c \rangle_t + \right. \\ & \left. \int_{\mathbb{R}} (V(L_{t-} + y, t) - V(L_{t-}, t) - y V_x(L_{t-}, t)) \mu(dy, dt) \right] \end{aligned}$$

où y est le saut de L entre t^- et t .

La condition de martingale sur le prix actualisé de l'option implique alors, par annulation du compensateur de la formule ci-dessus :

$$\begin{aligned} -rV(x, t) + V_x(x, t)b + V_t(x, t) + \frac{\sigma^2}{2}V_{xx}(x, t) + \\ \int_{\mathbb{R}} (V(x + y, t) - V(x, t) - y V_x(x, t)) \nu(dy) = 0 \quad (2.23) \end{aligned}$$

qui est l'équation intégro-différentielle régissant les prix d'options standards dont le sous-jacent est modélisé par une exponentielle de processus de Lévy. Remarquer la différence avec l'équation de Black et Scholes : un terme intégral fonction de la mesure de Lévy apparaît. Ce terme rend les calculs numériques nettement plus compliqués que ceux associés à une équation aux dérivées partielle standard. Par ailleurs, les S_t apparaissant dans la formule (2.22) ne se retrouvent plus dans la formule (2.23); en effet nous avons dérivé ici un cours actualisé d'option dépendant du rendement du sous-jacent et non plus du sous-jacent lui-même.

Méthode de Vecer : Présentation du Problème

Vecer [119, 120] a obtenu une nouvelle équation aux dérivées partielles permettant d'évaluer très rapidement les options asiatiques arithmétiques. Son approche se révèle nettement plus puissante en termes de temps de calcul par rapport aux approches traditionnelles de Fu, Madan et Wang [49] et de Geman et Yor [54]. Il étend ensuite son équation en une équation intégral-différentielle traitant le cas d'un sous-jacent de type Lévy géométrique (voir [121]).

Posons pour le *pay-off* d'une option d'achat asiatique arithmétique :

$$\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)^+$$

où S est le cours sous-jacent modélisé par l'équation différentielle stochastique faisant intervenir le processus de Lévy H :

$$dS_t = S_{t-} dH_t$$

Vecer montre que l'option asiatique est répliquable par une option sur position, à savoir une option garantissant à son acheteur la couverture de toute stratégie d'achat / vente sur le cours sous-jacent c'est-à-dire le bénéfice associé à la stratégie en cas d'issue positive et aucune perte en cas d'issue négative de la stratégie.

Soit donc X un portefeuille autofinancé avec une proportion q en actions et le reste en actif sans risque. Le portefeuille X suit la dynamique suivante :

$$dX_t = q_{t-} dS_t + r(X_{t-} - q_{t-} S_{t-}) dt$$

et on suppose que :

$$X_0 = q_0 S_0 - e^{-rT} K$$

On peut alors prouver que :

$$X_T = \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K$$

ce qui justifie le traitement de l'option asiatique par réplcation.

Un changement de numéraire classique de l'univers Q vers l'univers Q_S donne la valeur initiale V_0 de l'option asiatique.

Ainsi, en posant $Z_t = \frac{X_t}{S_t}$:

$$V_0 = S_0 E_{Q_S}(Z_T^+) \tag{2.24}$$

Ce résultat se démontre aisément :

$$\begin{aligned}
V_0 &= E_Q \left[e^{-rT} \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)^+ \right] \\
&= e^{-rT} E_Q(X_T^+) \\
&= e^{-rT} E_{Q_S} \left(X_T^+ \frac{S_0}{S_T e^{-rT}} \right) \\
&= S_0 E_{Q_S}(Z_T^+)
\end{aligned}$$

et par ailleurs on peut prouver que Z est une martingale sous Q_S .

Passons à l'obtention de l'équation intégrale-différentielle régissant le prix $V(Z_t, t)$ de l'option asiatique à l'instant t .

Obtention de l'Equation Intégré-Différentielle

En se servant des définitions de S et de H , Vecer montre que Z suit la dynamique suivante :

$$\begin{aligned}
dZ_t &= (q_{t-} - Z_{t-}) (dH_t^c - d \langle H^c \rangle_t + \\
&\quad \int_{\mathbb{R}} x (\mu(dt, dx) - \nu(dx) dt) - \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x} \mu(dt, dx))
\end{aligned}$$

La formule d'Itô avec sauts permet par ailleurs d'exprimer la dynamique de l'option selon :

$$\begin{aligned}
dV(Z_t, t) &= V_t(Z_{t-}, t) dt + V_x(Z_{t-}, t) dZ + \frac{1}{2} V_{xx}(Z_{t-}, t) (q_{t-} - Z_{t-})^2 d \langle H^c \rangle_t + \\
V \left(Z_{t-} + (q_{t-} - Z_{t-}) \frac{\Delta H}{1 + \Delta H}, t \right) &- V(Z_{t-}, t) - V_x(Z_{t-}, t) (q_{t-} - Z_{t-}) \frac{\Delta H}{1 + \Delta H}
\end{aligned}$$

où ΔH est le saut de H entre $t-$ et t ; et, comme dans le cas des options standards, on utilise un argument de martingalité (de V par rapport à Q_S) qui implique que :

$$\begin{aligned}
V_t(x, t) + \frac{\sigma^2}{2} V_{xx}(x, t) (q_{t-} - x)^2 + \\
\int_{\mathbb{R}} \left(V \left(x + (q_{t-} - x) \frac{y}{1+y}, t \right) - V(x, t) - V_x(x, t) (q_{t-} - x) \frac{y}{1+y} \right) \nu(dy) = 0
\end{aligned}$$

qui est l'équation intégrale-différentielle régissant le prix de l'option asiatique arithmétique.

Remarquer qu'en l'absence de sauts, l'intégrale par rapport à la mesure de Lévy disparaît, et l'on retrouve :

$$V_t(x, t) + \frac{\sigma^2}{2} V_{xx}(x, t) (q_{t-} - x)^2 = 0$$

qui est l'équation aux dérivées partielles obtenue par Vecer [119, 120] dans le cadre de Black et Scholes. La résolution de cette équation permet d'obtenir un niveau de précision de l'ordre du pourcent de point de base pour la valeur de l'option asiatique, en un temps de calcul quasi-instantané.

2.11 Annexe B : Démonstrations

Dans cette annexe nous donnons les démonstrations de quelques résultats utiles dans ce chapitre.

Démonstration I

$$E_{Q_{X_1}} \left(\left(\frac{dQ_{X_2}}{dQ_{X_1}} \right)_T \middle| \mathcal{F}_t \right) = E_{Q_{X_1}} \left(\frac{X_2(T)X_1(0)}{X_1(T)X_2(0)} \middle| \mathcal{F}_t \right) = \frac{X_1(0)}{X_2(0)} E_{Q_{X_1}} \left(\frac{X_2(T)}{X_1(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

Utilisant le fait que $X_1(T)$ est un numéraire pour $X_2(T)$, on obtient :

$$E_{Q_{X_1}} \left(\left(\frac{dQ_{X_2}}{dQ_{X_1}} \right)_T \middle| \mathcal{F}_t \right) = \frac{X_2(t)X_1(0)}{X_1(t)X_2(0)} = \left(\frac{dQ_{X_2}}{dQ_{X_1}} \right)_t$$

d'où $\left(\frac{dQ_{X_2}}{dQ_{X_1}} \right)_T$ est une Q_{X_1} -martingale et en prenant $t = 0$:

$$E_{Q_{X_1}} \left(\left(\frac{dQ_{X_2}}{dQ_{X_1}} \right)_T \right) = 1$$

maintenant vérifions que $Z(t)/X_2(t)$ est une Q_{X_2} -martingale; d'abord, utilisons la règle de Bayes :

$$E_{Q_{X_2}} \left(\frac{Z(T)}{X_2(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right) = \frac{E_{Q_{X_1}} \left(\frac{Z(T)}{X_2(T)} \left(\frac{dQ_{X_2}}{dQ_{X_1}} \right)_T \middle| \mathcal{F}_t \right)}{E_{Q_{X_1}} \left(\left(\frac{dQ_{X_2}}{dQ_{X_1}} \right)_T \middle| \mathcal{F}_t \right)}$$

alors en remplaçant les densités par leur expression on a :

$$E_{Q_{X_2}} \left(\frac{Z(T)}{X_2(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right) = \frac{Z(t)}{X_2(t)}$$

Démonstration II

$$S_0 e^{rt} = E_P \left(\frac{S(t)^{1+\theta_Q}}{E_P(S(t)^{\theta_Q})} \right)$$

et :

$$S_t = S_0 e^{\sigma z(t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}$$

fournissent :

$$e^{rt} = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t} E_P \left(\frac{e^{(\theta_Q + 1)\sigma z}}{E_P(e^{\theta_Q \sigma z})} \right)$$

d'où :

$$e^{rt} = e^{\mu t + \theta_Q \sigma^2 t}$$

et alors :

$$\theta_Q = \frac{r - \mu}{\sigma^2}$$

Démonstration III

$$\begin{aligned} E \left[S_t^k g(S_t) | \theta \right] &= E \left[S_t^k g(S_t) \frac{S_t^\theta}{E(S_t^\theta)} \right] \\ &= \frac{E \left[S_t^{\theta+k} g(S_t) \right]}{E \left[S_t^\theta \right]} \\ &= \frac{E \left[S_t^{\theta+k} \right] E \left[S_t^{\theta+k} g(S_t) \right]}{E \left[S_t^\theta \right] E \left[S_t^{\theta+k} \right]} \\ &= E \left[S_t^k \frac{S_t^\theta}{E(S_t^\theta)} \right] E \left[g(S_t) \frac{S_t^{\theta+k}}{E(S_t^{\theta+k})} \right] \end{aligned}$$

Démonstration IV

$$\begin{aligned} \chi_Q(u) &= E_Q(e^{iuX_t}) \\ &= E_P \left(\left(\frac{dQ}{dP} \right)_t e^{iuX_t} \right) \\ &= E_P \left(\frac{e^{\theta X_t}}{E_P(e^{\theta X_t})} e^{iuX_t} \right) \\ &= \frac{E_P(e^{i(u-i\theta)X_t})}{E_P(e^{i(-i\theta)X_t})} \\ &= \frac{\chi_P(u - i\theta)}{\chi_P(-i\theta)} \end{aligned}$$

Démonstration V

Pour obtenir les caractéristiques par rapport à la nouvelle mesure, il est nécessaire de calculer $\chi_Q(u)$. On rappelle que :

$$\chi_P(u) = e^{t[ib_P u - \frac{1}{2}c_P u^2 - \int (e^{iux} - 1 - iux\mathbf{1}_{|x| \leq 1}) \nu_P(dx)]}$$

d'où alors :

$$\begin{cases} \chi_P(u - i\theta) = e^{t[ib_P(u-i\theta) - \frac{1}{2}c_P(u-i\theta)^2 - \int (e^{i(u-i\theta)x} - 1 - i(u-i\theta)x\mathbf{1}_{|x| \leq 1}) \nu_P(dx)]} \\ \chi_P(-i\theta) = e^{t[ib_P(-i\theta) - \frac{1}{2}c_P(-i\theta)^2 - \int (e^{i(-i\theta)x} - 1 - i(-i\theta)x\mathbf{1}_{|x| \leq 1}) \nu_P(dx)]} \end{cases}$$

et, en se servant de la démonstration IV du dessus, on peut écrire :

$$\chi_Q(u) = e^{t[ib_P u + ic_P u \theta - \frac{1}{2}c_P u^2 - \int (e^{iux} e^{\theta x} - 1 - iux \mathbf{1}_{|x| \leq 1} - \theta x \mathbf{1}_{|x| \leq 1} - e^{\theta x} + 1 + \theta x \mathbf{1}_{|x| \leq 1}) \nu_P(dx)]}$$

ou :

$$\chi_Q(u) = e^{t[iu(b_P + c_P \theta) - \frac{1}{2}c_P u^2 - \int (e^{iux} e^{\theta x} - iux \mathbf{1}_{|x| \leq 1} - e^{\theta x}) \nu_P(dx)]}$$

en introduisant : $-iux \mathbf{1}_{|x| \leq 1} e^{\theta x} + iux \mathbf{1}_{|x| \leq 1} e^{\theta x}$ dans l'intégrale, on obtient :

$$\chi_Q(u) = e^{t[iu(b_P + c_P \theta) - \frac{1}{2}c_P u^2 - \int (e^{iux} e^{\theta x} - e^{\theta x} - iux \mathbf{1}_{|x| \leq 1} e^{\theta x} + iux \mathbf{1}_{|x| \leq 1} e^{\theta x} - iux \mathbf{1}_{|x| \leq 1}) \nu_P(dx)]}$$

qui peut se réécrire comme :

$$\chi_Q(u) = e^{t[iu(b_P + c_P \theta) - \frac{1}{2}c_P u^2 - \int (e^{iux} - 1 - iux \mathbf{1}_{|x| \leq 1}) e^{\theta x} \nu_P(dx) + iu \int x \mathbf{1}_{|x| \leq 1} (e^{\theta x} - 1) \nu_P(dx)]}$$

et finalement comme :

$$\chi_Q(u) = e^{t[iu[b_P + c_P \theta + \int x \mathbf{1}_{|x| \leq 1} (e^{\theta x} - 1) \nu_P(dx)] - \frac{1}{2}c_P u^2 - \int (e^{iux} - 1 - iux \mathbf{1}_{|x| \leq 1}) e^{\theta x} \nu_P(dx)]}$$

ainsi :

$$\begin{cases} b_Q = b_P + c_P \theta + \int x \mathbf{1}_{|x| \leq 1} (e^{\theta x} - 1) \nu_P(dx) \\ c_Q = c_P \\ \nu_Q(dx) = e^{\theta x} \nu_P(dx) \end{cases}$$

Deuxième partie

Impact sur le Risque des
Firmes

Cette partie est consacrée à l'étude de l'impact des événements informatifs sur le risque des firmes. Nous considérons dans un premier temps le cas du risque tel que traité par la théorie financière du défaut. Dans un second temps, nous nous concentrons sur l'évaluation du risque en théorie des assurances.

Le premier chapitre de cette partie détaille d'abord la question de la structure financière optimale de l'entreprise. Après une présentation succincte de la théorie de l'agence comme mode d'appréhension d'une structure de capital optimal, nous rappelons les principaux résultats de la théorie financière du défaut et en particulier les modèles de Leland [78] et de Leland et Toft [81]. Nous proposons alors un nouveau modèle qui permet de prendre en compte l'asymétrie de position, d'information et d'action existant entre les dirigeants et les actionnaires. Dans ce cadre, le processus des actifs peut être représenté par un processus de Lévy stable, permettant ainsi de rendre compte d'une arrivée de sauts. La fin de ce chapitre est consacrée à la mise en perspective du cadre proposé par rapport à la théorie de l'agence.

Dans un second chapitre, nous nous intéressons à la théorie de la ruine des compagnies d'assurance. Après un rappel de la construction historique de cette théorie, nous présentons les récentes approches fondées sur des spécifications de dynamiques des réserves très générales. Remarquant que toutes les approches existantes de la théorie de la ruine s'appuient sur le postulat d'une ruine hautement improbable aux grands horizons, nous proposons un nouveau cadre dans lequel la ruine devient certaine pour un horizon infini. En particulier, nous modélisons le processus de risque, qui est l'analogie du processus financier des actifs, par un processus de Lévy stable. Nous terminons par une comparaison des théories de la ruine et du défaut.

Chapitre 3

Structure et Risque de la Firme

3.1 Introduction

Nous étudions dans ce chapitre les liens existant entre une entreprise et le marché financier. En particulier, nous réalisons une perspective entre les dirigeants et les actionnaires dans le cadre d'un modèle structurel de défaut. La prise en compte de surprises est permise par la modélisation des actifs de la firme par un processus à sauts. Au-delà de la construction d'un nouveau modèle, ce chapitre est en substance une réflexion sur le rôle de chaque intervenant dans la création de la valeur de la firme et de sa dette. Cette réflexion s'inscrit naturellement dans un questionnement large faisant intervenir la théorie de l'agence.

Nous commençons par rappeler quelles ont été les approches historiques face à la question de l'existence d'une structure financière optimale de la firme. Nous détaillons ensuite les modèles de valorisation concrète de la dette avant de détailler notre approche en deux temps : d'abord une étude du point de vue des managers, ensuite une présentation de l'analyse des investisseurs. Nous fournissons ensuite deux compléments, le premier visant à détailler ce qui se passe dans l'hypothèse classique où les managers et les investisseurs utilisent la même représentation pour les actifs, le second situant la problématique par rapport à la théorie de l'agence, avant de conclure.

3.2 La Question de la Structure Financière Optimale

Dans cette section, nous détaillons la question de l'existence d'une structure financière optimale de l'entreprise. En particulier, nous partons de la controverse suscitée par l'article de Modigliani et Miller [98], puis nous explicitons les éléments ayant permis par la suite de déduire qu'il existe bien une structure financière optimale pour chaque entreprise. Sur ce sujet, le lecteur peut consulter les ouvrages de Charreaux [29], Goffin [58] et Quittard-Pinon [108].

3.2.1 Le Résultat de Modigliani et Miller

Dans leur article réputé de 1958, Modigliani et Miller [98] affirment, contre toute attente des milieux académiques de l'époque, que l'entreprise endettée ne possède pas de structure financière optimale. Autrement dit, la valeur de la firme est insensible au ratio endettement / fond propre caractérisant son passif. Ce que l'on peut résumer de manière simple par la figure 3.1.

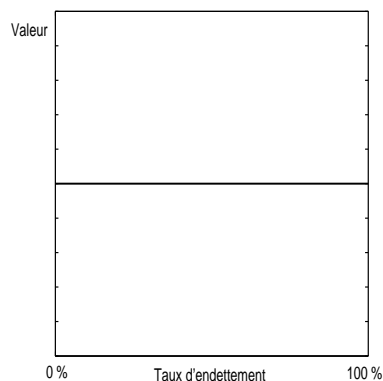


FIG. 3.1 – *Valeur de la firme en fonction de son endettement I*
Cadre de Modigliani et Miller

Pour aboutir à une telle conclusion, Modigliani et Miller se placent dans un cadre extrêmement contraint. Ils supposent que le marché est parfait et que les taxes sont inexistantes (du moins dans leur proposition I fondamentale, cependant leur cadre permet la prise en compte des taxes, voir notamment [99]). Par ailleurs, ils supposent également qu'il n'y a pas de coûts de faillite. A partir de ces hypothèses, ils déduisent par un raisonnement de nature arbitragiste que la valeur de la firme est indépendante de son endettement lorsque les *cashs flows* à venir sont eux aussi indépendants de la structure de financement. Cette affirmation a suscité de nombreuses critiques et mises en perspectives.

Au-delà d'une remise en cause hypothèse par hypothèse, il est loisible de se poser deux questions. Premièrement, quelle est la validité d'un résultat obtenu dans un cadre tellement abstrait et restreint qu'il ne correspond pas à une modélisation réaliste de l'entreprise telle qu'elle existe de manière concrète? Deuxièmement, n'existe-t'il pas en toute circonstance une manière optimale de procéder et en particulier ici de constituer une entreprise? Les managers, par définition, sont des agents qui sont amenés à prendre des décisions suivies d'effets en terme de structure, et une décision ne se prend pas sans qu'existe de manière sous-jacente la recherche d'un optimum, qui peut certes être de nature variable.

Nous discutons par la suite les hypothèses d'inexistence des coûts de faillite et des économies d'impôts de Modigliani et Miller. Remarquer également que Modigliani et Miller classent les entreprises par niveau de risque indépendamment de leur taille. Cela n'est certes pas l'hypothèse la plus contraignante dans un premier temps, cependant on peut raisonnablement penser qu'au fur et à mesure de la croissance d'une entreprise, cette dernière

présentera différents profils d'endettement.

3.2.2 Coûts de Faillite et Economies d'Impôts

Nous en venons maintenant à la prise en compte des économies d'impôts et des coûts de faillite pour la recherche d'une structure financière optimale de l'entreprise.

Rappelons que la valeur de l'entreprise est de manière classique la somme des valeurs actualisées de ses *cash flows* futurs dans un approche de non patrimoniale. Commençons par envisager la prise en compte d'économies d'impôts : l'entreprise endettée réalise des économies d'impôts *via* la déductibilité des coupons versés à ses créiteurs. Ainsi, plus le ratio dette / fonds propres sera important, plus les économies d'impôts seront substantielles. De manière plus précise, on aura la relation suivante entre la valeur V_e de la firme endettée et la valeur V_{fp} de la firme financée uniquement par fonds propres :

$$V_e = V_{fp} + \mathcal{VA}(EI)$$

où $\mathcal{VA}(EI)$ représente la valeur actualisée des économies d'impôts.

Nous présentons en figure 3.2 la dépendance de la valeur V_e de l'entreprise endettée en fonction de son endettement. Nous pouvons observer que dans ce contexte, la valeur de l'entreprise croît strictement avec son ratio d'endettement. Sa valeur optimale correspondrait donc à un financement uniquement par dette. C'est ne pas prendre en compte le risque associé à une telle stratégie.

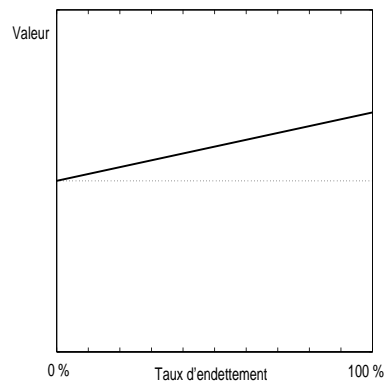


FIG. 3.2 – Valeur de la firme en fonction de son endettement II
Impact des économies d'impôts

Intéressons-nous donc maintenant à la prise en compte des coûts de faillite. De nouveau, la valeur V_e de l'entreprise endettée doit être modifiée dans le sens du retranchement de la valeur actualisée des divers coûts de faillite (frais de justice, coûts indirects résultant de la perte de clientèle pour une entreprise en situation de détresse financière...). On peut alors écrire :

$$V_e = V_{fp} + \mathcal{VA}(EI) - \mathcal{VA}(CF)$$

où $\mathcal{VA}(CF)$ représente la valeur actualisée des coûts de faillite.

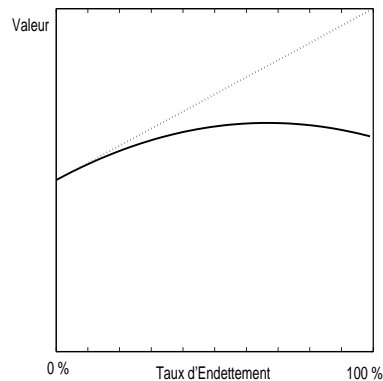


FIG. 3.3 – *Valeur de la firme en fonction de son endettement III*
Impact des coûts de faillite

On peut observer en figure 3.3 l'effet de la prise en compte des coûts de faillite sur la valeur de la firme en fonction du niveau d'endettement. Dans ce cas, la valeur de la firme commence à croître avec l'endettement grâce aux économies d'impôts puis décroît quand l'endettement est trop élevé dû à l'effet des coûts de faillite. On se trouve donc en présence d'un optimum pour la valeur de la firme : il existe un niveau d'endettement idéal pour lequel la valeur de l'entreprise est maximisée.

On peut donc conclure que dans un cadre plus élaboré et plus réaliste que celui de Modigliani et Miller, il existe une structure financière optimale de l'entreprise. Pour autant, la simple prise en compte des économies d'impôts et des coûts de faillite n'est pas la description la plus fine possible de l'entreprise. De nombreux autres facteurs et aspects importants ont été négligés. Nous terminons cette section par l'étude de la théorie de l'agence qui apporte un regard global sur la structure financière de la firme.

3.2.3 La Théorie de l'Agence

Jensen et Meckling [66] se sont attachés dans leur célèbre article de 1976 à montrer l'impact, en termes de coûts, des relations contractuelles (réelles ou implicites) existant entre les acteurs de l'économie. Ils distinguent ainsi dans toute relation contractuelle un mandant (ou "principal") et un mandataire (ou "agent", d'où le nom de la théorie). De cette asymétrie entre le mandant, typiquement un actionnaire principal, et le mandataire, typiquement un manager, naissent divers coûts liés au fait que le mandataire poursuit la recherche d'optima qui ne sont pas nécessairement ceux du mandant.

La théorie de l'agence est très loin de se limiter à une simple approche *principal-agent*. Pour s'en convaincre, le lecteur peut consulter les nombreux et fascinants articles de Jensen, et de Jensen et Meckling. Par soucis de concision de la bibliographie, nous ne citerons que "The Nature of Man" [67], qui, dans sa première version, est contemporain du célèbre article de 1976 mais n'a été publié qu'en 1994.

Dans cette sous-section, nous nous concentrons sur l'analyse des divers coûts d'agence : nous détaillons d'abord les coûts d'agence des fonds propres d'une entreprise, puis les coûts liés à son endettement.

Les coûts d'agence des fonds propres d'une entreprise non endettée sont induits par les décisions inoptimales (du point de vue de l'actionnaire qui est ici placé en position de référence) du manager. Par exemple, le manager peut être tenté de mener des politiques ambitieuses mais qui ne sont pas de l'intérêt de l'entreprise. On peut citer à cet effet la politique forcenée d'acquisitions du dirigeant d'une compagnie française de distribution d'eau bien connue... où l'on voit avec cet exemple que l'hypothèse de Modigliani et Miller d'indépendance entre les actifs et la structure de financement de l'entreprise n'est pas forcément fondée.

Les coûts d'agence des fonds propres peuvent également consister en l'attribution personnelle et aux cadres supérieurs de salaires trop élevés ou d'écarts injustifiés. Enfin, face à ces coûts d'agence directs existent des coûts indirects : coûts de contrôle interne à l'entreprise, coûts des mesures de protection, coûts d'un audit externe par les actionnaires...

Supposons maintenant l'entreprise endettée et explicitons ce que l'on entend par coûts d'agence de la dette. Du fait de l'existence d'obligataires (liés contractuellement à l'entreprise), le manager se voit en position de tenter des stratégies dangereuses si son entreprise est proche de la faillite. De fait, on pourrait appeler cela un effet "casino" : si la faillite est quasi-certaine, le manager et les actionnaires n'ont plus rien à perdre et peuvent se lancer dans

des projets extrêmement risqués qui peuvent, avec une faible probabilité, les faire sortir de la situation de détresse financière. Dans ce cas, soit tout s'améliore, soit les obligataires devront avec une grande probabilité supporter un surcoût important.

Les obligataires ayant conscience de la possibilité de ce genre de stratégies, de nouveaux coûts d'agence de la dette apparaissent : des coûts de contrôle assortis de coûts indirects (le manager, empêché par contrat de réaliser des opérations risquées, peut manquer de réelles opportunités utiles pour l'entreprise).

Pour résumer, les coûts d'agence, qu'ils soient de la dette ou des fonds propres, peuvent être classés en trois catégories : coûts de contrôle externe, coûts d'auto-limitation et coûts résiduels (non éliminés par les mécanismes induisant les deux premiers types de coûts).

Quel va être l'impact des coûts d'agence sur la valeur de la firme? Partons d'une firme non endettée; l'émission d'obligations aura une conséquence positive en ce qu'elle diminuera les coûts d'agence des fonds propres. En effet, le manager devant assurer un service régulier de la dette et se sachant contrôlé à la fois par les actionnaires et les obligataires aura tendance à mieux gérer l'entreprise. Donc, pour un faible niveau d'endettement, la valeur de l'entreprise se verra augmentée par la chute des coûts d'agence des fonds propres. Cependant, au fur et à mesure que l'endettement augmente et que la probabilité de faillite croît, les coûts d'agence de la dette deviennent plus importants et contribuent à diminuer la valeur de l'entreprise. Nous récapitulons cela en figure 3.4 où nous avons également tracé en pointillé le cas sans coûts d'agence. Remarquer que ces effets d'augmentation de la valeur de la firme aux faibles niveaux d'endettement, et de diminution aux hauts niveaux d'endettement, conduisent à déplacer l'optimum vers une valeur moins conséquente que si les coûts d'agence n'existaient pas.

Nous terminons cette sous-section en remarquant que bien qu'il soit souhaitable pour l'entreprise de diminuer ses coûts d'agence, cela ne sera pas possible complètement dû à la nature même des contrats liant les acteurs de l'économie. En particulier, dans de nombreux cas on pourra au mieux remplacer des coûts directs par des coûts indirects de contrôle. Ces coûts, au-delà des simples relations contractuelles, sont inhérents à toute économie. Nous citons ainsi Jensen et Meckling :

"In conclusion, finding that agency costs are non-zero (...) and concluding therefrom that the relationship is non-optimal, wasteful or inefficient is equivalent in every sense to comparing a world in which iron ore is a scarce commodity (and therefore costly) to a world in which it is freely available at

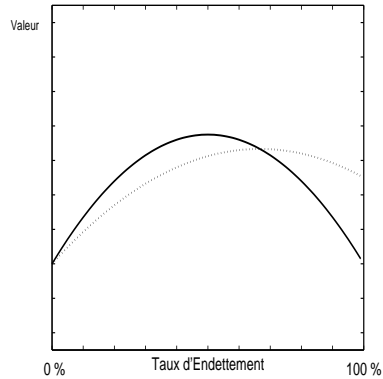


FIG. 3.4 – *Valeur de la firme en fonction de son endettement IV*
Impact des coûts d'agence

zero resource cost, and concluding that the first world is 'non-optimal' (...).

3.3 Les Modèles de Valorisation de la Dette

Dans cette section, nous présentons les principaux modèles de valorisation de la dette d'une entreprise. Nous rappelons d'abord les travaux fondateurs de Merton et de Black et Cox, et étudions un modèle "semi-structurel", le modèle de Longstaff et Schwartz. Les sous-sections deux et trois sont consacrées au cadre structurel de Leland et Toft. Nous partirons de ce cadre dans les sections suivantes pour développer un nouveau modèle permettant la prise en compte des sauts sur la valeur des actifs de l'entreprise. La dernière sous-section présente le modèle de Hilberink et Rogers qui prend en compte la possibilité de sauts - mais uniquement négatifs - sur la valeur des actifs.

3.3.1 Travaux Fondateurs

Merton [96] s'intéresse, dans son article de 1974, à la valorisation de la dette risquée d'une entreprise. Il postule un marché parfait, l'absence de fiscalité, un taux d'intérêt sans risque constant et obtient, par un raisonnement similaire à celui de Black et Scholes sur les options, une équation aux dérivées partielles donnant le prix d'une obligation risquée.

Ainsi, quand les actifs sont supposés suivre :

$$dV = (\alpha V - C) dt + \sigma V dz$$

alors la valeur F d'une obligation risquée vérifie :

$$0 = \frac{\sigma^2}{2} V^2 F_{VV} + (rV - C) F_V - rF + F_t + C_y$$

où C est le taux de débit agrégé (paiement total des dividendes et coupons) et C_y le taux de coupon de l'obligation considérée.

Cette équation possède l'avantage et l'inconvénient d'être très générale. En théorie, elle permet d'évaluer n'importe quelle obligation. En pratique, des aspects importants, tels que les coûts de faillite et les économies d'impôts ne sont pas pris en compte. Par ailleurs, pour résoudre cette équation, il faut fournir des conditions limites. Merton propose la condition suivante : quand la valeur des actifs est nulle, alors la valeur de l'obligation est nulle. Cependant on voit bien que de nombreux événements - tel la faillite - arriveront avant que les actifs d'une entreprise perdent toute valeur, si jamais cela est possible.

Merton a pu résoudre de manière explicite cette équation dans le cas des obligations zéro-coupon et des obligations perpétuelles. Cependant, même dans ce cadre simplifié, il faut avoir recours à une méthode numérique pour évaluer une obligation couponnée. L'avantage de l'approche de Merton est donc d'apporter un cadre référent, permettant une première approche à la valorisation des obligations risquées.

Dans un article postérieur, en 1976, Black et Cox [16] étendent l'approche de Merton en prenant en compte l'existence d'une protection des obligataires et d'une dette subordonnée. Ils conservent les hypothèses de Merton d'absence de coûts de faillite et d'impôts sur les sociétés et évaluent les obligations zéro-coupon de nouveau par résolution d'équations aux dérivées partielles.

L'intérêt principal de l'approche de Black et Cox réside dans leur spécification d'une condition limite : quand la valeur des actifs atteint un seuil, fixé de manière contractuelle pour protéger les obligataires, la faillite a lieu. Cette idée de seuil déclenchant la faillite est au cœur de la plupart des modèles structurels des vingt cinq dernières années. Remarquons cependant que Black et Cox, à l'instar de Merton, n'obtiennent pas de solution explicite pour les obligations couponnées.

En 1978, Brennan et Schwartz [21] construisent un modèle structurel qui a l'avantage de prendre en compte l'imposition des entreprises et les coûts de faillite. Ces auteurs se concentrent sur la recherche d'optima sur la valeur de la firme mais ne fournissent pas de méthode d'évaluation de la dette.

Il a fallu attendre le milieu des années quatre-vingt dix pour disposer de modèles structurels permettant de valoriser pleinement les obligations, couponnées ou non, d'une entreprise. Parmi ces modèles structurels figurent ceux de Longstaff et Schwartz [83] - que nous détaillons à présent - et de Leland et Leland et Toft - qui font l'objet de la prochaine sous-section.

Longstaff et Schwartz [83] ont construit en 1995 un modèle structurel permettant d'évaluer les obligations couponnées ou non, ainsi que les obligations à taux flottant. Leur modèle est une extension du modèle de Black et Cox. Ces auteurs supposent de manière classique que les actifs suivent un mouvement brownien géométrique. En revanche, ils supposent que le taux d'intérêt instantané sans risque n'est pas déterministe et le représentent par un processus diffusif d'Orstein-Uhlenbeck. Par ailleurs, la faillite peut arriver à n'importe quel instant et correspond à l'atteinte par le processus des actifs d'un niveau exogène. Longstaff et Schwartz introduisent un second facteur exogène qui est la proportion de valeur perdue pour une obligation quand la faillite a lieu. Ce facteur peut être estimé de manière économétrique. Typiquement, pour une obligation de type *senior*, la perte de valeur est de l'ordre de 40%.

Nous passons à présent à l'étude du cadre de Leland et Toft, cadre qui sera le fondement de la modélisation par sauts introduite plus loin dans ce chapitre.

3.3.2 Idées Fondamentales de Leland et Toft

Nous présentons ici le cadre structurel proposé par Leland [78] en 1994 et étendu par Leland et Toft [81] en 1996. Bien que les modèles proposés dans ces deux articles ne soient pas *stricto sensu* les mêmes, ils partagent de nombreux points communs et nous parlerons donc, après leur présentation, du cadre de Leland et Toft. Nous présenterons dans une section suivante le modèle de Hilberink et Rogers [61] qui étend le cadre de Leland et Toft par la prise en compte de sauts (uniquement) négatifs sur la valeur des actifs.

Dans son article de 1994, Leland [78] étudie la structure financière optimale de la firme et porte un grand intérêt aux aspects politiques endogènes. Par ailleurs il s'intéresse à la détermination de la valeur de la firme, de sa dette et de ses obligations (et marges de crédit) en particulier. La méthodologie développée dans cet article est substantiellement différente de celle utilisée dans de nombreux autres travaux traitant du risque de défaut. Citons ainsi Longstaff et Schwartz [83] qui, comme dit précédemment, cherchent à déterminer quand la valeur des actifs passe en dessous d'un niveau fixé de manière *exogène* et à étudier l'impact d'une variable *exogène*, à savoir le

taux d'intérêt qu'ils modélisent par un processus d'Orstein-Uhlenbeck. Par contraste, Leland s'intéresse essentiellement aux aspects *endogènes* et se positionne donc par rapport au questionnement structurel optimal de Modigliani et Miller [98] et de manière plus large au questionnement de Jensen et Meckling [66].

Dans le modèle de Leland, les actifs V de la firme, qu'il appelle parfois "activités", sont modélisés par une diffusion, comme dans de nombreuses contributions des trente dernières années. La structure financière de la firme, une fois posée, ne change plus; en particulier elle est supposée indépendante de la nature des actifs comme chez Modigliani et Miller [98]. Leland suppose que la dette émise par l'entreprise consiste en des obligations de maturité infinie et payant constamment un coupon continu.

Une question particulièrement importante est dans un modèle structurel la détermination du seuil de défaut. Pour Leland, ce seuil est endogène (quand la faillite n'est pas forcée par les obligataires à un niveau contractuel - "bond safety covenant"); on pourrait même considérer qu'il fait partie de la structure au sens large de la firme. Leland suppose que le niveau de faillite est choisi par les managers de manière à maximiser la valeur des actions de l'entreprise. Cela revient notamment à utiliser la condition de *smooth pasting* que nous détaillons plus loin. Remarquer que dans ce contexte, le manager est supposé agir prioritairement dans l'intérêt des actionnaires.

Après la détermination d'une structure financière optimale de la firme vient le calcul des valeurs de la firme, de la dette, des fonds propres et des obligations en fonction du levier (de la proportion) d'endettement choisi par le manager. Leland part d'une approche par équations aux dérivées partielles et calcule les valeurs précitées. Son analyse se concentre sur la détermination du levier d'endettement optimal et sur les implications de la politique des managers sur la valeur des dettes et fonds propres. Il prend notamment en compte les économies d'impôts et les coûts de banqueroute qui sont, comme vu en première section de ce chapitre, au cœur de toute réflexion et tout modèle structurels.

Le modèle de Leland et Toft [81] diffère de celui de Leland en ce que les obligations considérées sont de maturité finie. De fait, les obligations ont toutes dans ce modèle la même maturité T et sont réémises continûment de telle manière à garder le même niveau d'endettement dans le temps de la firme. La structure financière de l'entreprise est ici également statique, à savoir fixée une fois pour toutes; le niveau de faillite est calculé de nouveau par la condition de maximisation des fonds propres. Les analyses menées par Leland et Toft se font donc non seulement par rapport au levier d'endettement mais également par rapport à la maturité T des obligations choisie

par les managers : de ces analyses ressort le fait que les managers devraient toujours préférer un endettement au long terme pour maximiser la valeur de l'entreprise.

Leland et Toft justifient le fait que certaines entreprises s'endettent à court terme par la prise en compte des coûts d'agence. De fait, une fois la structure de l'entreprise fixée, les actionnaires ont tendance à inciter les managers à augmenter le risque des actifs (ce qu'on appelle le problème de la substitution d'actifs) pour transférer de la valeur des obligataires vers eux-mêmes. Le fait de diminuer la maturité de la dette, et donc d'augmenter la surveillance attachée au service de cette dette, permet de réduire les coûts d'agence mentionnés.

Nous avons donc vu que la seule différence essentielle entre les modèles de Leland et de Leland et Toft est l'hypothèse sur la maturité des obligations de l'entreprise. Il existe en fait un troisième modèle développé par Leland dans un papier de recherche de l'université de Californie [79] qui postule que l'endettement de la firme est composé d'un panel d'obligations de maturités différentes et dont la proportion relative est une exponentielle décroissante de la maturité. Nous parlons maintenant du *cadre* de Leland et Toft (regroupant ces trois modèles) et nous passons à une présentation des formules et raisonnements pratiques développés dans ce cadre.

3.3.3 Expressions Structurelles

Les notations choisies ici sont valides pour tous les modèles du cadre de Leland et Toft et pour le modèle de Hilberink et Rogers présenté plus loin (en fait elles s'inspirent des notations de ce dernier modèle). Les expressions calculées ici sont notamment indépendantes du modèle choisi.

Soient V_t , V_B , H , B_t , \mathcal{D} , \mathcal{E} , \mathcal{V} , α , τ , P , r décrivant respectivement : la valeur des actifs au temps t , le niveau de faillite, le premier temps d'atteinte (et plus loin, pour les processus à sauts, le premier temps de franchissement) du niveau de faillite, la valeur d'une obligation de maturité t , la valeur de la dette, la valeur des fonds propres, la valeur totale de la firme, la proportion de valeur perdue en cas de faillite, le taux d'imposition, la valeur faciale totale de la dette et le taux d'intérêt sans risque.

Nous supposons que tous les calculs sont menés par rapport à la même mesure de probabilité, mesure commune aux acteurs et dont ils se servent pour calculer la valeur présente des actifs comme espérance de leurs valeurs actualisées futures.

Nous cherchons d'abord à calculer la valeur d'une unique obligation risquée de maturité t . La valeur actuelle nette de ses coupons peut s'écrire comme :

$$E \left(\int_0^t ce^{-rs} \mathbf{1}_{s < H} ds \right) = E \left(\int_0^{t \wedge H} ce^{-rs} ds \right)$$

quand ces derniers coupons sont modélisés par un flux constant c (montant de coupon par unité de temps et de dette).

En ce qui concerne la valeur actuelle du montant principal, elle peut s'écrire comme la somme de deux termes :

$$E(e^{-rt} \mathbf{1}_{t < H}) + E \left((1 - \alpha) \frac{V_H}{P} e^{-rH} \mathbf{1}_{t \geq H} \right)$$

où le premier correspond à la valeur du principal en l'absence de faillite et le deuxième à la valeur du principal sous hypothèse d'occurrence d'un événement de faillite.

Détaillons la construction du second terme. Quand la faillite a lieu au temps aléatoire H , la valeur résiduelle des actifs est V_H - qui est égal à V_B si les actifs suivent un processus de diffusion mais différent de V_B si au contraire on a traversé le niveau de faillite par un saut. Le montant disponible pour rembourser le principal d'une *unique* obligation serait donc V_H renormalisé par P , montant facial total de la dette. Cependant, à V_H/P il faut retrancher les coûts de faillite α , d'où l'expression du second terme de la formule ci-dessus.

La valeur d'une obligation risquée est donc la somme des précédentes contributions et s'exprime comme :

$$\mathcal{B}_t = E \left(\int_0^{t \wedge H} ce^{-rs} \right) + E(e^{-rt} \mathbf{1}_{t < H}) + (1 - \alpha) E \left(\frac{V_H}{P} e^{-rH} \mathbf{1}_{t \geq H} \right)$$

En ce qui concerne la valeur totale de la dette, elle est la somme agrégée des valeurs des obligations émises par l'entreprise. Nous supposons ici que nous sommes en présence d'une structure exponentielle de la dette comme dans le papier de recherche de 1994 de Leland [79] : l'entreprise émet un profil d'obligations dont la proportion est de type exponentielle décroissante en fonction de la maturité; ce profil est maintenu dans le temps par une réémission continue. Les autres structures de dette des articles de Leland [78] et Leland et Toft [81] peuvent se déduire de ce cas d'étude.

Le facteur de proportion du profil exponentiel de dette est le suivant :

$$pe^{-mt}$$

où la maturité moyenne du panel d'obligations est de $1/m$.

Nous pouvons donc obtenir la valeur de la dette par agrégation des valeurs des obligations risquées :

$$\mathcal{D} = \int_0^{+\infty} p e^{-mt} \mathcal{B}_t dt$$

Quelques calculs fournissent finalement :

$$\mathcal{D} = \frac{C + mP}{m + r} E \left(1 - e^{-(m+r)H} \right) + (1 - \alpha) V_0 E \left(e^{X(H) - (m+r)H} \right) \quad (3.1)$$

où

$$V_t = V_0 e^{X_t}$$

et C est le montant total de coupon à payer par la firme par unité de temps.

La valeur totale de la firme est classiquement la somme de trois contributions : la valeur actuelle des actifs, la valeur actuelle des économies d'impôts, la valeur actuelle des coûts de faillite. Nous pouvons donc l'écrire comme :

$$\mathcal{V} = V_0 + \frac{\tau C}{r} E \left(1 - e^{-rH} \right) - \alpha V_0 E \left(e^{X(H) - rH} \right) \quad (3.2)$$

La valeur des fonds propres est définie comme la valeur totale de la firme moins la valeur de sa dette, soit comme :

$$\mathcal{E} = \mathcal{V} - \mathcal{D}$$

Finalement, on rappelle que le niveau de faillite V_B est donnée par la condition de maximisation des fonds propres suivante :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V} \right)_{V_B} = 0$$

Dans la sous-section suivante, nous détaillons le modèle de Hilberink et Rogers [61] qui étend le cadre de Leland et Toft en postulant que la valeur des actifs peut être modélisée par l'exponentielle d'un processus de Lévy sautant uniquement vers le bas.

3.3.4 Apport de Hilberink et Rogers

Un des buts de ce chapitre est la construction d'un modèle structurel dans lequel les actifs sont modélisés par le biais de processus de Lévy pouvant sauter aussi bien vers le haut que vers le bas. Avant d'en arriver là, nous détaillons le modèle de Hilberink et Rogers [61] qui étend le cadre de Leland et Toft en représentant les rendements des actifs par des processus de Lévy spectralement négatifs.

Les processus de Lévy spectralement négatifs considérés par Hilberink et Rogers sont des processus qui ne sautent que vers le bas. Leur argument justificatif pour l'emploi de tels processus est que seuls les sauts négatifs sont importants car ce sont eux qui déterminent la faillite. Nous discuterons ce point plus loin; pour l'instant nous présentons leur modèle plus en détail.

Les processus de Lévy choisis par Hilberink et Rogers sautent uniquement vers le bas, comme dit plus haut, et sont supposés être à variation finie. Ils admettent donc l'exposant de Laplace suivant (voir annexe A) :

$$\psi(z) = \frac{\sigma^2 z^2}{2} + bz + \int_{-\infty}^0 (e^{zx} - 1)\nu(dx)$$

Remarquer que ces processus ne sont pas des subordonateurs vers le bas, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas strictement décroissants. Ils peuvent croître dû à la présence d'une composante brownienne (apparaissant avec le paramètre σ dans l'exposant de Laplace) et d'une dérive b dont le signe est quelconque. Les bornes dans l'intégrale montrent bien que l'on ne considère que des sauts vers le bas, sauts dont le taux d'arrivée est quantifié par la mesure de Lévy ν . Pour plus de détails techniques, se reporter à l'annexe A de ce chapitre.

Une autre description des processus de Lévy spectralement négatifs se fait avec leurs facteurs de Wiener-Hopf. Ces facteurs, ψ^+ et ψ^- donnent accès aux lois des supremum et infimum respectivement.

Ainsi, on a pour ψ^- :

$$\psi^-(\lambda, z) = E\left(e^{z\underline{X}T_\lambda}\right)$$

où \underline{X} est l'infimum du processus X et T_λ une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ .

La connaissance de ces facteurs, et donc des lois associées, permet comme nous allons le voir plus loin de calculer les différentes espérances donnant les valeurs de la dette, de la firme. Dans le cas de Hilberink et Rogers, ils

admettent l'expression suivante :

$$\psi^+(\lambda, z) = \frac{\beta^*(\lambda)}{\beta^*(\lambda) - z} \quad (3.3)$$

et :

$$\psi^-(\lambda, z) = \frac{\lambda}{\lambda - \psi(z)} \frac{\beta^*(\lambda) - z}{\beta^*(\lambda)} \quad (3.4)$$

où $\beta^*(\lambda)$ est la solution de $\psi(\beta) = \lambda$.

Hilberink et Rogers, comme Leland et Toft, procèdent en deux étapes. Tout d'abord, ils déterminent la structure financière de la firme. Pour cela, ils calculent P , C et V_B en se servant notamment de la condition de maximisation des fonds propres. En faisant cela, ils supposent que les managers, de même que le marché, perçoivent les rendements des actifs comme des processus de Lévy spectralement négatifs et conduisent leur politique en accord avec cette perception.

De fait, l'emploi de la condition de maximisation des fonds propres permet d'écrire :

$$V_B = \frac{\frac{C+mP}{m+r}\zeta'(0, m+r) - \frac{\tau C}{r}\zeta'(0, r)}{1 + \alpha\gamma'(0, 1, r) + (1 - \alpha)\gamma'(0, 1, m+r)} \quad (3.5)$$

où les fonctions ζ et γ sont définies par (l'exposant x dans l'espérance correspond à un changement de représentation; Hilberink et Rogers considèrent un processus de Lévy *partant* de x et traversant le niveau zéro - ce qui est similaire à partir de zéro et traverser x) :

$$\begin{cases} \zeta(x, \lambda) = 1 - E^x(e^{-\lambda H_0}) \\ \gamma(x, \beta, \lambda) = 1 - E^x(e^{\beta X(H_0) - \lambda H_0}) \end{cases} \quad (3.6)$$

et admettent pour dérivées :

$$\begin{cases} \zeta'(0, \lambda) = \lim_{z \rightarrow +\infty} (z\psi^-(\lambda, z)) \\ \gamma'(0, \beta, \lambda) = \frac{\zeta'(0, \lambda)}{\psi^-(\lambda, \beta)} - \beta \end{cases}$$

Nous voyons donc que dès ici la connaissance du facteur ψ^- s'avère nécessaire. Elle permet de franchir la première étape qui est celle du calcul de P , C et V_B , à savoir celle de la détermination de la structure financière de l'entreprise.

En deuxième étape, Hilberink et Rogers calculent les valeurs de la dette, de la firme, des fonds propres et des obligations en se servant des paramètres

V_B , P et C calculés antérieurement et pour divers niveaux du levier d'endettement L , défini comme le ratio de la valeur de marché de la dette sur la valeur de marché de la firme.

Si l'on considère les formules (3.1) et (3.2) exprimant les valeurs de la dette et de l'entreprise, on se rend compte que l'on a toujours les mêmes types d'espérances à calculer. En particulier, on devra toujours calculer des termes de la forme :

$$\begin{cases} E(e^{-\lambda H_x}) \\ E(e^{\theta X(H_x) - \lambda H_x}) \end{cases} \quad (3.7)$$

Ces termes peuvent être calculés au moyen de transformées de Laplace inverse - voir l'annexe B de ce chapitre pour plus de détails.

Pour le premier terme de (3.7), on a la relation importante suivante :

$$E(e^{-\lambda H_x}) = P(\underline{X}(T_\lambda) < x) \quad (3.8)$$

où \underline{X} est l'infimum de X et T_λ une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ . On peut notamment calculer cette probabilité par inversion simple de Laplace du facteur de Wiener-Hopf ψ^- donné par la formule (3.4).

Le second terme est un peu plus difficile à calculer et nécessite l'emploi d'identités de la théorie de fluctuations. Pour plus de détails sur ce sujet, voir l'article clef de Bingham [15] ou le livre de Bertoin [13]. L'identité que nous présentons ici est valide aussi bien pour des processus de Lévy spectralement négatifs que pour des processus de Lévy quelconques :

$$\int_{-\infty}^0 \mu e^{\mu x} E(e^{\theta X(H_x) - \lambda H_x}) dx = \frac{\psi^-(\lambda, \theta) - \psi^-(\lambda, \theta + \mu)}{\psi^-(\lambda, \theta)} \quad (3.9)$$

Cette identité exprime la transformée de Laplace du second terme de (3.7) comme une fonctionnelle du facteur de Wiener-Hopf ψ^- . On peut donc calculer ce second terme par transformée de Laplace inverse ici aussi.

Hilberink et Rogers, par le calcul des deux types de termes mentionnés, peuvent donc obtenir les valeurs de la dette, de l'entreprise, des fonds propres en fonction du levier d'endettement. Ils étudient également les marges de crédit avec détail : contrairement à celles obtenues par Leland et Toft, les leurs ne s'annulent pas pour des obligations dont la maturité est proche de zéro. Cet aspect est intéressant en ce qu'il correspond à une observation de marché non retrouvée par les modèles structurels classiques.

Hilberink et Rogers fournissent également une expression asymptotique des marges de crédit (notées S) aux courtes maturités :

$$S \stackrel{0}{\sim} \nu(x) - \frac{(1-\alpha)V_0}{P} \int_{-\infty}^x e^y \nu(dy)$$

où $x = \log(V_B/V_0)$.

Nous passons maintenant à la présentation d'un nouveau cadre.

3.4 La Firme du Point de Vue des Managers

Nous étudions dans cette section le choix d'une structure financière pour l'entreprise. En d'autres termes, nous étudions le point de vue des managers et essayons de comprendre comment ils perçoivent leur entreprise face à l'environnement économique et comment ils construisent ou structurent cette même entreprise.

3.4.1 Structure de la Firme et Politique Managériale

Nous donnons ici quelques idées sur la structure financière de la firme et sur l'impact des décisions des dirigeants sur cette structure. Tout d'abord, posons-nous une question élémentaire : "qu'est-ce que la structure financière de la firme"? La réponse classique est : "le mode de financement de l'entreprise, à savoir le ratio dette sur fonds propres". Mais nous pouvons répondre également de manière plus généraliste (pour l'instant) : "un ensemble de paramètres ou déterminants financiers fixés par les dirigeants pour une période de temps donné". Cette réponse marque bien deux points qui méritent d'être détaillés : quels sont les paramètres financiers fixés par les managers et pendant combien de temps restent-ils fixés au même niveau?

Pour une entreprise où l'actif (les aspects économiques) et le passif (les aspects financiers) seraient complètement découplés, il suffirait de définir un unique déterminant financier : L , soit le levier d'endettement. Cependant, on n'observe jamais un tel découplage en pratique et de plus nous nous intéressons aux probabilités de faillite de l'entreprise, probabilités qui sont intimement dépendantes de la nature des actifs. Remarquer au passage que les probabilités de faillite dépendent du passif à travers le seuil de faillite (qui est fonction du levier d'endettement).

Nous pouvons donc définir les déterminants de la structure financière de la firme de manière large (en incluant certains aspects économiques dans les aspects financiers) par les paramètres : V_0 , V , V_B , P , C , et L . De manière

plus standard, on peut aussi se contenter des paramètres P , C , L en n'oubliant pas le rôle important joué par V_0 , V , V_B .

V_0 est la valeur des actifs à l'instant initial. V est le processus décrivant les actifs; en fait, par V , nous entendons le risque associé aux actifs de l'entreprise particulière considérée. Nous supposons pour l'instant que les actifs ne sont pas modifiés au cours du temps, c'est-à-dire que le problème de substitution des actifs de la théorie de l'agence ne se pose pas. V_B est le niveau d'actif auquel les dirigeants déclareront l'entreprise en faillite. P est la valeur faciale totale de la dette et C est le montant total de coupon à rembourser. Enfin, rappelons que L est le levier d'endettement que nous définissons comme le ratio de la valeur totale de la dette sur la valeur totale de la firme.

Nous supposons pour l'instant - comme Modigliani et Miller et Leland - que la structure de l'entreprise est invariante dans le temps et donc que les paramètres financiers de l'entreprise, tel que le montant facial de la dette, restent indéfiniment fixés au même niveau.

Ici, nous sommes particulièrement intéressés par comprendre comment les managers fixent la structure de la firme et notamment les paramètres P , C , V_B , et L . Il est généralement admis que les managers sont mieux informés que les agents extérieurs (des traders sur obligations par exemple). Parce que les managers connaissent la nature des actifs et des projets de l'entreprise, ils seraient les mieux à même de prendre des décisions optimales, décisions fondées sur une information maximale et non publique. Dans cette optique, il semble donc raisonnable de supposer que les managers peuvent anticiper (et l'on peut notamment penser aux pratiques des managers d'Enron) la faillite de leur entreprise.

En raison des capacités d'anticipation des managers, la meilleure modélisation des actifs devrait se faire par le biais de diffusion. Attention : par modélisation, nous entendons ici représentation ou conceptualisation de l'aléa attaché aux actifs *par* les managers et *pour* leur gestion de l'entreprise. La représentation par diffusion est intéressante pour deux raisons : la faillite n'est jamais un événement certain et donc les actifs doivent être modélisés par un processus stochastique. Par ailleurs, les diffusions ne portent pas en elles-mêmes de "surprises" : si la valeur des actifs fluctue, elle ne saute pas brusquement vers le haut ou vers le bas; et ceci encore une fois dans la perception que peuvent en avoir les managers. Avec une telle représentation, la faillite ne se produit pas de manière instantanée et imprévue pour les managers.

Ainsi, la détermination de la structure de la firme par le manager peut-

elle être explicitée dans un cadre à la Leland et Toft. En particulier, ce type de cadre (contrairement au cadre de Longstaff et Schwartz) propose une obtention endogène du niveau de faillite, ce qui est pertinent ici puisque nous nous plaçons du point de vue des managers.

Supposons que le rendement des actifs X , défini par $V_t = V_0 e^{X_t}$, vérifie :

$$dX = adt + bdz$$

avec :

$$\theta_\lambda^- = \sqrt{\left(\frac{a}{b^2}\right)^2 + \frac{2\lambda}{b^2}} + \frac{a}{b^2}$$

et :

$$\theta_\lambda^+ = \sqrt{\left(\frac{a}{b^2}\right)^2 + \frac{2\lambda}{b^2}} - \frac{a}{b^2}$$

Alors, la condition de maximisation des fonds propres induit pour la valeur du niveau de faillite :

$$V_B = \frac{\frac{C+mP}{m+r}\theta_{m+r}^- - \frac{\tau C}{r}\theta_r^- e^{-\theta_r^+ \log\left(\frac{V_T}{V_B}\right)}}{1 + \alpha\theta_r^- + (1 - \alpha)\theta_{m+r}^-} \quad (3.10)$$

où l'on suppose un profil exponentiel de dette (de maturité moyenne $1/m$) et où V_T est le niveau d'actif en dessous duquel l'entreprise ne réalise plus d'économies d'impôt. L'annexe C de Hilberink et Rogers [61] fournit une démonstration de ce résultat.

La relation (3.10) donnée ci-dessus nous donne un premier lien entre le niveau de faillite V_B et les montants faciaux et de coupon P et C . Comme nous souhaitons calculer ces trois déterminants pour diverses valeurs du levier d'endettement L , des relations supplémentaires doivent être fournies. On peut commencer par noter la définition du levier d'endettement :

$$L = \frac{\mathcal{D}(V_0, V_B)}{\mathcal{V}(V_0, V_B)} \quad (3.11)$$

comme le ratio de la valeur initiale de la dette par rapport à la valeur initiale de l'entreprise. Ce ratio peut être calculé dans un cadre de Leland et Toft et il est alors une fonction de P , C et V_B . La formule (3.11) nous fournit donc une seconde relation entre nos trois déterminants fondamentaux.

Finalement, on suppose qu'à l'instant initial de structuration de l'entreprise la valeur faciale de la dette est égale à sa valeur de marché, soit :

$$P = \mathcal{D}(V_0, V_B) \quad (3.12)$$

En conclusion, nous pouvons fixer la structure financière de l'entreprise en résolvant le système d'équations (3.10), (3.11) et (3.12), c'est-à-dire que nous pouvons calculer V_B , P et C pour un levier d'endettement L et un risque des actifs fixés. Nous passons en sous-section suivante à l'analyse de la structure financière ainsi obtenue.

3.4.2 Analyse de la Structure Financière de la Firme

Nous étudions tout d'abord la dépendance des paramètres structurels P , C et V_B en fonction du niveau d'endettement L choisi par le manager. Pour cela, nous résolvons le système d'équations donné en sous-section précédente. Nous supposons un profil de dette de type exponentiel avec une maturité moyenne de $1/m$ et choisissons les paramètres de base comme dans l'article de Hilberink et Rogers: $r = 0.075$, $\delta = 0.07$, $\sigma = 0.2$, $\alpha = 0.5$, $\tau = 0.35$, et $V_0 = 100$. Noter que δ est le taux de "pay-out", c'est-à-dire de versements associés à la dette et aux fonds propres. Ces paramètres correspondent à une entreprise standard. Les résultats sont représentés en figure (3.5), (3.6) et (3.7) pour diverses valeurs de m . Enfin, nous supposons qu'il existe un niveau V_T en dessous duquel il n'y a plus d'économies d'impôts et nous le prenons égal à C/δ , niveau limite auquel tous les bénéfices servent à rembourser les coupons.

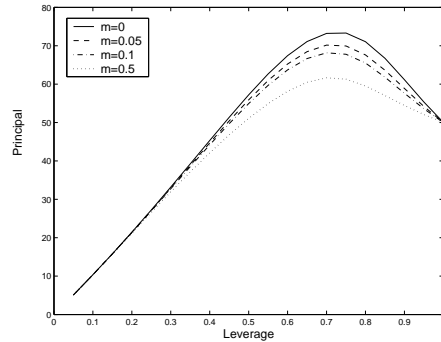


FIG. 3.5 – Dette Faciale

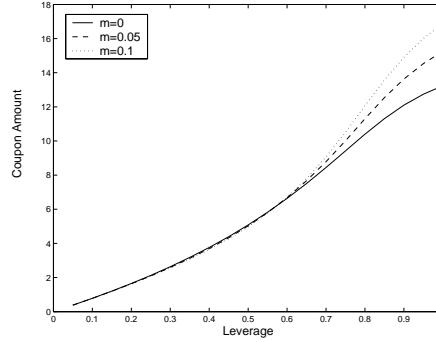


FIG. 3.6 – Montant de Coupon

Remarquer tout d'abord que le montant facial P de la dette et le montant de coupon C commencent à croître de manière linéaire avec le ratio d'endettement. Puis, au-delà d'un ratio de l'ordre de 60%, ils admettent des comportements plus subtils. Le montant facial de dette présente un optimum par rapport au ratio d'endettement: se rappeler qu'il est censé être égal dans un cadre de Leland et Toft à la valeur de marché de la dette à l'instant initial. Il existerait donc un optimum sur la valeur de marché de la dette pour une valeur de L de l'ordre de 70%. Par ailleurs, au fur et à mesure

que l'entreprise devient plus risquée en termes d'endettement, le coupon total à rembourser croît de manière très importante. Nous reviendrons plus en détail sur ce point. Noter que nous avons tracé en trait plein le cas $m = 0$: ce cas correspond à une maturité moyenne infinie pour la dette, en d'autres termes à un endettement par obligations perpétuelles (soit au papier de Leland [78]). Nous voyons qu'il s'agit d'un cas limite pour lequel le montant facial de la dette est maximisé et le montant de coupon minimisé. On observe ainsi en figure (3.5) et (3.6) que plus m est faible, c'est-à-dire plus la maturité moyenne est grande, plus la valeur faciale de la dette augmente et plus le montant de coupon à rembourser décroît. Comme remarqué dans les articles de Leland, la prise en compte de coûts d'agence de la dette permet de mitiger ce résultat.

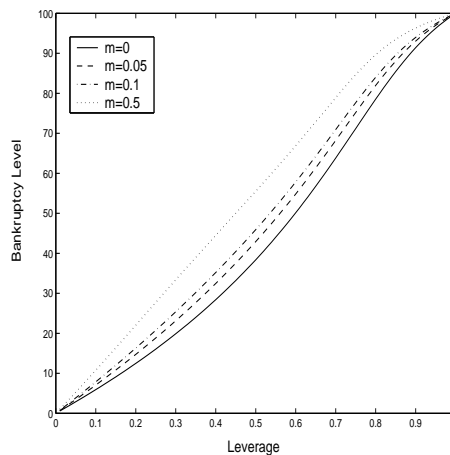


FIG. 3.7 – Niveau de Faillite

En ce qui concerne le niveau de faillite V_B , nous pouvons voir qu'il croît toujours de manière quasi-linéaire avec le ratio d'endettement L . Il est toujours supérieur au niveau P : rappelons que dans le cadre envisagé la faillite est déclarée par les managers qui cherchent à maximiser la valeur des fonds propres et non quand la valeur des actifs passe en dessous de P . Nous observons enfin que pour une dette de courte maturité (m grand) le niveau V_B est plus important, autrement dit la faillite sera déclarée plus tôt.

En guise de complément, nous présentons en figure (3.8) la dépendance du montant agrégé de coupon en fonction du niveau d'endettement quand il n'y a pas de limitation sur les économies d'impôts; c'est-à-dire en l'absence d'un niveau d'actif V_T en dessous duquel l'entreprise ne réalise plus d'économies d'impôts. Nous voyons que dans ce cas le montant de coupon peut devenir infini pour L grand, ce qui n'est pas très réaliste. Par ailleurs,

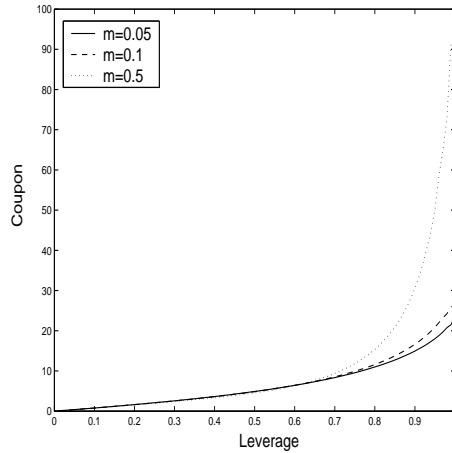


FIG. 3.8 – *Montant de Coupon (sans le niveau V_T)*

dans un tel cadre, la valeur de la dette et celle de la firme peuvent présenter des optima pour un niveau d'endettement maximum (soit $L = 1$), ce qui, là encore, n'est pas réaliste. Cela reviendrait à dire que l'on peut mener en toute circonstance une politique très risquée financée par l'Etat, c'est-à-dire par les économies d'impôts. Nous ne traiterons pas ce cas plus avant et nous supposerons toujours qu'il existe un niveau $V_T > V_B$ en dessous duquel l'entreprise ne peut plus réaliser d'économies d'impôts.

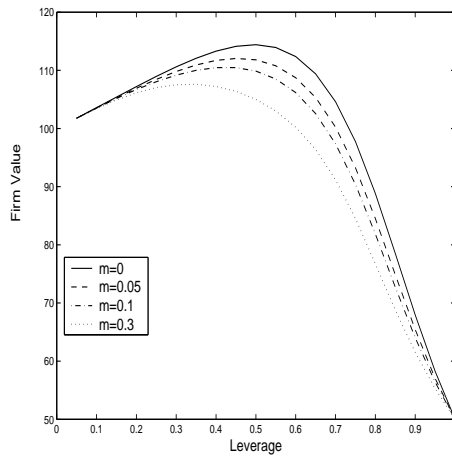


FIG. 3.9 – *Valeur de la Firme*

Nous présentons maintenant en figure (3.9) la dépendance de la valeur de la firme - telle que perçue par les managers - en fonction du niveau d'endette-

ment L . Nous pouvons clairement observer l'existence d'une valeur optimale de la firme pour tout choix de financement de cette dernière. Pour un financement par obligations de maturité infinie, l'optimum se situe autour de 50% pour L . Pour un financement par dette de courte maturité moyenne, la valeur de la firme est maximisée pour des ratios d'endettement plus faibles, de l'ordre de 20%.

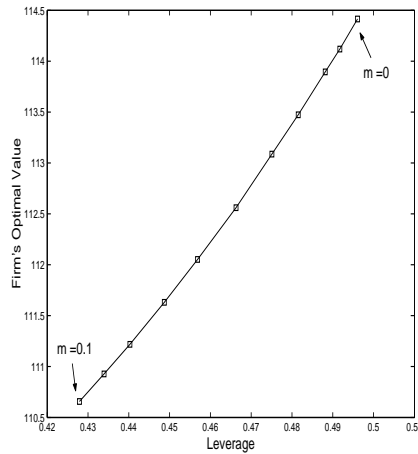


FIG. 3.10 – Valeurs Optimales de la Firme

A titre d'illustration, nous présentons en figure (3.10) la croissance des valeurs optimales de la firme par rapport au ratio d'endettement L en fonction de la maturité moyenne $1/m$. Autrement dit nous construisons une figure où sont représentés divers optima tels qu'observés en figure (3.9). Le cas $m = 0.1$ correspond à une maturité moyenne de 10 ans. La valeur optimale de la firme est de l'ordre de 110 (se rappeler que la valeur initiale V_0 des actifs est égale à 100) et ceci pour un ratio d'endettement de l'ordre de 43%. Quand m décroît, soit quand la maturité moyenne croît, la valeur optimale de la firme augmente avec un maximum de l'ordre de 115 pour un ratio d'endettement de l'ordre de 50% et une maturité moyenne infinie.

Nous représentons à présent en figure (3.11) les marges de crédit moyennes (définies comme $C/P - r$) en points de base, pour des maturités moyennes assez grandes allant de deux à vingt ans. Observons que pour un ratio d'endettement élevé, ici $L = 60%$, la structure par terme des marges de crédit est décroissante. Pour un ratio moyen, soit $L = 50%$, elle présente une légère bosse. Enfin pour un ratio plus faible de 40%, la structure par terme est croissante. Ceci est en accord avec les résultats empiriques de Sarig et Warga [115]. Nous pouvons à ce niveau faire deux commentaires. Tout d'abord, si l'on calcule les marges de crédit pour des maturités plus courtes, on observe

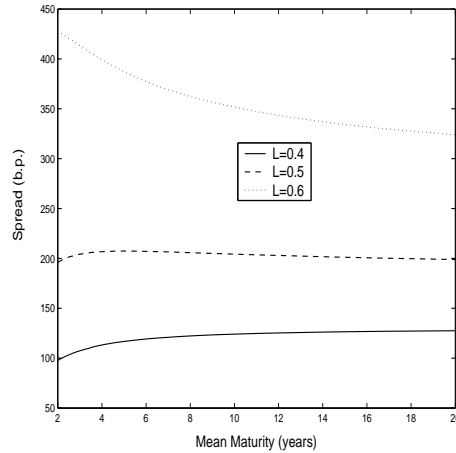


FIG. 3.11 – Marges de Crédit

qu'elle tendent toutes vers zéro. Autrement dit, la structure correspondant à un ratio de 60% présentera également une bosse, mais pour une maturité plus faible que les deux ans de la figure. On se trouve en fait en présence de deux cas : soit la structure par terme est strictement croissante à partir de zéro (pour les firmes peu endettées) soit elle est d'abord croissante puis décroissante (pour les firmes assez ou beaucoup endettées). La seule différence entre les firmes moyennement et fortement endettées consiste en la position du point de retournement. Pour les firmes très endettées, il a lieu aux très faibles maturités. Par ailleurs, rappelons que ces marges de crédit sont celles vues par les managers. Elles sont nettement plus faibles que les marges de crédit observées empiriquement. En d'autres termes, les managers ont une vision optimiste de leur entreprise dans une modélisation classique par diffusion.

Venons en maintenant à l'étude du point de vue des investisseurs, et essayons de répondre à la question suivante : pourquoi les investisseurs (et donc le marché) surpondèrent-ils le risque de l'entreprise (c'est-à-dire pourquoi observe-t'on en pratique des marges de crédit importantes)?

3.5 La Firme du Point de Vue des Investisseurs

Après avoir étudié le point de vue des managers, nous passons maintenant à celui des investisseurs. Remarquer dès à présent que ces points de vue ne sont pas du tout équivalents en termes d'effet : le manager possède une perception de ce que peut être la valeur des obligations de sa firme, les investisseurs en revanche, à partir de leurs perceptions, *fixent* cette valeur. Ainsi,

marquons bien que si nous nous intéressons dans ce chapitre aux perceptions des agents, nous ne devons pas oublier quelles sont leurs fonctions respectives.

Nous proposons dans cette section un nouveau modèle d'évaluation de la dette par les investisseurs quand les actifs sont admis à sauter dans les deux sens et en particulier, nous les modélisons par des processus de Lévy stables. Le niveau auquel est déclaré la faillite est également fixé de manière différente par rapport à la section précédente. En effet, les investisseurs ne sont pas les managers et ne peuvent savoir quand ces derniers déclareront la faillite.

Nous présentons les détails de notre modélisation en première sous-section. Puis, dans une deuxième sous-section, nous analysons les résultats obtenus pour les valeurs de la firme, de la dette, des obligations et des marges de crédit.

3.5.1 Présentation du Modèle

Nous souhaitons construire un modèle d'évaluation de la dette et de la valeur d'une entreprise en prenant en compte le point de vue des investisseurs de marché. Par investisseur de marché, est entendu un acteur économique participant au processus de valorisation d'une entreprise, étant moins bien informé que les dirigeants de cette entreprise et prenant en compte une faillite possible. Un investisseur de marché sera donc typiquement un trader sur obligations qui n'a accès qu'à la comptabilité officielle des entreprises sur lesquelles il se concentre, mais pas aux informations internes plus détaillées. On pourrait étendre ce cadre aux actionnaires d'une entreprise, pourvu qu'ils n'aient pas accès à une information privilégiée (comme la famille Springer concernant sa propre entreprise par exemple).

Parce qu'un agent extérieur est moins bien informé qu'un manager, sa perception de la faillite sera très différente de la perception du manager. Il ne pourra pas anticiper cette faillite qui lui paraîtra un événement soudain et imprévu. La modélisation raisonnable de la valeur des actifs par l'investisseur semble donc dans ce cas une modélisation avec sauts. Nous admettrons donc que les investisseurs se représentent la faillite comme un événement dicté par la chute brutale - par un saut - de la valeur des actifs en dessous d'un certain seuil. Nous représenterons ainsi le rendement de la valeur des actifs, à l'instar de ce qui se fait maintenant couramment sur les actions, par un processus de Lévy. Contrairement à Hilberink et Rogers [61] qui ne considèrent que des processus de Lévy spectralement négatifs (ne sautant que vers le bas), nous souhaitons prendre en compte des processus de Lévy pouvant sauter aussi bien vers le haut que vers le bas. En effet, si la valeur des actifs saute vers le

bas, elle doit aussi pouvoir sauter vers le haut; on ne doit raisonnablement pas exclure les bonnes surprises possibles. Ne prendre en compte que des sauts négatifs amène à notre sens une modélisation biaisée. Par exemple, penser au calibrage de la valeur des actifs: si le processus ne saute que vers le bas, alors on est amené à lui assigner une dérive positive excessivement grande - ceci afin de retomber sur des distributions de rendement d'actifs réalistes. Par ailleurs, ne prendre en compte que des sauts négatifs, c'est ne pas modéliser correctement la *nature* des choses: les valeurs, de manière expérimentale et dû à l'impact de divers évènements, sautent aussi bien vers le haut que vers le bas.

Rappelons les expressions des valeurs de la dette et de la firme:

$$\mathcal{D} = \frac{C + mP}{m + r} E \left(1 - e^{-(m+r)H_x} \right) + (1 - \alpha) V_0 E \left(e^{X(H_x) - (m+r)H_x} \right)$$

et:

$$\mathcal{V} = V_0 + \frac{\tau C}{r} E \left(1 - e^{-rH_x} \right) - \alpha V_0 E \left(e^{X(H_x) - rH_x} \right)$$

Ces expressions sont indépendantes du processus modélisant les rendements, nous les conservons donc en supposant maintenant que les rendements d'actifs sont représentés par des processus de Lévy quelconques. Rappelons que H_x est le temps de franchissement de la barrière x . La question qui se pose est donc de pouvoir calculer des termes du type:

$$E \left(1 - e^{-\lambda H_x} \right) \tag{3.13}$$

et:

$$E \left(e^{\theta X(H_x) - \lambda H_x} \right) \tag{3.14}$$

Or, on sait que leur transformée de Laplace s'écrit:

$$\int_{-\infty}^0 \mu e^{\mu x} E \left(1 - e^{-\lambda H_x} \right) dx = \psi^-(\lambda, \mu)$$

et:

$$\int_{-\infty}^0 \mu e^{\mu x} E \left(e^{\theta X(H_x) - \lambda H_x} \right) dx = \frac{\psi^-(\lambda, \theta) - \psi^-(\lambda, \theta + \mu)}{\psi^-(\lambda, \theta)}$$

On peut donc calculer ces termes par transformée de Laplace inverse d'une fonction du facteur de Wiener-Hopf ψ^- . Pour pouvoir calculer les valeurs de l'entreprise et de sa dette, il faut donc connaître le facteur ψ^- . Ce facteur existe pour des processus de Lévy quelconques, cependant il n'admet une expression simple pour des processus de Lévy sautant dans les deux sens que si ces derniers vérifient la propriété de stabilité (ce facteur a été calculé par Doney [39] en 1987). Voir l'annexe A de ce chapitre pour plus de détails sur la factorisation de Wiener-Hopf.

Nous supposons donc que les rendements des actifs sont modélisés par des processus de Lévy stables, autrement dit nous posons :

$$X = \gamma Z$$

où Z est un processus de Lévy stable défini comme dans Doney [39] par la fonction caractéristique de la distribution à l'instant 1 :

$$E(e^{iuZ_1}) = e^{-c|u|^\alpha(1-i\beta \operatorname{sign}(u) \tan(\frac{\pi\alpha}{2}))}$$

avec :

$$c = \left(1 + \beta^2 \tan^2\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)^{-1/2}$$

Une variable aléatoire stable est caractérisée par quatre paramètres : α , coefficient de queue, β , coefficient d'asymétrie, σ , coefficient de dispersion et μ coefficient de translation. Pour construire un processus de Lévy stable, on pose classiquement $\mu = 0$. Dans le cas de Doney, le paramètre de dispersion σ est égal à $c^{1/\alpha}$. Il est fixé de manière unique par rapport à α et β . Or, nous souhaitons pouvoir disposer d'un paramètre de dispersion quelconque : c'est pour cela que nous avons introduit le paramètre γ . On peut montrer aisément que le paramètre de dispersion du processus X est égal à $\gamma c^{1/\alpha}$. Attention, même si σ s'interprète visuellement sur les distributions de la même manière que l'écart type d'une variable gaussienne, ce n'est pas un écart-type. De fait, une variable aléatoire stable ne possède jamais de second moment.

Nous prenons les paramètres suivants, décrivant le processus de Lévy stable X , pour le reste de notre étude :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = 0.15 \quad \text{soit} \quad \sigma \simeq 0.145 \\ \alpha = 1,4 \\ \beta = 0.236 \\ \mu = 0 \end{array} \right.$$

Avec de tels paramètres, on trace la distribution de X_1 en figure (3.12).

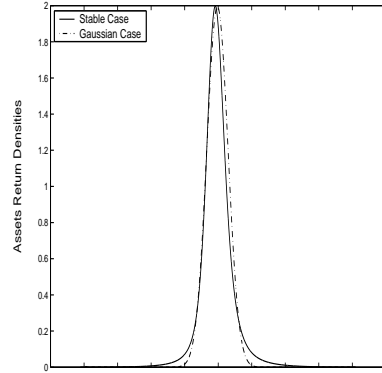


FIG. 3.12 – *Distribution du rendement des actifs*

Nous sommes alors dans une situation où notre distribution de rendement stable est proche de la distribution de rendement gaussienne des articles de Leland et Leland et Toft - si ce n'est la présence de queues épaisses. Noter au passage que ces auteurs prennent toujours la même distribution de rendement, c'est-à-dire toujours le même jeu de paramètres. Hilberink et Rogers ont pris, chaque fois que possible, les mêmes paramètres que Leland pour faciliter les comparaisons; et nous ferons de même par la suite.

En guise d'illustration, nous traçons en figure 3.13 la probabilité $P(\underline{X}(T_\lambda) \leq x)$ qui permettra de calculer le premier type de terme intervenant dans les valeurs de la firme et de la dette (voir la formule (3.13)). En effet, on a la relation suivante :

$$P(\underline{X}(T_\lambda) \leq x) = E\left(e^{-\lambda H_x}\right)$$

Puis, nous traçons en figure 3.14, le second type de terme (voir la formule (3.14)) pour $\theta = 1$.

Nous avons modélisé les rendements d'actifs par des processus à sauts de type Lévy stable, et nous présenterons les résultats obtenus dans ce cadre en sous-section suivante. Pour autant, nous n'avons pas encore détaillé un point important : quel est le niveau qui déclenche la faillite lorsqu'il est traversé par le processus des actifs?

Il apparaît clair que les investisseurs n'ont pas accès au processus de maximisation des fonds propres élaboré par les managers. Les investisseurs ne savent pas quand la faillite sera déclarée. Ils n'ont pas *a priori* connaissance du niveau V_B .

Il semble donc raisonnable de postuler un niveau de faillite exogène quand on se place du point de vue des investisseurs. Le niveau V_B peut en parti-

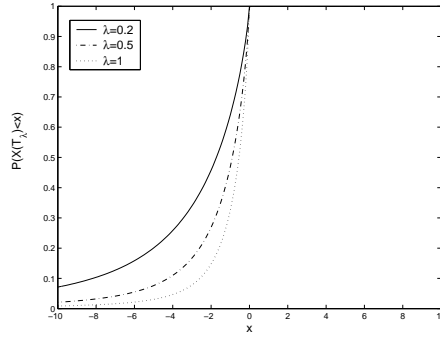


FIG. 3.13 – *Premier terme en fonction de λ*

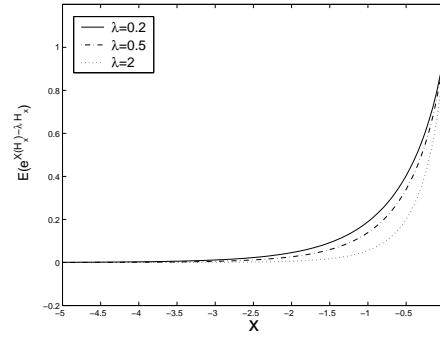


FIG. 3.14 – *Second terme en fonction de λ*

culier être déterminé de manière économétrique. On peut par exemple avoir des niveaux estimés pour chaque classe de risque (au sens d"endettement"), c'est-à-dire pour chaque type d'entreprise. Ici, nous retrouvons donc l'approche de Longstaff et Schwartz où le niveau de faillite est exogène et non endogène comme dans le cadre de Leland et Toft.

3.5.2 Analyse des Valeurs de Marché

Avant de présenter notre analyse des valeurs de l'entreprise, de sa dette et des marges de crédit, précisons nos choix de paramètres. Nous supposons ainsi: $r = 0.075$, $\tau = 0.35$, $V_0 = 100$, $\gamma = 0.15$, $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.236$. En ce qui concerne le paramètre α des coûts de faillite, nous l'appellerons $\hat{\alpha}$ puisque la lettre grecque α est déjà employée comme paramètre de queue du processus de rendement. Nous prenons: $\hat{\alpha} = 0.5$. En ce qui concerne P , C et V_B , ce sont, comme indiqué précédemment, des paramètres exogènes pour l'investisseur. Par commodité, nous reprenons les valeurs de ces paramètres obtenues dans la section consacrée aux managers. Remarquer que pour un investisseur souhaitant implémenter ce modèle, P et C sont publics et une manière exogène de spécifier V_B peut se faire en posant $V_B = 100 \times L$, ce qui semble une bonne approximation (voir la figure 3.7).

Venons en à l'étude de la valeur de la firme. Cette dernière peut s'exprimer comme:

$$\mathcal{V} = V_0 + \frac{\tau C}{r} E(1 - e^{-rH_x}) - \hat{\alpha} V_0 E(e^{\gamma X(H_x) - rH_x})$$

où

$$x = \frac{1}{\gamma} \log\left(\frac{V_B}{V_0}\right)$$

Nous avons calculé cette expression par transformée de Laplace inverse (par la méthode de Weeks, voir l'annexe B de ce chapitre). Les résultats ont été tracé en figure 3.15 pour divers niveaux du levier d'endettement L . Chaque courbe correspond à une maturité moyenne $1/m$ du profil de dette.

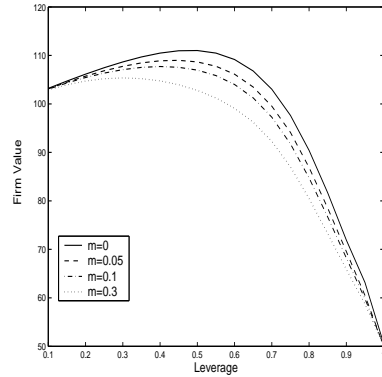


FIG. 3.15 – Valeur de la Firma

Remarquons que ce modèle permet de retrouver des allures classiques bossées d'évolution de la valeur de la firme en fonction du levier d'endettement. Les leviers optimaux sont ici aussi inférieurs à 60%. On retrouve également le fait que la firme est moins valorisée pour un endettement à court terme (m grand). L'effet est même amplifié : plus la maturité moyenne de la dette est faible, plus le levier optimal décroît, et dans ce cas il devient nettement plus faible que dans le cadre de Leland et Toft.

Nous avons représenté en figure 3.16 la différence entre la valeur de la firme dans notre cadre et la valeur de la firme dans le cadre de Leland et Toft en fonction du levier d'endettement et pour une maturité moyenne de la dette de dix ans ($m = 0.1$). Pour des leviers inférieurs à 70%, on voit que notre modèle prédit des valeurs de la firme inférieures à celles prédites dans le cadre de Leland et Toft. Par contre, on observe l'effet contraire pour des leviers supérieurs à 70%. On peut penser que l'investisseur préfère un certain niveau de risque et que la présence des sauts positifs, c'est-à-dire la survenance probable d'évènements positifs pour la firme, l'incite à accepter des niveaux d'endettement relativement élevés (en présence de sauts négatifs uniquement, on ne devrait pas observer des écarts de valeur aussi marqués). Remarquer cependant que pour des leviers passant de 90% à 100%, cet écart de valeur s'atténue puis disparaît : il y a une limite au risque que l'investisseur est prêt à prendre et nous voyons ici l'effet de la prise en compte des sauts négatifs.

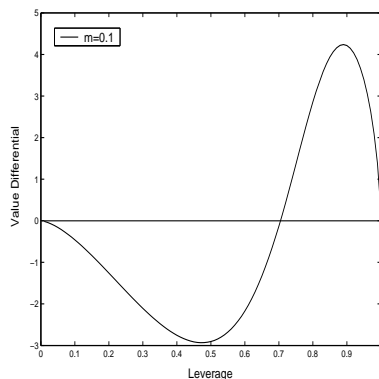


FIG. 3.16 – Différentiel des valeurs de la firme (cas stable / cas gaussien)

En ce qui concerne la valeur de la dette, nous calculons la formule suivante de nouveau par transformation de Laplace inverse :

$$\mathcal{D} = \frac{C + mP}{m + r} E \left(1 - e^{-(m+r)H_x} \right) + (1 - \hat{\alpha}) V_0 E \left(e^{\gamma X(H_x) - (m+r)H_x} \right)$$

où

$$x = \frac{1}{\gamma} \log \left(\frac{V_B}{V_0} \right)$$

Nous représentons cette valeur en figure 3.17 en fonction du niveau d'endettement et pour diverses maturités moyennes. Observer les allures classiques obtenues. Les valeurs optimales de la dette se situent entre 70% et 80%. Ces optima sont plus faibles que dans le cadre de Leland et Toft : la dette est globalement moins valorisée dans notre modèle à sauts.

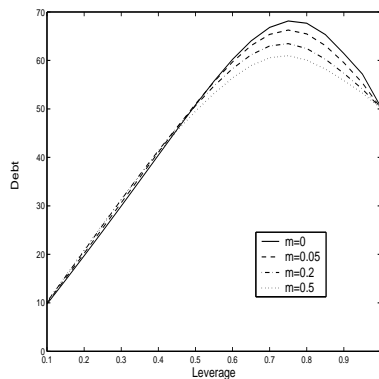


FIG. 3.17 – Valeur de la Dette

Venons-en maintenant au calcul des marges de crédit. Nous les obtenons

comme la différence entre les rendements ρ rendant les valeurs des obligations égales à un et le taux d'intérêt r . Il s'agit donc d'abord de pouvoir calculer la valeur en fonction de ρ d'une obligation de maturité donnée. Cela est plus compliqué que le calcul des valeurs de la dette et de la firme. En effet, on peut montrer en reprenant un résultat d'Hilberink et Rogers que la valeur d'une obligation s'écrit sous la forme d'une transformée de Laplace inverse :

$$\mathcal{B}_t = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\lambda + \rho}{\lambda(\lambda + r)} E \left(1 - e^{-(\lambda+r)H_x} \right) + \frac{(1 - \hat{\alpha})V_0}{\lambda P} E \left(e^{\gamma X_{H_x} - (\lambda+r)H_x} \right) \right]$$

où \mathcal{L}^{-1} signifie transformée de Laplace inverse.

La fonction à inverser pour calculer \mathcal{B}_t admet une forme que nous reconnaissons : elle s'exprime comme une combinaison de deux termes dont nous savons qu'ils peuvent être obtenus par transformée de Laplace inverse. Pour calculer la valeur d'une obligation, on doit donc réaliser des transformées de Laplace inverses doubles ! A cet effet, nous avons employé la méthode d'Abate et Whitt (voir l'annexe B de ce chapitre), puis nous avons réalisé une recherche de racine sur la valeur de l'obligation afin d'obtenir le rendement ρ .

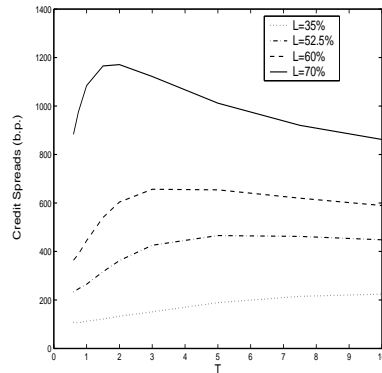


FIG. 3.18 – Marges de Crédit

Les marges de crédit ($\rho - r$) obtenues par cette méthode sont représentées en figure 3.18 en fonction de la maturité de l'obligation correspondante et pour divers niveaux de levier d'endettement (où la maturité moyenne de la dette est de deux ans - soit $m = 0.5$). Nous pouvons observer des structures croissantes de marges de crédit pour les faibles leviers d'endettement et des structures bossées dès lors que le levier dépasse les 50%. Remarquer que ces résultats théoriques sont cohérents avec les résultats obtenus par Leland et Toft, et Hilberink et Rogers. Ils sont également cohérents avec les résultats empiriques de Sarig et Warga [115].

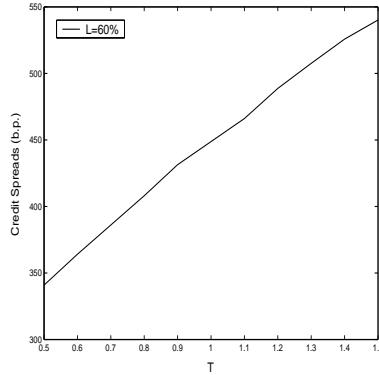


FIG. 3.19 – Marges de Crédit aux Courtes Maturités

Venons en à l'étude des marges de crédit aux courtes maturités. Dans un modèle gaussien, les marges de crédit s'annulent quand la maturité s'approche de zéro. Dans notre cadre, en revanche, nous observons des marges de crédit significativement non nulles pour des maturités proches de zéro - voir la figure 3.19. Cela peut s'expliquer par le fait que puisque les actifs présentent des sauts, alors un événement de faillite est toujours possible, même pour de courts horizons. A l'inverse, si les actifs ne présentent pas de sauts comme dans le cadre de Leland et Toft, la faillite devient impossible sur un court horizon. Pour plus de détails sur les probabilités de défaut aux courts horizons, se reporter au chapitre IV. De manière empirique, on observe que la marge de crédit d'une obligation arrivant à maturité ne s'annule pas. Notre hypothèse de sauts affectant les actifs est ainsi cohérente avec ce fait de marché.

3.6 Compléments

Nous présentons ici deux types de compléments : nous nous intéressons d'abord au point de vue que peuvent avoir les managers sur les fonds propres, puis nous passons à une analyse des coûts d'agence de la dette et des fonds propres.

3.6.1 Quand les Managers Anticipent sur le Marché

Nous avons jusqu'à présent supposé que les managers menaient leur politique de manière interne en tâchant de maximiser la valeur des fonds propres de leur seul point de vue. Alors, nous avons pris pour hypothèse qu'ils se représentaient la valeur des actifs comme un processus diffusif et que l'on

pouvait rendre compte de leurs actions par un modèle à la Leland et Toft.

On peut également envisager une situation où les managers tentent d'anticiper sur le marché. En effet ces derniers ne peuvent avoir qu'une perception de ce qu'est la valeur des fonds propres, tandis que c'est le marché qui fixe cette valeur.

Dans une telle configuration, les managers peuvent tenter de maximiser la valeur des fonds propres telle que perçue (et finalement réalisée) par le marché. Conscients d'une modélisation du processus d'actifs comme un processus à sauts par le marché, les managers essaieront d'employer le même type de modélisation.

Dans une situation *idéale*, les managers et les investisseurs modélisent le processus des actifs exactement par le même processus stochastique et obtiennent les mêmes estimations à partir des mêmes valeurs connues des réalisations du processus des actifs. Il n'y a alors bien sûr plus d'asymétrie d'information, ou du moins les managers négligent-ils l'information supplémentaire qu'ils possèdent par rapport au marché.

Supposons donc que les managers et les investisseurs se représentent le processus d'actifs comme un processus de Lévy stable. Nous nous retrouvons dans la situation des modèles de Leland et Toft, et de Hilberink et Rogers, où l'on garde tout au long des développements la même modélisation du processus d'actifs.

Comment modifier de manière *ad hoc* le cadre proposé dans ce chapitre? Il convient de calculer la structure financière optimale de la firme quand le processus est admis à sauter. Cela revient à obtenir V_B, P, C par les conditions standards adaptées au cas Lévy stable. Rappelons que la première condition est $P = \mathcal{D}(V_0, V_B, P, C)$, où l'on doit maintenant calculer la valeur de la dette \mathcal{D} dans le cas stable et non gaussien. La deuxième condition qui doit être vérifiée est $P = L \mathcal{V}(V_0, V_B, P, C)$ où l'on doit ici aussi utiliser le calcul de \mathcal{V} dans le cas stable. Enfin, la troisième condition à vérifier est celle de la maximisation des fonds propres qui s'exprime comme :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V} \right)_{V_B} = 0$$

Cette condition ne semble pas se traduire par une condition explicite dans notre cas d'étude (contrairement au cas spectralement négatif de Hilberink et Rogers). Cependant, il est possible de calculer le niveau V_B maximisant les fonds propres de manière numérique. On peut donc calculer les déterminants structurels de la firme V_B, P, C et continuer l'analyse de la valeur de la dette,

de la firme et des marges de crédit comme exposé en section précédente.

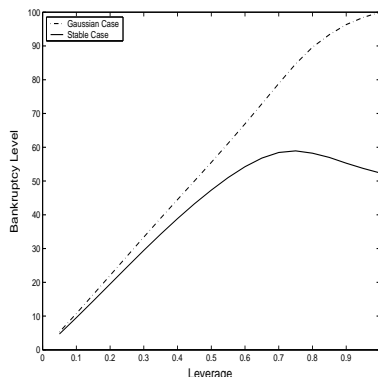


FIG. 3.20 – *Seuils de faillite des cas gaussien et stable*

En guise d'illustration, nous avons calculé le niveau de faillite V_B dans les cas stable et gaussien, en conservant les niveaux de dette faciale et de coupon obtenus dans le cas gaussien. Les résultats de ce calcul sont présentés en figure 3.20. Nous observons que pour un levier d'endettement supérieur à 75%, le niveau de déclaration de la faillite décroît. On peut penser que le manager qui a choisi une politique risquée et qui anticipe sur la survenance assez probable d'une faillite va abaisser le seuil de déclaration de faillite. On peut également interpréter cela en disant que pour de tels types d'entreprise, la valeur des fonds propres *s'adapte* à la politique de la firme et est maximisée pour des niveaux de faillite assez permissifs concernant les valeurs prises par le processus d'actif - ici l'analyse est simplifiée puisque les fonds propres sont identiquement vus par les managers et les actionnaires.

3.6.2 Calcul des Coûts d'Agence

Nous avons dans ce chapitre réalisé une perspective entre les managers et les investisseurs. Ce type de perspective s'inscrit naturellement dans le cadre d'une réflexion sur la théorie de l'agence, théorie visant notamment à mesurer les coûts attachés à l'existence de contrats, implicites ou explicites, constituant l'entreprise. Nous proposons ici quelques indicateurs de mesure des coûts d'agence de la dette et des fonds propres, et situons notre travail par rapport à la théorie de l'agence.

Nous envisageons deux instants : l'instant *ex ante* initial où le manager constitue la structure financière de la firme (V_B, P, C) puis un instant *ex post* consécutif où a lieu une substitution d'actif à structure financière constante.

Les indices s et g correspondent respectivement aux perceptions stable et gaussienne. \mathcal{V} est la valeur de la firme, γ et σ sont les paramètres de dispersion du processus d'actif dans les cas stable et gaussien. d et fp sont des indices indiquant qu'on envisage un coût d'agence de la dette ou des fonds propres.

Posons donc pour l'estimateur des coûts d'agence de la dette :

$$\Delta\mathcal{V}_d = \mathcal{V}_s^{ex\ post} - \mathcal{V}_s^{ex\ ante} \quad (3.15)$$

Soit également l'estimateur des coûts d'agence des fonds propres :

$$\Delta\mathcal{V}_{fp} = \mathcal{V}_s^{ex\ ante} - \mathcal{V}_g^{ex\ ante} \quad (3.16)$$

Remarquer au passage que l'on a :

$$\Delta\mathcal{V}_d + \Delta\mathcal{V}_{fp} = \mathcal{V}_s^{ex\ post} - \mathcal{V}_g^{ex\ ante} \quad (3.17)$$

Nous insistons sur le fait que les formules (3.15) et (3.16) fournissent des estimateurs ou indicateurs des coûts d'agence; nous ne pensons pas en effet qu'il soit possible de proposer une mesure précise de ces coûts, compte tenu de la complexité de la structure d'une entreprise et notamment du caractère souvent implicite des contrats la régissant.

Intéressons nous d'abord à la formule (3.15). Elle peut fournir un indicateur des coûts d'agence de la dette liés à une substitution d'actif. En effet, ces coûts, supportés par les obligataires, sont liés à la valeur de marché de l'entreprise - d'où l'indice s référant à une perception de marché des actifs comme processus de Lévy stable. Les obligataires, au moment de la structuration de l'entreprise, ont apporté leur contribution en fonction de leur perception du niveau de risque des actifs - soit $\gamma^{ex\ ante}$. Or, à structure égale par hypothèse, le manager a par la suite changé le niveau de risque des actifs et l'a amené à la valeur $\gamma^{ex\ post}$, toujours du point de vue des créditeurs. Les obligataires peuvent donc estimer le changement de valeur subit par l'entreprise avec la formule (3.15), et la perte de valeur qu'ils encourent réellement en multipliant ce différentiel par le ratio d'endettement.

Venons en maintenant à l'étude des coûts d'agence des fonds propres. Comme nous l'avons remarqué en sous-section précédente, les managers, en supposant que cela fasse partie de leurs desseins, essaient de maximiser la valeur des fonds propres, mais *de leur point de vue*, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas la même perception des fonds propres que le marché, qui, lui, leur assigne réellement une valeur. Nous postulons donc que les coûts d'agence des fonds propres sont la différence entre la valeur de la firme *ex ante* où la maximisation des fonds propres serait réalisée par le marché - par les actionnaires

- et la valeur de la firme perçue *ex ante* par le manager réalisant la maximisation des fonds propres. On a ainsi la formule (3.16) qui exprime que les coûts d'agence des fonds propres sont liés au fait que les managers ont une action différente de celle qu'aurait un actionnaire majoritaire en terme de maximisation des fonds propres.

Remarquer que la formule (3.16) fournit une valeur *abstraite* des coûts d'agence des fonds propres. De fait, *ex ante*, l'entreprise ne possède qu'une seule valeur, celle assignée par le marché.

Nous observons donc une différence fondamentale entre les coûts d'agence de la dette et ceux des fonds propres. Les coûts d'agence de la dette ne sont pas une fatalité, ils dépendent de la constance du manager, du fait qu'il honore ou pas son contrat moral face aux obligataires en augmentant ou non le niveau de risque des actifs *ex post*. En revanche, les coûts d'agence des fonds propres semblent être une donnée intrinsèque liée à la différence de position structurelle séparant les managers des actionnaires. La formule (3.17) regroupe les deux effets de manière synthétique.

La question de la *position* du manager n'est pas anodine et va plus loin que la question du contrat implicite le liant aux actionnaires. Les coûts d'agence des fonds propres introduits sont en fait très généraux et prennent en compte toute l'asymétrie de *position* qui peut exister entre un manager et un actionnaire. A partir du moment où l'actionnaire majoritaire renonce à exercer lui-même la gestion de son entreprise et où il engage un mandataire, il doit s'attendre à une gestion qui ne lui paraîtra pas optimale. Un contrat ne peut obliger une personne de manière totale, à moins de le concevoir comme le constat d'une sujétion. A partir du moment même où le manager et l'actionnaire sont deux personnes distinctes, ayant deux positions différentes, on ne peut s'attendre à ce que l'un réalise l'optimum de l'autre - même s'il tâche de le faire. On peut donc s'interroger sur la pertinence du terme "coût" dans l'expression "coûts d'agence des fonds propres". Jensen et Meckling eux-mêmes admettent que certaines frictions ou certains différentiels de valeur sont inhérents et inévitables pour toute entreprise gérée par un mandataire.

3.7 Conclusion

Nous avons insisté dans ce chapitre sur les différences fondamentales séparant les dirigeants des actionnaires: différence d'information, différence de perception, différence de position et d'action. Nous avons proposé de représenter la perception par les managers du processus d'actif comme un

processus diffusif. A l'inverse, nous avons supposé que les investisseurs, dont les actionnaires, en ont une perception de type processus à sauts, et nous avons employé une classe particulière de ces processus : les processus de Lévy stables. L'hypothèse de stabilité étant nécessaire afin de pouvoir mener à bien les calculs.

La prise en compte de sauts sur le processus d'actif permet de rendre compte d'un fait de marché empirique important : l'existence de marges de crédit élevées, notamment aux courtes maturités.

Nous rappelons que si les agents agissent en fonction de leur perception de la valeur et de leur stratégies, les prix, eux, sont uniques. Il n'existe qu'une seule valorisation des fonds propres et de la dette; cette valorisation est effectuée par le marché.

On peut pourtant s'interroger sur la justesse des valeurs assignées par le marché. En effet, si le manager est bien la personne la plus informée sur la nature des actifs, n'est-il pas alors également la personne la mieux placée pour valoriser les fonds propres et la dette? On ne peut être partie et juge, et c'est bien à ceux qui assurent le contrôle final, à savoir les investisseurs, que revient le rôle de déterminer les différentes valeurs. Cependant, cette question rappelle bien qu'on ne peut également être juge et partie : les investisseurs par nature ne peuvent valoriser parfaitement la dette et les fonds propres; ils prendront toujours en compte une prime de risque.

Cette conclusion est de bon sens; noter toutefois que dans les modèles structurels contemporains, il n'est pas établi de différence significative entre les managers et les actionnaires. C'est ce que nous avons souhaité réaliser ici.

Terminons par une discussion sur la notion de contrat en finance. L'article de Jensen et Meckling a énormément fait progresser la compréhension de la firme comme institution résultant de l'établissement de contrats implicites ou explicites. Cependant, le fait d'associer un coût à ces contrats présuppose qu'ils ne sont pas totalement symétriques. Il existerait toujours un "principal" et un "agent", autrement dit un des deux contractants aurait toujours une position privilégiée. Dans une telle optique, il est logique que le contractant le plus défavorisé ne se comporte pas pleinement selon les termes du contrat et donc engendre des coûts.

Si, à l'inverse, on conçoit un contrat comme un accord entre deux parties égales, chacune s'engageant à fournir un service à l'autre, et donc si l'on abandonne les notions de "principal" et d'"agent", la notion de coût est sensiblement modifiée. Le manager qui engendrerait des coûts réaliserait une rupture de contrat - dans l'hypothèse où l'autre partie le rémunérerait à

hauteur du service attendu. Ce service attendu est une gestion de l'entreprise en lieu et place d'un actionnaire majoritaire; une juste rémunération serait donc sensiblement de l'ordre de grandeur des plus-values perçues sur une partie *substantielle* des actions. En l'absence de tels niveaux de rémunération - qui sont certes socialement discutables - le manager ne peut concevoir que l'autre partie réalise pleinement ses engagements, pourquoi alors en ferait-il de même? Nous ne concluons pas que les dirigeants actuels sont sous-payés mais que leur existence et leur position, par nature même, ne permet pas de réaliser un optimum en termes de maximisation des fonds propres. L'actionnaire majoritaire qui souhaite s'assurer que les fonds propres sont bien maximisés n'a d'autre alternative que d'assurer lui-même la gestion de son entreprise. C'est cette alternative qui a été récemment choisie par le descendant de Ford.

3.8 Annexe A : Factorisation de Wiener-Hopf

Nous introduisons dans cette annexe des outils plus avancés que dans l'annexe A du chapitre I sur les processus de Lévy. Ces outils sont utiles aussi bien pour le chapitre III que le chapitre IV; ils permettent de résoudre de nombreux problèmes de finance et d'assurance avec des modèles fondés sur l'emploi de processus de Lévy. Les résultats présentés sont liés aux chemins des processus en question et en particulier à leurs fonctionnelles. Le lecteur désireux de trouver un complément d'information peut se reporter à Satō [116] ou Bertoin [13] pour un traitement probabiliste détaillé, ou à McGill [92] pour une perspective analytico-probabiliste.

Fonctionnelles d'un processus de Lévy

Soit $X = \{X_t, t \geq 0\}$ un processus de Lévy. On appelle *fonctionnelles* les processus suivants :

$$S_t = \sup_{0 \leq s \leq t} X_s \quad (3.18)$$

le 'processus supremum',

$$I_t = \inf_{0 \leq s \leq t} X_s \quad (3.19)$$

le 'processus infimum',

$$R_x = \inf\{t > 0 \mid X_t < x\} \quad (3.20)$$

le 'processus premier temps de passage' en deçà de x ,

$$\Lambda_t = \inf\{s \in [0, t] \mid X_s \vee X_{s-} = S_t\} \quad (3.21)$$

le 'processus premier temps de passage au supremum' et

$$\Gamma_x = x - X_{R_x} \quad (3.22)$$

l'*overshoot*' en deçà de x .

Remarquer que l'on obtient d'autres fonctionnelles par un argument de dualité, c'est-à-dire en considérant le processus réfléchi $-X$.

La connaissance des lois marginales de ces fonctionnelles s'avère cruciale pour résoudre de nombreux problèmes, comme dit précédemment. En particulier, la seconde fonctionnelle I trouve de nombreux emplois aussi bien en finance qu'en assurance. Elle est manipulable au travers de la factorisation de Wiener-Hopf, que nous introduisons maintenant.

Présentation de la factorisation de Wiener-Hopf

L'idée sous-jacente à la factorisation de Wiener-Hopf est de pouvoir couper les trajectoires des processus de Lévy en deux parties indépendantes. Plus précisément, peut-on décomposer les chemins X en paires de chemins (X_t^+, X_t^-) où X^+ et X^- sont indépendants?

Une première idée naturelle serait de prendre $X_t^+ = S_t$ où l'on rappelle que S est le supremum. Alors, pourrait-on associer $X_t - S_t$ à X_t^- et en particulier, aurait-on indépendance? En fait, non. Cependant, on peut aller plus loin et résoudre ce problème pour peu que l'on prenne le supremum (et la partie restante) en un temps aléatoire indépendant de type exponentiel.

La factorisation de Wiener-Hopf correspond alors à la décomposition $(X^+ = S_\eta, X^- = X_\eta - S_\eta)$ où $\eta \rightsquigarrow \exp(q)$ est une variable aléatoire exponentielle indépendante de paramètre q . Remarquer le fait important suivant : la loi de $X_\eta - S_\eta$ est la même que celle de I_η .

Définissons maintenant les facteurs de Wiener-Hopf de la manière suivante :

$$\psi^+(q, z) = E(e^{zS_\eta}) = q \int_0^{+\infty} e^{-qt} E(e^{zS_t}) dt \quad (3.23)$$

et :

$$\psi^-(q, z) = E(e^{z(X_\eta - S_\eta)}) = E(e^{zI_\eta}) = q \int_0^{+\infty} e^{-qt} E(e^{zI_t}) dt \quad (3.24)$$

De l'indépendance de X^+ et X^- , on tire la factorisation de Wiener-Hopf :

$$E(e^{zX_\eta}) = E(e^{zS_\eta}) E(e^{z(X_\eta - S_\eta)}) = \psi^+(q, z)\psi^-(q, z)$$

L'exposant de Laplace $\Psi(z)$ du processus de Lévy étant défini comme :

$$E(e^{zX_t}) = e^{t\Psi(z)}$$

on obtient l'expression terminale pour la factorisation de Wiener-Hopf :

$$\frac{q}{q - \Psi(z)} = \psi^+(q, z)\psi^-(q, z) \quad (3.25)$$

Ce résultat est évident car :

$$\begin{aligned}
 E(e^{zX_\eta}) &= q \int_0^{+\infty} e^{-qt} E(e^{zX_t}) dt \\
 &= q \int_0^{+\infty} e^{-qt} e^{t\Psi(z)} dt \\
 &= \frac{q}{q - \Psi(z)}
 \end{aligned}$$

Emplois de la factorisation de Wiener-Hopf

Les formules suivantes, fondées sur l'emploi des facteurs de Wiener-Hopf, permettent - du moins de manière théorique - d'obtenir les lois associées aux diverses fonctionnelles des processus de Lévy (ces formules sont présentées dans Satō [116] pour des facteurs ϕ^\pm correspondant à la factorisation de $\frac{q}{q - \Psi(iz)}$) :

$$\begin{aligned}
 q \int_0^{+\infty} e^{-qt} E\left(e^{iz_1 S_t + iz_2 (X_t - S_t) - z_3 \Lambda_t}\right) dt \\
 = \phi^+(q + z_3, z_1) \phi^-(q, z_2) e^{\int_0^{+\infty} t^{-1} e^{-qt} (e^{-tz_3} - 1) P(X_t > 0) dt}
 \end{aligned}$$

On a également pour les lois du premier temps de passage et de l'overshoot (défini ici pour un dépassement vers le haut d'un niveau positif x) :

$$q \int_0^{+\infty} e^{-qx} E\left(e^{-\lambda R_x - v \Gamma_x}\right) dx = \frac{q}{q - v} \left(1 - \frac{\phi^+(\lambda, iq)}{\phi^+(\lambda, iv)}\right)$$

Il apparaît donc clairement que la connaissance des facteurs de Wiener-Hopf est utile pour la détermination des diverses fonctionnelles d'un processus de Lévy. Elles sont elles-mêmes le matériau sous-jacent des probabilités de ruine et de survie de l'assurance et des espérances en théorie du défaut comme on peut le voir dans le corps des chapitres trois et quatre. La question qui se pose maintenant est : disposons-nous de formes manipulables des facteurs de Wiener-Hopf pour les applications pratiques.

Cas général et cas simples

Remarquer d'abord que, bien que la théorie de Wiener-Hopf appliquée aux processus de Lévy peut s'obtenir par des raisonnements sur les excursions

et les temps locaux, elle a été historiquement construite à partir de résultats sur les marches aléatoires - dans un premier temps - et de leur extension aux processus de Lévy généraux - dans un second temps. En particulier, à partir des résultats sur les marches aléatoires, ont été obtenues les formules suivantes, dites de Spitzer, qui fournissent une forme générale des facteurs de Wiener-Hopf :

$$\psi^+(q, z) = e^{-\int_0^{+\infty} t^{-1} e^{-qt} dt \int_0^{+\infty} (1-e^{-zx}) P(X_t \in dx)} \quad (3.26)$$

et :

$$\psi^-(q, z) = e^{-\int_0^{+\infty} t^{-1} e^{-qt} dt \int_{-\infty}^0 (1-e^{-zx}) P(X_t \in dx)} \quad (3.27)$$

Nous voyons clairement le problème ici : les facteurs de Wiener-Hopf n'ont pas une forme générale manipulable aisément. Une grande simplification des expressions données ci-dessus est nécessaire; cependant elle ne peut être réalisée pour tout type de processus de Lévy.

Nous citons ici les deux exemples connus pour lesquels les facteurs de Wiener-Hopf admettent une forme particulièrement simple. Tout d'abord, le mouvement brownien standard dont les facteurs s'expriment comme :

$$\phi_{MB}^+(q, z) = \frac{\sqrt{2q}}{\sqrt{2q} + z}$$

et :

$$\phi_{MB}^-(q, z) = \frac{\sqrt{2q}}{\sqrt{2q} - z}$$

où l'on reconnaît la transformée de Laplace associée à une variable exponentielle simple puis duale.

Le deuxième exemple standard est le cas de la marche aléatoire de Bernoulli pour laquelle on a :

$$\psi_{MAB}^+(q, z) = \frac{2}{q - e^{-z}}$$

et :

$$\psi_{MAB}^-(q, z) = \frac{q}{q - e^z}$$

À part ces deux cas, seuls les processus de Lévy spectralement négatifs (ou positifs) et les processus de Lévy stables possèdent des facteurs aux expressions bien manipulables (quoique légèrement plus complexes que celles données ci-dessus). Nous les étudions dans les paragraphes suivants.

Le cas des processus spectralement négatifs

Nous rappelons que les processus de Lévy spectralement négatifs sont les processus de Lévy qui ne sautent que vers le bas. Leur exposant de Laplace admet la forme suivante :

$$\Psi(z) = \frac{\sigma^2 z^2}{2} + bz + \int_{-\infty}^0 (e^{zx} - 1 - zx\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}})\nu(dx)$$

On peut remarquer, à partir de cette expression, que ces processus ne sont pas de simples subordinateurs réfléchis : ils ne sont pas strictement décroissants. Une composante brownienne apparaît à travers σ et apporte donc une contribution diffusive bi-directionnelle. Par ailleurs, une dérive b est également présente; elle peut être aussi bien positive que négative. Finalement, les bornes dans l'intégrale montrent bien que l'on n'a des sauts que vers le bas, et de mesure de Lévy ν . Les arguments qui vont suivre sont également applicables aux processus de Lévy spectralement positifs qui sont définis de manière identique - si ce n'est qu'ils sautent vers le haut. Remarquer que les subordinateurs sont des sous-cas (à variation finie et strictement croissants) de processus de Lévy spectralement positifs.

Les facteurs de Wiener-Hopf des processus de Lévy spectralement négatifs (SN) sont assez simples (considérer les formules générales (3.26) et (3.27)); ils admettent les expressions suivantes :

$$\psi_{SN}^+(q, z) = \frac{\beta^*(q)}{\beta^*(q) - z} \quad (3.28)$$

et :

$$\psi_{SN}^-(q, z) = \frac{q}{q - \psi(z)} \frac{\beta^*(q) - z}{\beta^*(q)} \quad (3.29)$$

où $\beta^*(q)$ est la solution de $\Psi(\beta) = q$.

Le cas des processus de Lévy stables

Nous passons maintenant au cas des processus de Lévy stables (et invitons le lecteur à consulter l'annexe B du chapitre I pour plus de détails sur le sujet). En particulier, nous nous concentrons sur le problème, résolu par Doney [39] de la factorisation d'une certaine sous-classe des processus de Lévy stables. Plus précisément, il s'agit de trouver une factorisation de leur exposant de Laplace - ou d'une fonctionnelle de cet exposant.

Définissons l'exposant des processus de Lévy stables comme dans Doney [39] :

$$\Psi(iu) = -c|u|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sign}(u) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right) \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

défini sur la droite imaginaire (il s'agit donc d'un exposant de "Fourier").

La normalisation suivante est supposée :

$$c = \left(1 + \beta^2 \tan^2\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right)^{-1/2} \quad (3.30)$$

Nous rappelons la définition standard du paramètre ρ :

$$\rho = P(X_1 > 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\alpha} \tan^{-1}\left(\beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)$$

Une façon simple de factoriser $\psi(z)$ peut être réalisée de la manière suivante :

$$\psi(z) = \kappa^+(z)\kappa^-(z)$$

avec :

$$\kappa^+(z) \propto z^{\alpha\rho} \quad \kappa^-(z) \propto z^{\alpha(1-\rho)} \quad (3.31)$$

cependant, nous sommes principalement intéressés par factoriser l'expression suivante :

$$\frac{q}{q - \Psi(z)}$$

pour pouvoir obtenir de façon classique les distributions des fonctionnelles (infimum, supremum, premier temps de passage..) des processus de Lévy stables.

Pour son cas d'étude, Doney a supposé $q = 1$ et s'est donc intéressé aux solutions du problème suivant :

$$\frac{1}{1 - \Psi(z)} = \psi_{SL}^+(1, z)\psi_{SL}^-(1, z)$$

qui se pose sur la droite des imaginaires. Les solutions, ψ_{SL}^+ et ψ_{SL}^- , sont les facteurs de Wiener-Hopf du cas stable, et sont définies respectivement sur les demi-plans complexes gauche et droite.

Remarquer que des expressions générales des facteurs de Wiener-Hopf stables ont été trouvées dans les années soixante, mais qu'elles sont loin d'être explicites. Prenant par exemple ψ_{SL}^+ , il a été montré que c'est l'extension dans le demi-plan complexe gauche de :

$$\exp\left(-\frac{\sin(\pi\rho)}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\log(1 + (\lambda x)^\alpha)}{x^2 + 2x \cos(\pi\rho) + 1} dx\right)$$

où l'intégrale présente dans l'exponentielle est appelée de manière classique "intégrale de Darling".

Doney a obtenu des expressions plus explicites pour les facteurs de Wiener-Hopf d'une sous-classe dense des processus de Lévy stables, correspondant à la condition suivante :

$$\rho + k = \frac{l}{\alpha} \quad (3.32)$$

où k et l sont des entiers.

En particulier, il a montré que les facteurs de Wiener-Hopf peuvent s'écrire comme :

$$\psi_{SL}^+(1, z) = E(e^{zS\eta_1}) = \frac{\prod_{r=0}^{k-1} ((-1)^l (-z)^\alpha + e^{i\alpha(k-1-2r)\pi})}{\prod_{r=0}^{l-1} ((-1)^{k+1} z + e^{i(l-1-2r)\pi/\alpha})} \quad (3.33)$$

et :

$$\psi_{SL}^-(1, z) = E(e^{zI\eta_1}) = \frac{\prod_{r=0}^{l-1} ((-1)^{k+1} z + e^{i(l-1-2r)\pi/\alpha})}{\prod_{r=0}^k ((-1)^l z^\alpha + e^{i\alpha(k-2r)\pi})} \quad (3.34)$$

où η_1 est une variable aléatoire exponentielle de paramètre égal à un.

Remarquer que pour de grandes valeurs de z , les expressions de ces facteurs se simplifient et ne dépendent plus de k ou l . Considérer par exemple ψ_{SL}^- :

$$\psi_{SL}^-(1, z) \approx z^{l-\alpha(k+1)} = z^{\alpha(\rho-1)}$$

qui après inversion permet de récupérer l'expression de (3.31) : on a bien cohérence entre les différentes formules présentées ici.

Par ailleurs, on montre aisément par un argument de "scaling" sur le processus stable que les facteurs génériques vérifient :

$$\psi_{SL}^\pm(q, z) = \psi_{SL}^\pm\left(1, zq^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \quad (3.35)$$

Compléments

Rappelons les définitions des processus "ladder time" τ et "ladder height" H : le premier est celui du temps local inverse, le deuxième est le processus supremum pris au temps local inverse et qui décrit les passages successifs du

processus de Lévy sous-jacent par son supremum.

On écrit souvent la transformée de Laplace bivariée du processus "ladder" comme :

$$E \left(e^{-\alpha\tau - \beta H} \right) = e^{-\kappa(\alpha, \beta)} \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{+2}$$

où le coefficient κ trouve des applications en matière d'évaluation de produits exotiques (voir par exemple l'article de Nguyen et Yor [102]).

On a en particulier l'égalité de Pecherskii-Rogozin :

$$\kappa(\alpha, \beta) = e^{\int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} t^{-1} (e^{-t} - e^{-\alpha t - \beta x}) P(X_t \in dx)}$$

avec une bonne normalisation du temps local.

Par ailleurs, on peut relier les facteurs de Wiener-Hopf au κ et au κ' du processus réfléchi comme par exemple :

$$\psi^+(\lambda, q) = \frac{\kappa(q, 0)}{\kappa(q, -i\lambda)}$$

3.9 Annexe B : Transformée de Laplace inverse

Nous présentons dans cette annexe les principales méthodes connues d'inversion de transformée de Laplace : les méthodes d'Abate et Whitt et de Weeks. Nous détaillons également une méthode nouvelle que nous avons introduite dans un article (traitant de l'évaluation des options parisiennes pour un sous-jacent lognormal) extérieur à cette thèse ; voir Bernard, Le Courtois et Quittard-Pinon [12].

Méthode d'Abate et Whitt

Nous commençons par détailler la méthode d'Abate et Whitt [1] qui est une des méthodes les plus classiques d'inversion de transformée de Laplace.

Soit F la transformée de Laplace de la fonction f :

$$F(z) = \mathcal{L}[f](z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$$

La fonction f à inverser peut s'exprimer sous la forme d'une intégrale de Bromwich, c'est-à-dire comme :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F](t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(z) e^{zt} dz$$

où l'intégration se fait le long du contour $[\sigma - i\infty, \sigma + i\infty]$.

Remarquer que l'abscisse réelle σ est choisie de telle manière à laisser toutes les singularités de F à gauche du contour.

Abate et Whitt proposent de calculer cette intégrale en deux temps.

Leur première étape consiste en une discrétisation simple de type trapézoïdale. Cependant cette procédure est très lente dès lors que l'on souhaite obtenir un niveau de précision raisonnable, par exemple trois ou quatre décimales. Il faut donc accélérer ce calcul.

La deuxième étape proposée par Abate et Whitt permet de réaliser l'accélération de la série obtenue par discrétisation. En fait, la discrétisation étant faite de telle manière à obtenir une série quasi-alternée, ils emploient la méthode d'Euler - méthode standard d'accélération des séries alternées. Cette méthode consiste à exprimer la série cherchée sous la forme :

$$S \leftrightarrow \sum_{k=0}^M \frac{C_M^k S_{N+k}}{2^M}$$

après avoir calculé les sommes S_N .

C'est essentiellement cette méthode standard d'inversion de transformée de Laplace (ou une méthode analogue pour les inversions doubles) que nous avons utilisée dans les calculs d'inversion double des chapitres III et IV. L'intérêt de cette méthode réside dans sa relative simplicité et dans le fait qu'elle marche bien pour de nombreux problèmes. Venons-en maintenant à la présentation des autres méthodes.

Méthode de Weeks

Nous passons en revue la méthode de Weeks : le lecteur intéressé par cette méthode peut se reporter à l'article initial [126] ou plus simplement consulter le récent et clair papier de Weideman [127]. Nous avons employé cette méthode au chapitre III pour les inversions simples.

Soit f la fonction "originale" ou "inverse" et F sa transformée de Laplace, définies tel que dans la précédente sous-section. La méthode de Weeks peut se résumer par l'écriture de f suivante (obtenue par expansion de F dans l'intégrale de Bromwich, puis permutation intégrale / somme) :

$$f(t) = e^{\sigma t} \sum_0^{+\infty} a_n e^{-bt} L_n(2bt) \quad (3.36)$$

où les L_n sont les polynômes de Laguerre.

Les coefficients a_n sont eux solution de l'équation suivante :

$$G(\omega) = \sum_0^{+\infty} a_n \omega^n$$

où G est définie par :

$$G(\omega) = \frac{2b}{1-\omega} F\left(\sigma - b + \frac{2b}{1-\omega}\right)$$

De la formule de Cauchy, on tire que les a_n s'expriment comme :

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\omega|=1} \frac{G(\omega)}{\omega^{n+1}} d\omega$$

et cette intégrale peut être calculée par transformée de Fourier rapide.

L'intérêt de la méthode de Weeks est le suivant : les coefficients a_n sont indépendants du temps donc on les calcule une fois pour toutes. Chaque

fois que l'on voudra un $f(t)$ particulier, il suffira de calculer (3.36) en réemployant les mêmes a_n ; ce qui est extrêmement rapide.

Remarquer que σ a la même interprétation que pour la méthode d'Abate et Whitt et que b est un paramètre positif que l'on prend généralement de l'ordre de σ . Pour la plupart des problèmes de la finance où le degré de précision souhaité est relativement faible (quatre, cinq décimales), on peut prendre b et σ entre un et cinq indifféremment. Pour obtenir plus de précision, un algorithme de sélection optimale de ces paramètres est nécessaire; c'est l'apport réalisé par Weideman dans son papier.

Approche Directe

Nous présentons maintenant une méthode numérique de transformation de Laplace inverse simple, que nous avons développée de manière *ad hoc* pour résoudre le problème de l'évaluation des options parisiennes dans un cadre gaussien (voir Bernard, Le Courtois et Quittard-Pinon [12]).

Nous sommes partis de l'observation de la fonction F que nous avons à inverser dans ce contexte et nous nous sommes aperçus qu'elle présentait généralement l'allure d'une fonction du type $1/x^i$ pour i positif.

Or la transformée de Laplace inverse de cette fonction est connue: elle est de la forme $\frac{s^{i-1}}{(i-1)!}$ (voir le tableau récapitulatif en fin d'annexe).

L'idée est alors d'approximer la fonction que l'on cherche à inverser par une combinaison linéaire de fonction $1/x^i$ pour i positif, c'est-à-dire par une fonction du type:

$$x \rightarrow \sum_{i=1}^N \alpha_i \frac{1}{x^i}$$

Par linéarité de la transformée de Laplace inverse, on obtient de manière immédiate la fonction inverse:

$$s \rightarrow \sum_{i=1}^N \alpha_i \frac{s^{i-1}}{(i-1)!}$$

où l'on approxime ensuite la fonction f cherchée inverse de F par cette dernière formule.

Notre idée est donc très simple: approximer la fonction à inverser par une combinaison linéaire de fonctions donc on connaît les inverses. Remarquer cependant que cette méthode n'est bien adaptée qu'à l'inversion des fonctions

réelles. Dans de nombreux cas (comme ceux des chapitres III et IV), la fonction à inverser est complexe et l'on doit avoir recours à une des méthodes d'inversion présentées précédemment, typiquement la méthode d'Abate et Whitt.

Exemples de transformées de Laplace connues.

Nous terminons cette annexe par une présentation des principaux résultats simples connus concernant les transformées de Laplace inverse :

Fonction "originale" ou "inverse"	Transformée de Laplace
$f(t)$	$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$
$\delta_0(t)$ (Dirac en 0)	1
$\int_0^t f(s) ds$	$\frac{F(p)}{p}$
$e^{at} f(t)$	$F(p-a)$
1	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$

Chapitre 4

Théorie du Risque des Compagnies d'Assurance

4.1 Introduction

La théorie de la ruine des assurances remonte aux travaux de Lundberg [84] et de Cramer [35]. La thèse de Lundberg, soutenue en 1903, marque le début de l'emploi en assurance des processus de Poisson. On peut faire le parallèle avec l'introduction du mouvement brownien en finance en 1900, soit quasiment à la même date. Cramer a repris et prolongé les travaux de Lundberg en 1930 : c'est à partir de cette date que l'on peut réellement parler d'une théorie constituée visant à étudier la faillite des compagnies d'assurance. Cette théorie, connue sous le nom de théorie de la ruine ou de théorie du risque des compagnies d'assurance, a connu de nombreux prolongements jusqu'à aujourd'hui. Elle est toujours le lieu d'une recherche active, en Amérique du Nord et en Chine, après de nombreux développements dans le nord de l'Europe.

4.2 Théorie de la Ruine Classique

Nous présentons ici les résultats fondamentaux de la théorie de la ruine quand les sinistres sont modélisés par des processus de Poisson composés. Nous commençons ainsi, comme dans les précédents chapitres, par une exposition didactique - avant de passer à des développements plus élaborés. Le lecteur souhaitant avoir plus de détails sur la théorie fondamentale peut se reporter à Asmussen [4], Embrechts *et alii* [47] ou Picard [104].

4.2.1 Le Cadre Actuariel

La théorie de la ruine classique vise à calculer la probabilité que les réserves d'une compagnie d'assurance s'annulent. Cette probabilité est appelée probabilité de ruine et fait intervenir classiquement une rentrée d'argent : l'afflux des primes, et une sortie d'argent : les sinistres à rembourser. Les primes sont supposées arriver de manière linéaire tandis que les sinistres sont représentés par un processus de Poisson composé. Récapitulons de manière plus détaillée les hypothèses classiques de la théorie de la ruine :

- ◆ On considère une compagnie ayant un flux constant c (argent par unité de temps) de rentrées de primes.
- ◆ Un processus de Poisson N de paramètre λ règle les dates des sinistres. N_t représente le nombre de sinistres ayant eu lieu sur $[0, t]$.
- ◆ Les montants des sinistres sont des variables aléatoires W_1, W_2, \dots indépendantes, identiquement distribuées et de variance finie où :

$$E(W_i) = m, \text{Var}(W_i) = \sigma^2$$

- ◆ Les sinistres W_i sont indépendants du processus de Poisson N .
- ◆ On a alors la sinistralité suivante :

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} W_i$$

soit un processus de Poisson composé S .

- ◆ Il y a une réserve initiale $R_0 = u$. La réserve n'est pas supposée produire de dividendes.

En conclusion, la réserve R d'une compagnie d'assurance peut s'écrire à un instant t quelconque comme :

$$R_t = u + c t - S_t \tag{4.1}$$

c représente les entrées d'argent (impôts et frais commerciaux déduits) ou primes - autrement dit les primes pures (niveau de prime égalant les sinistres en moyenne) augmentées d'un chargement de sécurité.

On a :

$$E(N_t) = \lambda t$$

soit :

$$E(S_t) = E(N_t) \times E(W_i) = \lambda m t$$

c doit vérifier pour que la compagnie soit viable :

$$E(ct - S_t) = ct - \lambda m t > 0$$

condition qui correspond au fait d'avoir plus de rentrées que de sorties d'argent en moyenne au cours du temps.

On doit ainsi avoir :

$$c > \lambda m$$

pour que la compagnie puisse survivre.

A proprement parler, le chargement de sécurité total est $c - \lambda m$ soit la prime réelle moins la prime pure. Par ailleurs, on définira à partir de maintenant le chargement de sécurité relatif par le ratio :

$$\rho = \frac{c - \lambda m}{\lambda m} = \frac{c}{\lambda m} - 1$$

Soit également :

$$\theta = \frac{\lambda m}{c}$$

Remarquer qu'en l'absence de chargement de sécurité la compagnie d'assurance ferait faillite de manière certaine.

Les mêmes grandeurs sont représentées dans la littérature de la théorie de la ruine par des paramètres très souvent différents. Nous présentons dans le tableau suivant nos notations, que nous tâcherons de conserver dans tout ce chapitre.

Paramètre	Grandeur ou opérateur
c	Taux d'arrivée de primes
W_i	(Montant de) Sinistre
F	Distribution des sinistres
λ	Intensité des sauts
m	Espérance d'un sinistre
ρ	Chargement de sécurité relatif
θ	Probabilité de ruine à réserve initiale nulle (modèle classique)
$F_I(x) = \frac{1}{m} \int_0^x (1 - F(y)) dy$	Queue intégrée de F
σ^2	Variance d'un sinistre
N	Processus d'arrivée des sinistres
S	Montant cumulé de sinistre
$L = \max_{t \geq 0} (S_t - ct)$	Perte agrégée maximale
$u = R_0$	Réserve à l'instant initial
R_t	Réserve à l'instant t
γ	Coefficient de Lundberg
$\mathcal{R}(u, t)$	Probabilité de Ruine (horizon : t , réserve initiale : u)
$\mathcal{R}(u)$	Probabilité de Ruine (horizon infini, réserve initiale : u)
$\mathcal{S}(u, t)$	Probabilité de Survie (horizon : t , réserve initiale : u)
$\mathcal{S}(u)$	Probabilité de Survie (horizon infini, réserve initiale : u)
ψ	Exposant de Laplace
\mathcal{L}	Transformée de Laplace
\mathcal{L}^{-1}	Transformée de Laplace inverse

TAB. 4.1 – *Grandeurs et Opérateurs Usuels de la Théorie de la Ruine.*

4.2.2 Calcul des Probabilités de Ruine

Nous présentons ici les méthodes standard de calcul des probabilités de ruine. Nous commençons par l'approche classique par équation intégral-différentielle.

Approche Intégré-Différentielle :

Soit $\mathcal{R}(u)$ la probabilité de ruine. On considère ce qui se passe pendant un court instant Δt . Puisque l'arrivée des sinistres est modélisée par un processus de Poisson, on sait que la probabilité qu'il n'y ait pas de sinistre pendant Δt est de $e^{-\lambda\Delta t}$. Remarquer que s'il n'y a pas eu de sinistre, on se retrouve avec une réserve $u + c\Delta t$. Supposons maintenant qu'il n'y ait eu qu'un seul sinistre W_1 . Cet événement est de probabilité $e^{-\lambda\Delta t} \lambda\Delta t$. Dans ce cas, les réserves deviennent à l'instant Δt : $u + c\Delta t - W_1$. La probabilité qu'il y ait eu plus d'un sinistre est faible, en $o(\Delta t)$.

De cette discussion, on peut déduire (avec un argument de type loi des probabilités totales) que :

$$\mathcal{R}(u) = e^{-\lambda\Delta t} \mathcal{R}(u + c\Delta t) + e^{-\lambda\Delta t} \lambda\Delta t E(\mathcal{R}(u + c\Delta t - W_1)) + o(\Delta t)$$

Développant les exponentielles à l'ordre un, on obtient :

$$\mathcal{R}(u) = (1 - \lambda\Delta t) \mathcal{R}(u + c\Delta t) + \lambda\Delta t E(\mathcal{R}(u + c\Delta t - W_1)) + o(\Delta t)$$

Ce qui peut se réécrire :

$$\mathcal{R}(u) - \mathcal{R}(u + c\Delta t) = \lambda\Delta t [-\mathcal{R}(u + c\Delta t) + E(\mathcal{R}(u + c\Delta t - W_1))] + o(\Delta t)$$

Nous souhaitons exprimer le terme de gauche sous forme d'une dérivée, nous écrivons donc :

$$c \frac{\mathcal{R}(u) - \mathcal{R}(u + c\Delta t)}{c\Delta t} = \lambda [-\mathcal{R}(u + c\Delta t) + E(\mathcal{R}(u + c\Delta t - W_1))] + \mathcal{O}(\Delta t)$$

En faisant tendre Δt vers zéro, on obtient :

$$\mathcal{R}'(u) = \frac{\lambda}{c} \mathcal{R}(u) - \frac{\lambda}{c} E(\mathcal{R}(u - W_1))$$

On a ainsi l'équation intégral-différentielle régissant les probabilités de ruine :

$$\mathcal{R}'(u) = \frac{\lambda}{c} \left(\mathcal{R}(u) - \int_0^{+\infty} \mathcal{R}(u - x) dF(x) \right) \quad (4.2)$$

Après intégration et quelques manipulations, on peut obtenir une seconde équation fondamentale :

$$\mathcal{R}(u) = \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^u \mathcal{R}(u-y)(1-F(y))dy + \int_u^{+\infty} (1-F(y))dy \right) \quad (4.3)$$

Nous pouvons tout d'abord déduire de l'équation (4.3), la probabilité de ruine quand les réserves initiales sont nulles et ceci de manière indépendante de l'hypothèse sur les sinistres :

$$\mathcal{R}(0) = \frac{\lambda}{c} \int_0^{+\infty} (1-F(y))dy$$

soit :

$$\mathcal{R}(0) = \frac{\lambda m}{c} = \theta \quad (4.4)$$

Pour obtenir les probabilités de ruine pour une réserve quelconque, on peut envisager de résoudre numériquement l'équation intégral-différentielle (4.2). Cependant il existe des cas où l'on peut obtenir une résolution complète de l'équation (4.3).

Supposons par exemple que les sinistres suivent une loi exponentielle, c'est-à-dire que :

$$dF(x) = \mathbf{1}_{x \geq 0} a e^{-ax} dx$$

On peut alors vérifier que :

$$\mathcal{R}(u) = \mathcal{R}(0) e^{-a(1-\mathcal{R}(0))u}$$

est solution de (4.3) où l'on rappelle que $\mathcal{R}(0)$ vérifie (4.4).

Formule de Beekman ou Pollaczec-Khintchine :

Soit $L = \max_{t \geq 0} (S_t - ct)$ la perte agrégée maximale. On peut exprimer la probabilité de ruine à horizon infini simplement en fonction de L :

$$\mathcal{R}(u) = P(L > u)$$

qui exprime que si la perte agrégée maximale a dépassé le montant initial de la réserve, la ruine a eu lieu.

Posons :

$$F_I(x) = \frac{1}{m} \int_0^x (1-F(y))dy$$

On peut montrer qu'il s'agit, dans le modèle classique, de la fonction de répartition associée à l'*overshoot* à la ruine (niveau négatif atteint par le processus de risque à l'instant de ruine), quand les réserves initiales sont nulles et sous condition que la ruine ait lieu.

Décomposons à présent L en une somme de records L_i : L est la somme des écarts entre les différents maxima successifs rencontrés par le processus. Voir à titre d'illustration la figure 4.1.

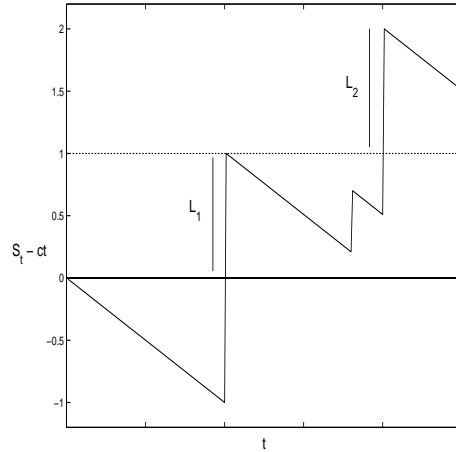


FIG. 4.1 – Décomposition de L

Soit M le nombre de maxima rencontrés jusqu'à L , on peut donc écrire :

$$L = \sum_{i=0}^M L_i$$

Soit par application de la loi des probabilités totales :

$$P(L > u) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(M = n) P\left(\sum_{i=0}^n L_i > u\right)$$

Remarquer maintenant que $S_t - ct$ part de zéro et est de signe opposé au processus de risque. La probabilité que $S_t - ct$ ne rencontre pas de maximum est donc égale à $1 - \mathcal{R}(0)$. La probabilité qu'il rencontre un maximum et un seul (c'est à dire qu'après avoir atteint un maximum, il n'en rencontre plus aucun) est égale à $\mathcal{R}(0) \times (1 - \mathcal{R}(0))$. De même la probabilité que $S_t - ct$ rencontre exactement deux maxima est égale à $\mathcal{R}(0) \times \mathcal{R}(0) \times (1 - \mathcal{R}(0))$.

De ce raisonnement, on peut déduire que :

$$P(M = n) = (\mathcal{R}(0))^n \times (1 - \mathcal{R}(0))$$

Par ailleurs, on peut remarquer que les L_i , par construction, possèdent la fonction de répartition F_I et sont indépendants. Nous pouvons alors écrire la formule suivante :

$$\mathcal{R}(u) = P(L > u) = (1 - \mathcal{R}(0)) \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathcal{R}(0))^n (1 - F_I^{*n}(u)) \quad (4.5)$$

Cette formule est appelée tantôt formule de Beekman, tantôt formule de Pollaczek-Khinchine. Noter qu'elle ne permet pas de calculer de manière directe en un temps raisonnable les probabilités de ruine. En pratique, on a souvent recours aux méthodes de simulation, que nous détaillons à présent.

Simulations :

Il est possible de calculer les probabilités de ruine par simulation. Pour les probabilités de ruine à horizon fini, cela ne présente pas de difficulté particulière. En revanche, pour les probabilités de ruine à horizon infini, des raffinements apparaissent.

Pour calculer une probabilité de ruine à temps fini, il suffit de simuler des trajectoires du processus de risque et de compter le nombre de fois où ces trajectoires passent en dessous du seuil de ruine. On obtient alors une estimation de la probabilité de ruine en divisant ce nombre par le nombre total de trajectoires.

En ce qui concerne les probabilités de ruine à horizon infini, si l'on procède de manière directe, on doit par définition simuler des trajectoires de longueur infinie pour s'assurer du fait qu'elles passent ou non en dessous du seuil de ruine. Or, on ne peut simuler une trajectoire de longueur infinie; le temps de calcul serait lui-même infini. On ne peut donc, de manière directe obtenir, d'estimateur des probabilités de ruine à horizon infini; tout au plus peut-on calculer des approximations de ces probabilités aux grands horizons.

Une première méthode pour pouvoir calculer les probabilités de ruine (voir Asmussen [72] pour une présentation générale) consiste à réaliser un changement de probabilité. On peut ainsi ramener le calcul d'une probabilité de ruine au calcul de l'espérance de l'exponentielle de l'*overshoot* (saut à la ruine) du processus $c t - S_t$. Cette espérance se calcule sous la probabilité obtenue par une transformée d'Esscher de paramètre le coefficient de Lundberg (voir la sous-section suivante). L'intérêt du changement de mesure réside dans le fait qu'on se place dans un univers où le franchissement de seuil est certain : le problème de simuler des trajectoires de longueur infinie ne s'y pose plus.

Une seconde méthode, développée par Dufresne et Gerber [45], part de l'étude de $L(t) = \max_{0 \leq u \leq t} (S_u - cu)$.

Dufresne et Gerber rappellent que $L(t)$ est identique en loi à $V(t) = S_t - ct - \min_{0 \leq u \leq t} (S_u - cu)$ et montrent que la probabilité de ruine à horizon infini peu s'écrire comme :

$$\mathcal{R}(u) = 1 - \lim_{t \rightarrow +\infty} P(V(t) \leq u)$$

Pour obtenir $\mathcal{R}(u)$, il suffit alors de simuler une trajectoire de V . En divisant le temps passé en dessous du niveau u par la durée de la trajectoire, on obtient une estimation de $P(V(t) \leq u)$ d'où une estimation de la probabilité de ruine avec une seule trajectoire suffisamment longue.

Nous passons maintenant à l'étude d'une approximation classique des probabilités de ruine qui fournit des résultats suffisamment précis dans de nombreuses circonstances.

4.2.3 Approximation de Cramer-Lundberg

Nous nous plaçons toujours dans le modèle classique avec une arrivée poissonnienne de sinistres et commençons par considérer le cas de sinistres dont les distributions possèdent des queues légères.

Les sinistres W_i doivent alors vérifier :

$$E(e^{sW_i}) < +\infty \tag{4.6}$$

pour s positif dans un voisinage de zéro.

Par ailleurs, pour des queues suffisamment légères, on a une solution à l'équation suivante :

$$E(e^{sW_i}) = 1 + \frac{sc}{\lambda}$$

La solution non nulle, notée γ , de cette équation est appelée coefficient d'ajustement ou coefficient de Lundberg. On a notamment pour tout $s \leq \gamma$ la majoration suivante :

$$\mathcal{R}(u) \leq e^{-su} \quad \forall u \geq 0$$

dite "inégalité de Lundberg".

De fait la majoration la plus fine possible est pour le plus grand s , d'où la formulation de l'inégalité de Lundberg :

$$\mathcal{R}(u) \leq e^{-\gamma u} \quad \forall u \geq 0$$

Dans le modèle classique, et pour des queues de distribution légères, on peut donc majorer les probabilités de ruine par des exponentielles de la réserve initiale. On a en fait plus que cela, pourvu que l'on suppose que :

$$(E(e^{sW_i}))' = E(W_i e^{sW_i}) < +\infty$$

alors pour u grand :

$$\mathcal{R}(u) \sim \frac{1 - \mathcal{R}(0)}{\frac{\lambda}{c} E(W_i e^{\gamma W_i}) - 1} e^{-\gamma u} \quad (4.7)$$

qui est la formule asymptotique de Cramer-Lundberg.

Cette formule est intéressante en ce qu'elle donne des approximations très fines des probabilités de ruine pour des valeurs de réserve initiale u réalistes. Il est à noter cependant que les sinistres dans la plupart des cas ne suivent pas des distributions aux queues légères. De quelles approximations dispose-t'on alors ?

Détaillons d'abord le cas où les queues de distributions sont très lourdes. Dans ce cas, il n'existe aucun s positif tel que l'espérance de la formule (4.6) soit finie (et donc il n'existe plus d'exposant de Lundberg).

Une classe vaste de distributions de ce type est la classe des distributions sous-exponentielles. Elles vérifient en particulier :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - F^{*n}(x)}{1 - F(x)} = n \quad (4.8)$$

pour n entier positif quelconque, ce qui se réduit trivialement à :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - F^{*2}(x)}{1 - F(x)} = 2 \quad (4.9)$$

On peut alors démontrer le résultat suivant (pour cela écrire la formule (4.5) de Beekman en fonction de F_I et utiliser la formule (4.8)) :

$$\mathcal{R}(u) \sim \frac{\mathcal{R}(0)}{1 - \mathcal{R}(0)} (1 - F_I(u)) \quad (4.10)$$

pour u grand.

Cette approximation est à comparer à l'approximation classique de Cramer-Lundberg (voir formule (4.7)). Dans le cas des distributions de type sous-exponentielle, on aura ainsi une approximation de la probabilité de ruine qui ne sera plus de type exponentielle. Ainsi, l'augmentation des réserves n'est plus aussi efficace quand les sinistres présentent des queues épaisses

que quand ils présentent des queues minces, ce qui est en accord avec l'intuition.

Des exemples de distributions sous-exponentielles sont les distributions de Pareto et lognormale. Remarquer à propos de la distribution lognormale que l'hypothèse de Black et Scholes se traduit par des queues minces sur les rendements des actions mais pas sur les actions elles-mêmes.

Pour la distribution lognormale (quand elle correspond à l'exponentielle d'une distribution normale de paramètres (μ, σ)), on a en particulier :

$$1 - F_I(u) \stackrel{+\infty}{\sim} \frac{\sigma u e^{-\frac{(\log(u)-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}(\log(u))^2 e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}}$$

et l'on voit bien avec la formule (4.10) que la probabilité de ruine n'est pas dans ce cas décroissante de manière exponentielle avec u .

Nous terminons cette sous-section par le cas des distributions possédant des queues semi-légères, c'est-à-dire par le cas intermédiaire entre les deux cas étudiés jusqu'à présent. Les distributions de classe "proche de sous-exponentielle" ou $\mathcal{S}^{\hat{\gamma}}$ sont des distributions à queue semi-légère; la distribution générale inverse gaussienne en est un exemple classique. Pour ces distributions, la formule (4.9) des distributions sous-exponentielles change selon :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - F^{*2}(x)}{1 - F(x)} = 2 \mathcal{L}[F](-\hat{\gamma}) \quad (4.11)$$

où $\mathcal{L}[F](-\hat{\gamma})$ est la transformée de Laplace de la distribution F au point $-\hat{\gamma}$.

Remarquer que la transformée de Laplace de la distribution F est définie pour toute abscisse négative comprise entre 0 et $-\hat{\gamma}$. En d'autres termes, la condition $E(e^{sW_i}) < +\infty$ des queues légères est bien vérifiée pour tout s positif inférieur à $\hat{\gamma}$. Cependant, nous ne retrouvons pas complètement le cas des queues légères et l'analyse de Cramer-Lundberg afférente. Pourquoi? Parce qu'en fait $\hat{\gamma}$ n'est pas assez grand pour que la condition $E(e^{sW_i}) = 1 + \frac{sc}{\lambda}$ soit vérifiée. $\hat{\gamma}$ n'est donc pas assimilable à un coefficient de Lundberg. Remarquer enfin que le cas limite $\hat{\gamma} = 0$ correspond au cas des distributions sous-exponentielles.

Dans le cas des distributions de classe $\mathcal{S}^{\hat{\gamma}}$, on peut également obtenir un équivalent de la probabilité de ruine :

$$\mathcal{R}(u) \sim \frac{\mathcal{R}(0)(1 - \mathcal{R}(0))}{(1 - \mathcal{R}(0)\mathcal{L}[F](\hat{\gamma}))^2} (1 - F_I(u)) \quad (4.12)$$

pour u grand.

Nous reviendrons sur les formules asymptotiques (4.7, 4.10, 4.12) dans les sections suivantes. Nous passons maintenant à l'emploi de processus de Lévy généraux en théorie de la ruine.

4.3 Approches Perturbatives

De même qu'en finance où une extension des diffusions a été opérée en 1976 par la prise en compte de perturbations poissonniennes (cf. Merton [94]), en assurance le même type d'extension a également eu lieu. Cependant en assurance, cela a été fait dans le sens contraire. Le modèle poissonien a été étendu par la prise en compte d'une perturbation brownienne par Gerber [56] en 1970. Le sens attaché à la perturbation brownienne est une description de l'incertitude sur la modélisation des primes et des sinistres. Qui dit perturbation, dit que le processus "central" à la modélisation reste un processus de Poisson composé avec dérive. Nous étudierons également le cas des perturbations stables. L'approche perturbative est intéressante en ce qu'elle constitue une étape intermédiaire vers la modélisation par des processus de Lévy généraux, aussi bien en finance qu'en assurance.

4.3.1 Perturbations Browniennes

Gerber [56] a étudié l'application des perturbations browniennes en théorie de la ruine en 1970. Dans un article postérieur, en 1991, Dufresne et Gerber [42] reprennent le problème de manière plus explicite. Veraverbeke [122] a quant à lui élargi le cadre de Gerber en 1993.

Le processus de réserve est ici représenté par :

$$R_t = u + ct - S_t + Z_t$$

où s'ajoute une perturbation brownienne Z_t de coefficient de diffusion D .

Sous cette hypothèse, la probabilité de ruine \mathcal{R} à horizon infini vérifie l'équation intégro-différentielle :

$$D \mathcal{R}'(u) + c \mathcal{R}(u) = (c - \lambda m) + \lambda \int_0^u \mathcal{R}(u-x)(1-F(x))dx$$

Gerber montre que la probabilité de ruine suit alors l'équation de renouvellement :

$$\mathcal{R}(u) = (1 - \theta)H_1(u) + \theta \int_0^u \mathcal{R}(x) h_1 * h_2(u - x) dx$$

où h_1 est la densité de la loi exponentielle de paramètre c/D , H_1 la fonction de répartition correspondante, et : $h_2 = F_I'$.

Si l'on applique une transformée de Laplace à cette égalité, on obtient :

$$\mathcal{L}[\mathcal{R}](\rho) = (1 - \theta) \mathcal{L}[H_1](\rho) + \theta \mathcal{L}[\mathcal{R}](\rho) \mathcal{L}[h_1](\rho) \mathcal{L}[h_2](\rho)$$

D'où pour la transformée de Laplace de la probabilité de ruine :

$$\mathcal{L}[\mathcal{R}](\rho) = \frac{(1 - \theta) \mathcal{L}[H_1](\rho)}{1 - \theta \mathcal{L}[h_1](\rho) \mathcal{L}[h_2](\rho)}$$

Un développement en série suivi d'une transformée de Laplace inverse permet d'obtenir :

$$\mathcal{R}(u) = (1 - \theta) \sum_{n=0}^{+\infty} \theta^n H_1^{*(n+1)} * H_2^{*n}(u) \quad (4.13)$$

qui est une extension de la formule de Pollaczek-Khinchine (4.5) dans le cas perturbatif et où le produit de convolution est pris au sens des mesures.

Gerber considère une perturbation brownienne du modèle classique où les distributions de saut sont à queue fine. Il obtient alors une expression asymptotique de la probabilité de ruine selon :

$$\mathcal{R}(u) \sim \frac{1 - \theta}{\frac{\lambda\gamma}{c} E(W_i e^{\gamma W_i}) + \frac{\gamma D}{c}} e^{-\gamma u} \quad (4.14)$$

pour un coefficient de Lundberg défini par :

$$1 - \frac{\gamma D}{c} = \frac{\lambda}{c} E(e^{\gamma W_i})$$

Cette formule asymptotique est une extension de la formule classique de Cramer-Lundberg (4.7).

Veraverbeke [122] a obtenu les formules asymptotiques dans le cadre perturbatif brownien quand les distributions de sinistre possèdent des queues épaisses ou semi-épaisses. Remarquer que cet auteur démontre la formule (4.13) de manière simple, sans passer par une équation de renouvellement.

Veraverbeke se sert d'un argument dérivé du résultat puissant de Zolotarev [128] qui affirme que pour un processus de Lévy X à sauts uniquement négatifs, on a :

$$s \mathcal{L} \left[P \left(\inf_{t \geq 0} (X(t)) < -x \right) \right] (s) = 1 - \frac{s E(X_1)}{\psi(s)} \quad (4.15)$$

avec x un niveau positif quelconque et ψ l'exposant de Laplace du processus X .

Veraverbeke montre alors que pour un processus de ruine de type Poisson composé perturbé par un mouvement brownien, on a l'approximation suivante de la probabilité de ruine quand les distributions de sinistre sont de classe sous-exponentielle, c'est-à-dire à queue épaisse :

$$\mathcal{R}(u) \sim \frac{\theta}{1-\theta} (1 - F_I(u)) \quad (4.16)$$

pour u grand.

Autrement dit, dans le cas des queues épaisses, on retrouve la formule (4.10) : la perturbation brownienne ne joue aucun rôle, elle est "écrasée" par les sinistres à queue épaisse.

Qu'en est-il du cas intermédiaire où les sinistres possèdent des queues semi-épaisses? Soit donc une distribution de sinistre de type proche de sous-exponentiel de paramètre $\hat{\gamma}$. Veraverbeke montre alors que :

$$\mathcal{R}(u) \sim \frac{\theta(1-\theta)}{\hat{\gamma} \left(1 - \frac{D\hat{\gamma}}{c} - \frac{\lambda}{c} \theta \mathcal{L}[F](\hat{\gamma}) \right)^2} (1 - F_I(u)) \quad (4.17)$$

pour u grand.

On peut comparer ce résultat à la formule (4.12) qui correspond au cas non perturbatif. On voit bien qu'ici, le paramètre de diffusion D intervient : l'effet diffusif n'est pas masqué par les queues semi-épaisses; les deux contributions ont un impact sur la probabilité de ruine.

4.3.2 Perturbations Stables

Une seconde approche perturbative a été développée en 1998 par Furrer [51]. Cette approche consiste également à perturber un processus de ruine classique - de type Poisson composé avec dérive - mais cette fois par un processus stable.

Remarquer que l'approche de Furrer est restrictive dans le sens où la perturbation envisagée n'est que dans un sens : le processus perturbatif stable est supposé spectralement négatif, il ne saute que vers le bas.

En se servant, à l'instar de Veraverbeke, de l'argument (4.15) de Zolotarev, Furrer obtient une formule de type Pollaczek-Khinchine pour ce cas d'étude :

$$\mathcal{R}(u) = 1 - (1 - \theta) \sum_{n=0}^{+\infty} \theta^n F_I^{*n} * U^{*(n+1)}(u) \quad (4.18)$$

où $1 - U$ est une fonction de Mittag-Leffler définie comme :

$$1 - U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{c}{\sigma^\alpha}\right)^n}{\Gamma(1 + (\alpha - 1)n)} x^{(\alpha-1)n}$$

Par ailleurs, on peut également, comme dans le cadre des perturbations browniennes, obtenir des probabilités de ruine asymptotiques, notamment quand les distributions de sinistre sont à queue épaisse, et mener une analyse de l'impact des diverses contributions.

Le lecteur désirant obtenir plus de détails sur ce sujet peut se reporter à la thèse de Furrer [50]. Nous passons maintenant à la modélisation directe du processus de ruine par un processus de Lévy.

4.4 Approches Directes

Nous présentons dans cette section les approches existantes directes de représentation du processus de risque par un processus de Lévy. Cette modélisation contient par essence la modélisation classique, les processus de Poisson composés étant des processus de Lévy. Nous nous intéressons tout d'abord aux approches par subordonateur. Puis, nous étudions le cas particulier de l'emploi de processus normal inverse gaussiens. Enfin, nous nous concentrerons sur l'approche récente développée par Kluppelberg, Kyprianou et Maller [70]. Remarquer dès à présent qu'il n'existe actuellement pas de cadre permettant de calculer aisément toute probabilité de ruine (et en particulier à horizon fini) lorsque le processus de ruine est un processus de Lévy quelconque.

4.4.1 Processus Gamma et Autres Subordinateurs

Considérons le processus de risque suivant :

$$R(t) = u + ct - Z(t)$$

où Z est un subordonateur, c'est-à-dire un processus de Lévy croissant.

Dufresne, Gerber et Shiu [43] ont montré que si Z est un processus gamma, alors on peut reconstruire une théorie de la ruine classique avec un tel processus de risque. Morales [100] a considéré un processus Z de type général inverse gaussien et a prouvé qu'il en était alors de même. De fait, pour tout subordonateur Z , on peut retrouver les formules classiques (correspondant à Z processus de Poisson composé) de la théorie de la ruine.

Soit ν la densité de Lévy - supposée exister - associée au subordonateur Z . On note Q sa queue définie comme :

$$Q(x) = \int_x^{+\infty} \nu(x) dx$$

Remarquer que l'on a :

$$\nu(x) = -Q'(x)$$

On peut alors démontrer (en faisant tendre une suite de processus de Poisson composés vers le subordonateur, voir un des deux auteurs cités plus haut), que l'on retrouve le résultat suivant de la théorie de la ruine classique :

$$\mathcal{R}(u) = P(L > u) \tag{4.19}$$

où L s'interprète comme une variable géométrique composée :

$$L = \sum_{i=0}^M L_i$$

M est une variable aléatoire géométrique et les L_i sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées dont la distribution possède la densité f suivante :

$$f(x) = \frac{Q(x)}{\int_0^{+\infty} x\nu(x) dx}$$

où l'on retrouve au dénominateur la variation du processus Z . Ainsi, cette procédure fonctionne-t'elle pour tout subordonateur (ces processus de Lévy sont nécessairement à variation finie).

Dufresne et Gerber [41] fournissent une méthode numérique permettant de trouver un encadrement serré, et donc une bonne approximation des probabilités de ruine. Cette méthode peut s'adapter au calcul de la formule (4.19).

Remarquer que d'autres résultats de la théorie de la ruine classique peuvent être adaptés. Il en est ainsi de la densité de la sévérité de la ruine et de la formule de Cramer-Lundberg. Par ailleurs, on retrouve la formule de Beekman :

$$\mathcal{R}(u) = P(L > u) = (1 - \theta) \sum_{n=0}^{+\infty} \theta^n (1 - F^{*n}(u))$$

où F est la fonction de répartition associée à la densité f définie plus haut.

4.4.2 Processus NIG et Changements de Mesure

Nous en venons maintenant à l'étude d'une modélisation directe où le processus de Lévy considéré n'est plus un subordonateur, mais un processus de Lévy pouvant sauter dans les deux sens. Le processus de Lévy considéré est du type normal inverse gaussien ("NIG"). L'approche présentée ici repose sur l'emploi de résultats sur les martingales, elle a été développée par Morales [100].

Soit donc le processus de réserve suivant :

$$R(t) = u + ct + Z(t)$$

où Z est un processus normal inverse gaussien ($-Z$ s'interprète soit comme un processus de sinistre, soit comme une contribution globale incorporant les sinistres et un aléa sur l'arrivée des primes).

Une présentation des processus normal inverse gaussiens et de leur application à la finance a été faite au chapitre 1. Ces processus possèdent la densité de Lévy suivante :

$$\nu(x) = \frac{\delta \alpha K_1(\alpha|x|)}{\pi|x|} e^{\beta x}$$

pour x réel.

Pour obtenir les probabilités de ruine associées au processus de réserve défini plus haut, on procède à un changement de mesure du type transformée d'Esscher. Considérons donc une transformation d'Esscher de paramètre η , et notons Q la nouvelle mesure ainsi obtenue.

Pour un processus de Lévy, comme le processus Z normal inverse gaussien, on obtient par transformée d'Esscher un processus de Lévy par rapport à la nouvelle mesure. Voir le chapitre 2 et la démonstration V de son annexe

B pour plus de détails. La mesure de Lévy du nouveau processus s'exprime alors simplement comme :

$$\nu_Q(x) = e^{-\eta x} \nu(x)$$

De cette relation et de la forme de la mesure de Lévy ci-dessus, on déduit que le processus de Lévy sous la nouvelle mesure est de nouveau un processus normal inverse gaussien, dont le paramètre β a été translaté en $\beta - \eta$. Le processus de ruine est également un processus normal inverse gaussien avec dérive. Venons-en maintenant au calcul des probabilités de ruine.

Soit τ le temps d'atteinte du niveau zéro par le processus de ruine, ou temps de ruine. On a de manière immédiate :

$$\mathcal{R}(u) = P(\tau < +\infty)$$

Soit maintenant ψ l'exposant de Laplace du processus $ct + Z_t$. On a par transformée de Laplace de paramètre η :

$$\mathcal{R}(u) = E_Q \left(e^{\eta(U(\tau)-u) + \tau\psi(\eta)} 1_{\{\tau < +\infty\}} \right)$$

Pour un choix convenable de paramètres (voir Morales [100] pour plus de détails), on peut trouver un η vérifiant $\psi(\eta) = 0$ et pour lequel $\tau < +\infty$ sous la nouvelle probabilité. Comme indiqué en section 4.2.2 de ce chapitre, cela ouvre la voie à une approche par simulation.

En effet, on peut simplifier l'équation précédente en :

$$\mathcal{R}(u) = E_Q \left(e^{\eta(U(\tau)-u)} \right) = E_Q \left(e^{\eta Z_Q(\tau)} \right)$$

qui se calcule par méthode de Monte-Carlo sur Z_Q . $Z_Q(\tau)$ sera toujours accessible car τ est fini sous la mesure envisagée. Il suffit donc de simuler des trajectoires du processus normal inverse gaussien Z_Q et de prendre la moyenne des différentes contributions des trajectoires.

Concernant les simulations de processus NIG, deux approches sont possibles. On peut bien sûr faire une approximation de type Poisson composé. Mais on peut également simuler directement ce processus de Lévy. En effet, si l'on sait simuler une variable aléatoire de type NIG, on peut simuler les accroissements du processus, donc le processus lui-même (se rappeler au passage que la distribution normale inverse gaussienne est stable par convolution, on pourra choisir n'importe quel pas de discrétisation).

De fait, on sait facilement simuler une variable aléatoire gaussienne N centrée réduite et une variable aléatoire inverse gaussienne I de paramètres

$(\delta, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})$. Une variable aléatoire X de paramètres $(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ s'en déduit aisément selon :

$$X = \mu + \beta I + \sqrt{I}N$$

Venons-en maintenant à l'étude de l'approche développée par Kluppelberg, Kyprianou et Maller.

4.4.3 Approche de Kluppelberg, Kyprianou et Maller

Dans un papier très récent, Kluppelberg, Kyprianou et Maller [70] développent une approche permettant d'obtenir une expression asymptotique (aux grandes réserves) des probabilités de ruine à horizon infini pour un processus de risque représenté par un processus de Lévy de type très général. Cependant, leur formule reste très théorique et les cas pour lesquels on peut mener les calculs de manière explicite sont des cas déjà connus en théorie de la ruine.

Ces auteurs postulent un processus de risque du type :

$$R = u - Z$$

où u est la réserve initiale et Z un processus de Lévy dérivant vers $-\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$ (non pas au sens d'une dérive linéaire mais au sens de la trichotomie de Rogozin, voir Annexe A du chapitre 1).

Autrement dit, R admet un bon comportement, il dérive vers $+\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$. C'est ce qui se passe en théorie de la ruine classique pour des chargements de sécurité suffisants. Cette hypothèse est plus qu'une simple hypothèse mathématique. Kluppelberg, Kyprianou et Maller supposent qu'une compagnie d'assurance peut toujours induire son processus de risque à admettre ce "bon" comportement asymptotique.

Pour mener à bien leurs calculs, ils font un usage intensif des processus de "ladder" (voir Annexe A du chapitre 2) et en particulier du processus \mathcal{H} qui est le "ladder high" tué en un temps exponentiel. Notant

$$\delta_\nu(\mathcal{H}) = E(e^{\nu\mathcal{H}_1})$$

et supposant que la queue de \mathcal{H} est de classe proche de sous-exponentielle de paramètre α , ainsi que la condition suivante sur $\delta_\nu(\mathcal{H})$:

$$\delta_\nu(\mathcal{H}) < e^q$$

ils montrent que les probabilités de ruine à horizon infini s'expriment asymptotiquement comme :

$$\mathcal{R}(u) \sim \frac{qP(\mathcal{H}_1 > u)}{[q - \log(\delta_\nu(\mathcal{H}))]^2 \delta_\nu(\mathcal{H})} \quad (4.20)$$

pour u grand.

Cette formule n'est ni évidente à interpréter de manière intuitive, ni simplifiable dans le cas général. Cependant, Kluppelberg, Kyprianou et Maller donnent quelques exemples pour lesquels on peut aller plus loin. Ces exemples correspondent au cas où X est spectralement positif - autrement dit à un processus de risque affecté uniquement par des sauts négatifs. On a alors en effet le résultat suivant :

$$\bar{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) = \int_u^{+\infty} \bar{\Pi}_X(y) dy$$

qui exprime que la queue de \mathcal{H} est la queue intégrée de X (voir Vigon [123]).

Ce résultat permet alors de retrouver les formules asymptotiques (extensions de Cramer-Lundberg) des cas perturbatifs étudiés en section précédente. En effet, aussi bien dans le cas perturbatif brownien que dans le cas stable, le processus de risque n'est admis à sauter que vers le bas.

4.5 Une Nouvelle Approche

Dans cette section, nous proposons une nouvelle approche de la théorie de la ruine : nous modélisons le processus de risque par un processus de Lévy stable. Dans un tel modèle, les sauts positifs représentent les *cash flows* positifs et les sauts négatifs les *cash flows* négatifs affectant les réserves d'une compagnie d'assurance. Par ailleurs, la classe de processus envisagée est suffisamment large pour permettre l'ajustement à la dynamique réelle suivie par les réserves.

La ruine, de manière classique, est supposée survenir quand le processus de risque traverse un niveau donné. Les probabilités de ruine et de survie s'obtiennent en utilisant la loi du premier temps de passage ou, de manière équivalente, de l'infimum du processus de risque. Pour calculer ces probabilités, nous étendons le cadre de Rogers [111] qui a montré comment calculer les probabilités de premier passage pour des processus de Lévy spectralement négatifs et utilisé ces probabilités en finance dans Hilberink et Rogers [61]. Contrairement à Rogers, le processus de Lévy que nous employons peut sauter dans les deux sens : il nous semble tout à fait réaliste de supposer que les réserves d'une compagnie d'assurance sont affectées par des sauts aussi bien positifs que négatifs.

Dans une première sous-section, nous faisons un rappel des outils utiles pour développer notre modèle. Ensuite, nous donnons les formules permet-

tant de calculer les probabilités de ruine et de survie en temps fini. Dans une troisième sous-section, nous expliquons comment calculer ces probabilités de manière numérique. Nous passons alors à l'analyse des résultats obtenus avant de nous concentrer sur les probabilités de ruine à horizon infini.

4.5.1 Outils Fondamentaux

Nous faisons ici une brève revue des différents outils qui vont être utiles pour notre problème de ruine. Une présentation détaillée de ces outils se trouve à l'annexe A du chapitre 3; nous nous concentrons ici sur l'essentiel.

Soit la fonctionnelle suivante :

$$I_t = \inf_{0 \leq s \leq t} X_s \quad (4.21)$$

il s'agit de l'infimum du processus (on définit de la même manière le supremum S). La connaissance de cette fonctionnelle s'avère cruciale à la résolution de nombreux problèmes, dont les problèmes de ruine. En effet, savoir si un niveau de ruine a été franchi ou pas revient à savoir si l'infimum du processus a passé ou non en dessous de ce niveau.

On peut connaître les lois marginales des infimum et supremum à travers les facteurs de Wiener-Hopf. Ces facteurs sont définis comme :

$$\psi^+(q, z) = E(e^{zS_\eta}) = q \int_0^{+\infty} e^{-qt} E(e^{zS_t}) dt \quad (4.22)$$

et :

$$\psi^-(q, z) = E(e^{z(X_\eta - S_\eta)}) = E(e^{zI_\eta}) = q \int_0^{+\infty} e^{-qt} E(e^{zI_t}) dt \quad (4.23)$$

où les infimum et supremum sont pris en un temps exponentiel η indépendant de paramètre $q > 0$.

Ces facteurs interviennent dans l'égalité suivante, appelée factorisation de Wiener-Hopf :

$$\frac{q}{q - \Psi(z)} = \psi^+(q, z)\psi^-(q, z) \quad (4.24)$$

où Ψ est l'exposant de Laplace de X et l'on a en fait indépendance de S_η et $X_\eta - S_\eta$.

Nous nous intéressons dans cette section au cas particulier des processus de Lévy *stables*. Ces derniers possèdent un exposant de Laplace qui n'est défini que sur la droite des imaginaires - il s'agit donc d'un exposant de Fourier. Nous aurons plus loin besoin de mener les calculs de probabilité de ruine par transformée de Laplace inverse où les expressions des facteurs de Wiener-Hopf définis en fonction de l'exposant de Laplace seront particulièrement utiles. Nous préférons donc parler d'exposant de Laplace plutôt que d'exposant de Fourier et rappelons sa définition :

$$\Psi(iu) = -c|u|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sign}(u) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right)$$

avec la restriction suivante: $u \in \mathbb{R}$.

Le paramètre de dispersion c est supposé vérifier :

$$c = \left(1 + \beta^2 \tan^2\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right)^{-1/2} \quad (4.25)$$

On rappelle par ailleurs la définition standard du paramètre ρ (parfois appelé paramètre de "positivité"):

$$\rho = P(X_1 > 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\alpha} \tan^{-1}\left(\beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)$$

Doney [39] a pu obtenir une expression simple des facteurs de Wiener-Hopf d'une sous-classe de processus de Lévy stables. Cette sous-classe est définie par la condition suivante:

$$\rho + k = \frac{l}{\alpha} \quad (4.26)$$

où k et l sont des entiers.

De fait, la paramétrisation ainsi définie est dense par rapport à l'ensemble des paramétrisations possibles des processus stables. Les résultats de Doney peuvent donc s'appliquer à une modélisation par processus de Lévy stable *quelconque*. Doney a montré que les facteurs de Wiener-Hopf stables s'expriment comme:

$$\psi_{SL}^+(1, z) = E(e^{zS_{\eta_1}}) = \frac{\prod_{r=0}^{k-1} ((-1)^l (-z)^\alpha + e^{i\alpha(k-1-2r)\pi})}{\prod_{r=0}^{l-1} ((-1)^{k+1} z + e^{i(l-1-2r)\pi/\alpha})} \quad (4.27)$$

et :

$$\psi_{SL}^-(1, z) = E(e^{zI_{\eta_1}}) = \frac{\prod_{r=0}^{l-1} ((-1)^{k+1} z + e^{i(l-1-2r)\pi/\alpha})}{\prod_{r=0}^k ((-1)^l z^\alpha + e^{i\alpha(k-2r)\pi})} \quad (4.28)$$

où il se restreint à $q = 1$ et donc η_1 est une variable aléatoire exponentielle indépendante de paramètre égal à un.

Nous utiliserons en particulier le second facteur par la suite. Il décrit la loi de l'infimum d'un processus de Lévy stable et permet de calculer les probabilités de ruine associées.

4.5.2 Probabilités de Ruine et de Survie

Nous nous concentrons dans cette sous-section sur l'obtention de formules pour les probabilités de ruine et de survie à horizon fini lorsque le processus de risque est modélisé par un processus de Lévy stable.

Rappelons tout d'abord l'expression générale du facteur de Wiener-Hopf de l'infimum :

$$\psi^-(q, z) = q \int_0^{+\infty} e^{-qt} E(e^{zI_t}) dt$$

On peut développer cette expression selon :

$$\psi^-(q, z) = q \int_0^{+\infty} e^{-qt} \int_{-\infty}^0 z e^{zx} P(I_t > x) dx dt$$

et par changement de variable ($u = -x$), on obtient :

$$\psi^-(q, z) = qz \int_0^{+\infty} e^{-qt} \int_0^{+\infty} e^{-zu} P(I_t > -u) du dt$$

où l'on a ainsi développé le facteur de Wiener-Hopf de l'infimum comme une transformée de Laplace double.

Nous prenons la convention suivante \mathcal{L} , $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$, \mathcal{L}^{-1} et $\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1}$ représentent une transformée de Laplace respectivement simple, double, inverse, et double inverse. Avec cette convention, on a :

$$\psi^-(q, z) = q z \mathcal{L}_q \otimes \mathcal{L}_z [P(I_t > -u)] \quad (4.29)$$

$P(I_t > -u)$ est la probabilité que l'infimum de X soit supérieur à $-u$ jusqu'en t . Puisque le processus de risque comporte une réserve initiale et est défini comme $R_t = u + X_t$, cette probabilité est également celle que l'infimum de R soit resté positif jusqu'en t , autrement dit il s'agit de la probabilité de non-ruine à horizon t .

Nous avons donc besoin de connaître la formule explicite de $\psi_{SL}^-(q, z)$ pour pouvoir calculer les probabilités de ruine et de survie. Or, sous la condition (4.26), l'équation (4.28) nous donne l'expression de $\psi_{SL}^-(1, z)$. Nous pouvons en déduire $\psi_{SL}^-(q, z)$ grâce à la relation suivante :

$$\psi_{SL}^-(q, z) = \psi_{SL}^-\left(1, zq^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \quad (4.30)$$

Cela peut être aisément prouvé. Se rappeler que l'on a :

$$\psi_{SL}^-(q, z) = E(e^{zI_\eta}) = \int_0^{+\infty} qe^{-qt} E(e^{zI_t}) dt$$

en posant $u = qt$, on obtient :

$$\psi_{SL}^-(q, z) = \int_0^{+\infty} e^{-u} E(e^{zI_{u/q}}) du$$

par propriété de "scaling" de I , on a alors :

$$\psi_{SL}^-(q, z) = \int_0^{+\infty} e^{-u} E\left(e^{zq^{-\frac{1}{\alpha}}I_u}\right) du$$

ce qui prouve la formule (4.30).

Soient $S(u, t)$ et $R(u, t)$ les probabilités de survie et de ruine à horizon fini t en présence d'une réserve initiale u . Par inversion de (4.29), on peut les exprimer comme :

$$S(u, t) = P(I_t + u > 0) = \mathcal{L}_q^{-1} \otimes \mathcal{L}_z^{-1} \left[\frac{\psi_{SL}^-(q, z)}{qz} \right] \quad (4.31)$$

et comme :

$$R(u, t) = 1 - \mathcal{L}_q^{-1} \otimes \mathcal{L}_z^{-1} \left[\frac{\psi_{SL}^-(q, z)}{qz} \right] \quad (4.32)$$

Nous montrons dans la sous-section suivante comment calculer $S(u, t)$ et $R(u, t)$.

4.5.3 Méthode de Calcul

Afin de calculer la probabilité de ruine d'une compagnie d'assurance, il convient d'abord d'avoir une estimation du processus de risque suivi par les réserves. Ainsi, quand ce dernier est modélisé par un processus de Lévy

stable, il faut obtenir une estimation des paramètres α et β et du paramètre de dispersion (en ne postulant pas de dérive). Ici, nous supposons le paramètre de dispersion unique et défini comme dans Doney [39]. Cependant, comme montré au chapitre 3, on peut aisément dans les calculs se ramener à un paramètre de dispersion quelconque. Nous renvoyons le lecteur à Paulson, Holcomb et Leitch [103] pour une présentation de l'estimation des paramètres d'un processus stable.

Une fois les paramètres du processus de risque estimés, il convient de déterminer un couple (k, l) qui vérifie la contrainte (4.26) de Doney afin de pouvoir utiliser les facteurs de Wiener-Hopf du cas stable. Ce couple peut être obtenu par une recherche de racine sur la contrainte mentionnée ci-dessus.

Nous considérerons pour nos illustrations les deux paramétrisations particulières suivantes :

Cas	A	B
α	1.4	1.4
β	0.2361	- 0.2361
c	0.951	0.951
k	1	3
l	2	5

TAB. 4.2 – *Paramétrisations Choisies*

Le calcul des formules (4.31) et (4.32) est alors réalisé par transformée de Laplace inverse double. Nous avons utilisé la méthode d'Abate et Whitt [1]. Le lecteur peut consulter l'annexe B du chapitre 3 pour une présentation des méthodes standard de transformée de Laplace inverse. Nous rappelons ici brièvement la méthode d'Abate et Whitt dans le cas de l'inversion de Laplace simple d'une fonction.

Soit F la transformée de Laplace de la fonction f :

$$F(x) = \mathcal{L}[f](x) = \int_0^{+\infty} e^{-xs} f(s) ds$$

On a la formule classique suivante (connue sous le nom d'intégrale de Bromwich) :

$$f(s) = \mathcal{L}^{-1}[F](s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} F(z) e^{zs} dz$$

qui exprime la transformée de Laplace inverse f comme une intégrale de F le long du contour $[x_0 - i\infty, x_0 + i\infty]$ où l'abscisse réelle x_0 est choisie de telle manière à laisser les singularités de F à gauche du contour d'intégration.

La méthode d'Abate et Whitt permet de calculer l'intégrale de Bromwich et donc d'obtenir la fonction inverse f . La première étape de cette méthode consiste en une discrétisation trapézoïdale de l'intégrale. Cependant, si l'on se restreint à cette simple discrétisation, les temps de calcul sont excessivement élevés dès lors que l'on souhaite des niveaux de précision raisonnables, typiquement quatre décimales. Une amélioration est donc nécessaire. Abate et Whitt réalisent leur discrétisation de manière à obtenir une série quasi-alternée. Cela leur permet en deuxième étape d'accélérer le calcul en utilisant une méthode classique d'accélération des séries alternées, la méthode d'Euler.

Les formules (4.31) et (4.32), qui s'expriment comme des transformées de Laplace inverses *doubles*, peuvent être calculées en utilisant deux fois de suite la méthode décrite ci-dessus. En section suivante nous analysons les résultats obtenus par cette procédure.

4.6 Analyse des Résultats

Nous présentons ici les résultats obtenus et leur analyse concernant les probabilités de ruine à horizon fini et infini. Puis, nous montrons que ces résultats sont d'intérêt en théorie financière du défaut.

4.6.1 Résultats à Horizon Fini

Nous calculons d'abord les probabilités de ruine à horizon fini pour le cas A - voir la table 4.2 - et les représentons en figure 4.2. La période correspond à l'horizon temporel t .

On peut remarquer que sur une courte période donnée, la courbe présente une inflexion en fonction de la réserve initiale. Un dirigeant avec un court horizon de gestion pourrait y voir une incitation à abaisser la réserve initiale. En effet, à partir d'un certain niveau de réserve, la probabilité de survie change peu et il n'y a donc plus aucun intérêt à augmenter la réserve.

Cependant, si l'on considère les probabilités de survie pour un horizon de gestion assez grand, on peut observer une croissance quasi-linéaire en fonction de la réserve initiale. De cela, nous pouvons déduire que la politique de gestion d'un dirigeant de compagnie d'assurance devra s'adapter à l'horizon de gestion. En particulier, le manager devra faire attention à ne pas mener

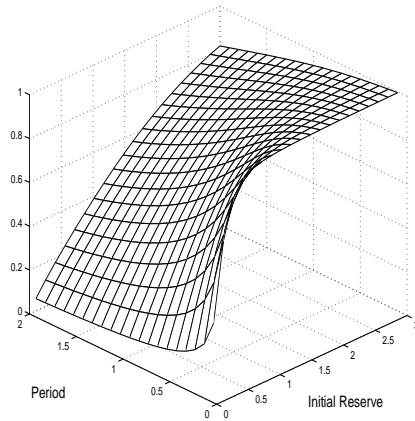


FIG. 4.2 – Probabilités de survie pour $\alpha = 1.4$ et $\beta = 0.2361$

une politique trop à court terme.

Nous souhaitons maintenant étudier l'impact du paramètre d'asymétrie β sur les probabilités de survie. Pour cela, nous rappelons d'abord comment les densités stables et les trajectoires de processus stables varient en fonction du paramètre d'asymétrie.

Nous représentons en figure 4.3 les densités de variables aléatoires stables pour un paramètre de queue $\alpha = 1.5$ et une importante asymétrie $\beta = \pm 0.8$. On peut voir à partir de la figure que pour un β positif, la bosse de la densité est située sur la gauche tandis qu'on a une queue épaisse sur la droite. Quand β est négatif, on a le comportement contraire.

En figure 4.4, nous avons simulé des trajectoires de processus de Lévy stables dont les accroissements possèdent les densités de la figure 4.3. Quand β est positif, des grands sauts positifs apparaissent souvent, alors que quand β est négatif, ce sont des grands sauts négatifs qui apparaissent. Gardons en mémoire ces quelques résultats qui permettront d'interpréter les probabilités de survie calculées plus loin. Les densités ont été obtenues par transformée de Fourier de la fonction caractéristique stable; les trajectoires ont été simulées selon la méthode préconisée par Samorodnitsky et Taqqu [113].

Les probabilités de survie pour les cas A et B (cf. table 4.2) sont comparées en figure 4.5. Ces valeurs ont été obtenues pour une réserve initiale u égale à 0.1 et une période variant de 0 à 0.8.

On peut observer en figure 4.5 que les probabilités de survie pour le cas

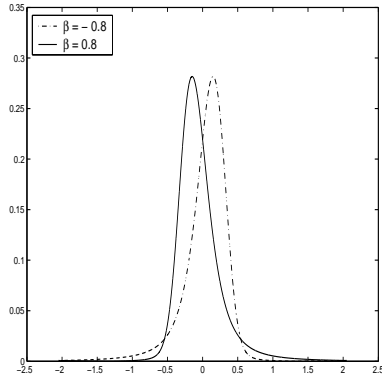


FIG. 4.3 – Densités stables ($\alpha = 1.5$)

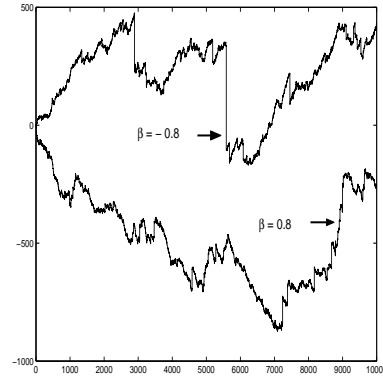


FIG. 4.4 – Trajectoires correspondantes

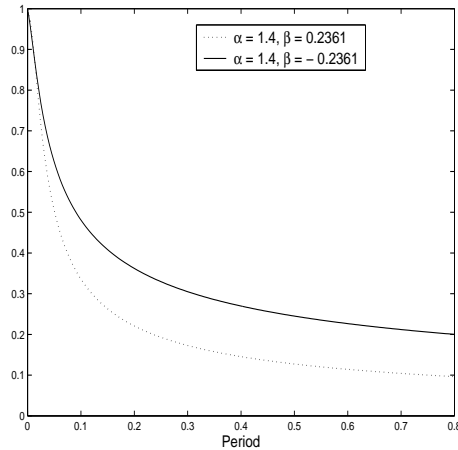


FIG. 4.5 – Probabilités de survie des cas A et B pour $u = 0.1$

B sont plus élevées que pour le cas A quand $u = 0.1$. Parce que nous sommes près de la barrière, les petits sauts ont une influence notable. Se rappeler que, d'après la figure 4.4, un β négatif correspond à un mouvement vers le haut perturbé par quelques grands sauts vers le bas. Ainsi, puisque nous sommes près de la barrière, ce type de processus est moins susceptible de provoquer la ruine qu'un processus "rampant" vers le bas avec un β positif. Cela explique donc pourquoi les probabilités de survie du cas B ($\beta = -0.2361$) sont plus élevées que celles du cas A ($\beta = 0.2361$).

Que se passe t'il si l'on considère des niveaux de réserve plus élevés, c'est-à-dire si l'on se situe initialement plus loin du niveau de ruine? Nous prenons désormais une réserve initiale u égale à 5 et représentons les probabilités de survie correspondantes en figure 4.6.

Sur une courte échelle de temps, la ruine est essentiellement susceptible de se produire dû à la survenance d'un grand saut vers le bas - c'est-à-dire d'un grand sinistre. Ceci est la raison pour laquelle on observe d'abord un comportement opposé à celui de la figure 4.5 : les probabilités de survie, sur un court horizon, sont plus faibles quand β est négatif.

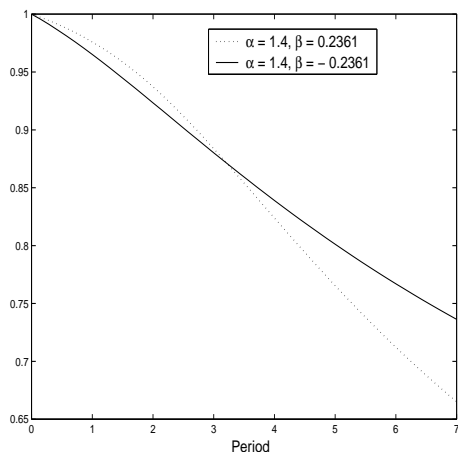


FIG. 4.6 – Probabilités de survie des cas A et B pour $u = 5$

Ensuite, pour une échelle de temps plus grande, les deux courbes se croisent et l'on retrouve le comportement de la figure 4.5. Les grands sauts négatifs ne sont plus alors les principaux déterminants de la ruine. Remarquer que quand u augmente, le point de croisement des courbes est décalé vers la droite et la durée pour laquelle les probabilités de survie sont plus grandes pour β positif est plus grande.

4.6.2 Résultats à Horizon Infini

Dans le modèle proposé ici, les processus de Lévy stables considérés sont sans dérive. De fait, si l'on étudie une grande compagnie d'assurance possédant de nombreuses activités et si son portefeuille d'actifs est également inclus dans le processus de risque, il n'est pas réaliste de modéliser ses *cashs flows* positifs par une simple dérive.

Dans notre modèle, les sauts vers le haut (bas) du processus de risque correspondent directement aux *cashs flows* positifs (négatifs) reçus (perçus) par l'entreprise d'assurance.

Par ailleurs, il semble loin d'être certain qu'une compagnie d'assurance puisse *imposer* une dérive à son processus de risque ou que ce processus en possède une de manière intrinsèque. L'idée d'un rendement sans risque fait certes partie de la construction de la théorie financière et des concepts les plus admis. Cependant, en matière d'assurance, il convient de ne pas oublier qu'un portefeuille d'assurés ne peut pas être assimilé à un actif financier partie intégrante d'un "marché". Ainsi, même s'il paraît séduisant de postuler une dérive au sein du processus de risque (correspondant de manière minimaliste à un rendement de marché), nous pensons plutôt que ne pas postuler de dérive est une précaution nécessaire - d'ailleurs prendre des précautions n'est-il pas l'essence même de la gestion du risque et notamment du métier d'assureur?

Attention, l'absence de dérive ne signifie pas que le processus de risque visite aussi souvent les valeurs négatives que les valeurs positives ! De même cela ne signifie pas que les distributions sous-jacentes soient symétriques (voir la figure 4.3) : il est ainsi possible de modéliser le processus de risque de manière réaliste par un processus ne présentant pas de dérive.

Les processus de Lévy stables possédant un paramètre de queue α strictement supérieur à un, comme c'est le cas de ceux considérés ici, sont récurrents donc oscillants (voir les annexes du premier chapitre). Leur comportement à l'infini implique un résultat original pour les probabilités de ruine à horizon infini : elles sont égales à un.

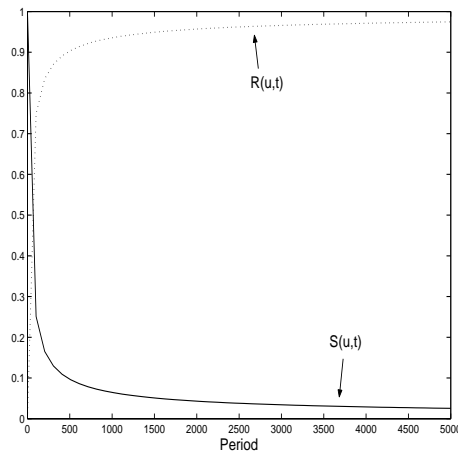


FIG. 4.7 – Probabilités de ruine et de survie ($u = 5$)

En figure 4.7 sont représentées les probabilités de ruine et de survie dans le cas A en fonction du temps. Nous observons que la probabilité de ruine

tend vers un et la probabilité de survie vers zéro quand l'horizon devient infini, comme annoncé précédemment. Cet aspect théorique ne semble pas très optimiste, mais les faits empiriques sont-ils tout autres? Sur toutes les compagnies d'assurance créées depuis le début du dix-neuvième siècle, combien sont encore aujourd'hui en activité? Et combien de celles qui ont subsisté seront encore en activité dans cinq siècles? La certitude de la ruine ou d'un tout autre évènement conduisant à l'inexistence de l'entreprise dans une éternité ne semble pas déraisonnable et n'est en tout cas pas une contrainte pour la gestion quotidienne de la firme. Ce dont un manager doit être préoccupé avant tout, c'est de la probabilité de ruine à horizon un, dix voire vingt ans. A supposer, ce que nous ne faisons pas, qu'une entreprise puisse exister pendant des millénaires, la meilleure façon d'assurer sa pérennité n'est-elle d'ailleurs pas déjà de mener une bonne gestion à "court" terme, c'est-à-dire à horizon humain?

Le modèle que nous proposons ne permet pas seulement de calculer des probabilités de ruine et de survie à horizon fini pour un processus de risque assez général représenté par un processus de Lévy stable; il apporte également une remise en cause de la théorie de la ruine classique selon laquelle les probabilités de survie ne sont pas nulles à horizon infini.

4.6.3 Lien avec la Théorie Financière du Défaut

Nous en venons maintenant à l'emploi des probabilités de ruine en théorie du défaut. De fait, il y a identité entre probabilité de ruine et probabilité de défaut; dans les deux cas il s'agit de donner un poids à l'évènement "la compagnie fait faillite" qui est exprimé de manière plus précise comme "le processus de risque considéré a franchi le seuil de faillite". Les probabilités de ruine calculées dans ce chapitre peuvent donc être d'intérêt dans une théorie structurelle du défaut telle que celle construite au précédent chapitre. Pour un point de vue général sur les probabilités de défaut, voir le récent document de recherche de Leland [80] qui fait le point sur les modèles de Leland et Toft et de Longstaff et Schwartz.

Nous représentons en figure (4.8) les probabilité de ruine ou défaut correspondant à un processus de risque de type Lévy stable (cas A envisagé plus haut) pour un horizon tendant vers zéro. Nous observons qu'alors ces probabilités tendent vers zéro: pour un horizon infiniment petit, les probabilités de défaut, *même en présence de sauts*, sont nulles. Quelle est donc la différence avec un modèle diffusif? En effet, des probabilités de défaut nulles aux courts horizons sembleraient impliquer la nullité des marges de crédit sur ces mêmes horizons. Nous avons qu'il n'en était rien et pour cause: il existe une différence fondamentale entre les modèles diffusifs et les modèles à

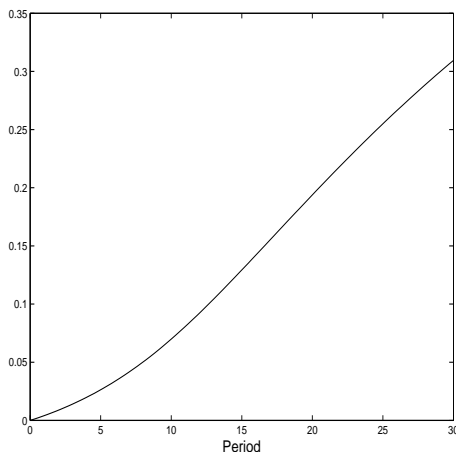


FIG. 4.8 – *Probabilités de ruine ($u = 5$)*

sauts qui est la vitesse à laquelle la probabilité de ruine s’annule quand l’horizon considéré rétrécit. Pour un processus de risque de type Lévy stable, la décroissance est du type fonction puissance et cela est suffisant pour induire des marges de crédit non nulles. De fait, la survenance d’un évènement de faillite est toujours assez probable pour qu’une prime de risque conséquente - une marge de crédit non nulle - soit à prendre en compte.

4.7 Conclusion

Nous avons d’abord rappelé les résultats fondamentaux de la théorie de la ruine des assurances. Cette théorie, qui s’est développé en parallèle de la théorie financière, est fondée traditionnellement sur la description des réserves d’une compagnie d’assurance par le biais de processus de Poisson composés. Contrairement à la théorie financière elle s’attache donc dès le départ à décrire des comportements heurtés par une modélisation à sauts.

Nous avons ensuite détaillé les approches perturbatives ou mixtes qui, à l’instar du modèle de Merton [94] de 1976, apportent une modélisation corrigée par un processus qui intervient en tant que représentation d’un bruit, d’une incertitude - si ce n’est qu’en assurance c’est la diffusion qui est, avec Gerber [56], la correction.

Ces approches marquent une étape intermédiaire importante vers une modélisation directe du processus de risque par un processus de Lévy. C’est ce type de modélisation que nous explicitons alors, mais nous remarquons qu’il n’existe pas aujourd’hui de théorie permettant d’estimer les probabilités

de ruine et de survie pour un processus de risque représenté par un processus de Lévy quelconque.

En particulier, une hypothèse standard de la théorie de la ruine qui a été conservée jusqu'à aujourd'hui nous a semblé fort discutable. Selon cette hypothèse, il existerait des "bons" processus de risque, ceux dérivant vers l'infini positif aux horizons infinis. Autrement dit, une compagnie d'assurance qui aurait survécu les premières années de son existence, serait ensuite quasiment assurée de ne pas faire faillite.

Nous proposons alors un nouveau type de modélisation du processus de risque : nous reprenons la représentation par processus de Lévy stable du précédent chapitre. De nouveau, nous faisons appel aux résultats obtenus par Doney [39] et menons les calculs de ruine par le biais de transformées de Laplace inverses doubles. Nous pensons que notre modélisation est plus réaliste justement parce qu'elle ne postule pas l'hypothèse précitée : les processus de Lévy stables considérés sont oscillants à l'infini, ce qui signifie que la ruine aura lieu tôt ou tard. Les probabilités de ruine à horizon infini de ce modèle sont donc égales à un. Il nous paraît raisonnable d'affirmer que toute compagnie connaîtra à un instant ou à un autre un événement de défaut.

En conclusion, ce chapitre s'inscrit dans la littérature actuelle en ce qu'il montre que la théorie financière et la théorie actuarielle sont extrêmement proches, si ce n'est complètement analogues. Modélisation d'une grandeur discriminante par un processus général à saut, importance des seuils, identité des outils telle que la transformée de Laplace inverse, sont des éléments allant dans ce sens.

Conclusion Générale

The purpose of models is not to fit the data but to sharpen the questions.

Samuel Karlin

Nous avons dans cette thèse proposé un point de vue général sur la prise en compte des événements informatifs par les acteurs de marchés, gestionnaires et dirigeants. Nous nous sommes particulièrement intéressés aux perceptions des agents et avons traduit leurs actions par des ruptures ou sauts portant sur les données financières considérées. De la même manière, nous avons supposé que leur représentation des dynamiques admet le plus souvent un caractère heurté. Nous avons donc proposé une synthèse qui s'articule autour des idées de perception et de rupture, où les aspects de finance de marché et de finance d'entreprise ont été abordés successivement dans les deux parties de la thèse.

Nous sommes partis de la représentation par mouvement brownien classiquement adoptée en finance et avons détaillé les extensions récentes qui permettent d'exprimer les dynamiques des rendements d'action par des processus de Lévy. La classe de ces processus à sauts est particulièrement intéressante en ce qu'elle fournit un moyen réaliste pour modéliser l'évolution des actifs ou de leurs rendements, et apporte un cadre pour l'évaluation des produits dérivés. Nous avons proposé un nouveau modèle pour représenter les cours d'action fondé sur une analyse des perceptions des investisseurs. Nous avons ainsi postulé que ceux-ci ont une représentation des cours, ou de leurs écarts de valeur, correspondant à une échelle de niveaux. A des informations variées correspondent des écarts de prix qui sont localisés le long de ces niveaux. Ces écarts de prix sont fonction de l'importance, du point de vue des acteurs, des informations survenues. Nous avons construit des pro-

cessus de Lévy rendant compte de ce mode de représentation. Au-delà de la simple modélisation des cours d'actions, l'évaluation des produits dérivés est possible dans ce cadre. Le modèle proposé est également intéressant parce qu'il permet d'obtenir des distributions de rendement bossées et différentes en fonction de l'horizon temporel envisagé. Ceci est en total contraste avec les modélisations fractales proposées par Mandelbrot et pour lesquelles des distributions identiques sont postulées à toute échelle de temps. Nous avons détaillé l'évaluation des produits dérivés portant sur des sous-jacents modélisés au moyen de processus à sauts. Cette évaluation peut se faire en ayant recours aux transformées d'Esscher qui sont une des méthodes les plus classiques de la théorie des assurances. Il s'agit d'un des nombreux exemples où des convergences entre les théories financières et actuarielles peuvent s'avérer utiles.

Nous nous sommes alors intéressés à une théorie financière elle-aussi porteuse de convergences avec l'assurance: la théorie du défaut. Partant d'un examen des questions de structure optimale et d'agence, nous avons proposé un nouveau modèle qui permet d'étendre le cadre de Leland et Toft par la représentation des actifs comme un processus de Lévy stable. Ces développements théoriques sont fortement liés aux questions et résultats empiriques notamment parce qu'ils font un lien entre la finance de marché et la finance d'entreprise en permettant une évaluation des marges de crédit des obligations fondée sur une approche endogène de la firme. Le modèle proposé ici permet ainsi de retrouver les traits caractéristiques empiriques des marges de crédit, notamment aux courtes échelles de temps. Au-delà d'une simple modélisation, nous avons souhaité initier une réflexion sur la prise en compte des perceptions, distinctes, des divers acteurs intervenant dans la gestion de l'entreprise et l'évaluation de ses dettes et fonds propres. Il est certes couramment admis qu'il existe des asymétries entre les agents, cependant ces asymétries n'ont pas été jusqu'à présent prises en considération dans la perspective de la construction d'un modèle structurel de défaut. Une des idées principales sur lesquelles nous nous appuyons est que les dirigeants ne mènent pas une politique en fonction des dynamiques mais en fonction de leurs perceptions et de la traduction de ces perceptions en termes de représentations des dynamiques. A des perceptions et représentations distinctes doivent donc correspondre des actions différentes.

La théorie classique du défaut définit l'évènement faillite à travers l'atteinte ou le franchissement d'un seuil donné (par exemple le montant facial de la dette) par le processus des actifs. Dans ce sens, elle est intimement proche de la théorie de la ruine des compagnies d'assurance. La théorie de la ruine, que nous décrivons dans ce travail, vise ainsi à détailler le franchissement d'un seuil critique par le processus des réserves d'une compagnie d'assurance. La convergence entre le défaut et la ruine en assurance est d'autant

plus forte que les dynamiques sous-jacentes sont désormais représentées de manière similaire au moyen de processus de Lévy quasi-généraux. Nous avons réemployé le formalisme développé en finance pour l'appliquer en théorie de la ruine. Ce faisant, nous avons mis de côté un des paradigmes fondateurs de la théorie de la ruine qui exprime que les réserves devraient de manière asymptotique partir à l'infini quand l'horizon devient infini. Selon ce paradigme, si la ruine ne survient pas au cours des prochaines années, alors il est extrêmement peu probable qu'elle survienne plus tard. Nous ne pensons pas que cela soit réaliste et avons postulé que c'est le contraire qui arrive : tôt ou tard (même si c'est dans quelques siècles), une compagnie quelconque devrait connaître un évènement de faillite - et cela peut être conçu au sens large d'une restructuration, d'un démembrement ou d'un rachat.

Les idées qui guident cette thèse sont donc celles de rupture ou saut, seuil, perception et intégration des théories actuarielles et financières. Les processus à sauts sont désormais des modes de représentation courants en finance; ils l'ont toujours été en assurance. L'idée de seuil est également très présente au sein de ces théories, mais de manière souvent non explicite. L'idée d'un risque de seuil n'a pas encore émergé; pourtant, nombreux sont les arguments soutenant cette idée: les seuils sont fondamentaux en théorie du défaut et de la ruine, mais également en finance de marché où de nombreux produits optionnels (options à barrière, options parisiennes) sont spécifiés en termes de niveaux. Par ailleurs, les seuils, pris dans le sens de seuils psychologiques, interviennent dans toute politique de gestion. Le modèle de représentation des cours proposé au début de cette thèse en est une illustration. On peut ainsi penser qu'un investisseur ou un gérant initiera ou non une action suite au franchissement, par une grandeur qu'il surveille, d'un seuil qui lui est propre. L'idée de perception a quant à elle été peu prise en compte dans les modélisations actuarielles et financières. Nous insistons sur le fait qu'il ne faut pas confondre un objet, la façon dont il est perçu, et la façon dont il est représenté. Enfin, l'idée d'intégration des théories actuarielles et financières est une idée qui semble de plus en plus naturelle à la communauté scientifique, et pour cause: les convergences et similarités sont nombreuses. Là encore, il convient de faire la part des choses: ce n'est pas parce que ces théories partagent de nombreux déterminants communs qu'elles sont strictement identiques.

Les extensions possibles à cette thèse sont plurielles. La question de l'importance de la prise en compte des perceptions des agents mérite à notre sens d'être prolongée. Par ailleurs, il reste encore, comme le remarque Leland dans un de ses récents documents de recherche, à construire une théorie générale unifiant les points de vue de Modigliani et Miller et de Jensen et Meckling. Autrement dit, les questions de la structure financière optimale et de l'agence méritent d'être encore plus approfondies et intégrées. La seconde

partie de cette thèse a fait un emploi extensif des processus de Lévy stables. L'hypothèse de stabilité n'était qu'une hypothèse de commodité permettant de mener les calculs. Lever cette hypothèse ne semble pas sans difficulté mais permettrait de développer des modélisations plus générales et moins contraintes. En particulier, en théorie de la ruine, la condition de stabilité n'est pas nécessaire : on peut très bien supposer des réserves qui ne présentent pas ce caractère et pourtant provoquent la ruine à coup sûr - lorsque l'horizon considéré est infini. Enfin, si notre modèle du chapitre 3 permet bien de retrouver des valeurs réalistes de marges de crédit, il ne faut pas oublier que les marges de crédit réelles incorporent au moins deux effets : défaut et liquidité. Il conviendrait donc, au delà de la prise en compte du risque de défaut, de pouvoir faire intervenir le risque de liquidité. Une modélisation plus affinée des taux d'intérêt serait également intéressante. Nous voyons ici toute la difficulté d'une modélisation structurelle de la firme : les grandeurs qui interviennent sont excessivement nombreuses et leur interaction n'est pas triviale. Pour autant, cela ne doit pas être un frein à une compréhension plus profonde de la firme. Dans ce cas, comme dans les autres, la poursuite de la recherche est non seulement utile mais également souhaitable.

Bibliographie

- [1] J. ABATE and W. WHITT. Numerical Inversion of Laplace Transforms of Probability Distributions. *ORSA Journal of Computing*, 7:36–43, 1995.
- [2] M. ABRAMOWITZ and I. A. STEGUN. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 1970.
- [3] W. APPEL. *Mathématiques pour la Physique et les Physiciens*. H and K Editions, 2002.
- [4] S. ASMUSSEN. *Ruin Probabilities*. World Scientific, 2001.
- [5] J.-C. AUGROS. *Finance, Options et obligations convertibles*. Ellipses, 1987.
- [6] L. BACHELIER. *Théorie de la Spéculation*. Thèse d’Etat, Faculté des Sciences de Paris, 1900.
- [7] I. BAJEUX-BESNAINOU and R. PORTAIT. The Numéraire Portfolio: a New Perspective on Financial Theory. *The European Journal of Finance*, 3:291–309, 1997.
- [8] O. E. BARNDORFF-NIELSEN. Normal Inverse Gaussian Distributions and Stochastic Volatility Modelling. *Scandinavian Journal of Statistics*, 1997.
- [9] O. E. BARNDORFF-NIELSEN. Processes of Normal Inverse Gaussian Type. *Finance and Stochastics*, 1998.
- [10] L. BELKACEM. *Processus Stables et Applications en Finance*. PhD thesis, Université Paris IX, 1996.
- [11] C. BERNARD, O. LE COURTOIS, and F. QUITTARD-PINON. A Study of the Mutual Insurance of Bank Deposits. *Working Paper*, 2003.
- [12] C. BERNARD, O. LE COURTOIS, and F. QUITTARD-PINON. Evaluation Numérique des Options Parisiennes. *A paraître dans Banques & Marchés*, 2004.
- [13] J. BERTOIN. *Lévy Processes*. Cambridge University Press, 1998.
- [14] T.R. BIELECKI and M. RUTKOWSKI. *Credit Risk: Modelling, Valuation and Hedging*. Springer-Verlag, 2002.
- [15] N.H. BINGHAM. Fluctuation Theory in Continuous Time. *Advanced Applied Probability*, 1975.

- [16] F. BLACK and J.C. COX. Valuing Corporate Securities: some Effects of Bond Indenture Provisions. *Journal of Finance*, 31(2):351–367, 1976.
- [17] F. BLACK and M. SCHOLES. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 1973.
- [18] J.-P. BOUCHAUD and M. POTTERS. *Theory of Financial Risks*. Cambridge University Press, 2001.
- [19] S. I. BOYARCHENKO and S. Z. LEVENDORSKII. *Non-Gaussian Merton-Black-Scholes Theory*. World Scientific, 2003.
- [20] A. BRACE, D. GATAREK, and M. MUSIELA. The Market Model of Interest Rate Dynamics. *Mathematical Finance*, 1997.
- [21] M. J. BRENNAN and E. S. SCHWARTZ. Corporate Income Taxes, Valuation, and the Problem of Optimal Capital Structure. *Journal of Business*, 51(1):103–114, 1978.
- [22] P. CARR, E .C. CHANG, and D. B. MADAN. The Variance Gamma Process and Option Pricing. *European Finance Review*, 1998.
- [23] P. CARR, H. GEMAN, D. B. MADAN, and M. YOR. The Fine Structure of Asset Returns: An Empirical Investigation. *Journal of Business*, 2002.
- [24] P. CARR, H. GEMAN, D. B. MADAN, and M. YOR. Stochastic Volatility for Lévy Processes. *Mathematical Finance*, 2003.
- [25] P. CARR and D. B. MADAN. Option Valuation using the Fast Fourier Transform. *Journal of Computational Finance*, 2:61–73, 1998.
- [26] P. CARR and L. WU. Time-Changed Lévy Processes and Option Pricing. *Working Paper*, 2002.
- [27] P. CARR and L. WU. The Finite Moment Log Stable Process and Option Pricing. *The Journal of Finance*, 2:753–777, 2003.
- [28] T. CHAN. Pricing Contingent Claims on Stocks Driven by Lévy Processes. *The Annals of Applied Probability*, 1999.
- [29] G. CHARREAUX. *Finance d’Entreprise*. Editions Management et Société, 2000.
- [30] G. CHARREAUX and P. DESBRIÈRES. Corporate Governance: Stakeholder Value Versus Shareholder Value. *Journal of Management and Governance*, 5:107–128, 2001.
- [31] M. CHESNEY, M. JEANBLANC, and M. YOR. Brownian Excursions and Parisian Barrier Options. *Advances in Applied Probability*, 29:165–184, 1997.
- [32] P. COLLIN-DUFRESNE and R.S. GOLDSTEIN. Do Credit Spreads Reflect Stationary Leverage Ratios. *Journal of Finance*, 2001.
- [33] R. CONT. Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues. *Quantitative Finance*, 2001.
- [34] D. COSSIN and H. PIROTTE. *Advanced Credit Risk Analysis*. Wiley and Sons, 2001.

- [35] H. CRAMER. *On the Mathematical Theory of Risk*. Skandia Jubilee Volume, Stockholm, 1930.
- [36] R.A. DANA and M. JEANBLANC. *Marchés financiers en temps continu, valorisation et équilibre*. Economica, 1998.
- [37] D. A. DARLING. The Maximum of Sums of Stable Random Variables. *Transactions of the American Mathematical Society*, 83:164–169, 1956.
- [38] H. DE LA BRUSLERIE. *Analyse Financière*. Dunod, 2002.
- [39] R. A. DONEY. On Wiener-Hopf Factorisation and the Distribution of Extrema for Certain Stable Processes. *The Annals of Probability*, 15(4):1352–1362, 1987.
- [40] D. DUFFIE. *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press, 1992.
- [41] F. DUFRESNE and H. U. GERBER. Three Methods to Calculate the Probability of Ruin. *ASTIN Bulletin*, 19(1):71–90, 1989.
- [42] F. DUFRESNE and H. U. GERBER. Risk Theory for the Compound Poisson Process that is Perturbed by Diffusion. *Insurance: Mathematics and Economics*, 10:51–59, 1991.
- [43] F. DUFRESNE, H. U. GERBER, and E. W. SHIU. Risk Theory with the Gamma Process. *Astin Bulletin*, 1991.
- [44] E. EBERLEIN and U. KELLER. Hyperbolic Distributions in Finance. *Bernoulli* 1, 1995.
- [45] E. EBERLEIN, U. KELLER, and K. PRAUSE. New Insights into Smile, Mispricing and Value at Risk: the Hyperbolic Model. *Journal of Business*, 1998.
- [46] E. EBERLEIN and S. RAIBLE. Term Structure Models Driven by General Lévy Processes. *Mathematical Finance*, 1999.
- [47] P. EMBRECHTS, C. KLUPPELBERG, and T. MIKOSCH. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
- [48] P. FRANÇOIS. *Applications of Option Theory to the Analysis of Debt Contracts*. PhD thesis, Sorbonne, Paris, 1999.
- [49] M. FU, D. MADAN, and T. WANG. Pricing Continuous Asian Options: a Comparison of Monte-Carlo and Laplace Transform Inversion Methods. *The Journal of Computational Finance*, 2(2), 1999.
- [50] H. FURRER. *Risk Theory and Heavy-Tailed Lévy Processes*. PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, 1997.
- [51] H. FURRER. Risk Processes Perturbed by α -stable Lévy Motion. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1:59–74, 1998.
- [52] H. GEMAN, N. EL KAROUI, and J. C. ROCHET. Changes of numéraire, changes of probability measure and option pricing. *Journal of Applied Probability*, 32:443–458, 1995.
- [53] H. GEMAN, D. B. MADAN, and M. YOR. Time Changes for Lévy Processes. *Mathematical Finance*, 11(1):79–96, 2001.

- [54] H. GEMAN and M. YOR. Bessel Processes, Asian Options, and Perpetuities. *Mathematical Finance*, 3:349–375, 1993.
- [55] H. GERBER and E. S. SHIU. Option pricing by esscher transforms. *Transactions of the society of actuaries*, 1994.
- [56] H. U. GERBER. An Extension of the Renewal Equation and its Application in the Collective Theory of Risk. *Scandinavian Actuarial Journal*, pages 205–210, 1970.
- [57] H.-U. GERBER. *Introduction to mathematical risk theory*. Richard Irwin, 1979.
- [58] R. GOFFIN. *Principes de Finance Moderne*. Economica, 1999.
- [59] D. HEATH, R. JARROW, and A. MORTON. Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation. *Econometrica*, 60:77–106, 1992.
- [60] S. L. HESTON. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *The Review of Financial Studies*, 1993.
- [61] B. HILBERINK and L.C.G. ROGERS. Optimal Capital Structure and Endogenous Default. *Finance and Stochastics*, 2002.
- [62] J. C. HULL. *Options, Futures and Other Derivatives*. Prentice Hall, 2000.
- [63] J. JACOD and A. N. SHIRYAEV. *Limit Theorems for Stochastic processes*. Springer-Verlag, 1987.
- [64] F. JAMSHIDIAN. An Exact Bond Option Pricing Formula. *The Journal of Finance*, 44:205–209, 1989.
- [65] A. JANICKI and A. WERON. *Simulation and Chaotic Behaviour of α -Stable Stochastic Processes*. Marcel Dekker, 1994.
- [66] M. C. JENSEN and W. H. MECKLING. Theory of the Firm: Managerial Behavior, Agency Costs and Ownership Structure. *Journal of Financial Economics*, 3:305–360, 1976.
- [67] M. C. JENSEN and W. H. MECKLING. The Nature of Man. *Journal of Applied Corporate Finance*, 7(2):4–19, 1994.
- [68] N. L. JOHNSON, S. KOTZ, and N. BALAKRISHNAN. *Continuous Univariate Distributions*, volume 1. Wiley and Sons, 1994.
- [69] I. KARATZAS and S. E. SHREVE. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, 1991.
- [70] C. KLÜPPELBERG, A. E. KYPRIANOU, and R. A. MALLER. Ruin Probabilities and Overshoots for General Lévy Insurance Risk Processes. *Working Paper*, 2003.
- [71] T. KURTZ, W. LAUTERBORN, and M. WIESENFELDT. *Optique Cohérente, Fondements et Applications*. Masson, 1997.
- [72] D. LAMBERTON and B. LAPEYRE. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipses, 1997.

- [73] O. LE COURTOIS. Modelling Stock Returns with Lévy Processes. *Banque & Marchés*, 2003.
- [74] O. LE COURTOIS and F. QUITTARD-PINON. The Capital Structure from the Point of View of Investors and Managers. *Working Paper*, 2003.
- [75] O. LE COURTOIS and F. QUITTARD-PINON. Changes of Probability Measures for Finance and Insurance. *A paraître dans Finance*, 2004.
- [76] O. LE COURTOIS and F. QUITTARD-PINON. Measures Changes for Finance. *A paraître dans Finance India*, 2004.
- [77] O. LE COURTOIS and R. RANDRIANARIVONY. An Analysis of Insurance Risk: Finite-Time Ruin and Survival Probabilities with Stable Lévy Processes. *Working Paper*, 2003.
- [78] H.E. LELAND. Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure. *Journal of Finance*, 49:1213–1252, 1994 a.
- [79] H.E. LELAND. Bond Prices, Yield Spreads, and Optimal Capital Structure with Default Risk. *Working Paper No. 240, IBER, University of California, Berkeley*, 1994 b.
- [80] H.E. LELAND. Predictions of Expected Default Frequencies in Structural Models of Debt. *Working Paper*, 2002.
- [81] H.E. LELAND and K. TOFT. Optimal Capital Structure, Endogenous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads. *Journal of Finance*, 51(3):987–1019, 1996.
- [82] J. B. LONG. The Numéraire Portfolio. *Journal of Financial Economics*, 26:29–69, 1990.
- [83] F.A. LONGSTAFF and E.S. SCHWARTZ. A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt. *Journal of Finance*, 1995.
- [84] F. LUNDBERG. *I Approximerad Framställning av Sannolikhetsfunktioner. II Aterförsäkring av Kollektivrisker*. Almqvist & Wiksell, Uppsala, 1903.
- [85] J. LÉVY VÉHEL and C. WALTER. *Les Marchés Fractals*. PUF, 2002.
- [86] D. B. MADAN and F. MILNE. Option Pricing with VG Martingale Components. *Mathematical Finance*, 1991.
- [87] D. B. MADAN and E. SENETA. The Variance Gamma (V.G.) Model for Share Market Returns. *Journal of Business*, 1990.
- [88] B. MANDELBROT. The Variation of Certain Speculative Prices. *Journal of Business*, 1963.
- [89] B. MANDELBROT. *Fractales, Hasard et Finance*. Flammarion, 1997.
- [90] R. N. MANTEGNA. Fast, Accurate Algorithm for Numerical Simulation of Lévy Stable Stochastic Processes. *Physical Review E*, 1994.
- [91] A. MATA CZ. Financial Modelling and Option Theory with the Truncated Lévy Process. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 1998.

- [92] P. MCGILL. Computing the Overshoot of a Lévy Process. *Stochastic Analysis, Path Integration, and Dynamics*, 200:165–196, 1989.
- [93] P. MCGILL. A Plug for Wiener-Hopf Methods. *PREPRINT*, 2003.
- [94] R. C. MERTON. Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 1976.
- [95] R.C. MERTON. Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economic and Management Science*, pages 141–183, 1973.
- [96] R.C. MERTON. On the Pricing of Corporate Debt: the Risk Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, pages 449–470, 1974.
- [97] M. MILLER and F. MODIGLIANI. Dividend Policy, Growth and the Valuation of Shares. *Journal of Business*, 1961.
- [98] F. MODIGLIANI and M. MILLER. The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment. *American Economic Review*, 1958.
- [99] F. MODIGLIANI and M. MILLER. Corporate Income Taxes and the Cost of Capital: A Correction. *American Economic Review*, 1963.
- [100] M. MORALES. *Generalized Risk Processes and Lévy Modeling in Risk Theory*. PhD thesis, Concordia University, Montreal, 2003.
- [101] E. MORELLEC. *Corporate Investment and Financing Decisions: A Contingent Claims Approach*. PhD thesis, HEC, Paris, 1999.
- [102] L. NGUYEN-NGOC and M. YOR. Exotic Options and Lévy Processes. *Working Paper*, 2003.
- [103] A. PAULSON, E. HOLCOMB, and R. LEITCH. The Estimation of the Parameters of the Stable Laws. *Biometrika*, 62(1):163–170, 1975.
- [104] P. PICARD. *Cours de DEA de Théorie de la Ruine, ISFA*. 1999.
- [105] R. PIESSENS. Some Aspects of Gaussian Quadrature Formulae for the Numerical Inversion of the Laplace Transform. *The Computer Journal*, 14(4):433–436, 1971.
- [106] K. PRAUSE. *The Generalized Hyperbolic Model: Estimation, Financial Derivatives, and Risk Measures*. PhD thesis, University of Freiburg, 1999.
- [107] J.-L. PRIGENT. *Weak Convergence of Financial Markets*. Springer-Verlag, 2003.
- [108] F. QUITTARD-PINON. *Marchés des Capitaux et Théorie Financière*. Ellipses, 2003.
- [109] S. RAIBLE. *Lévy processes in finance: theory, numerics and empirical facts*. PhD thesis, University of Freiburg, 2000.
- [110] D. REVUZ and M. YOR. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer-Verlag, 1994.
- [111] L. C. G. ROGERS. Evaluating First-Passage Probabilities for Spectrally One-Sided Lévy Processes. *Journal of Applied Probability*, 37:1173–1180, 2000.

- [112] T. ROLSKI, H. SCHMIDLI, V. SCHMIDT, and J. TEUGELS. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. Wiley, 2001.
- [113] G. SAMORODNITSKY and M. S. TAQQU. *Stable Non-Gaussian Random Processes*. Chapman and Hall, 1994.
- [114] P. A. SAMUELSON. Rational Theory of Warrant Pricing. *Industrial Management Review*, 6:13–31, 1965.
- [115] O. SARIG and A. WARGA. Some Empirical Estimates of the Risk Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, 44(5):1351–1360, 1989.
- [116] K. SATO. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, 1987.
- [117] W. SCHOUTENS. Meixner Processes In Finance. *Eurandom Report*, 2001-2002.
- [118] M. SCHRODER. Changes of Numéraire for Pricing Futures, Forwards, and Options. *The Review of Financial Studies*, 12(5):1143–1163, 1999.
- [119] J. VECER. A New PDE Approach for Pricing Arithmetic Average Asian Options. *The Journal of Computational Finance*, pages 105–113, 2001.
- [120] J. VECER. Unified Asian Pricing. *Risk*, pages 113–116, 2002.
- [121] J. VECER and M. XU. Pricing Asian Options in a Semimartingale Model. *Working Paper*, 2003.
- [122] N. VERAVERBEKE. Asymptotic Estimates for the Probability of Ruin in a Poisson Model with Diffusion. *Insurance: Mathematics and Economics*, 13:57–62, 1993.
- [123] V. VIGON. Votre Lévy Rampe-t’il? Un Critère Pratique pour le Savoir. *J. London Math. Soc.*, 2001.
- [124] C. WALTER. Lévy-Stability-Under-Addition and Fractal Structure of Markets: Implications for the Investment Management Industry and Emphasized Examination of MATIF Notional Contract. *Mathematical and Computer Modelling*, 1999.
- [125] C. WALTER. Le Phénomène Leptocurtique sur les Marchés Financiers. *Finance*, 2002.
- [126] W. T. WEEKS. Numerical Inversion of Laplace Transforms Using Laguerre Functions. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 13(3):419–426, 1966.
- [127] J. A. C. WEIDEMAN. Algorithms for Parameter Selection in the Weeks Method for Inverting the Laplace Transform. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 11:111–128, 1999.
- [128] V. M. ZOLOTAREV. The First Passage Time of a Level and the Behaviour at Infinity of a Class of Processes with Independent Increments. *Theory of Applied Probability*, 9:653–661, 1964.

Impact des Evènements Informatifs sur l'Activité Financière des Entreprises

Résumé: Cette thèse présente une étude de l'impact créé par l'arrivée d'informations sur les politiques de gestion menées par les acteurs de marché et les dirigeants. Dans un premier temps sont exposées les diverses représentations attachées aux cours d'actions et présentant des ruptures ou sauts; un nouveau modèle est proposé, construit à partir des seuils psychologiques des agents. L'évaluation des produits dérivés dans de tels cadres est alors développée et est une illustration de convergence entre la finance et l'assurance. Les questions de la structure financière et du risque de défaut de la firme sont ensuite abordées de manière innovante en tenant compte des perceptions asymétriques des différents acteurs : dirigeants et investisseurs. L'analyse que nous menons de ces questions est naturellement replacée dans le contexte de la théorie de l'agence. Liée à la problématique du défaut financier est la question de la ruine des compagnies d'assurance que nous traitons sous un angle nouveau.

Mots-clés: perceptions des agents, seuils, processus de Lévy, produits dérivés, défaut, structure, ruine, théorie de l'agence.

Impact of Informative Events on the Firm Activities

Summary: The purpose of this thesis is to study the impact related to the arrival of financial information on management policies led by market participants and executives. We first detail the various representations attached to stock prices and displaying jumps; a new model is proposed, built on the psychological thresholds of agents. The valuation of derivatives in such frameworks is then developed and is the instance of a convergence between finance and insurance. The issues of capital structure and default risk are studied in an innovative fashion by taking into account the asymmetrical perceptions of agents - managers and investors. The analysis we make of these issues fits well with the context of agency theory. Linked to the question of default is the one of insurance ruin, which we treat along the lines of a new paradigm.

Key-words: agent perceptions, thresholds, Lévy processes, derivatives, default, structure, ruin, agency costs.