Technische Universität München

Zentrum Mathematik

Ein stochastisches Modell zur Ertragsoptimierung eines Sachversicherers

Diplomarbeit

von

Claudia Garschhammer

Themensteller:	Prof. Dr. Rudi Zagst
Betreuer:	Prof. Dr. Rudi Zagst
	Börge Thiel (ARAG LV)
Abgabetermin:	15. Juli 2003

Hiermit erkläre ich, dass ich die Diplomarbeit selbstständig angefertigt und nur die angegebenen Quellen verwendet habe.

München, 15. Juli 2003

Danksagung

Diese Diplomarbeit wurde mit freundlicher Unterstützung der ARAG Lebensversicherung in München angefertigt. Dabei gilt mein besonderer Dank Herrn Börge Thiel, der mir stets geduldig und fachkundig bei Problemen zur Seite stand. Des weiteren möchte ich mich sehr herzlich bei Herrn Professor Rudi Zagst für die hilfreiche Betreuung bedanken.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

„All of life is management of risk, not its elimination.“
(Walter Wriston, former chairman of Citicorp)

1.1 Problemstellung

Die aktuelle Situation auf dem deutschen Sachversicherungsmarkt ist gekennzeichnet durch steigende Risikopotentiale und Globalisierung. Zu den Unternehmensrisiken zählen z.B die immer häufiger auftretenden Umweltkatastrophen, wie die Hochwasserkatastrophe im Sommer 2002[1] oder die verstärkte Terrorgefahr (Stichwort 11. September 2001). Die sinkenden Zinsen und der Kursverfall auf den Aktienmärkten treffen die Versicherungsunternehmen als Kapitalanleger schwer. Folglich steigen die Anforderungen an ein geeignetes Risikomanagement der Versicherungsunternehmen. Durch Einführung des KonTraG (Gesetz zur Kontrolle und Transparenz im Unternehmensbereich) als zentrales Regelwerk am 1. Mai 1998 wurde auch vom Gesetzgeber die Anforderung an ein qualifiziertes Risikomanagement forciert. Die Einführung eines praxisorientierten Risikomanagement-Systems ist somit unerlässlich. Unter **Risiko** versteht man nach [Rus, S. 9] „[...] das Informationsdefizit über die zukünftige Erfüllung von gesetzten Erwartungen eines Subjekts an ein Objekt.“
Betrachten wir diese Definition etwas genauer. Ungewissheit herrscht über den Zeitpunkt, den Ort oder die Ausprägung eines oder mehrerer künftiger Ereignisse. Positive Abweichungen vom Erwartungswert stellen für das Unternehmen Chancen dar, negative Abweichungen bedeuten Gefahr oder Verlust und können letztendlich auch die Existenz des Unternehmens gefährden. Subjekte sind dabei verschiedene Personen (Versicherungsnehmer, Vorstand, Aktionär) oder auch Gruppen (z.B. BAV). Da jedes Subjekt Risiko unterschiedlich bewertet, ist dieser Begriff stark vom Betrachter abhängig. Das betrachtete Objekt ist in unserem Fall die Unternehmensrendite.

Aufgrund fehlender Information ist eine exakte Bestimmung zukünftiger Ausgänge wirt-

[1] Vergleiche [Mü]

schaftlicher Aktivitäten zum heutigen Zeitpunkt nur schwer möglich und wird deshalb durch Zufallsvariablen modelliert. Die entscheidende ökonomische Größe ist die Rendite eines Versicherungsunternehmens. Die erwartete Rendite wird mit Ertrag bezeichnet, die Streuung um den Erwartungswert ist das Risiko. In dieser Arbeit wird ein stochastisches Modell zur Optimierung des Unternehmensertrags für ein Sachversicherungsunternehmen entwickelt.

1.2 Struktur der vorliegenden Arbeit

Nach einer kurzen Einführung der bedingten Erwartung als wichtige mathematische Grundlage in Kapitel 2 werden in Kapitel 3 die versicherungstechnischen Grundlagen erläutert. Dabei spielt der Ausgleich im Kollektiv eine entscheidende Rolle für das Funktionieren einer Versicherung. Die Einnahme einer festen Prämie soll die ungewissen Kosten, die für gezeichnete Risiken fällig werden, abdecken. Um dies sicherzustellen, setzt sich die Prämie aus dem erwarteten Schaden plus einem Sicherheitszuschlag zusammen. Nach Einführung des Kovarianzprinzips als stabile und faire Aufteilung eines Kapitalbetrags unter Normalverteilungsannahme werden drei mögliche Gesamtschadenverteilungen vorgestellt. Mit kurzen Einführungen in die Themenbereiche Rückversicherung, Spätschadenreserven, Anlagekapital, sowie in rechtliche und institutionelle Rahmenbedingungen wird dieses Kapitel abgeschlossen.

Kapitel 4 umfasst mit der Entwicklung eines stochastischen Modells, das Risiken aus den Bereichen Versicherungstechnik (Zeichnung, Spätschäden) und Kapitalanlagen abdeckt, den Hauptteil dieser Arbeit. Vorbereitend werden in einer vereinfachten Version nur die Schäden zur eingenommenen Prämie in Relation gesetzt und grundlegende Begriffe eingeführt. Angenommen, das Unternehmenskapital ist nicht gegeben, so lässt sich ein formaler Zusammenhang zwischen Unternehmensrisiko und -ertrag herleiten. Unter Annahme einer quadratischen Nutzenfunktion kann man mittels Rückversicherung den Erwartungsnutzen maximieren. Im weiteren Verlauf wird die Spätschadenreserve genauer betrachtet. In diesem Bereich werden die noch ausstehenden Zahlungen der vorhandenen Spätschadenreserve gegenübergestellt. Schließlich wird mit einer Optimierung des Verhältnisses risikobehaftete Assets zu risikoloser Anlage und der Rückversicherungsquote das Modell vervollständigt.
Kapitel 5 widmet sich einer praktischen Anwendung des in Kapitel 4 entwickelten Unternehmensmodells.

Kapitel 2

Mathematische Grundlagen - die bedingte Erwartung

Die üblichen stochastischen Grundbegriffe (vgl. z.B. [Sch98]) wie Messbarkeit, Wahrscheinlichkeitsraum, Zufallsvariable usw., sowie die damit verbundenen gebräuchlichen Sätze werden als bekannt vorausgesetzt. Ebenso werden die in der Stochastik gewohnten Bezeichnungen verwendet, z.B. bezeichnet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ den Wahrscheinlichkeitsraum. Des weiteren bezeichnen Großbuchstaben Zufallsvariablen und Kleinbuchstaben die zugehörigen Realisierungen. Das Ende von Beweisen, Definitionen, Annahmen usw. wird mit $\blacksquare$ gekennzeichnet.

In Kapitel 4 werden Risiken unter Berücksichtigung der bekannten Information über das jeweilige Risiko geschätzt. Dies bedeutet, dass man den Erwartungswert des Risikos bildet, unter der Bedingung, dass eine gewisse Menge an Information bzgl. des Risikos bekannt ist. In diesem Abschnitt werden daher eine Definition von bedingter Erwartung sowie einige Eigenschaften angegeben. Eine ausführlichere Darstellung dieser Ergebnisse findet sich z.B. in [Zag02, Kapitel 2] sowie [Wil91, Kapitel 9,10].

Problemstellung:
Sei X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $E(|X|) < \infty$ (d.h. $X \in \mathcal{L}^1)^2$. Den Erwartungswert $E[X]$ können wir als Prognosewert für den a priori unbekannten, vom Zufall abhängigen Wert $X = X(\omega)$ auffassen.
Sei $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t \ldots \subseteq \mathcal{F}$ eine aufsteigende Folge von σ - Algebren. Wir kennen nun den Fall $\omega \in \Omega$ insoweit, als wir für jedes $A_t \in \mathcal{F}_t$ wissen, dass $\omega \in A_t$ oder $\omega \notin A_t$, d.h. ob das Ereignis A_t eingetreten ist oder nicht.
Die σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ stellt also den Informationsstand zum Zeitpunkt t dar und $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ den Informationsfluss bezüglich der Zeit. Totale Information wird mit $\mathcal{F}$ bezeichnet. Die Unter-σ-Algebren $\mathcal{F}_t$ repräsentieren partielle Information, wobei $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ keine Information bedeutet.
Es stellt sich nun die Frage, wie sich diese Teilinformation auf unsere Prognose für das Verhalten von X auswirkt. Zur Lösung dieses allgemeinen Prognoseproblems geht man vom konstanten Erwartungswert $E[X]$ zu einer geeigneten $\mathcal{F}_t$ -messbaren Zufallsvariablen

[2] $\mathcal{L}^1$ bezeichnet die Klasse der einmal integrierbaren Zufallsvariablen

$E[X|\mathcal{F}_t]$, dem sogenannten bedingten Erwartungswert von X bezüglich $\mathcal{F}_t$ über. Der bedingt Erwartungswert ist folgendermaßen definiert.

Definition 2.1 (bedingte Erwartung)
*Sei X eine Zufallsvariable mit $E(|X|) < \infty$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Eine Zufallsvariable X_0 heißt **bedingter Erwartungswert bzgl.** $\mathcal{G}$, wenn gilt:*

i) X_0 *ist* $\mathcal{G}$*-messbar*

ii) $E[XY_0] = E[X_0Y_0] \quad \forall$ $\mathcal{G}$*-messbaren Zufallsvariablen* $Y_0 \geq 0$

In diesem Fall schreiben wir $X_0 = E[X|\mathcal{G}]$. ■

Im Spezialfall $Y_0 \equiv 1$ folgt

$$E[X] = E\big[E[X|\mathcal{G}]\big].$$

Die Existenz und die Eindeutigkeit der bedingten Erwartung wird durch Satz 2.2 gewährleistet.

Satz 2.2 (Existenz und Eindeutigkeit)
Der bedingte Erwartungswert $E[X|\mathcal{G}]$ einer Zufallsvariable X mit $E(|X|) < \infty$ bezüglich $\mathcal{G}$ existiert und ist in folgendem Sinn eindeutig: Sind X_0 und $\hat{X}_0$ zwei Zufallsvariablen, die obige Bedingungen erfüllen, so gilt

$$X_0 = \hat{X}_0 \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Beweis: [Wil91, S. 85f]. ■

Schließlich werden noch die wichtigsten Eigenschaften der bedingten Erwartung aufgeführt.

Satz 2.3 (Eigenschaften der bedingten Erwartung)
Sei X eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $E(|X|) < \infty$ und $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ seien Teil-σ-Algebren von $\mathcal{F}$.

a) *Für die kleinstmögliche σ-Algebra $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ gilt*

$$E[X|\mathcal{G}] = E[X] \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher}^3.$$

---

[3] **Definition: (stochastische Konvergenz):** [Kre, Seite 98]
Eine Folge $Y_1, Y_2, \ldots$ von Zufallsvariablen konvergiert **stochastisch** oder **in Wahrscheinlichkeit** gegen eine Zufallsvariable Y (in Zeichen $Y_n \to Y$ $\mathbb{P}$-f.s.) genau dann, wenn für alle $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Y_n - Y| < \epsilon) = 1.$$

b) Für die größtmögliche σ-Algebra $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ gilt

$$E[X|\mathcal{G}] = X \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

c) Es gilt immer: $E\big[E[X|\mathcal{G}]\big] = E[X]$.

d) Falls X $\mathcal{G}$-messbar ist, folgt

$$E[X|\mathcal{G}] = X \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

e) Linearität:

$$E[a_1X_1 + a_2X_2|\mathcal{G}] = a_1E[X_1|\mathcal{G}] + a_2E[X_2|\mathcal{G}] \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

f) Für $X \geq 0$ folgt

$$E[X|\mathcal{G}] \geq 0 \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

g) Monotonie:

$$0 \leq X_t \uparrow X \quad \Longrightarrow \quad E[X_t|\mathcal{G}] \uparrow E[X|\mathcal{G}] \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$ [4]

h) Falls Z $\mathcal{G}$-messbar und beschränkt ist, gilt

$$E[ZX|\mathcal{G}] = ZE[X|\mathcal{G}] \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

i) Für jede Teil-σ-Algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ gilt

$$E\big[E[X|\mathcal{F}]|\mathcal{G}\big] = E[X|\mathcal{G}].$$

j) Unabhängigkeit: Falls $\mathcal{H}$ unabhängig von $\sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$[5], dann gilt

$$E[X|\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})] = E[X|\mathcal{G}] \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

$\Rightarrow$ Falls X unabhängig von $\mathcal{H}$, gilt

$$E[X|\mathcal{H}] = E[X] \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Beweis: [Wil91, S. 89f] ∎

Eine besondere Eigenschaft der bedingten Erwartung wird mit dem folgenden Satz hervorgehoben.

Satz 2.4 (Projektivität der bedingten Erwartung)
Für σ-Algebren $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$ und eine Zufallsvariable X mit $E(|X|) < \infty$ gilt

$$E\big[E[X|\mathcal{F}_1]|\mathcal{F}_0\big] = E[X|\mathcal{F}_0] = E\big[E[X|\mathcal{F}_0]|\mathcal{F}_1\big]. \tag{2.1}$$

Beweis: [Wil91, S. 90] ∎

---

[4] $\uparrow$: Grenzübergang $X_t \to X$ mit $X_t < X$.

[5] $\sigma(X)$ bezeichnet die von X erzeugte σ-Algebra (kleinste σ-Algebra, die X enthält). $\sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$ ist folglich die kleinste σ-Algebra, die $\sigma(X)$ und $\mathcal{G}$ enthält.

Kapitel 3

Versicherungstechnische Grundlagen

Dieses Kapitel gibt basierend auf [Mac97] und [Mac] eine Einführung in verschiedene Bereiche der Versicherungswirtschaft. Nach einer Definition von Versicherung in Abschnitt 1 werden im zweiten Abschnitt versicherungsspezifische Grundlagen erläutert. Der Ausgleich im Kollektiv, sowie Prämie, Sicherheitszuschlag und eine ausreichende Spätschadenreservierung stellen sicher, dass die Forderungen gegenüber den Versicherungsnehmern erfüllt werden können. Grundlage der Modellrechnung in Kapitel 5 ist die Annahme einer geeigneten Gesamtschadenverteilung. Möchte man den Sicherheitszuschlag auf die einzelnen Unternehmensbereiche aufteilen, so stellt das Kovarianzprinzip eine faire Aufteilung dar. Mit kurzen Einführungen in die Themenbereiche Rückversicherung, Anlagekapital und rechtliche bzw. institutionelle Rahmenbedingungen findet das Kapitel seinen Abschluss.

3.1 Was ist Versicherung?

Um als Einzelperson keine Schäden selbst tragen zu müssen, wendet man sich in der Regel an ein Versicherungsunternehmen, das den Schaden begleicht oder zumindest einen Teil der Zahlung übernimmt.

Zur Begriffsklärung betrachten wir eine Definition von Mack [Mac97, S.21]: „Im Versicherungsvertrag (**Police**) verpflichtet sich das **Versicherungsunternehmen** gegen Erhalt eines im Voraus fälligen Geldbetrages (**Prämie**), bei Eintritt von im Vertrag näher definierten ungewissen Ereignissen (**Schäden**) bestimmte, in ihrer Höhe meist vom betreffenden Ereignis abhängende Zahlungen an den Vertragspartner (**Versicherungsnehmer**) zu leisten, die den aus dem Ereignis resultierenden wirtschaftlichen Nachteil des Versicherungsnehmers reduzieren oder sogar ausgleichen soll.“

Die Ungewissheit hinsichtlich des versicherten Ereignisses besteht in Bezug auf die Tatsache seines Eintritts, den Zeitpunkt des Eintritts oder in Bezug auf seine Qualität (Art, Ausmaß). Aufgrund dieser zufälligen Momente ist die Stochastik mit ihren Teilgebieten Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik die Basis der Versicherungsmathematik und der mathematischen Risikotheorie.

Der Vorteil, den der Versicherungsnehmer aus diesem Vertrag zieht, ist offensichtlich. Er tauscht ungewisse (Schäden) gegen planbare Kosten (Prämie). Insbesondere werden Schäden, die zwar nur mit einer sehr kleinen Wahrscheinlichkeit eintreten, aber ruinös hohe Kosten nach sich ziehen, durch eine Versicherung erst tragbar. Der Vorteil des Versicherungsunternehmens wird im Folgenden erörtert.

Zuvor wird in Tabelle 3.1 noch ein Überblick über die wichtigsten privaten Versicherungszweige gegeben (nach ([Mac, S. 1]).

<table>
<tr><td>52,5</td><td>Leben</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>19,3</td><td>Kranken</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>12,2</td><td>Kfz-Haftpflicht</td><td rowspan="6">HUK</td><td rowspan="14">Schaden-
versicherung</td></tr>
<tr><td>5,6</td><td>Kfz-Vollkasko</td></tr>
<tr><td>1,9</td><td>Kfz-Teilkasko</td></tr>
<tr><td>5,8</td><td>Allgemeine Haftpflicht</td></tr>
<tr><td>5,1</td><td>Unfall</td></tr>
<tr><td>2,6</td><td>Rechtsschutz</td></tr>
<tr><td>2,2</td><td>Feuer</td><td rowspan="7">Sachversicherung</td></tr>
<tr><td>3,4</td><td>Verbundene Wohngebäude</td></tr>
<tr><td>2,4</td><td>Verbundene Hausrat</td></tr>
<tr><td>1,3</td><td>Technische</td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>Einbruch/Diebstahl</td></tr>
<tr><td>0,6</td><td>Glas</td></tr>
<tr><td>0,6</td><td>sonstige Sach</td></tr>
<tr><td>1,8</td><td colspan="2">Transport, Luft- und Raumfahrt</td></tr>
<tr><td>1,2</td><td>Kredit</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabelle 3.1: Übersicht über die wichtigsten privaten Versicherungszweige (nach Beitragseinnahmen 1998 in Deutschland in Mrd. Euro)

In dieser Arbeit wird nur der Bereich der Schadenversicherung, d.h. der Haftpflicht-, Unfall- und Kraftfahrzeugversicherung (HUK) und der Sachversicherung, betrachtet. Die große Bedeutung dieses Versicherungsbereichs lässt sich alleine schon durch Beitragseinnahmen in Höhe von 44,2 Milliarden Euro (Schadenversicherung ohne Transport, Luft- und Raumfahrt) begründen.

3.2 Wie funktioniert Versicherung?

Für die Versicherungsnehmer ist der Abschluss einer Versicherung, durch Tausch von ungewissen Kosten gegen planbare und somit einem Ausschluss extremer finanzieller Belastung, von Vorteil. Durch Zeichnung (Übernahme) von Risiken verpflichtet sich das Versicherungsunternehmen bestimmte Zahlungen an die Versicherungsnehmer zu leisten. Um - trotz der Unsicherheit über den Eintritt, den Zeitpunkt und die Höhe des Schadenfalls - den Forderungen nachkommen zu können, ist vor allem die Kalkulation einer geeigneten Prämie sowie eine ausreichende Schadenreservierung von großer Bedeutung. Diese und weitere, für Versicherungen wichtige Themen werden im Folgenden erläutert.

3.2.1 Ausgleich im Kollektiv

Der Grund für das Funktionieren von Versicherungen ist der sogenannte Ausgleich im Kollektiv. Dies bedeutet, dass die Zusammenfassung mehrerer nicht vollständig positiv korrelierter Risiken zu einem Kollektiv (**Portfolio, Portefeuille**) gegenüber jedem Einzelrisiko vorteilhafter ist. Im Kollektiv können sich günstige und ungünstige Schadenverläufe der Einzelrisiken ausgleichen. Im Spezialfall von unabhängigen und identisch verteilten Risiken kann man folgende Aussagen treffen.

Satz 3.1 (Ausgleich im Kollektiv)
Gegeben sei eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten (iid) Risiken $S_1, S_2, \dots, S_I$. *Für den Gesamtschaden* $S = \sum_{i=1}^{I} S_i$ *gilt:*

(1) $\lim\limits_{I\to\infty} \frac{\sqrt{Var[S]}}{E[S]} = 0$

d.h. die Standardabweichung des Gesamtschadens wächst bei wachsendem Kollektiv langsamer als ihr Erwartungswert.

(2) $\lim\limits_{I\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S-E[S]}{E[S]}\right| > \epsilon\right) = 0$ *für jedes* $\epsilon > 0$

d.h. das Überschreiten einer prozentualen Maximalabweichung vom Mittelwert wird bei wachsendem Kollektiv immer unwahrscheinlicher.

Beweis: [Mac, Seite 7]

$$(1) \qquad \frac{Var[S]}{(E[S])^2} = \frac{\sum_{i=1}^{I} Var[S_i]}{\left(\sum_{i=1}^{I} E[S_i]\right)^2} \qquad \text{(da } S_1, S_2, \dots, S_I \text{ unabhängig)}$$

$$= \frac{I \cdot Var[S_1]}{(I \cdot E[S_1])^2} \qquad \text{(da } S_1, S_2, \dots, S_I \text{ identisch verteilt)}$$

$$= \frac{Var[S_1]}{I \cdot E[S_1]^2} \xrightarrow{I\to\infty} 0$$

$$
\begin{aligned}
(2)\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{S-E[S]}{E[S]}\right| > \epsilon\right) &= \mathbb{P}\big(\,|S-E[S]| > \epsilon \cdot (E[S])\big) \\
&\leq \frac{Var[S]}{(\epsilon \cdot E[S])^2} \qquad \text{Tschebyscheff Ungleichung}^6 \\
&\stackrel{I\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{wegen (1)}
\end{aligned}
$$

■

Beachte: Absolut werden die Abweichungen immer größer!

In der Realität sind die Risiken allerdings nicht iid (wie im obigen Satz gefordert). Meist sind sie nicht identisch verteilt (z.B. verschieden große Häuser in der Feuerversicherung) und manchmal auch nicht unabhängig (z.B. benachbarte Häuser bei Feuer, Sturm und Erdbeben). Mathematisch definiert sich der Ausgleich im Kollektiv deshalb folgendermaßen.

Definition 3.2 (Ausgleich im Kollektiv)
*Eine Folge $S_1, S_2, \ldots, S_I$ genügt dem **Ausgleich im Kollektiv**, wenn für den Gesamtschaden $S = \sum_{i=1}^{I} S_i$ gilt:*

$$\lim_{I\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S-E[S]}{E[S]}\right| > \epsilon\right) = 0 \text{ für jedes } \epsilon > 0$$

■

Eine beliebige Folge von Risiken genügt auch dem Ausgleich im Kollektiv, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind

Satz 3.3 (Ausgleich im Kollektiv (Bühlmann))
Eine Folge $S_1, \ldots, S_I$ von Risiken genügt dem Ausgleich im Kollektiv, falls $\mu_0 > 0$ und $\sigma_0^2 < \infty$ existieren, so dass gilt:

a) $E[S_i] \geq \mu_0$, *für* $i = 1, \ldots, I$

b) $Var[S_i] \leq \sigma_0^2$, *für* $i = 1, \ldots, I$

c) $Cov[S_i, S_j] \leq 0$ *für* $|i-j| > n_0 \in \mathbb{N}$, *unabhängig von* I *(d.h. Risiken, die einen bestimmten Abstand haben),* $1 \leq i, j \leq I$.

[6] **Ungleichung von Tschebyscheff:** Für eine beliebige Zufallsvariable X mit $E[X] = \mu$, $Var[X] = \sigma^2 < \infty$ gilt

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Beweis: [Mac, Seite 9]
Zunächst gilt mit der Tschebyscheff-Ungleichung

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S-E[S]}{E[S]}\right| > \epsilon\right) \leq \frac{Var[S]}{\big(\epsilon \cdot (E[S])\big)^2}$$

und aus $a)$ folgt

$$E[S] = \sum_{i=1}^{I} \underbrace{E[S_i]}_{\geq \mu_0} \overset{a)}{\geq} I \cdot \mu_0 \,.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} Var[S] &= \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{I} Cov[S_i, S_j] \\ &\overset{c)}{\leq} \sum_{i=1}^{I}(2n_0+1) \max_{j:|j-i|\leq n_0} |Cov[S_i, S_j]| \quad \text{(Weglassen nicht pos. Summanden)} \\ &\leq \sum_{i=1}^{I}(2n_0+1) \max_{j:|j-i|\leq n_0} \big(\sigma(S_i)\cdot\sigma(S_j)\big) \qquad \text{„Schwarz“} \\ &\overset{b)}{\leq} \sum_{i=1}^{I}(2n_0+1)\cdot\sigma_0^2 = I\cdot(2n_0+1)\sigma_0^2 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}\left(\left|\frac{S-E[S]}{E[S]}\right| > \epsilon\right) \leq \frac{I\cdot(2n_0+1)\sigma_0^2}{\epsilon^2 I^2 \mu_0^2} \xrightarrow{I\to\infty} 0 \qquad \blacksquare$$

Es ergibt sich immer noch ein Ausgleichseffekt, allerdings nicht mehr so deutlich wie im Idealfall von iid Risiken. Im Extremfall lauter vollständig positiv miteinander korrelierter Risiken würde sich kein Ausgleichseffekt ergeben.

Während der Versicherungsnehmer durch Versicherung exakt planbare Schadenkosten erhält, braucht das Versicherungsunternehmen eine große Zahl möglichst unabhängiger und ähnlich großer Einzelrisiken, um so genau wie möglich planen zu können. Der Gesamtschaden eines Versicherungsunternehmens bleibt aber stets zufallsabhängig, da folgende Risiken immer erhalten[7] bleiben:

- **Zufallsrisiko**, da die Kosten für Versicherungsleistungen ihrer Art nach stochastischer Natur sind.
- **Diagnoserisiko**, da durch Fehler bei der Schadensschätzung vergangener Perioden nur unvollständige Informationen über die wahre Zufallsgesetzmäßigkeit der Schadengenerierung vorliegen.

[7] Vergleiche z.B. [Sch97a, S. 2 f] oder [Far89, S. 66-79]

- **Prognoserisiko**, da selbst bei unterstellter fehlerfreier Diagnose die Unsicherheit bleibt, ob die für die Vergangenheit ermittelte Schadengesetzmäßigkeit auch in Zukunft Gültigkeit besitzen wird.

Diese drei Risiken werden als **versicherungstechnisches Risiko** bezeichnet, das also darin besteht, dass der Jahresgesamtschaden von seinem Schätzwert abweicht (ihn somit auch übertreffen kann). Um den Leistungszusagen gegenüber den Versicherungsnehmern gerecht zu werden, muss das Versicherungsunternehmen eine geeignete Prämienleistung einfordern. Wie diese berechnet werden kann, wird im folgenden Kapitel erläutert.

3.2.2 Prämie und Sicherheitszuschlag

Im vorherigen Abschnitt haben wir gesehen, dass dem Versicherungsunternehmen immer ein Restrisiko (= versicherungstechnisches Risiko) bleibt. Es stellt sich nun die Frage, wie viel Geld das Versicherungsunternehmen benötigt, um in jedem Fall den Forderungen der Versicherungsnehmer nachkommen zu können und somit liquide zu bleiben.

Gegeben sei eine Folge von iid Risiken $S_1, S_2, \dots, S_I$ mit $E[S_i] < \infty$ für $i = 1, \dots, I$. Es gilt das **starke Gesetz der großen Zahlen**:

$$\mathbb{P}\left(\lim_{I\to\infty} \frac{1}{I} \cdot \sum_{i=1}^{I} S_i = E[S_1]\right) = 1$$

mit $E[S_i] = E[S_1]$ für alle i.

Dies lässt sich folgendermaßen interpretieren:

1. „**Äquivalenzprinzip**“: $S_1, S_2, \dots, S_I$ sind unabhängige Wiederholungen (Versicherungsjahre) eines festen Risikos bei unveränderten äußeren Bedingungen (Schadeneintrittswahrscheinlichkeit, monetäre Bedingungen).

   In diesem Fall besagt das starke Gesetz der großen Zahlen, dass die durchschnittliche Schadenszahlung fast sicher gegen $E[S_1]$ konvergiert. $E[S_1]$ ist demnach die theoretisch richtige (Jahres-)Nettoprämie = Festbetrag für die Übernahme von S_1, dessen wahrer Wert stets unbekannt bleibt.

2. $S_1, S_2, \dots, S_I$ sind iid Risiken im gleichen Jahr. Dann ist das arithmetische Mittel $\frac{1}{I} \cdot \sum\limits_{i=1}^{I} S_i$ laut des starken Gesetzes der großen Zahlen ein konsistenter Schätzer[8] für $E[S_1]$. Durch Bildung einer möglichst großen Gruppe von unabhängigen, wie S_1 verteilten Risiken kann man also dem unbekannten $E[S_1]$ durch das arithmetische Mittel sehr nahe kommen. In der Praxis bilden Versicherungsunternehmen daher oft Gemeinschaftsstatistiken zur Schätzung von $E[S_1]$.

[8] Gegeben sei eine Folge von Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$. Ein Schätzer $\mathrm{T}_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **konsistent** für θ, falls

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|T_n(X_1, ..., X_n) - \theta| \le \epsilon) = 1, \forall\, \epsilon > 0\,.$$

.

Wenn das Versicherungsunternehmen zur Bezahlung des Jahresgesamtschadens $S := \sum_{i=1}^{I} S_i$ seines Portfolios nur den erwarteten Schaden $E[S]$ als Prämie hätte, wäre das Versicherungsunternehmen insolvent, sobald $S > E[S]$. Unter Normalverteilungsannahme $\big(S \sim N(\mu, \sigma^2)\big)$ beträgt diese Wahrscheinlichkeit 50 %! Man braucht also eine Gesamtprämie, die größer ist als der erwartete Schaden $E[S]$, d.h. einen zusätzlichen **Sicherheits-** oder **Schwankungszuschlag**.

Gegeben sei eine Sicherheitswahrscheinlichkeit $1 - \epsilon$ und es wird gefordert, dass der Jahresgesamtschaden mit Wahrscheinlichkeit $1 - \epsilon$ den Wert $E[S] + b$ nicht überschreitet. Dabei bezeichnet b einen Sicherheitszuschlag, der im Folgenden näher erläutert wird. Die Insolvenzwahrscheinlichkeit wird mit ϵ bezeichnet und sollte folglich möglichst klein sein.

Sei F die Verteilungsfunktion des Gesamtschadens, d.h. $F = \mathbb{P}_S$, so soll also gelten

$$\mathbb{P}\left(S \leq E[S] + b\right) = F\left(E[S] + b\right) \geq 1 - \epsilon\,.$$

Wie die Verteilung F berechnet werden kann, wird später in Kapitel 3.2.4 erläutert. Zunächst beschränken wir uns in diesem Abschnitt auf die Kalkulation des Sicherheitszuschlags b.

Mit $\mu = E[S]$ und $\sigma^2 = Var[S]$, $\sigma^2 \neq 0$, erhält man durch Standardisierung:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\frac{S-\mu}{\sigma} \leq \frac{b}{\sigma}\right) \geq 1 - \epsilon \\
\iff\quad & F_{0,1}\left(\frac{b}{\sigma}\right) \geq 1 - \epsilon, \qquad\qquad F_{0,1} := \mathbb{P}_{\frac{S-\mu}{\sigma}} \\
\iff\quad & \frac{b}{\sigma} \geq F_{0,1}^{-1}(1-\epsilon) \\
\iff\quad & b \geq F_{0,1}^{-1}(1-\epsilon)\cdot\sigma
\end{aligned}$$

Bezeichnet $Q_{1-\epsilon}$ das (1-ϵ)-Quantil der standardisierten Gesamtschadenverteilung $F_{0,1}$, so berechnet sich der Sicherheitszuschlag durch:

$$\boxed{b = Q_{1-\epsilon}\cdot\sigma} \tag{3.1}$$

Das (1-ϵ)-Quantil ist größer Null (da $\mathbb{P}(S > 0) = 1$) und monoton wachsend für kleiner werdendes ϵ. Somit hat b folgende Eigenschaften:

- b wächst mit wachsender Sicherheitswahrscheinlichkeit 1-ϵ , d.h. wenn die Risikoneigung abnimmt.
- b wächst mit wachsendem $\sigma = \sigma(S)$

Die **Prämie** $\pi(S)$ setzt sich also zusammen aus dem erwarteten Schaden und dem Sicherheitszuschlag:

$$\boxed{\pi(S) = E(S) + b} \tag{3.2}$$

3.2.3 Kovarianzprinzip

Im Folgenden suchen wir eine stabile und faire Aufteilung des insgesamt erforderlichen Sicherheitszuschlags auf die einzelnen Risiken bzw. Policen. Wir gehen davon aus, dass unser Gesamtportfolio mit Risiko S aus mehreren disjunkten Teilportfolios mit Risiken S_i (i=1,...,I) besteht, d.h. $S = \sum_{i=1}^{I} S_i$. Der Sicherheitszuschlag des Teilrisikos S_i wird mit b_i bezeichnet ($i \in \{1, \ldots, I\}$) und der Sicherheitszuschlag des Gesamtrisikos S mit b.

Vorbereitend betrachten wir einige Definitionen:

Definition 3.4 (Aufteilung des Sicherheitszuschlags)
Eine ***Aufteilung des Sicherheitszuschlags*** *b des Gesamtrisikos S auf die Teilrisiken S_i $(i = 1, \ldots, I)$ ist ein I-Tupel $(b_1, \ldots, b_I)$ mit $\sum_{i=1}^{I} b_i = b$ und $b_i > 0$.* ■

Definition 3.5 (Teilportfolio)
Ein ***Teilportfolio*** *M mit Risiko S_M ist eine Teilmenge $M \subset I^* = \{1, \ldots, I\}$ mit Teilrisiken $\{S_i |\ i \in M \subset I^*\}$ von $\{S_1, \ldots, S_I\}$, d.h. $S_M := \sum_{i \in M} S_i$. Der kanonische Sicherheitszuschlag sei $b_M := \sum_{i \in M} b_i$.* ■

Definition 3.6 (stabile Aufteilung)
Eine Aufteilung $(b_1, \ldots, b_I)$ des Sicherheitszuschlags b heißt ***stabil****, wenn für jedes Teilportfolio $M \subset I^*$ gilt:*

$$\mathbb{P}\left(S_M \leq E[S_M] + b_M\right) \leq \mathbb{P}\left(S \leq E[S] + b\right)$$ ■

Dies bedeutet, dass die individuelle Sicherheitswahrscheinlichkeit nicht größer ist als die kollektive Sicherheitswahrscheinlichkeit, und es besteht somit kein Anreiz für das Teilportfolio sich vom Rest zu lösen.

Definition 3.7 (faire Aufteilung)
Eine Aufteilung $(b_1, \ldots, b_I)$ des Sicherheitszuschlags b heißt ***fair****, wenn für alle Teilportfolios $L, M \subset I^*$ mit $S_L, S_{I^* \setminus L}$ unabhängig, $S_M, S_{I^* \setminus M}$ unabhängig und $\mathbb{P}\left(S_L \leq E[S_L] + x\right) \geq \mathbb{P}\left(S_M \leq E[S_M] + x\right)$ für alle $x > 0$ gilt, dass*

$$b_L \leq b_M.$$ ■

Dies bedeutet, dass bei ungefährlicherer Gesamtschadenverteilung weniger Kapital zugeordnet wird, falls die Teilportfolios voneinander unabhängig sind.

Eine gegenüber allen Portfolioteilen gleichermaßen faire Aufteilung des Sicherheitszuschlags ist durch Aufteilung gemäß der Kovarianz $Cov[S_i, S]$ zwischen Police S_i und Gesamtrisiko S (einschließlich der Police S_i) gegeben, wie im folgenden Satz erläutert wird.

Satz 3.8 (Kovarianzprinzip)
Gegeben sei das Portfolio $I^* = \{1, \ldots, I\}$. Die Einzelrisiken S_i $(i \in I^*)$ seien normalverteilt. Dann ist die Aufteilung $(b_1, \ldots, b_I)$ des Sicherheitszuschlags b stabil und fair, falls

$$\boxed{b_i = \frac{Cov\,[S_i, S]}{Var[S]} * b} \qquad (\text{„}\textbf{\textit{Kovarianzprinzip}}\text{“}) \tag{3.3}$$

für $i = 1, \ldots, I$.

Beweis:
i) $(b_1, \ldots, b_I)$ ist unter Normalverteilungsannahmen **stabil**:
Bei einem Sicherheitszuschlag b besteht im Gesamtportfolio die kollektive Sicherheitswahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(S \leq E[S] + b) = \Phi\left(\frac{b}{\sqrt{Var[S]}}\right),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet. Sei $\{S_i | i \in M\}$ mit $M \subset I^* = \{1, \ldots, I\}$ ein Teilportfolio und S, S_i (i $\in$ I*) seien normalverteilt. Dann gilt für das zugeordnete Kapital

$$b_M = \sum_{i \in M} \frac{Cov[S_i, S]}{Var[S]} \cdot b = \frac{Cov[S_M, S]}{Var[S]} \cdot b\,.$$

Das Teilportfolio S_M mit Sicherheitszuschlag b_M hat die individuelle Sicherheitswahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_M \leq E[S_M] + b_M) &= \Phi\left(\frac{b_M}{\sqrt{Var[S_M]}}\right) = \Phi\left(b \cdot \frac{\frac{Cov[S_M,S]}{Var[S]}}{\sqrt{Var[S_M]}}\right) \\ &= \Phi\left(b \cdot \frac{\rho(S_M, S)}{\sigma(S)}\right) \quad \text{mit } \rho(S_M, S) := \frac{Cov[S_M, S]}{\sigma(S_M)\sigma(S)}\,.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Mit $\rho(S_M, S) \leq 1$ gilt folglich

$$\mathbb{P}(S_M \leq E[S_M] + b_M) \leq \mathbb{P}(S \leq E[S] + b)\,.$$

$\longrightarrow$ Das Teilportfolio S_M hätte alleine keine höhere Sicherheitswahrscheinlichkeit!

ii) $(b_1, \ldots, b_I)$ ist unter Normalverteilungsannahmen **fair**:
Seien L, M Teilportfolios mit

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(S_L \leq E[S_L] + x) \geq \mathbb{P}(S_M \leq E[S_M] + x) \quad \forall x > 0, \\ \text{dann ist} \quad &\Phi\left(\frac{x}{\sigma(S_L)}\right) \geq \Phi\left(\frac{x}{\sigma(S_M)}\right), \\ \text{d.h.} \quad &\sigma(S_L) \leq \sigma(S_M).\end{aligned} \tag{+}$$

Wenn S_L und $S_{I^*\text{Ł}}$ unabhängig sind, ist

$$Cov[S_L, S] = Cov[S_L, S_L + S_{I^*\text{Ł}}] = Var[S_L].$$

Wenn S_M und $S_{I^*\setminus M}$ unabhängig sind, ist

$$Cov[S_M, S] = Cov[S_M, S_M + S_{I^*\setminus M}] = Var[S_M].$$

Insgesamt ist also

$$\begin{aligned} b_L &= \frac{Cov[S_L, S]}{Var[S]} \cdot b = \frac{Var[S_L]}{Var[S]} \cdot b \\ &\overset{(+)}{\leq} \frac{Var[S_M]}{Var[S]} \cdot b = \frac{Cov[S_M, S]}{Var[S]} \cdot b \\ &= b_M. \end{aligned}$$

■

Bemerkung:
Das Kovarianzprinzip ist auch iterativ, d.h. wegen

$$\sum_{i \in M} b_i = \frac{Cov[S_M, S]}{Var[S]} \cdot b = b_M$$

kann die Zuordnung des Sicherheitskapitals auch schrittweise erfolgen, indem der Sicherheitszuschlag b zuerst vom Gesamtportfolio auf Teilportfolios (z.B. Versicherungsbranchen)

$$M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_K = I^*$$

gemäß dem Kovarianzprinzip verteilt wird und anschließend innerhalb jedes Teilportfolios nach demselben Prinzip. ■

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir noch einen interessanten Spezialfall, der später in Kapitel 5 der Modellrechnung wieder aufgegriffen wird.

Spezialfall:
S_i und $T_i = S - S_i$ unabhängig

$\Longrightarrow$ **„Varianzprinzip“**: $b_i = \frac{Var[S_i]}{Var[S]} * b$ ■

3.2.4 Gesamtschadenverteilungen

Versicherungstechnische Kalkulationen erfordern Daten über Art und Schadenverlauf der versicherten Risiken. Soweit die verfügbare Datenbasis die Daten mehrerer Versicherungsgesellschaften (Marktstatistik) umfasst, liegen die Daten häufig von vornherein nur in aggregierter Form vor, da die einzelnen Versicherungen möglichst wenig Details über ihr Portfolio preisgeben wollen. Man kennt also weder die Versicherungssumme jedes Risikos, noch die Höhe jedes einzelnen Schadens, sondern nur die jährlichen Grunddaten (wie Anzahl Risiken, Gesamtversicherungssumme, Zahl und Gesamtbetrag der Schäden) pro Risikogruppe.

In einer Risikogruppe sind jeweils solche Risiken zusammengefasst, die bestimmte gemeinsame Kriterien erfüllen, wie z.B. gleiche Tarifmerkmale. Um die gesamte Verteilungsfunktion jeder dieser Risikogruppen zu modellieren, verwendet man Verteilungsmodelle für den Gesamtschaden S. Rechnerisch vorteilhaft sind hierbei Modelle mit explizit und geschlossen angebbarer Dichtefunktion, die nur wenige zu schätzende Parameter enthält. Für die Auswahl einer praktisch anwendbaren und geeigneten Dichtefunktion orientieren wir uns an beobachtbaren Eigenschaften der einzelnen Risiken, die maßgeblich den Verlauf der Dichtefunktion charakterisieren. Wir wissen z.B., dass die Hauptmasse der Wahrscheinlichkeiten der Einzelrisiken im Punkt $S_i = 0$ ($i = 1, \ldots, I$) liegt, da in praktisch allen Branchen der Schadenversicherung die meisten Risiken (pro Jahr gesehen) schadenfrei bleiben.
Die Verteilung der Einzelrisiken $S_1, \ldots, S_I$ hat darüber hinaus keine stetige Dichte und ist insbesondere weit davon entfernt, normalverteilt zu sein. Mit wachsender Zahl unabhängiger und identisch verteilter Risiken wird aber der zugehörige Gesamtschaden $S = S_1 + \ldots + S_I$ nach Standardisierung gemäß dem Zentralen Grenzwertsatz (siehe z.B. [Sch98, Kap. 5.2]) einer Normalverteilung immer ähnlicher.
Insbesondere reichen uns Verteilungsfunktionen, die sich auf den Definitionsbereich $[0;\infty)$ beschränken, aus, da die Schadenhöhe immer größer oder gleich Null ist.

Um auch für kleinere Risikogruppen eine brauchbare Approximation der Gesamtschadenverteilung zu finden, werden wir zuerst die Verteilung der Risiken S_i der Einzelportfolios $i = 1, \ldots, I$ durch stetige Verteilungen approximieren, bei denen wir die Faltungspotenzen (und damit die Verteilung von S) explizit berechnen können (Gammaverteilung, Inverse Gaußverteilung). Abschließend wird dann die Lognormalverteilung aufgeführt, die direkt den Gesamtschaden S approximiert.

Approximation durch die Gammaverteilung [Mac97, S.43ff]

Die bekannteste Verteilung auf $(0; \infty)$, bei der die Faltungspotenzen explizit berechnet werden können, ist die **Gammaverteilung** $\Gamma(q, \lambda)$, die folgendermaßen definiert wird.

Definition 3.9 (Gammaverteilung)
*Die **Gammaverteilung** wird durch die Dichtefunktion*

$$f_G(x) = \frac{\lambda^q}{\Gamma(q)} x^{q-1} e^{-\lambda x} 1_{(0;\infty)}(x), \quad q, \lambda > 0$$

mit $E[X] = \frac{q}{\lambda}$ und $Var[X] = \frac{q}{\lambda^2}$ bestimmt. ■

Wählt man in Definition 3.9 den Parameter λ so, dass der Erwartungswert μ direkt als Parameter vorkommt ($\lambda = \frac{q}{\mu}$), so ergibt sich für $\Gamma(q, \frac{q}{\mu})$ die Dichte

$$f_G(x) = \frac{\left(\frac{q}{\mu}\right)^q}{\Gamma(q)} x^{q-1} e^{\frac{-xq}{\mu}} 1_{(0;\infty)}(x)$$

mit $E[X] = \mu$ und $Var[X] = \frac{\mu^2}{q}$.

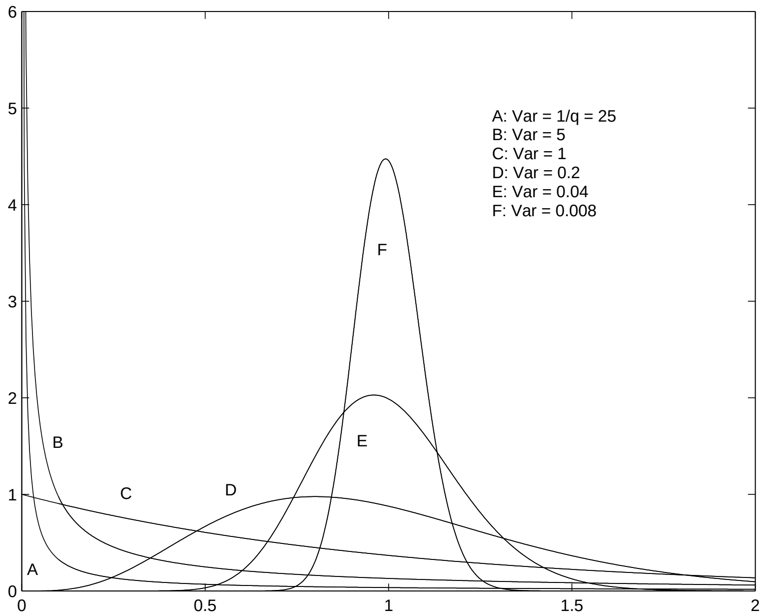

Abbildung 3.1: Dichtefunktionen der Gammaverteilung mit Erwartungswert 1.

Zur Verdeutlichung betrachten wir in Abbildung 3.1 exemplarisch verschiedene Dichten der Gammaverteilung mit $\mu = 1$. Dabei lassen sich folgende Beobachtungen feststellen:

- Für $q = 1$ (Kurve C) erhält man die exponentiell von $f(0) = 1$ abfallende Exponentialverteilung.

- Für $q < 1$ (Kurven A, B) ist die Gestalt noch schiefer und steil von $f(0) = \infty$ abfallend.

- Für $q > 1$ (Kurven D, E, F) ist $f(0) = 0$. Der einzige Modalwert ist $\mu - \frac{\mu}{q}$ und die Gestalt der Dichte wird mit wachsendem q immer symmetrischer und ähnelt immer mehr der Normalverteilung.

Approximation der *Einzelrisiken*:
Für die Approximation der Verteilung von S_i, $1 \leq i \leq I$ kommen daher nur Gammaverteilungen mit Formparameter $q < 1$ in Frage, damit möglichst viel Wahrscheinlichkeitsmasse in der Nähe des Nullpunkts liegt. Speziell im Fall eines homogenen Portfolios werden die Bezeichnungen $m = E[S_i]$ und $s^2 = Var[S_i]$ für $i = 1, \ldots, I$ verwendet und mittels Gleichsetzung der Momente wird die unbekannte Verteilung der Einzelrisiken $S_1, \ldots, S_I$ durch eine Gammaverteilung mit den Parametern $\mu = m$ und $q = \frac{m^2}{s^2}$ approximiert.

Approximation des *Gesamtschadens*:
Für eine Risikogruppe S von I unabhängigen Risiken $S_1, \ldots, S_I$ mit derselben Dichte $f_G(x)$ ergibt sich die Gesamtschadenverteilung aus der I-fachen Faltung der Gammaverteilung mit den Parametern μ und q. Diese Faltungspotenzen lassen sich explizit berechnen und

zwar ergibt die I-fache Faltung wieder eine Gammaverteilung, aber mit neuem Mittelwertparameter $I \cdot \mu$ und neuem Formparameter $I \cdot q$. Die Berechung der Faltung wird in Kapitel 5, Seite 76 durchgeführt.

Für Risikogruppen mit identisch verteilten unabhängigen Risiken ist die Gammaverteilung also ein realistisches Verteilungsmodell für den Gesamtschaden. Die Summe unabhängiger gammaverteilter Risiken $S_1, \ldots, S_I$ ist auch dann noch gammaverteilt, wenn die Parameter μ_i und q_i nicht mehr bei allen Risiken $i = 1, \ldots, I$ gleich sind, aber immerhin noch ein konstantes Verhältnis $\frac{\mu_i}{q_i} = c$ haben.
Deshalb können wir die Gammaverteilung auch auf eine Gruppe von Risiken mit unterschiedlicher Versicherungssumme anwenden.

Die beiden einzigen unbekannten Parameter μ und q können mit den üblichen Methoden (z.B. Momentenschätzer) geschätzt werden.

Approximation durch die Inverse Gaußverteilung[Mac97, S.48ff]

Definition 3.10 (Inverse Gaußverteilung)
Nach Wahl des Parameters $E[X] = \mu$ wird die ***Inverse Gaußverteilung*** *durch die Dichtefunktion*

$$f_{IG}(x) = exp\left\{-\left(\sqrt{\frac{x}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{x}}\right)^2 \frac{\alpha}{2}\right\} \sqrt{\frac{\mu\alpha}{2\pi x^3}} \cdot 1_{(0,\infty)}(x), \qquad \mu > 0$$

mit $E[X] = \mu$ und $Var[X] = \frac{\mu^2}{\alpha}$ bestimmt. ■

Die verschiedenen Dichtefunktionen werden durch den Formparameter α bestimmt (siehe Abbildung 3.2). Es ist zu erkennen, dass

- die Dichtefunktion stets unimodal[9] mit $f_{IG}(0) = 0$ ist.
- der Modalwert durch $x_0 = \mu\left(\sqrt{1 + \frac{9}{4\alpha^2}} - \frac{3}{2\alpha}\right) < \mu\frac{\alpha}{3}$ gegeben ist.
  - Er rückt bei kleiner werdendem α näher an den Nullpunkt.
  - Für größer werdendes α wird die Form der Dichte immer symmetrischer.

Die Verteilungsfunktion $F_{IG}(x)$ kann mittels Standardnormalverteilung $\Phi(x)$ angegeben werden:

$$F_{IG}(x) = \Phi\left(\sqrt{\frac{\alpha x}{\mu}} - \sqrt{\frac{\alpha\mu}{x}}\right) + e^{2\alpha} \cdot \Phi\left(-\sqrt{\frac{\alpha x}{\mu}} - \sqrt{\frac{\alpha\mu}{x}}\right)$$

Approximation der *Einzelrisiken*:
Genau wie bei der Gammaverteilung approximieren wir im Fall eines homogenen Portfolios die Verteilung der Einzelrisiken $S_1, \ldots, S_I$ mit $m = E[S_i]$ und $s^2 = Var[S_i]$ für $1 \leq i \leq I$ durch eine Inverse Gaußverteilung mit Parametern $\mu = m$ und $\alpha = \frac{m^2}{s^2}$.

[9] Jede Dichtefunktion weist nur einen Maximalwert (**Modus** oder **Modalwert**) auf.

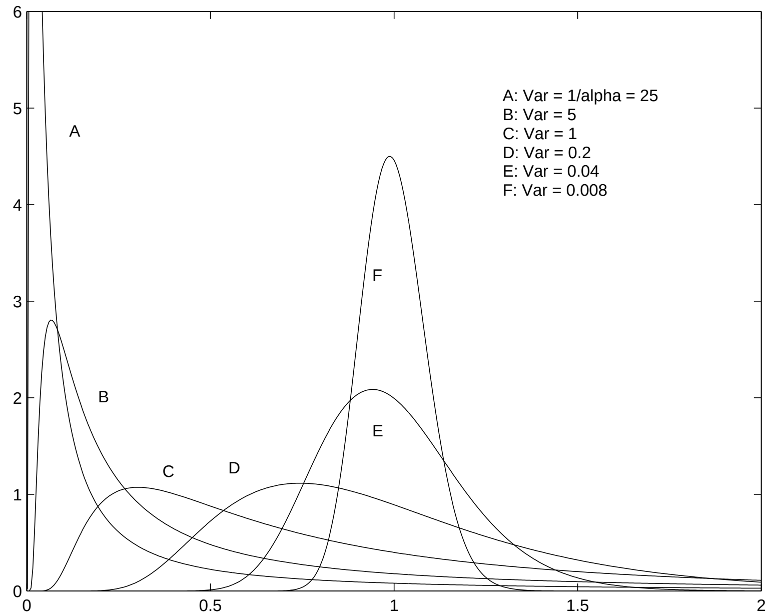

Abbildung 3.2: Dichtefunktionen der Inversen Gaußverteilung mit Erwartungswert 1

Approximation des *Gesamtschadens*:
Da sich bei Faltung der Verteilungstyp ebenfalls nicht ändert, approximiert man den Gesamtschaden S von I unabhängigen Risiken S_i $(1 \leq i \leq I)$ mit derselben Dichte $f_{IG}(x)$ durch eine Inverse Gaußverteilung mit Mittelwertparameter $I \cdot \mu$ und Formparameter $I \cdot \alpha$. Die Inverse Gaußverteilung bleibt auch noch erhalten, sofern wenigstens das Verhältnis $\frac{\mu_i}{\alpha_i}$ für $i = 1, \ldots, I$ konstant bleibt.

Die Parameter μ und α können wieder mit den üblichen Methoden geschätzt werden.

Approximation durch die Lognormalverteilung [Mac97, S.52ff]

Bei der Lognormalverteilung passen wir nicht mehr zuerst die Verteilung an die Einzelschäden an, um dann durch Faltung auf die Gesamtschadenverteilung zu kommen, sondern nehmen sofort eine Verteilungsfunktion, die der Gauß- bzw. Gammaverteilung ähnlich ist (vergleiche Abbildungen 3.1, 3.2 und 3.3).

Definition 3.11 (Lognormalverteilung)
*Die **Lognormalverteilung** wird durch die Dichtefunktion*

$$f_L(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma x} exp \left\{ -\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} 1_{(0,\infty)}(x)$$

mit $E[X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ *und* $Var[X] = e^{2\mu + \sigma^2} \left(e^{\sigma^2} - 1 \right)$ *bestimmt.* ■

Die Form der Dichte ist unimodal mit $f_L(0) = 0$ und Modalwert $x_0 = e^{(\mu - \sigma^2)}$.

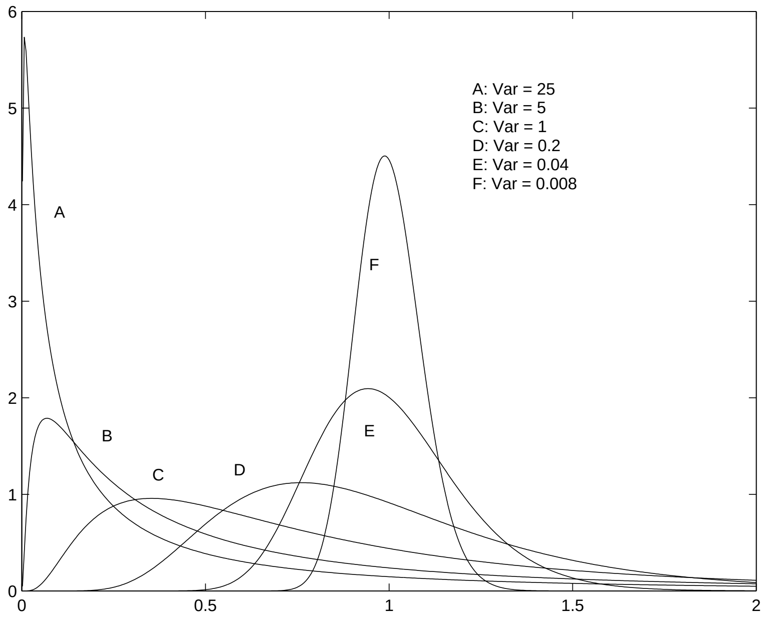

Abbildung 3.3: Dichten der Lognormalverteilung mit Erwartungswert 1.

Die Verteilungsfunktion $F_L(x)$ kann mittels Standardnormalverteilung $\Phi(x)$ angegeben werden:

$$F_L(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)$$

Bei Faltung bleibt der Verteilungstyp allerdings **nicht** erhalten, deshalb wird in diesem Fall auch der Gesamtschaden direkt modelliert.

3.2.5 Rückversicherung

In Kapitel 3.3.1 haben wir gesehen, dass der Ausgleich im Kollektiv zwar die Unsicherheit über den Gesamtschaden für das Versicherungsunternehmen verringert, dass aber dennoch ein nicht unerhebliches Restrisiko bleibt. Wenn das Versicherungsunternehmen nun feststellt, dass seine (Netto-)Prämieneinnahme, d.h. der erwartete Schaden $E[S]$ plus dem Sicherheitszuschlag b und seine Gesamtschadenverteilung F zu einer Sicherheitswahrscheinlichkeit führen, die ihm zu niedrig ist, so kann es sich seinerseits bei anderen Versicherungsunternehmen oder bei (darauf spezialisierten) Rückversicherungsunternehmen einen zusätzlichen Versicherungsschutz kaufen. Zur Begriffsspezifizierung orientieren wir uns an [Mac97, $S.$323]:

Definition 3.12 (Rückversicherung)
Die Möglichkeit, einen Teil der übernommenen ungewissen Schadenkosten wieder durch fixe Kosten zu ersetzen, nennt man ***Rückversicherung****.* ■

In der Regel ist dies einfacher und erfordert weniger Aufwand, als die Alternativen Erhöhung der Prämieneinnahme, Erhöhung des Sicherheitszuschlags oder Verbesserung der Gesamtschadenverteilung.

Definition 3.13 (Rückversicherer, Erstversicherer)
[*Mac97, S.*323]: *Jedes Versicherungsunternehmen, das einem anderen Versicherungsunternehmen Versicherungsschutz gewährt, wird als* ***Rückversicherer*** *bezeichnet, während das Unternehmen, das die Originalpolicen ausstellt,* ***Erstversicherer*** *genannt wird.* ■

Rückversicherung erfolgt in der Regel innerhalb eines einjährigen Vertrages zwischen Erst- und Rückversicherer, der sich aus Transparenzgründen meist nur auf eine einzige Branche bezieht. Im Folgenden werden die gebräuchlichsten Rückversicherungsformen kurz erläutert. Dabei wird zwischen proportionaler und nichtproportionaler Rückversicherung unterschieden.

Formen der *proportionalen* Rückversicherung ([Mac97, S.325]):

- **Quoten-Rückversicherung**: Der Rückversicherer übernimmt einen festen, überall gleichen Prozentsatz $1 - \alpha$ von allen Policen.
  Selbstbehalt:
  $$S_{EV} = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{I} S_i$$

- **Summenexzedenten-Rückversicherung**: Das Aufteilungsverhältnis $\alpha : (1 - \alpha)$ variiert in Abhängigkeit von der Versicherungssumme v_i des jeweiligen Risikos derart, dass der Selbstbehaltsanteil $\alpha_i = \alpha_i(v_i) = min\left(\frac{v_0}{v_i}, 1\right)$ beträgt.
  (v_0 bezeichnet das Maximum des Selbstbehalts)
  $$S_{EV} = \sum_{i=1}^{I} \alpha_i S_i = \sum_{v_i \leq v_0} S_i + \sum_{v_i > v_0} \frac{v_0}{v_i} \cdot S_i$$

Formen der *nichtproportionalen* Rückversicherung ([Mac97, S.325]):

- **Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung**: Der Erstversicherer trägt von allen Schäden S_i, $i = 1, \ldots, I$, egal von welchem der unter den Vertrag fallenden Risiken, das Erstrisiko $min(S_i, \bar{a})$ bis zu einem vereinbarten Höchstbetrag $\bar{a} > 0$ (**Priorität**) selbst, während der Rückversicherer den etwa übersteigenden Teil $max(S_i - \bar{a}, 0)$ zu zahlen hat.
  $$S_{EV} = \sum_{i=1}^{I} min(\bar{a}, S_i) = \sum_{S_i \leq \bar{a}} S_i + \sum_{S_i > \bar{a}} \bar{a}$$

- **Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung**: Analog zur Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung, mit dem Unterschied, dass sich der Schadenbetrag S, der der Priorität $\bar{a}$ gegenübergestellt wird, auf die Summe aller Einzelschäden des Erstversicherers aus einem einzelnen Schadensereignis (z.B. Sturm, Erdbeben) bezieht.

- **Jahresüberschaden-Rückversicherung** oder **Stop Loss**: Analog zu Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung, mit dem Unterschied, dass sich der Schadensbetrag S auf den Jahresschaden bezieht.

$$S_{EV} = min(S, \bar{a})$$

In der Praxis wird oft die Rückversicherung bei der Summen-, Einzelschaden-, Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung und bei Stop Loss ebenfalls begrenzt. D.h. wenn die zu übernehmenden Schäden einen gewissen Betrag $h > 0$ überschreiten, geht der Schadenbetrag oberhalb von h wieder zu Lasten des Erstversicherers, falls nicht eine weitere Rückversicherung mit höherer Priorität abgeschlossen wird.

Die oben genannten Rückversicherungsformen werden auch häufig miteinander kombiniert, um so Schutz gegen das Frequenzrisiko und das Großschadenrisiko zu erreichen. Bei Großschadenrisiken kann man sich prinzipiell auch Police für Police über Art und Umfang der Risikoteilung einigen (**fakultative Rückversicherung**). In dem in Kapitel 4 erläuterten Modell beschränken wir uns auf die Quoten-Rückversicherung, da diese in der Praxis gut anwendbar ist.

3.2.6 Spätschadenreserven

Zwischen dem Eintritt eines versicherten Schadenfalles und dessen endgültiger Regulierung verstreicht immer eine gewisse Zeit, da einerseits der Schaden dem Versicherungsunternehmen gemeldet und von diesem geprüft werden muss und andererseits die Regulierung selbst (insbesondere bei größeren Schäden) einige Zeit in Anspruch nehmen kann. Dies fürt dazu, dass ein unter Umständen erheblicher Teil der in einer Periode induzierten Schadenkosten erst in späteren Perioden realisiert wird. Sowohl die Höhe der in einer Rechnungsperiode gemeldeten, aber noch nicht regulierten Schäden als auch die Höhe der noch nicht gemeldeten Schäden muss geschätzt und in Form der Schadenreserve zurückgestellt werden. Die ausgewiesenen Schadenkosten der Periode entstammen somit nur zum Teil tatsächlich beobachteter Schäden.
Am Ende jeder Abrechnungsperiode gibt es folglich zwei Arten von Schäden, deren Höhe noch nicht definitiv bekannt ist (vergleiche auch Abbildung 3.4):

- Schäden, die zwar dem Versicherungsunternehmen gemeldet, aber von ihm noch nicht endgültig reguliert worden sind
  → **RBNS-Schäden** („reported but noch settled“)

- Schäden, die schon eingetreten bzw. verursacht worden sind, aber dem Versicherungsunternehmen noch nicht gemeldet wurden, bzw. vom Versicherungsnehmer noch nicht bemerkt wurden.
  → **IBNR-Schäden** („incurred, but not reported“)

Für RBNS-Schäden ist aufgrund von Erfahrung und verfügbarer Information eine Einzelfallreserve festzusetzen. Sind dann die tatsächlich anfallenden Kosten bekannt, führen diese zu Abwicklungsgewinnen oder -verlusten. Im Falle eines negativen Abwicklungsergebnisses wird dies mit IBNER-Schadenreserve („incurred [and reported] but not enough reserved") bezeichnet. Wenn aufgrund von Erfahrungen früherer Jahre mit IBNR-Schäden gerechnet werden muss, ist das Versicherungsunternehmen verpflichtet, eine angemessene IBNR-Schadenreserve zu stellen. Beide Schadensarten werden unter dem Begriff „**Spätschadenreserve**" zusammengefasst.

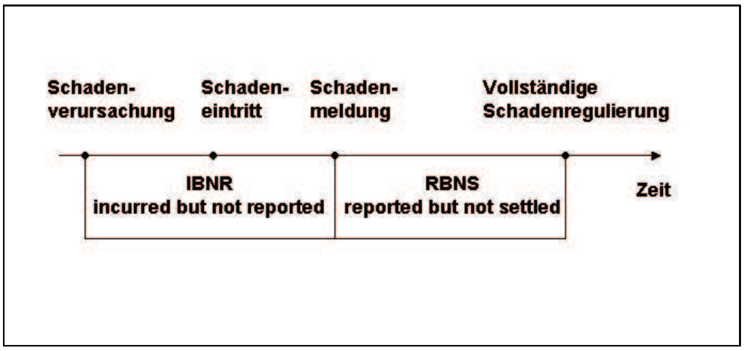

Abbildung 3.4: Zeitlicher Verlauf der Schadenabwicklung

Die Schätzung von Spätschadenreserven ist speziell in Branchen mit langer Abwicklungsdauer (z.B. Haftpflicht, Rechtsschutz,usw.) von großer Bedeutung für die Rechnungslegung und die Prämienkalkulation.

Insbesondere in den letzten Jahren ist eine große Zahl an mathematischen Reserveschätzverfahren entwickelt worden (z.B. Chain Ladder Verfahren[10]), die alle versuchen, die Erfahrungen früherer Anfalljahre (=Schadeneintrittsjahre) auf spätere Anfalljahre zu übertragen. Dies bedeutet aber auch, dass diese Verfahren versagen, wenn in den betrachteten Jahren Trend- oder Strukturbrüche stattfinden. In unserem Modell wird die Erfahrung der vergangenen Jahre durch die bedingte Erwartung (siehe Kapitel 2) modelliert.

3.2.7 Anlagekapital

Durch nicht unmittelbar auszahlungswirksame Prämienerlöse (bilanziell dokumentiert durch das versicherungstechnische Fremdkapital) und das Sicherheitskapital verfügt jedes Versicherungsunternehmen über ein nicht unbedeutendes Anlagekapital. Das Volumen des Anlagekapitals ist abhängig vom Versicherungszweig (z.B. integrierte Spar- bzw. Entsparprozesse bei der Lebensversicherung, Kranken- und Unfallversicherung mit Prämienrückgewähr). Die Verweildauer wird durch Schadenreservierungserfordernisse, die Vertragslänge und die Rückstellungserfordernisse zum Ausgleich jährlich schwankender Schäden

[10]Für eine ausführliche Darstellung der wichtigsten Reserveschätzverfahren siehe [vE81]

determiniert[11]. Die aus der Kapitalanlage erzielbaren Erträge sind stochastischer Natur und müssen deshalb geeignet modelliert werden. Das Kapitalanlagerisiko ist zwar nicht versicherungsspezifisch, es ist jedoch aufgrund seines großen Volumens von besonderer Bedeutung.

3.2.8 Rechtliche und institutionelle Rahmenbedingungen

Ein für die Versicherungswirtschaft wichtiges Regelwerk ist das Versicherungsaufsichtsgesetz (VAG). Die spezifischen Anforderungen an die Mindestkapitalausstattung von Versicherungsunternehmen sind im §53 c VAG[12] definiert. Dort heißt es in Absatz 1:

> „Versicherungsunternehmen sind verpflichtet, zur Sicherstellung der dauernden Erfüllbarkeit der Verträge freie unbelastete Eigenmittel mindestens in Höhe einer Solvabilitätsspanne zu bilden, die sich nach dem gesamten Geschäftsumfang bemisst. Ein Drittel der Solvabilitätsspanne gilt als Garantiefonds.“

Das Bundesministerium für Finanzen schreibt die Art der Berechnung sowie die Höhe der Solvabilitätsspanne vor und setzt somit das im Rahmen der europäischen Niederlassungsfreiheit konzipierte Solvabilitätssystem in deutsches Versicherungsaufsichtsrecht um[13]. Von der Aufsichtspflicht ausgenommen sind die in §1 II und III VAG genannten Versicherungsunternehmen wie z.B. öffentlich-rechtliche Versicherungsunternehmen des öffentlichen Dienstes. Der Solvabilitätnachweis ist der Bundesanstalt für Finanzdienstleistungen (BAFin, früher: Bundesaufsichtsamt für das Versicherungswesen - BAV) zusammen mit dem Jahresabschluss zur Überprüfung vorzulegen. Die Berechnung wird auf Basis des Jahresabschlusses des letzten Geschäftsjahres durchgeführt (§53 c IV VAG)[14].

Solvabilität im Sinne des Gesetzgebers liegt vor, wenn die Ist-Solvabilität mindestens der Soll-Solvabilität entspricht, also Deckung oder Überdeckung vorliegt[15]. Die gesetzlichen Anforderungen an die Solvabilität sind zwingend, sie können weder durch die BAFin höher angesetzt, noch von Versicherungsunternehmen sanktionslos unterschritten werden[16]. Eine Unterdeckung löst aufsichtsrechtliche Schritte aus. Nach §81 b VAG muss im Falle der Unterschreitung der Solvabilitätsspanne das Versicherungsunternehmen auf Verlangen der Aufsichtsbehörde einen Solvabilitätsplan (§81 b I VAG: „Plan zur Wiederherstellung gesunder Finanzverhältnisse“) zur Genehmigung vorlegen, der Maßnahmen zur Beeinflussung der Ist- oder Soll-Solvabilität enthalten soll.

---

[11] Vergleiche [Sch97a, S. 5]

[12] Vergleiche [Bun]

[13] Vergleiche hierzu auch die Verordnung über die Kapitalausstattung von Versicherungsunternehmen vom 13.12.1983 in der Fassung vom 24.07.1990 in: VerBAV 1990, S. 493-495

[14] Grundsätzlich müssen die Solvabilitätsanforderungen zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein. Die Einhaltung der Regelung bemisst sich aber tatsächlich allein nach den Verhältnissen am Bilanzstichtag, da die Angaben in der von den Unternehmen zu erstellenden Solvabilitätsübersicht der Handelsbilanz entnommen werden.

[15] Für eine ausführlichere Darstellung des Solvabilitätssystems vergleiche z.B. [Far89, Kapitel 531]

[16] Vergleiche [Sch97a, S. 19]

Bei Unterschreitung des Garantie- oder Mindestgarantiefonds wird das Versicherungsunternehmen verpflichtet, auf Verlangen der Aufsichtsbehörde einen Finanzierungsplan (§81 b II VAG: „Plan über die kurzfristige Beschaffung von Eigenmitteln“) zur Genehmigung vorzulegen.
Ist das betrachtete Versicherungsunternehmen außerstande, innerhalb der gesetzten Frist die im Solvabilitäts- oder Finanzierungsplan vorgesehenen Maßnahmen durchzuführen, kann die BAFin die Erlaubnis zum Geschäftsbetrieb nach §87 II VAG widerrufen.

Kapitel 4

Ein stochastisches Modell zur Ertragsoptimierung

Grundlage dieses Kapitels ist das von René Schnieper in [Sch97b] veröffentlichte Modell. Er untersucht darin den Zusammenhang zwischen dem Gewinn eines Versicherungsunternehmens und seinen Kapitalbedürfnissen. Das Kapital unterliegt jedoch gewissen Unsicherheiten (z.B. Zinsänderung über die Zeit), die für die Bestimmung der Kapitalbedürfnisse wiederum berücksichtigt werden müssen. Diese Arbeit weicht jedoch an vielen Stellen vom Original ab.

Wir betrachten das Versicherungsunternehmen vom Standpunkt seiner Eigner (z.B. Shareholder) oder von Finanzanalysten aus und entwickeln ein stochastisches Modell, das die Wechselwirkung zwischen Unternehmensrisiko und -ertrag optimiert. Angenommen, das Unternehmenskapital ist nicht gegeben, so leitet sich das nötige Kapitalniveau einerseits aus dem Streben der Eigner nach Gewinn ab und andererseits aus ihrer Risikoaversion. Nach einer kurzen Vorstellung des vollständigen Modells, treffen wir zunächst sehr restriktive Annahmen. Anhand des so definierten vereinfachten Modells werden grundlegende Begriffe erläutert und eine erste Nutzenoptimierung durchgeführt. Nach vorerst separater Betrachtung der Spätschadenreservierung wird das Modell durch Einbindung der Kapitalanlagen und der Spätschadenreserve vervollständigt. Die Aufteilung des Kapitals auf Einzelrisiken (z.B. Teile des Unternehmensportfolios) führt zu Gewinn-Benchmarks für die Einzelrisiken, die mit den Leistungszielen des gesamten Unternehmens übereinstimmen.

4.1 Allgemeines Modell für ein Versicherungsunternehmen

Dieser Abschnitt dient der Einführung der wichtigsten Bezeichnungen und soll einen ersten groben Überblick geben. Um ein möglichst praxisbezogenes Modell zu erhalten, das die Realität aber noch gut abbildet, werden folgende Modellannahmen getroffen:

Allgemeine Annahmen:

- Betrachtung des Versicherungsunternehmens unter rein finanz- und risikotheoretischen Gesichtspunkten.
- Keine Analyse der Marktstrategie oder der Qualität des Managements.
- Mikroökomomische Betrachtung, d.h. Konzentration auf ein einziges Versicherungsunternehmen.
- Bestimmung der Preise der Versicherungsprodukte durch das makroökonomische Gleichgewicht zwischen Angebot und Nachfrage, d.h. keine Beeinflussung durch das betrachtete Unternehmen.
- Betrachtung eines allgemeinen Versicherungsunternehmens. Das Modell kann aber nach geringfügigen Änderungen auch auf Lebensversicherungen angewendet werden.
- Bilanzen werden zu Marktwerten aufbereitet, d.h. Kapitalanlagen werden zu Marktpreisen bewertet und auf der Passivseite wird die aktuelle Zinsstruktur angewendet.
- Kosten finden keine Berücksichtigung.
- Dividenden werden ebenfalls nicht berücksichtigt.
- Die Unternehmenskonten basieren auf einem bestimmten Schadenjahr. Nach kleinen Änderungen kann aber auch jede andere gebräuchliche Basis (z.B. Jahr des Vertragsbeginns) verwendet werden.

Es wird folgende Notation verwendet: (zur Begriffserklärung siehe auch Kapitel 2)

S	Gesamtschaden des betrachteten Jahres (**Zeichnungsrisiko**)
$E[S]$	erwarteter Gesamtschaden
b	Sicherheitszuschlag (Schwankungszuschlag) für das Zeichnungsrisiko S
$\triangle L$	Veränderung der Rückstellung für Spätschäden (**Spätschadenreserve**) im laufenden Geschäftsjahr
$\triangle A$	Anlageerträge + realisierte Kapitalerträge + nicht realisierte Kapitalerträge (**Gewinn oder Verlust aus Kapitalanlagen**) des laufenden Geschäftsjahres
u	Unternehmenskapital zu Beginn des Geschäftsjahres
$\triangle$ U	Veränderung des Unternehmenskapitals (Gewinn oder Verlust) im laufenden Geschäftsjahr

Im Gleichgewicht von Vermögen und Verbindlichkeiten gilt folgende Beziehung:

$$\boxed{\triangle U = E[S] + b - S - \triangle L + \triangle A} \tag{4.1}$$

Dies bedeutet, dass die Veränderung des gesamten Unternehmenskapitals durch folgende Größen beeinflusst wird. Mit der eingenommenen Prämie[17] $(E[S]+b)$ und der Spätschadenreserve[18] soll der Gesamtschaden des betrachteten Jahres S beglichen werden. Der Gewinn oder Verlust, den das Unternehmen durch die Anlage des verfügbaren Kapitals[19] erzielt, wird im Modell durch $\triangle A$ repräsentiert.

Risiko und Ertrag

Die **Rendite des Unternehmens** ist gegeben durch:

$$R_U := \frac{\triangle U}{u} \tag{4.2}$$

Der **Ertrag** oder **Return** (d.h. die erwartete Rendite) bzw. das **Risiko** (d.h. die Standardabweichung der Rendite) des Unternehmens sind definiert als:

$$\mu := E[R_U] = \frac{E[\triangle U]}{u} \qquad \text{und} \tag{4.3}$$

$$\sigma := \sigma(R_U) = \frac{\sigma(\triangle U)}{u} \tag{4.4}$$

wobei $\sigma(\cdot)$ die Standardabweichung bezeichnet.

4.2 Einführung grundlegender Begriffe in einem vereinfachten Modell

In diesem Abschnitt werden grundlegenden Begriffe eingeführt und der Zusammenhang von Risiko und Ertrag anhand einer vereinfachten Version des allgemeinen Modells diskutiert.

4.2.1 Vereinfachtes Modell

Um ein vereinfachtes Modell zu erhalten, werden folgende Annahmen getroffen.

Annahmen 4.1

- *Die einzigen Anlageerträge stammen von der risikolosen Anlage des Eigenkapitals mit Rendite r_0:*

  $$\triangle A = r_0 \cdot u$$

  Somit wird implizit auch angenommen, dass das gesamte Unternehmenskapital u für die Kapitalanlage zur Verfügung steht.

[17]Vergleiche Kapitel 3.2.2.
[18]Vergleiche Kapitel 3.2.6.
[19]Vergleiche Kapitel 3.2.7.

- *Keine Berücksichtigung der Spätschadenreserve:*

$$\triangle L = 0$$

■

Statt (4.1) erhält man nun:

$$\boxed{\triangle U = E[S] + b - S + r_0 \cdot u} \tag{4.5}$$

mit Ertrag

$$\begin{aligned} \mu &\overset{(4.3)}{=} \frac{E[\triangle U]}{u} \\ &= \frac{E\big[E[S] + b - S + r_0 \cdot u\big]}{u} \\ &= \frac{E\big[E[S]\big] + b - E[S] + r_0 \cdot u}{u} \\ &= \frac{b}{u} + r_0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

und Risiko

$$\begin{aligned} \sigma &\overset{(4.4)}{=} \frac{\sigma(\triangle U)}{u} \\ &= \frac{\sigma\left(E[S] + b - S + r_0 \cdot u\right)}{u} \\ &= \frac{\sigma(S)}{u}, \quad \text{da } E[S], b \text{ und } r_0 \cdot u \text{ keine Zufallsvariablen sind.} \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.2.2 Performance-basiertes Kapital

Angenommen, das Unternehmenskapital **u ist nicht gegeben**. Es stellt sich nun die Frage, welches Kapitalniveau das Unternehmen benötigt, um eine gewisse Risiko-Ertrags-Kombination zu erreichen. Dieses sogenannte Performance-basierte Kapital wird im Folgenden hergeleitet.

Durch Einsetzen von (4.7) in (4.6) folgt:

$$\boxed{\mu - r_0 = k \cdot \sigma} \quad \text{mit} \quad k := \frac{\mu - r_0}{\sigma} = \frac{b}{\sigma(S)} \tag{4.8}$$

Der Ertrag μ und das Risiko σ liegen also auf einer Geraden mit Steigung k und Achsenabschnitt r_0 (siehe Abbildung 4.1). Die Gerade gibt somit die **Menge der erreichbaren Risiko-Ertrags-Paarungen** (σ^*, μ^*) für verschiedene Kapitalniveaus an.[20]

Man kann die Differenz $\mu^* - r_0$ als Risikoprämie interpretieren, die den Kapitalgebern die Übernahme des Risikos σ^* vergütet.

[20] R. Schnieper bezeichnet diese Gerade als **Effizienzlinie** der Menge aller effizienten Risiko-Ertrags-Paare (σ,μ), die vom Unternehmen erreicht werden können. Da dieser Begriff aber ein Standardbegriff der Portfoliotheorie ist (siehe z.B auch [Uhl94, S.186ff], [Spr00, Kapitel 4.2] oder [Elt95, Kapitel 5,6]) und sich nicht exakt auf dieses Modell übertragen lässt, soll in dieser Arbeit auf den Begriff Effizienzlinie verzichtet werden.

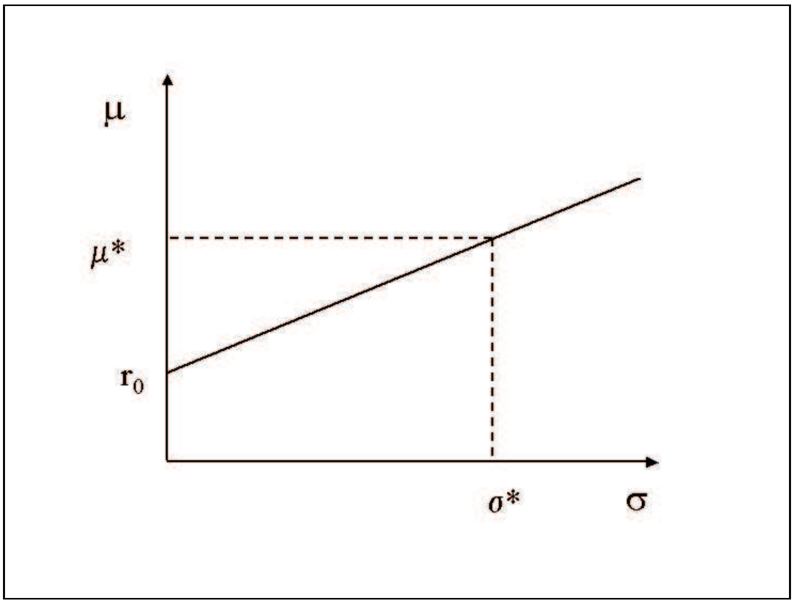

Abbildung 4.1: Gerade der vom Unternehmen erreichbaren Risko-Ertrags-Paarungen

Satz 4.2
Seien die Verteilung des Gesamtschaden S und der Sicherheitszuschlag b bekannt, dann ist die Wahl eines bestimmten Punktes (σ^*, μ^*) *auf der oben definierten Geraden* (4.8) *gleichbedeutend mit der Wahl eines Kapitalniveaus* u^* *des Unternehmens.*

Beweis:
i) Für gegebenes (σ^*,μ^*) auf der Geraden der erwarteten Risiko-Ertrags-Paarungen gilt:

$$u \overset{(4.7)}{=} \frac{\sigma(\triangle U)}{\sigma^*} = \frac{\sigma(S)}{\sigma^*} \overset{(4.8)}{=} \frac{\sigma(S)\cdot k}{\mu^* - r_0} \overset{(Def\ k)}{=} \frac{b}{\mu^* - r_0}$$

Als Kapitalniveau ergibt sich also

$$u = \frac{b}{\mu^* - r_0}.$$

ii) Falls u = u* gegeben ist, gilt andererseits:

$$\sigma \overset{(4.7)}{=} \frac{\sigma(\triangle U)}{u^*} \qquad \text{und} \qquad \mu \overset{(4.6)}{=} r_0 + \frac{b}{u^*} \qquad (+)$$

Es bleibt zu zeigen, dass (σ,μ) auf der Geraden liegt.
Einsetzen von (+) in (4.8) ergibt:

$$\begin{aligned}
\mu - r_0 - k\cdot\sigma &= r_0 + \frac{b}{u^*} - r_0 - \frac{b}{\sigma(S)}\cdot\frac{\sigma(\triangle U)}{u^*} \\
&= \frac{b}{u^*} - \frac{b}{\sigma(S)}\cdot\frac{\sigma(S)}{u^*} \quad (\text{da } \sigma(\triangle U) = \sigma(S)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

Die Wahl eines bestimmten Punktes auf der Gerade (4.8) ist einerseits abhängig vom Streben der Eigner und Investoren nach Gewinn und andererseits von ihrer Aversion gegen Risiko. Gewöhnlich wird dies durch **Indifferenzkurven**[21] (oder **Isonutzenkurven**) dargestellt. Es wird angenommen, dass alle auf einer gegebenen Kurve $\mu = f(\sigma)$ enthaltenen Risiko-Ertrags-Paarungen (σ,μ) denselben Nutzen erzeugen. Die Indifferenzkurven sind monoton steigend und werden mit wachsendem σ steiler (siehe Abbildung 4.3, S. 39). In Kapitel 4.2.3 betrachten wir eine quadratische Nutzenfunktion. Die für den Investor optimale Risiko-Ertrags-Paarung (σ^*,μ^*), die auch vom Unternehmen erreicht werden kann, ergibt sich als Berührungspunkt zwischen Indifferenzkurve und der Gerade der erwarteten Risiko-Ertrags-Paarungen.

Das optimale Kapitalniveau ist dann:

$$\boxed{u_P := \frac{\sigma(\triangle U)}{\sigma^*} = \frac{b}{\mu^* - r_0}} \tag{4.9}$$

Dies wird auch als **Performance-basiertes Kapital** bezeichnet.

Bemerkung:
Performance wird nach [Ste00, S. 568] als risikoadjustierte Rendite definiert. Mathematisch formuliert ist Performance der Überschuss der erzielten Anlagerendite über einer adäquaten Vergleichsrendite (Benchmarkrendite), wobei die Renditedifferenz mittels Division durch ein geeignetes Risikomaß standardisiert wird:

$$\text{Performance} = \frac{\text{Anlagerendite - Benchmarkrendite}}{\text{Risikomaß}}$$

Häufig wird Performance noch mit den Begriffen Rendite oder Leistungszuwachs gleichgesetzt. Dabei wird aber nur eine Dimension (die Rendite) abgebildet und es treten z.B. Probleme beim Vergleich verschiedener Anlagemöglichkeiten auf. Man würde in diesem Fall nur einen Anlagetitel im Portfolio halten und zwar den mit der höchsten erwarteten Rendite. Über das Risiko einer Kapitalanlage wird dabei nichts ausgesagt. Zur ausführlicheren Darstellung von Performance und Performance-Maßen sei auf [Spr00, Kap. 7] oder [Ste00, Kap. 9] verwiesen. ■

4.2.3 Quadratische Nutzenfunktion

Wie findet man aber nun das optimale Risiko-Ertrags-Paar (σ^*,μ^*)? Die Präferenzen der Eigner des Unternehmens werden durch eine wachsende konkave Nutzenfunktion $V = V(R_U)$ abgebildet. Bei bekannter Risiko-Ertrags-Präferenz möchte man einerseits einen möglichst hohen erwarteten Ertrag erzielen, andererseits will man jedoch das Risiko möglichst gering halten. Da man nicht gleichzeitig den Ertrag maximieren und das Risiko minimieren kann (da ein bestimmtes Risiko einen bestimmten Ertrag impliziert und umgekehrt), wird unterstellt, dass der erwartete Nutzen $\nu = E[V(R_U)]$ des Unternehmens

[21] Für eine ausführlichere Darstellung von Indifferenzkurven siehe z.B. [Sha99].

einzig durch Ertrag und Risiko determiniert wird. Positiver Nutzen wird dabei durch Erträge generiert, negativer Nutzen entsteht durch höheres Risiko. Das optimale Risiko-Ertragspaar erhält man somit durch Optimierung des erwarteten Nutzens $\nu = \nu(\sigma, \mu)$.

Bemerkung:
Wachsende konkave Nutzenfunktion $V(R_U)$ bedeutet:

- $V'(R_U) > 0$: je höher die Rendite, desto besser.
- $V''(R_U) < 0$: eine Erhöhung der Rendite um einen festen Betrag ist umso weniger erstrebenswert, je größer die Rendite bereits ist: Risikoaversion ■

Dies bedeutet, dass das angestrebte Sicherheitsniveau in der speziellen Wahl der Nutzenfunktion V zum Ausdruck kommt.

Schnieper verwendet in seinem Modell folgende Nutzenfunktion:

$$\begin{aligned} V(R_U) &= a + b \cdot R_U - c \cdot R_U^2 \\ &= c \cdot \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} \cdot R_U - R_U^2 \right) \\ &=: c \cdot \left(\hat{a} + \theta \cdot R_U - R_U^2 \right) \quad \text{mit} \quad a, b \geq 0, c > 0. \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass die Eigner des Unternehmens bzw. die Manager, die in ihrem Auftrag handeln, folgende quadratische **Nutzenfunktion** (Abb. 4.2) haben:

$$\boxed{\mathcal{V}(R_U) = \mu^2 + \theta \cdot R_U - R_U^2}, \quad \theta \geq 0 \tag{4.10}$$

Bemerkung:
Bei der Nutzenfunktion $\mathcal{V}(R_U)$ wurde $\hat{a} := \mu^2$ gesetzt, da μ durch R_U gegeben ist. Des weiteren wurde der konstante Faktor c weggelassen, da er keinen Einfluss auf die Lage der Optimalstelle hat. ■

Bestimmung der Optimalstelle:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}'(R_U) &= \theta - 2R_U \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow \; R_U^* = \frac{\theta}{2} =: r_{max} \\ \mathcal{V}''(R_U) &= -2 < 0 \qquad \Rightarrow \text{Maximum} \\ \mathcal{V}(R_U^*) &= \frac{\theta^2}{4} + \mu^2 \end{aligned}$$

Folglich wird das Maximum der Nutzenfunktion an der Stelle $(\frac{\theta}{2}, \frac{\theta^2}{4} + \mu^2)$ angenommen. Der Definitionsbereich wird eingeschränkt auf $0 \leq R_U \leq r_{max}$ (da für $R_U \geq r_{max}$ die

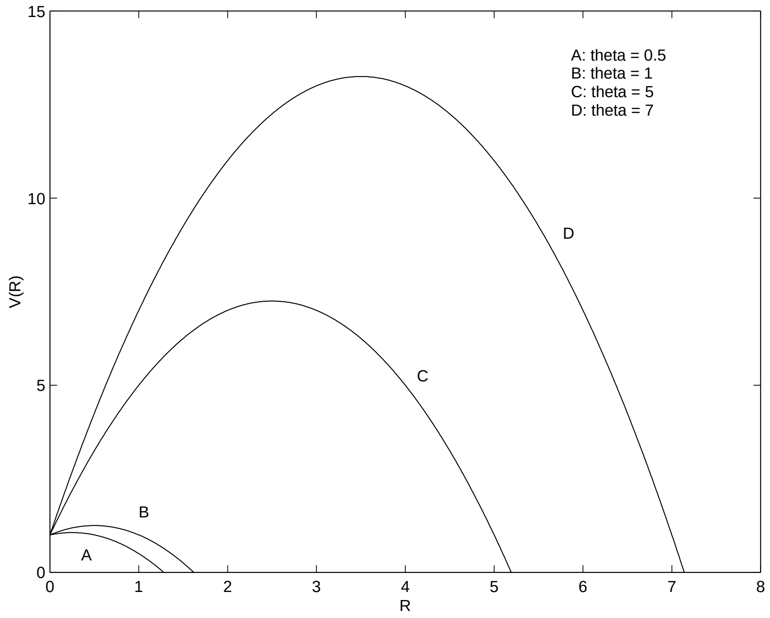

Abbildung 4.2: Nutzenfunktionen $\mathcal{V}(R_U) = \theta \cdot R_U - R_U^2 + \mu^2$ mit $\mu^2 = 1$

Funktion monoton fallend ist, d.h. der Nutzen wieder abnimmt) und wir erhalten den **Erwartungsnutzen** $\nu(\mu, \sigma^2)$, der eine Schar von **Indifferenzkurven** definiert:

$$\begin{aligned} \nu(\mu, \sigma^2) &:= E[\mathcal{V}(R_U)] = \mu^2 + \theta \cdot \underbrace{E[R_U]}_{=\mu} - \underbrace{E[R_U^2]}_{=\sigma^2+\mu^2} \\ &= \theta \cdot \mu - \sigma^2, \end{aligned} \tag{4.11}$$

Obige Formel stellt nun den funktionalen Zusammenhang (**Trade-Off**) zwischen Ertrag μ und Risiko σ dar. Alle Paare (σ, μ), die den gleichen Wert $\nu = E[\mathcal{V}(R_U)]$ annehmen, befinden sich auf derselben Indifferenzkurve und generieren deshalb denselben Nutzen.
Der einzige Parameter θ bildet den Zusammenhang zwischen Ertrag, Risiko und dem (individuellen) Grad an Risikoaversion im Risko-Ertrags-Raum (σ, μ) ab und wird (nach [Uhl94] S. 145) als **Risiko-Ertrags-Präferenz-Parameter** bezeichnet. Er lässt sich folgendermaßen interpretieren:
Aus (4.11) folgt mit $\bar{\nu} \equiv \nu(\mu, \sigma^2)$, d.h. $\mu = \mu(\sigma) = \frac{\bar{\nu}}{\theta} + \frac{1}{\theta} \cdot \sigma^2$

$$\mu'(\sigma) = \frac{2}{\theta} \cdot \sigma.$$

Geometrisch entspricht θ also dem Kehrwert des Anstiegs der Tangente $\left(\frac{2}{\theta}\right)$, die an den Berührungspunkt zwischen der Indifferenzkurve und der Gerade der möglichen Risiko-Ertrags-Paarungen gelegt wird (= Steigung der Gerade). Ökonomisch bedeutet Gleichung (4.11), dass das Unternehmen für eine Risikoeinheit mehr (hier: Varianz als Risikomaß) das θ-fache an Ertrag fordert. Wie der Risiko-Ertrags-Präferenz-Parameter ermittelt werden kann, wird z.B. in [Spr96, S. 502] erläutert.

Unter der Annahme, dass die Gerade der für das Unternehmen erreichbaren Risiko-Ertrags-Paarungen (4.8) gegeben ist, berechnen wir nun das optimale Risiko-Ertrags-Paar (σ^*, μ^*), das den Erwartungsnutzen (4.11) des Unternehmens maximiert (vergleiche Abbildung 4.3).

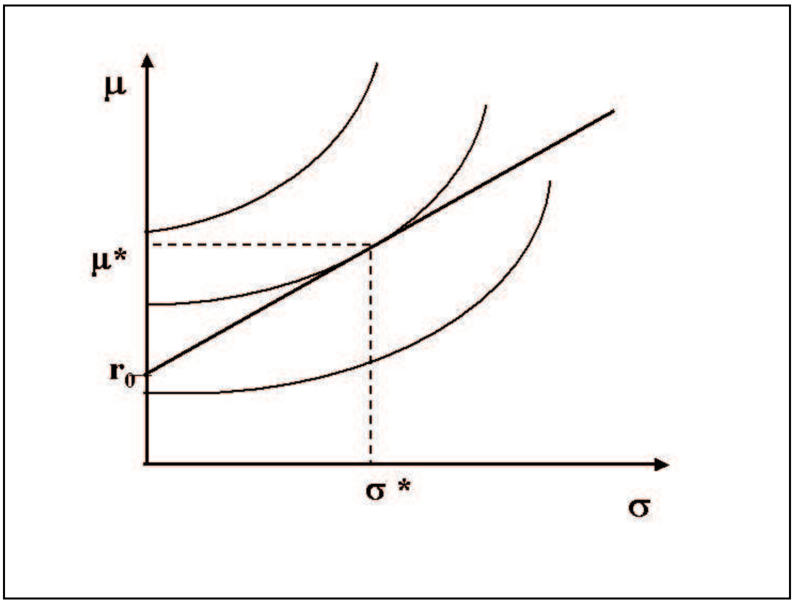

Abbildung 4.3: Drei Indifferenzkurven im Risiko-Ertrags-Raum

Lemma 4.3
Gegeben sei die Gerade der erreichbaren Risiko-Ertrags-Paare

$$\mu = k \cdot \sigma + r_0 \,.$$

Die Erwartungsnutzenfunktion

$$\nu(\mu, \sigma^2) = \theta \cdot \mu - \sigma^2$$

wird durch das Risiko-Ertrags-Paar

$$\mu^* = \frac{\theta}{2} k^2 + r_0 \tag{4.12}$$

$$\sigma^* = \frac{\theta}{2} k \tag{4.13}$$

maximiert. Der maximale Erwartungsnutzen ν^* ist folglich

$$\nu^* = \frac{\theta^2}{4} k^2 + r_0$$

und das zugehörige Performance-basierte Kapital beläuft sich auf

$$u_P = \frac{2}{\theta \cdot b} \cdot \sigma^2(S).$$

Beweis:
Gegeben:

(I) $\nu(\mu, \sigma^2) = \theta \cdot \mu - \sigma^2$

(II) $\mu = k \cdot \sigma + r_0$

Gesucht: (σ^*,μ^*) auf (II), so dass (I) maximiert wird.

Einsetzen von (II) in (I) ergibt:

$$\nu = \theta(k \cdot \sigma + r_0) - \sigma^2$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial \sigma} = \theta k - 2\sigma \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow \ \sigma = \frac{\theta}{2} k$$

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial \sigma^2} \ = \ -2 < 0 \qquad \Rightarrow Maximum$$

Das optimale Risiko-Ertrags-Paar (vgl. Abbildung 4.3), das den Erwartungsnutzen des Unternehmens maximiert, ist folglich

$$\begin{aligned} \mu^* &= \frac{\theta}{2} k^2 + r_0 \\ \sigma^* &= \frac{\theta}{2} k \end{aligned}$$

mit optimalem Erwartungsnutzen

$$\begin{aligned} \nu^* &= \nu^*(\mu^*, (\sigma^*)^2) \\ &= \theta \cdot \frac{\theta}{2} k^2 + r_0 - \frac{\theta^2}{4} k^2 \\ &= \frac{\theta^2}{4} k^2 + r_0 \,. \end{aligned}$$

Das zugehörige Performance-basierte Kapital ist dann nach (4.9) gegeben durch

$$\begin{aligned} u_P &= \frac{b}{\mu^* - r_0} \stackrel{(4.12)}{=} \frac{b}{\frac{\theta}{2} \cdot k^2} = \frac{2b}{\theta \cdot k^2} \\ &\stackrel{(4.8)}{=} \frac{2}{\theta \cdot b} \cdot \sigma^2(S). \end{aligned}$$

■

4.3 Optimierung des Erwartungsnutzens im vereinfachten Modell

4.3.1 Einleitung

In diesem Kapitel gelten wieder die Annahmen (4.1) von Seite 33. Das Unternehmenskapital **u** ist nicht mehr frei wählbar, sondern **gegeben**. Aus der Gerade der möglichen Risiko-Ertrags-Paarungen $\mu - r_0 = k \cdot \sigma$ ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen Risiko (σ) und Überschussrendite ($\mu - r_0$) des Unternehmens. Alle Punkte auf dieser Geraden haben denselben **Risiko-Ertrags-Quotienten**

$$k := \frac{\mu - r_0}{\sigma} = \frac{b}{\sigma(S)} \; .$$

Ziel ist es, eine möglichst hohe Überschussrendite bei möglichst geringem Risiko zu erreichen. Da sich jedoch nicht gleichzeitig die Rendite maximieren und das Risiko minimieren lässt, wird auf die im vorangegangenen Kapitel eingeführte Erwartungsnutzenfunktion $\nu(\mu, \sigma^2)$ zurückgegriffen. Durch Weitergabe eines Teils der Risiken in Form einer Rückversicherung kann der Erwartungsnutzen bei gegebenen Sicherheitszuschlägen b_i $(i = 1, \ldots, I)$ der Einzelrisiken $S_1, \ldots, S_I$ beeinflusst werden. Das Unternehmen ist dabei daran interessiert, den Erwartungsnutzen zu maximieren. Im Folgenden wird gezeigt, wie das erreicht werden kann.

4.3.2 Quoten-Rückversicherung

Bezeichnen $S_1, S_2, \ldots, S_I$ die Risiken der verschiedenen Versicherungsportfolios $i = 1, \ldots, I$ und $S = \sum_{i=1}^{I} S_i$ den Gesamtschaden des Unternehmens. Unter der Annahme einer geeigneten Gesamtschadenverteilung (vgl. Kapitel 2.2.4) kann man den Sicherheitszuschlag b des Gesamtrisikos bestimmen (S. 17). Dieser lässt sich gemäß dem in Kapitel 2.2.3 (Gleichung (3.3)) eingeführten Kovarianzprinzip auf die Einzelrisiken $S_1, \ldots, S_I$ aufteilen. b_i bezeichnet im Folgenden den für Risiko i gegebenen Sicherheitszuschlag und σ_i^2 dessen Varianz $(1 \le i \le I)$.

Es wird angenommen, dass das Unternehmen nun nicht mehr das volle Zeichnungsrisiko S alleine trägt, sondern für jedes Einzelrisiko S_i einen Teil α_i selbst behält und den verbleibenden Teil $(1 - \alpha_i)$ an seinen Rückversicherer abtritt (Quoten-Rückversicherung, vergleiche auch S. 26).

Als notwendige Forderung ergibt sich:

$$0 \le \alpha_i \le 1 \qquad \text{für i = 1,\ldots,I.}$$

Für den Erstversicherer bleiben folgende Größen erhalten:

$$
\begin{aligned}
S_{EV} &= \sum_{i=1}^{I} \alpha_i S_i && (4.14)\\
E[S_{EV}] &= \sum_{i=1}^{I} \alpha_i E[S_i] && (4.15)\\
b_{EV} &= \sum_{i=1}^{I} \alpha_i b_i = \underline{\alpha}^\top \underline{b} && (4.16)\\
Var[S_{EV}] &= Var\left[\sum_{i=1}^{I} \alpha_i S_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{I} \alpha_i\alpha_j \underbrace{Cov[S_i, S_j]}_{=:\,\sigma_{ij}} \\
&=: \underline{\alpha}^\top \Sigma\, \underline{\alpha} && (4.17)
\end{aligned}
$$

mit $\underline{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_I)^\top$, $\underline{b} := (b_1, \ldots, b_I)^\top$ und $\Sigma := (\sigma_{ij})_{i,j=1,\ldots,I}$ mit $\sigma_{ii} := \sigma_i^2 := Var[S_i]$.

Folglich erhält man nach Rückversicherung statt (4.5) die Gleichung

$$\boxed{\triangle U = E[S_{EV}] + b_{EV} - S_{EV} + r_0 \cdot u}. \qquad (4.18)$$

Das Rückversicherungsunternehmen wird ohne Rücksicht auf die Größe eines Risikos mit einem bestimmten einheitlichen Prozentsatz an allen gezeichneten Risiken beteiligt und erhält als Kompensation einen entsprechenden (proportionalen) Teil der vom Erstversicherer vereinnahmten Prämie. Der Betrag $(1 - \alpha_i) \cdot E[S_i] + (1 - \alpha_i) \cdot b_i$ geht somit für jedes Einzelrisiko S_i $(1 \leq i \leq I)$ in die Gewinn- und Verlustrechnung des Erstversicherers als Aufwand ein.

4.3.3 Optimierung mittels Rückversicherung

Für den Erstversicherer ergibt sich mit (4.16) und (4.17) folgender Risiko-Ertrags-Quotient:

$$
\begin{aligned}
k_{EV} &\overset{(4.8)}{=} \frac{b_{EV}}{\sigma(S_{EV})} = \frac{\sum_{i=1}^{I} \alpha_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{I} \alpha_i\alpha_j\sigma_{ij}}} \\
&= \frac{\underline{\alpha}^\top \underline{b}}{\sqrt{\underline{\alpha}^\top \Sigma\, \underline{\alpha}}} \qquad \text{mit} \quad \underline{\alpha}^\top \Sigma\, \underline{\alpha} > 0 && (4.19)
\end{aligned}
$$

Wie bestimmt man nun die optimalen α_i $(i = 1, \ldots, I)$, die das Verhältnis Rendite zu Risiko bei gegebener Risikoaversion (bestimmt durch θ) maximieren? Die Idee ist, dass man den erwarteten Nutzen ν bezüglich α_i für $i = 1, \ldots, I$ maximiert und damit das für den Erstversicherer optimale Verhältnis berechnet.

Satz 4.4
Seien $S_1, S_2, \ldots, S_I$ die Risiken der Teilportfolios $i = 1, \ldots, I$, $S = \sum_{i=1}^{I} S_i$ das Risiko des Gesamtportfolios und die Kovarianzmatrix Σ sei positiv definit[22].
Die Erwartungsnutzenfunktion

$$\underline{\alpha} \mapsto \nu(\mu_{EV}(\underline{\alpha}), \sigma^2_{EV}(\underline{\alpha})) = \theta \cdot \mu_{EV}(\underline{\alpha}) - \sigma^2_{EV}(\underline{\alpha}), \quad \theta \geq 0$$

wird durch

$$\underline{\alpha} = \frac{1}{2}\,\theta u\,\Sigma^{-1}\underline{b} \tag{4.20}$$

maximiert. Der optimale Netto-Risiko-Ertrags-Quotient ist dann:

$$k_{EV} = \sqrt{\underline{b}^\top \Sigma^{-1} \underline{b}} \quad (\textit{unabhängig von } \underline{\alpha}!) \tag{4.21}$$

Beweis:
Die Erwartungsnutzenfunktion ist gegeben durch

$$\nu(\mu_{EV}(\underline{\alpha}), \sigma^2_{EV}(\underline{\alpha})) = \theta \cdot \mu_{EV}(\underline{\alpha}) - \sigma^2_{EV}(\underline{\alpha}), \quad \theta \geq 0\,.$$

Mit

$$\begin{aligned}
\mu_{EV} &= f(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) \overset{(4.6)}{=} \frac{b_{EV}}{u} + r_0 \\
&\overset{(4.16)}{=} \frac{\underline{\alpha}^\top \underline{b}}{u} + r_0 \qquad \text{und} \\
\sigma_{EV} &= g(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) \overset{(4.7)}{=} \frac{\sigma(S_{EV})}{u} \\
&\overset{(4.17)}{=} \frac{\sqrt{\underline{\alpha}^\top \Sigma \underline{\alpha}}}{u}.
\end{aligned}$$

folgt

$$\nu(\alpha_1, \ldots, \alpha_I) = \theta \cdot \left(\frac{\underline{\alpha}^\top \underline{b}}{u} + r_0 \right) - \frac{\underline{\alpha}^\top \Sigma \underline{\alpha}}{u^2}\,.$$

1. Ableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \nu(\underline{\alpha})}{\partial \underline{\alpha}} &= \frac{\theta}{u} \cdot \underline{b} - \frac{2}{u^2} \cdot \Sigma \underline{\alpha} \overset{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow \quad \underline{\alpha} &= \frac{\theta \cdot u}{2} \cdot \Sigma^{-1} \underline{b}
\end{aligned}$$

2. Ableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \nu(\underline{\alpha})}{\partial \underline{\alpha}^2} &= -\frac{2}{u^2} \cdot \Sigma := H \quad (= \text{Hessematrix}) \\
&\Rightarrow \; H \text{ ist negativ definit, da } \Sigma \text{ positiv definit} \\
&\Rightarrow \; \text{Maximum}
\end{aligned}$$

[22] Σ ist $\binom{\textbf{positiv}}{\textbf{negativ}}$ **definit** $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte sind $\binom{>}{<}\, 0 \Leftrightarrow \underline{x}^\top \Sigma\, \underline{x} \binom{>}{<}\, 0 \quad \forall\, x \neq 0$.

Der optimale Risiko-Ertrags-Quotient für den Erstversicherer ist folglich

$$\begin{aligned}
k_{EV} &\overset{(4.19)}{=} \frac{\underline{\alpha}^\top \underline{b}}{\sqrt{\underline{\alpha}^\top \Sigma\, \underline{\alpha}}} \\
&\overset{(4.20)}{=} \frac{(\frac{1}{2}\theta u \underline{b})^\top \Sigma^{-1} \underline{b}}{\sqrt{\frac{1}{4}\theta^2 u^2 \underline{b}^\top \underbrace{\Sigma^{-1}\Sigma}_{=\mathbb{E}} \Sigma^{-1} \underline{b}}} \qquad \mathbb{E}\text{: Einheitsmatrix} \\
&= \frac{\underline{b}^\top \Sigma^{-1} \underline{b}}{\sqrt{\underline{b}^\top \Sigma^{-1} \underline{b}}} \\
&= \sqrt{\underline{b}^\top \Sigma^{-1} \underline{b}} \qquad \text{(unabhängig von } \underline{\alpha}\text{).}
\end{aligned}$$

■

Bemerkung:
Das Optimierungsproblem wurde ohne Nebenbedingungen gelöst. Verletzt obige Lösung (4.20) die Restriktion $0 \leq \underline{\alpha} \leq 1$, so ist diese Nebenbedingung in das Optimierungsproblem aufzunehmen. Dabei ist $0 \leq \underline{\alpha} \leq 1$ komponentenweise zu lesen. Da sich die Lösung des neuen Problems nicht mehr geschlossen darstellen läßt, ist eine numerische Berechnung erforderlich. Das Optimum $\underline{\alpha}^*$ von

$$-\nu(\mu_{EV}(\underline{\alpha}), \sigma^2_{EV}(\underline{\alpha})) \rightarrow Minimum$$

$$\begin{aligned}
c_1(\underline{\alpha}) &= \underline{\alpha} \geq 0 \\
c_2(\underline{\alpha}) &= 1 - \underline{\alpha} \geq 0
\end{aligned}$$

muss die folgenden Nebenbedingungen (Kuhn/Tucker[23]) erfüllen:

(KKT 1) $\quad L_{\alpha_i}(\underline{\alpha}, y_1, y_2) = 0 \qquad$ für $i = 1, \ldots, I$

mit Ableitung der Lagrangefunktion nach α_i:

$$L_{\alpha_i}(\underline{\alpha}, y_1, y_2) = \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\Big(\sigma^2(\underline{\alpha}) - \theta \cdot \mu(\underline{\alpha}) - \underline{y}_1^\top \underline{\alpha} - \underline{y}_2^\top (\underline{1} - \underline{\alpha})\Big)$$

(KKT 2) $\quad c_1(\underline{\alpha}) \geq 0, \quad$ d.h. $\alpha_i \geq 0 \quad$ für $i = 1, \ldots, I$

$c_2(\underline{\alpha}) \geq 0, \quad$ d.h. $(1 - \alpha_i) \geq 0 \quad$ für $i = 1, \ldots, I$

(KKT 3) $\quad \underline{y_1}^\top c_1(\underline{\alpha}) = 0, \quad$ d.h. $\displaystyle\sum_{i=1}^{I} y_{1i} \cdot \alpha_i = 0$

$\underline{y_2}^\top c_2(\underline{\alpha}) = 0, \quad$ d.h. $\displaystyle\sum_{i=1}^{I} y_{2i} \cdot (1 - \alpha_i) = 0$

■

[23] Vergleiche [Fle81, Seite 51] und Seite 64 dieser Arbeit.

Spezialfall: unkorrelierte Teilrisiken

Seien $S_1, S_2, \ldots, S_I$ die unkorrelierten Teilrisiken des Gesamtportfolios $S = \sum_{i=1}^{I} S_i$. Für den Erstversicherer gilt nun:

$$\begin{aligned} Var[S_{EV}] &= Var\left[\sum_{i=1}^{I} \alpha_i S_i\right] \\ &\overset{S_i\ unkorr.}{=} \sum_{i=1}^{I} \alpha_i^2 \underbrace{Var[S_i]}_{=:\,\sigma_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^{I} \alpha_i^2 \sigma_i^2 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Die restlichen Größen ($S_{EV}, E[S_{EV}], b_{EV}$) bleiben unverändert (vergleiche Seite 42).

Als Risiko-Ertrags-Quotient erhält der Erstversicherer somit den Ausdruck

$$k_{EV} = \frac{b_{EV}}{\sigma(S_{EV})} = \frac{\sum_{i=1}^{I} \alpha_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{I} \alpha_i^2 \sigma_i^2}} \qquad \text{falls mindestens ein } \alpha_i > 0\,. \tag{4.23}$$

Die den Erwartungsnutzen optimierenden $\alpha_1, \ldots, \alpha_I$ sind im Fall unkorrelierter Risiken wie in folgendem Korollar gegeben.

Korollar 4.5

Seien $S_1, S_2, \ldots, S_I$ die unkorrelierten Risiken der Teilportfolios $i = 1, \ldots, I$, $S = \sum_{i=1}^{I} S_i$ das Risiko des Gesamtportfolios und die Kovarianzmatrix Σ sei positiv definit. Die Erwartungsnutzenfunktion

$$\nu(\mu_{EV}(\underline{\alpha}), \sigma_{EV}^2(\underline{\alpha})) = \theta \cdot \mu_{EV}(\underline{\alpha}) - \sigma_{EV}^2(\underline{\alpha}), \quad \theta \geq 0 \tag{4.24}$$

wird durch

$$\alpha_i = \frac{\theta}{2} \cdot \frac{b_i}{\sigma_i^2} \cdot u \qquad \textit{für } i = 1, \ldots, I \tag{4.25}$$

maximiert. Der optimale Netto-Risiko-Ertrags-Quotient ist dann

$$k_{EV} = \sqrt{\sum_{i=1}^{I} \frac{b_i^2}{\sigma_i^2}} \qquad \textit{(unabhängig von } \underline{\alpha}\textit{)}. \tag{4.26}$$

Beweis: folgt aus Satz 3.3 und (4.23). ■

Bemerkung:

Unter Berücksichtigung der Nebenbedingung $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $i = 1, \ldots, I$, muss das Optimierungsproblem analog zum allgemeinen Fall wieder über die Kuhn/Tucker-Bedingungen numerisch gelöst werden. ■

4.4 Die Spätschadenreserve

Im folgenden Kapitel wird das vereinfachte Modell erweitert. Es werden nun auch RBNS- und IBNR-Schäden (vergleiche Kapitel 2.2.6) berücksichtigt. Dies bedeutet, dass die Annahme $\triangle L = 0$ nicht mehr zutreffend ist. Somit erhält man statt (4.5) die Gleichung

$$\boxed{\triangle U = E[S] + b - S - \triangle L + r_0 \cdot u}\,. \tag{4.27}$$

Wie man die benötigte Spätschadenreserve $\triangle L$ berechnen kann, wird im Folgenden hergeleitet.

4.4.1 Das Abwicklungsdreieck

Jeder Schaden hat eine individuelle Historie[24]:

- Er entsteht in einem Anfalljahr.
- Der Schaden wird dem Versicherungsunternehmen gemeldet.
- Das Versicherungsunternehmen leistet eine erste Zahlung und bildet für eventuell erforderliche weitere Zahlungen eine Einzelschadenreserve.
- Der Schaden wird abschließend reguliert.

Die Regulierung eines einzelnen Schadens und damit erst recht die Regulierung aller Schäden aus einem Anfalljahr, kann sich über mehrere Abwicklungsjahre erstrecken.
Grundlage für die Bestimmung von Spätschadenreserven ist das sogenannte **Abwicklungsdreieck**, in dem für jedes Anfalljahr und jedes Abwicklungsjahr die geleisteten Zahlungen aufgeführt sind. Zur besseren Anschauung betrachten wir folgendes Beispiel.

Beispiel 1:[Sch02, S. 270]
Unmittelbar nach Ende des Jahres 2000 liegt das folgende Abwicklungsdreieck für die für Schäden aus den Anfalljahren 1995-2000 in den einzelnen Abwicklungsjahren geleisteten Zahlungen (in Tausen €) vor:

	Abwicklungsjahre					
Anfalljahre	1995	1996	1997	1998	1999	2000
1995	1001	854	568	565	347	148
1996		1113	990	671	648	422
1997			1265	1168	800	744
1998				1490	1383	1007
1999					1725	1536
2000						1889

[24]Vergleiche [Sch02, Kapitel 11] und Abbildung 3.4

Richten wir z.B. unseren Blick auf das Anfalljahr 1999. Für Schäden aus dem Anfalljahr 1999 wurden noch im selben Jahr 1.725.000 € und im folgenden Abwicklungsjahr 2000 1.536.000 € gezahlt.

Notiert man die Anfall- und Abwicklungsjahre nicht als Kalenderjahre, sondern als relative Anfall- bzw. Abwicklungsjahre, so erhält man folgendes Abwicklungsdreieck.

	Abwicklungsjahr t					
Anfalljahr s	1	2	3	4	5	6
1995 = 1	1001	854	568	565	347	148
1996 = 2	1113	990	671	648	422	
1997 = 3	1265	1168	800	744		
1998 = 4	1490	1383	1007			
1999 = 5	1725	1536				
2000 = 6	1889					

In dieser Darstellung lässt sich z.B. erkennen, ob die bisher geleisteten Zahlungen einen Trend in den Anfalljahren oder ein bestimmtes Muster in den Abwicklungsjahren aufweisen. ■

Das in Beispiel 1 präsentierte Verfahren lässt sich relativ einfach auf den allgemeinen Fall ausweiten, wie Tabelle 4.1 zeigt. Dabei betrachten wir w Anfalljahre und nehmen an, dass jeder Schaden entweder im Anfalljahr selbst oder in einem der $w-1$ folgenden Kalenderjahre abschließend reguliert wird. Das laufende Kalenderjahr wird mit $w+1$ bezeichnet. Es ist nicht im Abwicklungsdreieck enthalten, da für dieses Jahr noch keine Zahlungen geleistet wurden.

	Abwicklungsjahr t						
Anfalljahr s	1	2	3	4	. .	.	w
1	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}	Z_{14}	. .	.	Z_{1w}
2	Z_{21}	Z_{22}	.	.	. .	$Z_{2,w-1}$	
3	Z_{31}	.			.		
.	.	.			.		
.	.	.		.			
.	.	.	.				
$w-1$	.	$Z_{w-1,2}$					
w	Z_{w1}						

Tabelle 4.1: Abwicklungsdreieck: Aufgeführt sind alle Zahlungen, die bereits geleistet wurden.

Wir betrachten also eine Familie $\{Z_{s,t}\}_{s,t\in\{1,\dots,w\}}$ von Zufallsvariablen, wobei $Z_{s,t}$ den **im Abwicklungsjahr t aufgewendeten Betrag für im Anfalljahr s eingetretene Schäden** bezeichnet. Als **Anfall-**, **Ereignis-** oder **Vertragsjahr** wird dabei dasjenige

Jahr bezeichnet, in dem der Schaden eingetreten, bzw. dem er buchhalterisch zuzurechnen ist. Das 1. **Abwicklungsjahr** (t=1) ist das Anfalljahr selbst, das 2. Abwicklungsjahr (t=2) ist das dem Anfalljahr folgende Kalenderjahr, usw. Das Jahr der Risikoübernahme wird mit $t = 0$ bezeichnet. Die Zahlung $Z_{s,t}$ wird somit im (relativen) Kalenderjahr $s+t-1$ geleistet. Folglich werden die auf einer Diagonalen stehenden Beträge - für Schäden aus den verschieden Anfalljahren - im gleichen Jahr bezahlt. Da wir uns am Ende von Kalenderjahr w befinden, sind die Zahlungen $Z_{s,t}$ für $s + t - 1 \leq w$ schon geleistet. Vom jüngsten Anfalljahr $s = w$ sind lediglich die Schäden bekannt, die im Laufe dieses Jahres eingetreten sind und gemeldet wurden. Vom am längsten zurückliegenden Anfalljahr $s = 1$ sind $t = w$ Abwicklungsjahre bekannt. Die Zahlungen, die das abgelaufene Kalenderjahr betreffen (Z_{w1},$Z_{w-1,2}$,...,Z_{1w}), stehen somit auf der Hypothenuse des Abwicklungsdreiecks und sind gegenüber der entsprechenden Situation vor einem Jahr neu hinzugekommen. Für die richtige Modellbildung ist hier festzuhalten, dass für jedes Anfalljahr s die Beträge $Z_{s,t}$ mit wachsendem t tendenziell abnehmen (evtl. nach einem kurzen Anstieg zu Beginn) und schließlich, nach spätestens w Jahren, gleich Null werden. Bei zunehmender Abwicklungsdauer wird es nämlich immer unwahrscheinlicher, dass sich noch Änderungen im Schadenstand ergeben.

Ergänzt man das Abwicklungsdreieck aus Tabelle 4.1 zu einem Quadrat, so erhält man die noch ausstehenden Zahlungen, für die eine Reserve gebildet werden muss. In Tabelle 4.2 sind diese Zahlungen aufgeführt.

		Abwicklungsjahr t						
Anfalljahr s	1	2	3	4	.	.	$w-1$	w
1								
2								$Z_{2,w}$
3							.	$Z_{3,w}$
.						.		.
.					.			.
.				.				.
$w-1$			.					$Z_{w-1,w}$
w		$Z_{w,2}$	$Z_{w,3}$	.	.	.	$Z_{w,w-1}$	$Z_{w,w}$

Tabelle 4.2: Zahlungen, für die eine Spätschadenreserve gebildet werden muss

Für eine realistische Modellbildung schließt sich nun die Frage an, wie zukünftige Zahlungen geeignet geschätzt werden. Nachfolgendes Kapitel beantwortet diese Frage.

4.4.2 Schätzung der Spätschadenreserve

Die in der Spätschadenreserve enthaltenen noch ausstehenden Zahlungen $Z_{s,t}$ mit $s + t - 1 > w$ müssen für das Modell auf einen einheitlichen Bewertungszeitpunkt (= Jahr w der letzten Gewinn- und Verlustrechnung) abgezinst werden. Dazu verwenden wir folgende Definition.

Definition 4.6 (Barwert)
Der ***Barwert*** *zum Zeitpunkt w einer zum Zeitpunkt $w + j$ ($j > 0$) bezahlten Geldeinheit ist*

$$P(w, w + j) = e^{-\int_w^{w+j} r(x)dx}.$$

■

Dies bedeutet, dass man zum Zeitpunkt w den Betrag $P(w, w+j)$ bezahlt, um zum Zeitpunkt $w + j > w$ einen Euro zurückzubekommen. Für eine ausführlichere Darstellung siehe z.B. [Zag02, Kapitel 4.1]. $r(x)$ bezeichnet dabei den **Zinssatz** zum Zeitpunkt x.
Das vom Versicherungsunternehmen im Zeitpunkt w übernommene Risiko S (fällt frühestens im Jahr $w+1$ an) setzt sich aus den abgezinsten zufälligen Zahlungen der folgenden Abwicklungsjahre zusammen und beträgt somit im Betrachtungsjahr w (Abwicklungsjahr $s = w + 1$, Anfalljahr $t = 0$)

$$S := S^{w+1} = \sum_{j=1}^{w} P(w, w + j) \cdot Z_{w+1,j}. \tag{4.28}$$

Mit den Bezeichnungen

$S^1, S^2, \ldots, S^w$: Risiko oder Portfolio von Risiken, das zu den Anfalljahren $s = 1, \ldots, w$ gehört

$Z_{s,t} \geq 0$: im Jahr $s + t - 1$ **geleistete Zahlung für den Schaden** S^s des Anfalljahres s im t-ten Abwicklungsjahr ($1 \leq s, t \leq w$)

$P(s + t - 1, s + t - 1 + j)$:
Barwert zum Zeitpunkt $s + t - 1$ einer zum Zeitpunkt $s + t - 1 + j$ bezahlten Geldeinheit

$\mathcal{H}_{s,t}$: **Information über den Schaden** S^s **im Abwicklungsjahr** t, d.h. zur Zeit $s + t - 1$ mit $\mathcal{H}_{s,t-1} \subseteq \mathcal{H}_{s,t}$ (es geht also keine Information verloren)
$\Rightarrow$ σ-Algebra, die für die Jahre $s = 1, \ldots, w$ durch $\{Z_{s,1}, \ldots, Z_{s,w}\}$ erzeugt wird, d.h. $\mathcal{H}_{s,1} = \sigma(Z_{s,1}), \ldots, \mathcal{H}_{s,w} = \sigma(Z_{s,1}, \ldots, Z_{s,w})$

$\mathcal{H}_{s,0} = \{\emptyset, \Omega\}$: Information, die zum Zeitpunkt der Übernahme des Risikos S^s bekannt ist

$\mathcal{G}_{s+t-1}$: **Information über den Zins im Jahr** $s + t - 1$
$\Rightarrow$ σ-Algebra, die durch $\{r(x)|x \leq s + t - 1\}$ erzeugt wird

$(\mathcal{H}_{s,t})_{t\geq 0}$ und $(\mathcal{G}_{s+t-1})_{t\geq 0}$ beschreiben folglich den Informationsfluss über die Zeit ($s = 1, \ldots, w$)

gelten für unser Modell die folgenden Annahmen:

Annahmen 4.7

- $(\Omega, \mathcal{H}, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *sei ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtrationen* $(\mathcal{H}_{s,t})_{t\geq 0}$ *und* $(\mathcal{G}_{s+t-1})_{t\geq 0}$.
- $\{Z_{s,t}, 1 \leq s, t \leq w\}$ *ist* $\mathcal{H}_{s,t}$*-messbar.*

- $\{P(s+t-1, s+t-1+j)\}$ *ist* $\mathcal{G}_{s+t-1}$*-messbar.*
- *Gleiche Nummerierung für die Anfalljahre der Schäden, die Geschäftsjahre des Unternehmens und für Kalenderjahre.*
- $E[S^2] < \infty$*, d.h. die ersten beiden Momente (und somit Erwartungswert und Varianz) existieren.*
- *Jeder Schaden* S^s *(aus dem Anfalljahr s) wird über w Jahre abgewickelt.*
- *Die Entwicklung der Schadenszahlungen* $Z_{s,t}$ *und der Zinsen, repräsentiert durch* $P(s+t-1, s+t-1+j)$*, ist unabhängig. Folglich sind die zugehörigen* σ*-Algebren* $(\mathcal{G}_{s+t-1})_{t\geq 0}$ *und* $(\mathcal{H}_{s,t})_{t\geq 0}$ *stochastisch unabhängig* $(s = 1, \ldots, w)$. ■

Da jeder Schaden über w Jahre abgewickelt wird, interessieren uns für die Reservenbildung am Ende des Kalenderjahres w (=Zeitpunkt der letzten GuV) nur die Schäden S^s mit $s = 2, \ldots, w$. Davor angefallene Schäden sind schon abgewickelt (siehe Abwicklungsdreieck S. 47) und für in der Zukunft anfallende Schäden braucht noch keine Reserve gebildet werden. Veranschaulicht wird dieser Sachverhalt nochmal in Abbildung 4.4.

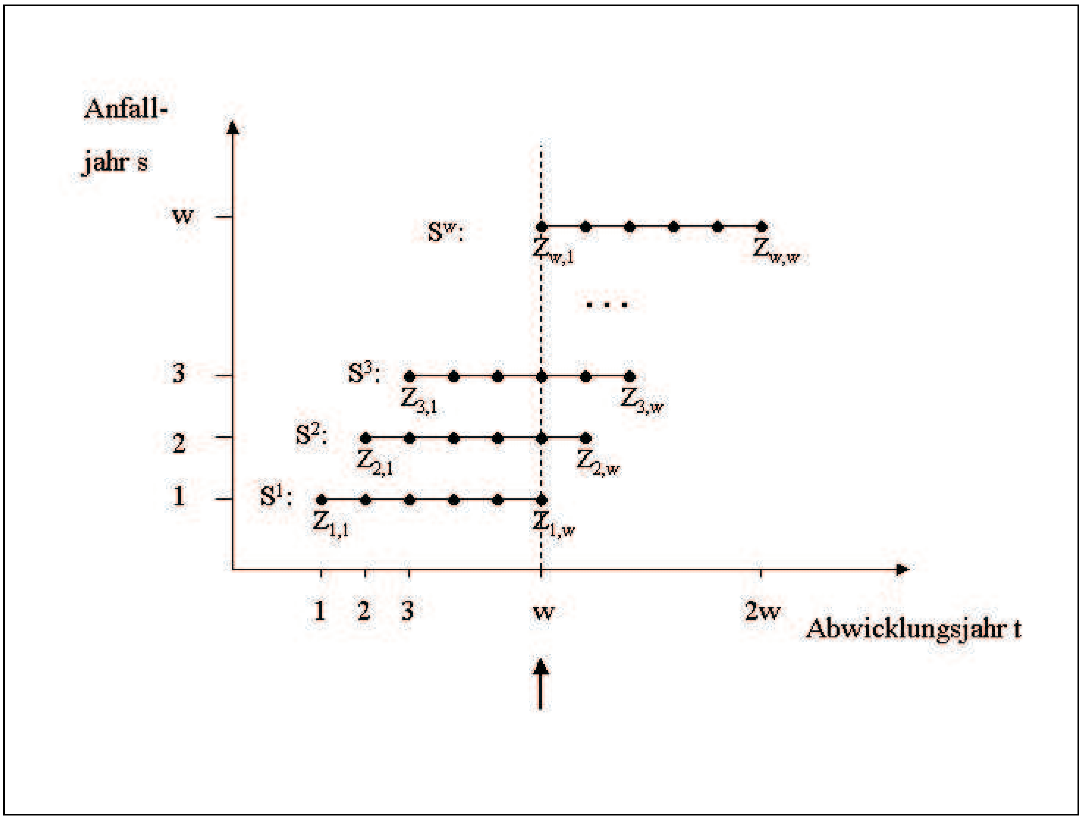

Abbildung 4.4: Abwicklung der Schäden $S^1, \ldots, S^w$ aus den Anfalljahren $s = 1, \ldots, w$

Die gestrichelte Linie markiert den Zeitpunkt der letzten Gewinn- und Verlustrechnung w. Alle Zahlungen links der gestrichelten Linie wurden in der Vergangenheit schon geleistet, die Zahlungen $Z_{s,w-s+1}$ $(s = 1, \ldots, w)$ auf der gestrichelten Linie wurden im abgelaufenen Jahr w geleistet und alle Zahlungen rechts der gestrichelten Linie müssen durch die am Ende des Jahres w geschätzte Spätschadenreserve gedeckt werden.

Kommen wir nun zurück zur Frage, wie die noch ausstehenden Zahlungen geeignet geschätzt werden können. Im vorliegenden Modell werden sie auf Basis der im Jahr w verfügbaren Information über den Schaden und über den Zins geschätzt. Der Erwartungswert der Zahlungen wird deshalb bzgl. der beiden $\sigma-$Algebren $\mathcal{H}_{s,w-s+1}$ und $\mathcal{G}_w$ bedingt.

Wie oben schon erwähnt befinden wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit am Ende des Jahres w. Für die Schäden S^s $(s = 2, \ldots, w)$ wird eine Spätschadenreserve gebildet und die Schäden S^{w+1} werden von der Versicherung von ihren Kunden im laufenden Jahr übernommen. Zur Vereinfachung werden sie auch auch weiterhin mit S bezeichnet.

Sei

$$L_{s,w-s+1} := E\left[\sum_{j=w-s+2}^{w} P(w, s-1+j) \cdot Z_{s,j} | \mathcal{H}_{s,w-s+1}, \mathcal{G}_w\right] \tag{4.29}$$

die am Ende des Betrachtungsjahres w für das Risiko S^s **geschätzte Spätschadenreserve** des Unternehmens. Dies bedeutet, dass die noch ausstehenden Zahlungen für die Schäden S^s $(\sum_{j=w-s+2}^{w} Z_{s,j}, s = 2, \ldots, w)$ auf das Jahr w abgezinst und auf Basis der bis dahin verfügbaren Information über den Schaden $(\mathcal{H}_{s,w-s+1})$ und den Zins $(\mathcal{G}_w)$ geschätzt werden. Die Berechnung eines bedingten Erwartungswertes wurde in Kapitel 2 eingeführt. Für das im Jahr w gezeichnete Risiko S (Anfalljahr $s = w + 1$) gilt:

$$\begin{aligned}
L_{w+1,0} \quad &= \quad E\left[\sum_{j=1}^{w} P(w, w+j) \cdot Z_{w+1,j} | \mathcal{H}_{w+1,0}, \mathcal{G}_w\right] \\
&= \quad E\left[\sum_{j=1}^{w} P(w, w+j) \cdot Z_{w+1,j} | \mathcal{G}_w\right] \qquad (\text{da } \mathcal{H}_{w+1,0} = \{\emptyset, \Omega\}) \\
&\overset{(*)}{=} \quad E\left[\sum_{j=1}^{w} P(w, w+j) \cdot Z_{w+1,j}\right] \\
&\overset{(4.28)}{=} \quad E[S]
\end{aligned}$$

mit $(*)$: $P(w, w+1)$ ist $\mathcal{G}_w$-messbar und $Z_{w+1,j}$ ist unabhängig von $\mathcal{G}_w$

$E[S]$ ist Teil der Prämie $\pi(S)$ (vgl. S. 17)

$$\pi(S) \quad = \quad E[S] + b.$$

Da $E[S]$ somit schon im Modell enthalten ist, wird $L_{w+1,0}$ nicht mehr in die Spätschadenreserve eingerechnet.

Ist der Schaden schon abgewickelt, d.h. $s = 1$, so braucht keine Spätschadenreserve mehr gebildet zu werden:

$$L_{1,w} = E\left[\sum_{j=w+1}^{w} P(w,j) \cdot Z_{1,j} | \mathcal{H}_{1,w}, \mathcal{G}_w\right] = 0\,, \qquad \text{da} \sum_{j=w+1}^{w} \ldots = \emptyset.$$

Der **Barwert des Schadens** S^w beträgt bei der Zeichnung im Jahr $w-1$

$$S^w = \sum_{j=1}^{w} P(w-1, w-1+j) \cdot Z_{w,j}. \tag{4.30}$$

Die geschätzte Spätschadenreserve des Unternehmens bzgl. des Schadenjahres s am Ende des Betrachtungs-Vorjahres $w-1$ ist

$$L_{s,w-s} = E\left[\sum_{j=w-s+1}^{w} P(w-1, s-1+j) \cdot Z_{s,j} | \mathcal{H}_{s,w-s}, \mathcal{G}_{w-1}\right]. \tag{4.31}$$

Die Spätschadenreserve $L_{s,w-s}$ muss die am Ende des Vorjahres noch ausstehenden Zahlungen decken. Der produzierte **Aufwand aus der Abwicklung des Spätschadens von S^s im Geschäftsjahr w** berechnet sich durch

$$C_{s,w-s+1} := L_{s,w-s} - Z_{s,w-s+1} - L_{s,w-s+1}. \tag{4.32}$$

Dies bedeutet, dass dem Unternehmen im Jahr w für die Abwicklung der Spätschadenreserve der Betrag $L_{s,w-s}$, der im Vorjahr berechnet wurde, zur Verfügung steht. Das Unternehmen leistet im Betrachtungsjahr die Zahlung $Z_{s,w-s+1}$ und schätzt die für die Zukunft benötigte Spätschadenreserve auf den Betrag $L_{s,w-s+1}$.

Vor der exakten Angabe der eben eingeführten Größen werden diese noch an einem Beispiel verdeutlicht.

Beispiel 2: Beschränkung auf den Schaden eines Anfalljahres (ohne Diskontierung)
Zur Vereinfachung wird im Beispiel folgende Notation verwendet:

$$\begin{aligned} Z_t &:= Z_{1,t} \\ L_t &:= \text{Spätschadenreserve, die im } t. \text{ Abwicklungsjahr geschätzt wird} \\ C_t &:= \text{Aufwand aus der Abwicklung der Spätschäden im } t. \text{ Abwicklungsjahr} \end{aligned}$$

Angenommen, eine Versicherung hat eine Prämie in Höhe von $\pi(S) = 100€ + b$ eingenommen (vgl. Abbildung 4.5). Dieses Kapital steht zum Zeitpunkt $t = 0$ der Risikoübernahme zur Verfügung. Für die Abwicklung des Schadens S soll in den kommenden w Jahren nur der erwartete Schaden $E[S]$ die Zahlungen $Z_1, \ldots, Z_w$ abdecken. Der Sicherheitszuschlag b wird somit nicht angetastet. Im ersten Jahr zahlt die Versicherung den Betrag Z_1, im zweiten Jahr den Betrag Z_2 und im letzten Abwicklungsjahr den Betrag Z_w. Am Ende des ersten Abwicklungsjahres ($t = 1$) muss eine Schadenreserve L_1 geschätzt werden,

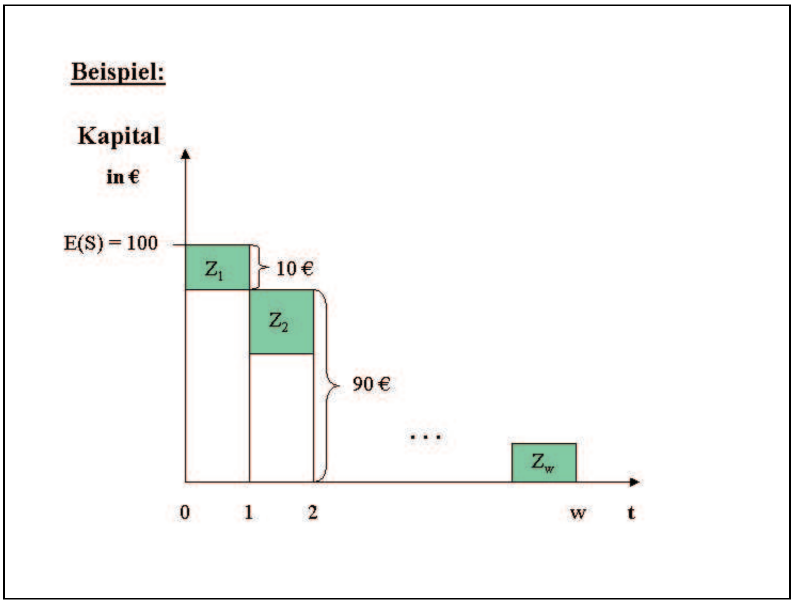

Abbildung 4.5: Abwicklung eines Schadenfalles

die die Zahlungen der verbleibenden Abwicklungsjahre $t = 2, \ldots, w$ decken soll. In unserem Beispiel ist die am Ende des ersten Abwicklungsjahres geschätzte Spätschadenreserve $L_1 = 90€$ und die im zweiten Abwicklungsjahr geleistete Zahlung $Z_2 = 8€$. Somit ergibt sich zum Zeitpunkt $t = 2$ folgender Aufwand aus der Abwicklung des Schadens S:

$$C_2 = L_1 - Z_2 - L_2 = 90€ - 8€ - L_2 = 82€ - L_2$$

Wenn die Schätzung für die Schadenreserve L_2 zu hoch ist, d.h. in unserem Beispiel größer als 82 €, produziert das Unternehmen im Jahr 2 einen Verlust aus der Abwicklung des Spätschadens (d.h. $C_2 < 0$). Wenn die Schätzung aber zu niedrig ist, reicht unter Umständen in den letzten Abwicklungsjahren das Kapital nicht aus, um die noch ausstehenden Zahlungen zu begleichen. ■

Nun wieder zurück zum Modell. Der Aufwand aus der Abwicklung des Spätschadens von S^s lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$
\begin{aligned}
C_{s,w-s+1} &\overset{(4.32)}{=} L_{s,w-s} - Z_{s,w-s+1} - L_{s,w-s+1} \\
&\overset{(4.31)+(4.29)}{=} E\left[\sum_{j=w-s+1}^{w} P(w-1,s-1+j)\cdot Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s},\mathcal{G}_{w-1}\right] \\
&\quad - \underbrace{Z_{s,w-s+1}}_{=E[P(w,w)\cdot Z_{s,w-s+1}|\mathcal{H}_{s,w-s+1},\mathcal{G}_w]} \\
&\quad - E\left[\sum_{j=w-s+2}^{w} P(w,s-1+j)\cdot Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s+1},\mathcal{G}_w\right] \\
&= E\left[\sum_{j=w-s+1}^{w} P(w-1,s-1+j)\cdot Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s},\mathcal{G}_{w-1}\right] \\
&\quad - E\left[\sum_{j=w-s+1}^{w} P(w,s-1+j)\cdot Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s+1},\mathcal{G}_w\right] \\
&= E\left[\sum_{j=w-s+1}^{w} P(w,s-1+j)\cdot Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s},\mathcal{G}_w\right] \\
&\quad - E\left[\sum_{j=w-s+1}^{w} P(w,s-1+j)\cdot Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s+1},\mathcal{G}_w\right] \\
&\quad + E\left[\sum_{j=w-s+1}^{w} P(w-1,s-1+j)\cdot Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s},\mathcal{G}_{w-1}\right] \\
&\quad - E\left[\sum_{j=w-s+1}^{w} P(w,s-1+j)\cdot Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s},\mathcal{G}_w\right] \\
&=: {}_1C_{s,w-s+1} + {}_2C_{s,w-s+1}
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Unabhängigkeit (UA) der σ-Algebren $(\mathcal{G}_{s+t-1})_{t\geq 0}$ und $(\mathcal{H}_{s,t})_{t\geq 0}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
{}_1C_{s,w-s+1} &= E\left[\sum_{j=w-s+1}^{w} P(w,s-1+j)\cdot Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s},\mathcal{G}_w\right] \\
&\quad - E\left[\sum_{j=w-s+1}^{w} P(w,s-1+j)\cdot Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s+1},\mathcal{G}_w\right] \\
&\overset{(UA)}{=} \sum_{j=w-s+1}^{w} \underbrace{E[P(w,s-1+j)|\mathcal{G}_w]}_{\overset{Satz\,1.3\,d)}{=} P(w,s-1+j)} \cdot \Big(E[Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s}] - E[Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s+1}]\Big) \\
&= \sum_{j=w-s+1}^{w} P(w,s-1+j)\cdot \Big(E[Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s}] - E[Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s+1}]\Big) \qquad (4.33)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_2C_{s,w-s+1} &= E\left[\sum_{j=w-s+1}^{w} P(w-1,s-1+j)\cdot Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s},\mathcal{G}_{w-1}\right] \\
&\quad -E\left[\sum_{j=w-s+1}^{w} P(w,s-1+j)\cdot Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s},\mathcal{G}_{w}\right] \\
&\overset{(UA)}{=} \sum_{j=w-s+1}^{w} E[Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s}]\cdot\Big(\underbrace{E[P(w-1,s-1+j)|\mathcal{G}_{w-1}]}_{\overset{Satz\,1.3\,d)}{=}P(w-1,s-1+j)} \\
&\quad -\underbrace{E[P(w,s-1+j)|\mathcal{G}_{w}]}_{\overset{Satz\,1.3\,d)}{=}P(w,s-1+j)}\Big) \\
&= \sum_{j=w-s+1}^{w} E[Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s}]\cdot\Big(P(w-1,s-1+j)-P(w,s-1+j)\Big) \qquad (4.34)
\end{aligned}
$$

${}_1C_{s,w-s+1}$ ist somit der **Gewinn (oder Verlust)**, der aus der reinen **Abwicklung des Spätschadens** entsteht und ${}_2C_{s,w-s+1}$ bezeichnet den **Gewinn (oder Verlust) aus der Verzinsung der Spätschadenreserve**, jeweils bezogen auf den Schaden S^s aus dem Anfalljahr s.

Der **Gewinn oder Verlust in Periode w aus der Abwicklung der Spätschäden aus den Anfalljahren** $s = 1, \ldots, w-1$ ist folglich die negative Summe über den Aufwand aus der Abwicklung der Spätschäden der einzelnen Anfalljahre:

$$
\triangle L := -\sum_{s=1}^{w-1} C_{s,w-s+1} \qquad (4.35)
$$

Bemerkung:
$C_{w,1} = L_{w,0} - Z_{w,1} - L_{w,1} = E[S^w] - Z_{w,1} - L_{w,1}$ wird nicht bei der Änderung der Spätschadenreserve $\triangle L$ berücksichtigt, da $E[S^w]$ keine Spätschadenreserve darstellt, sondern im Vorjahr als Prämie in die Gewinn- und Verlustrechnung eingegangen ist. ■

Den Gewinn oder Verlust aus der Abwicklung der Spätschäden $\triangle L$ kann man analog zum Gewinn oder Verlust aus der Abwicklung der Spätschäden aus den verschiedenen Abwicklungsjahren $C_{s,w-s+1}$ zerlegen. Sei

$$
\boxed{\triangle L = \triangle L_1 + \triangle L_2} \quad \text{mit}
$$

$$
\triangle L_i = -\sum_{s=1}^{w-1} {}_iC_{s,w-s+1} \quad \text{für } i = 1, 2. \qquad (4.36)
$$

Dann bezeichnet

$\triangle L_1$ den **Gewinn (oder Verlust) aus der reinen Abwicklung der Spätschäden** und

$\triangle L_2$ **Gewinn (oder Verlust) aus der Verzinsung der Spätschäden**.

Betrachten wir $\triangle L_1$ und $\triangle L_2$ etwas genauer. Der Gewinn (oder Verlust) aus der Abwicklung $\triangle L_1$ besitz folgende, für weitere Berechnungen wichtige Eigenschaft.

Satz 4.8
Der erwartete Gewinn (oder Verlust) aus der reinen Abwicklung der Spätschäden ist Null, d.h.

$$E[\triangle L_1] = 0\,. \tag{4.37}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
E[\triangle L_1] &\overset{(4.36)}{=} -E\Bigg[\sum_{s=1}^{w-1}\Bigg(\sum_{j=w-s+1}^{w} P(w,s-1+j)\cdot\Big(E[Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s}] \\
&\qquad -E[Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s+1}]\Big)\Bigg)\Bigg] \\
&\overset{\text{Linearität EW}}{=} \sum_s\sum_j E[P(w,s-1+j)]\cdot\Big(\underbrace{E\big[E[Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s+1}]\big]}_{=E[Z_{s,j}]} \\
&\qquad -\underbrace{E\big[E[Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s}]\big]}_{=E[Z_{s,j}]}\Big) \\
&= \sum_s\sum_j E[P(w,s-1+j)]\cdot\underbrace{(E[Z_{s,j}]-E[Z_{s,j}])}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

Der Gewinn (oder Verlust) aus der Verzinsung der Spätschäden $\triangle L_2$ lässt sich umformen zu:

$$\begin{aligned}
\triangle L_2 &\overset{(4.36)}{=} -\sum_{s=1}^{w-1}\sum_{j=w-s+1}^{w} E[Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s}]\cdot\Big(P(w-1,s-1+j)-P(w,s-1+j)\Big) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{s=1}^{w-1}\sum_{t=0}^{s-1} E[Z_{s,t+w-s+1}|\mathcal{H}_{s,w-s}]\Big(P(w,w+t)-P(w-1,w+t)\Big) \\
&= \sum_{t=0}^{w-2}\underbrace{\sum_{s=t+1}^{w-1} E[Z_{s,t+w-s+1}|\mathcal{H}_{s,w-s}]}_{=:\,K_t}\Big(P(w,w+t)-P(w-1,w+t)\Big) \\
&= \underbrace{\sum_{t=0}^{w-2} K_t\cdot P(w,w+t)}_{=:L(w)}-\underbrace{\sum_{t=0}^{w-2} K_t\cdot P(w-1,w+t)}_{=:L(w-1)} && (4.38) \\
&= \underbrace{\frac{L(w)-L(w-1)}{L(w-1)}}_{=:R_L}\cdot\underbrace{L(w-1)}_{=:\,l\ (\text{zum Zeitpunkt } w \text{ bekannt})} \\
&= R_L\cdot l && (4.39)
\end{aligned}$$

mit $(*)$: Substitution: $t := j - w + s - 1 \quad \Leftrightarrow \quad j = t + w - s + 1$

Bemerkung:
Der Gewinn (oder Verlust) aus der Abwicklung der Spätschäden $\triangle L$ setzt sich aus zwei Teilen zusammen, dem Gewinn (oder Verlust) aus der reinen Abwicklung $\triangle L_1$ und dem Gewinn (oder Verlust) aus der Verzinsung $\triangle L_2$. $\triangle L_2$ kann laut (4.39) auch geschrieben werden als

$$\triangle L_2 = R_L \cdot l.$$

$l := L(w-1) = \sum_{t=0}^{w-2} K_t \cdot P(w-1, w+t)$ ist der Preis eines Portfolios aus Nullkuponanleihen mit Auszahlungen K_t, die am Ende der Jahre $w+t$ $(t = 0, \ldots, w-2)$ fällig werden. Zum heutigen Zeitpunkt w ist dieser Preis bekannt.

$$R_L = \frac{\sum_{t=0}^{w-2} K_t \cdot P(w, w+t) - \sum_{t=0}^{w-2} K_t \cdot P(w-1, w+t)}{\sum_{t=0}^{w-2} K_t \cdot P(w-1, w+t)} \tag{4.40}$$

bezeichnet die Rendite dieses Bondportfolios, welches das gleiche Fälligkeitsprofil wie die Verbindlichkeiten des Unternehmens aufweist. Somit kann der Gewinn (oder Verlust) aus der Verzinsung $\triangle L_2$ gut durch Asset Liability Matching[25] gehedged werden. ■

4.5 Das vollständige Modell

Bisher wurde angenommen, dass das verfügbare Kapital nur zum risikolosen Zins r_0 angelegt werden kann. Im folgenden Abschnitt werden die Spätschadenreserve aus Kapitel 4.4 und eine risikobehaftete Anlagemöglichkeit ergänzt. Somit ist das Modell vollständig und bildet alle gewünschten Unternehmensbereiche ab.

4.5.1 Hinzunahme einer risikobehafteten Anlagemöglichkeit

Ausgangsmodell (vergleiche (4.1), S. 32):

$$\triangle U = E[S] + b - S - \triangle L + \triangle A$$

In Kapitel 4.4 wird die Änderung der Spätschadenreserve in den Gewinn (oder Verlust) aus der reinen Abwicklung von Spätschäden $\triangle L_1$ und in den Gewinn (oder Verlust) aus der Verzinsung der Spätschäden $\triangle L_2$ aufgeteilt, d.h.

$$\triangle L \;=\; \triangle L_1 + \triangle L_2$$

[25] Für das Thema Asset-Liability-Management bzw. Asset-Liability-Matching sei auf [Alb01] und [Rus] verwiesen

mit

$$\triangle L_1 \overset{(4.36)}{=} \sum_{s=1}^{w-1} \sum_{j=w-s+1}^{w} P(w, s-1+j) \cdot \big(E[Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s+1}] - E[Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s}]\big)$$

und

$$\begin{aligned}\triangle L_2 &\overset{(4.38)}{=} \sum_{t=0}^{w-2} K_t \cdot \big(P(w, w+t) - P(w-1, w+t)\big)\\ &\overset{(4.39)}{=} R_L \cdot l\,.\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\boxed{\triangle U = E[S] + b - S - \triangle L_1 - R_L \cdot l + \triangle A}. \tag{4.41}$$

Wir teilen den Gewinn (oder Verlust) aus der Zeichnung des Risikos S ($\triangle S := E[S] - S$) und den Gewinn (oder Verlust) aus der reinen Abwicklung der Spätschäden $\triangle L_1$ in n Einzelrisiken auf. Dabei wird angenommen, dass das Unternehmen nur einen Teil des Zeichnungsrisikos selbst trägt und den Rest an seinen Rückversicherer abtritt (vergleiche Kapitel 4.3.2 Quotenrückversicherung).

Annahme 4.9
Es erfolgt keine Rückversicherung des Portfolios der Spätschadenreserve. Folglich sind l und R_L unabhängig von $\underline{\alpha}$. ■

Nach Rückversicherung gilt für das betrachtete Versicherungsunternehmen statt (4.41) nun

$$\boxed{\triangle U = \triangle S_{EV} + b_{EV} - \triangle L_1 - R_L \cdot l + \triangle A.} \tag{4.42}$$

Mit den Bezeichnungen

X_i: **Verlust aus der Zeichnung der Risiken** oder aus der **Abwicklung der Spätschäden** des Teilportfolios i ($i = 1, \ldots, n$)
X_i^S: **Verlust aus der Zeichnung des Risikos** des Teilportfolios i ($i = 1, \ldots, m$)
X_i^L: **Verlust aus der Abwicklung der Spätschäden** des Teilportfolios i ($i = m+1, \ldots, n$)
b_i: Sicherheitszuschlag für das gezeichnete Risiko S_i
α_i: Anteil am Teilrisiko S_i, den das Unternehmen selbst behält ($\overset{Ann.}{\Rightarrow}$ für den Gewinn oder Verlust aus der Abwicklung der Spätschäden ist $\alpha_i = 1$)

gilt:

$$
\begin{aligned}
\triangle S_{EV} &= E[S_{EV}] - S_{EV} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (E[S_i] - S_i) = -\sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i^S \quad \text{mit } X_i^S := S_i - E[S_i] \\
\triangle L_1 &:= \sum_{i=m+1}^{n} X_i^L \\
\sum_{i=1}^{n} X_i &= \sum_{i=1}^{m} X_i^S + \sum_{i=m+1}^{n} X_i^L \\
\sum_{i=1}^{n} X_i^{EV} &\overset{Ann.}{=} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i^S + \sum_{i=m+1}^{n} X_i^L
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \triangle S_{EV} + b_{EV} - \triangle L_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (b_i - X_i^S) - \sum_{i=m+1}^{n} X_i^L
$$

Des weiteren gilt:

$$
\begin{aligned}
E[X_i^S] &= E[S_i] - E\big[E[S_i]\big] = 0 \quad \text{und} \\
E[X_i^L] &\overset{(4.37)}{=} 0
\end{aligned}
$$

Somit ist

$$
E[X_i] = 0, \tag{4.43}
$$

da X_i entweder den Verlust aus der Zeichnung von Risiken oder den Verlust aus der Abwicklung der Spätschäden bezeichnet.

Um nun auch eine risikobehaftete Anlagemöglichkeit ins Modell aufzunehmen, gehen wir davon aus, dass das Versicherungsunternehmen auch in eine riskante Anlage a investieren kann. Wir beschränken uns auf eine einzige risikobehaftete Anlagemöglichkeit, die aber auch - wie im Falle des DAX - den ganzen Markt abbilden kann. Das Modell kann jedoch ohne größere Schwierigkeiten auf mehrere risikobehaftete Assets erweitert werden.

Bezeichne
a den **Betrag**, der in das risikobehaftete Asset investiert wird,
R_A die zugehörige **Rendite** und
μ_A die erwartete Rendite, $\mu_A := E[R_A]$.

Es wird angenommen, dass die diskontierten Verbindlichkeiten l im Unternehmen als Kapital vorhanden sind. Im Gleichgewicht von Vermögen und Verbindlichkeiten kann das Unternehmen folglich den Betrag $l + u - a$ zum risikolosen Zinssatz r_0 anlegen, d.h.

$$
\triangle A = R_A \cdot a + r_0 \cdot (l + u - a).
$$

Statt Gleichung (4.42) erhält man nun[26]

$$\begin{aligned}
\triangle U &= \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot (b_i - X_i^S) - \sum_{i=m+1}^{n} X_i^L}_{Zeichnungsrisiko\,und\,\triangle L_1} - \underbrace{R_L \cdot l}_{\triangle L_2} + \underbrace{R_A \cdot a}_{Ertrag\,risikobeh.\,Asset} + \underbrace{r_0 \cdot (l + u - a)}_{risikoloser\,Ertrag} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (b_i - X_i^S) - \sum_{i=m+1}^{n} X_i^L - (R_L - r_0) \cdot l + (R_A - r_0) \cdot a + r_0 u
\end{aligned}$$

Als **Überschussertrag** ergibt sich somit

$$\triangle U - r_0 u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (b_i - X_i^S) - \sum_{i=m+1}^{n} X_i^L - (R_L - r_0) \cdot l + (R_A - r_0) \cdot a \tag{4.45}$$

mit **Erwartungswert**

$$\begin{aligned}
E[\triangle U - r_0 \cdot u] &\overset{(4.43)}{=} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i - (\underbrace{E[R_L]}_{=:\mu_L} - r_0) \cdot l + (\underbrace{E[R_A]}_{=\mu_A} - r_0) \cdot a \\
&= \underline{\alpha}^\top \underline{b} - (\mu_L - r_0) \cdot l + (\mu_A - r_0) \cdot a\,. \qquad (4.46)
\end{aligned}$$

In der folgenden Tabelle 4.3 sind die Risiken des Versicherungsunternehmens aufgeführt, sowie der jeweils erwartete Überschussertrag und der Beitrag des Einzelrisikos zum Gesamtrisiko, das das Unternehmen zu tragen hat. Tabelle 4.3 wird deshalb auch als **Risiko-Ertrags-Analyse** bezeichnet.

	Risiko/ Ertrag	*erwart. Überschussertrag*	*Beitrag zum Gesamtrisiko*
versicherte Risiken	$-\alpha_1 X_1^S$	$\alpha_1 b_1$	$\alpha_1 \cdot Cov[-X_1^S, \triangle U]$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$-\alpha_m X_m^S$	$\alpha_m b_m$	$\alpha_m \cdot Cov[-X_m^S, \triangle U]$
Abwicklung von Spätschäden	$-X_{m+1}^L$		$Cov[-X_{m+1}^L, \triangle U]$
	$\vdots$		$\vdots$
	$-X_n^L$		$Cov[-X_n^L, \triangle U]$
Verzinsung	$-R_L \cdot l$	$-(\mu_L - r_0) \cdot l$	$l \cdot Cov[-R_L, \triangle U]$
riskantes Asset	$R_A \cdot a$	$(\mu_A - r_0) \cdot a$	$a \cdot Cov[R_A, \triangle U]$
Summe:	(1)	(2)	(3)

Tabelle 4.3: Risiko-Ertrags-Analyse

26

Bzw. $\triangle U = \triangle S_{EV} + b_{EV} - \triangle L_1 - R_L \cdot l + R_A \cdot a + (l - a) \cdot r_0 + u \cdot r_0 \qquad (4.44)$

Die letzte Zeile obiger Tabelle lässt sich darstellen als

$$
\begin{aligned}
(1):\quad & -\sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i^S - \sum_{i=m+1}^{n} X_i^L - R_L \cdot l + R_A \cdot a \\
& = \textbf{Gesamter Gewinn (oder Verlust) des Unternehmens} \\
& \quad \text{(abzüglich der Konstanten)} \\
(2):\quad & \sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i - (\mu_L - r_0) \cdot l + (\mu_A - r_0) \cdot a \\
& \overset{(4.46)}{=} E[\triangle U] - r_0 \cdot u \\
& = \textbf{erwarteter Überschussertrag} \\
(3):\quad & \sum_{i=1}^{m} \alpha_i Cov\left[-X_i^S, \triangle U\right] + \sum_{i=m+1}^{n} Cov\left[-X_i^L, \triangle U\right] + l \cdot Cov\left[-R_L, \triangle U\right] \\
& \quad + a \cdot Cov\left[R_A, \triangle U\right] \\
& = Cov\left[\underbrace{-\sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i^S - \sum_{i=m+1}^{n} X_i^L - R_L \cdot l + R_A \cdot a}_{=\triangle U - konstante\, Faktoren}, \triangle U\right] \\
& = Var[\triangle U] \\
& = \textbf{Varianz der Unternehmenskapitaländerung.}
\end{aligned}
$$

Risiko und Ertrag des Gesamtmodells

Der **Ertrag** und das **Risiko** des Unternehmens (nach Rückversicherung) sind gegeben durch

$$\mu_{EV} \overset{(4.3)}{=} \frac{E[\triangle U]}{u} \tag{4.47}$$

$$\overset{(4.46)+r_0 u}{=} \frac{1}{u} \cdot \Big(\underline{\alpha}^\top \underline{b} - (\mu_L - r_0) \cdot l + (\mu_A - r_0) \cdot a \Big) + r_0 \qquad \text{und} \tag{4.48}$$

$$\sigma_{EV}^2 \overset{(4.4)}{=} \frac{Var[\triangle U]}{u^2} \tag{4.49}$$

$$
\begin{aligned}
\overset{(3)}{=} \quad & \frac{1}{u^2} \cdot \Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i Cov\left[-X_i^S, \triangle U\right] + \sum_{i=m+1}^{n} Cov\left[-X_i^L, \triangle U\right] + l \cdot Cov\left[-R_L, \triangle U\right] \\
& + a \cdot Cov\left[R_A, \triangle U\right] \Big).
\end{aligned} \tag{4.50}
$$

Subtrahiert man von beiden Seiten der Gleichung (4.47) den risikolosen Zins r_0 und setzt in die Wurzel der Gleichung (4.49) ein, so erhält man als **Gerade der möglichen Risiko-Ertrags-Paarungen**

$$\mu_{EV} - r_0 = \frac{E[\triangle U] - r_0 \cdot u}{\sigma(\triangle U)} \cdot \sigma_{EV}. \tag{4.51}$$

Der **Risiko-Ertrags-Quotient** lässt sich analog zu Kapitel 4.2 berechnen durch

$$\begin{aligned} k &\overset{(4.8)}{=} \frac{\mu_{EV} - r_0}{\sigma_{EV}} \\ &\overset{(4.51)}{=} \frac{E[\triangle U] - r_0 \cdot u}{\sigma(\triangle U)} \\ &\overset{(4.46)}{=} \frac{\underline{\alpha}^\top \underline{b} - (\mu_L - r_0) \cdot l + (\mu_A - r_0)a}{\sigma(\triangle U)} \\ &= \text{Funktion von } \alpha_1, \ldots, \alpha_m \text{ und } a \end{aligned} \tag{4.52}$$

Restriktionen:

- $\alpha_i \in [0, 1]$ für $i = 1, \ldots, m$
- $a \leq l + u$, d.h. es kann nur das vorhandene Kapital angelegt werden.
- $a \geq 0$, d.h. es sind keine Leerverkäufe erlaubt.

Bemerkung:
Trotz augenscheinlicher Ähnlichkeit von Versicherungsrisiken (Gewinn oder Verlust aus der Zeichnung von Risiken und aus der Abwicklung von Spätschäden) und Kapitalrisiken gibt es einen grundsätzlichen Unterschied: Kapitalrisiken können einfacher gehandhabt werden als Versicherungsrisiken, aufgrund

- geringerer Transaktionskosten,
- leichterer Diversifikation und
- Möglichkeiten der Absicherung durch Derivate.

Diversifikation auf der Seite der Versicherungstechnik beinhaltet Zeichnungs- und Produktpolitik, im Extremfall auch den Kauf eines anderen Versicherungsunternehmens oder den Verkauf von Teilen des Portfolios. Bestimmte Versicherungsrisiken, wie Schadenreserven in schwierigen Haftungsklassen oder bestimmten Katastrophenrisiken können u.U. gar nicht rückversicherbar sein. Folglich kann die Optimierung eines Versicherungsportfolios sehr kostspielig oder unmöglich sein! Im folgenden Kapitel wird deshalb der Erwartungsnutzen nur bezüglich des Kapitalrisikos optimiert. In Kapitel 4.5.3 wird der allgemeine Fall betrachtet. ■

4.5.2 Das optimale Kapitalanlage-Portfolio

In Kapitel 4.5.1 haben wir folgende Gleichung für das Unternehmen erhalten:

$$\triangle U \overset{(4.44)}{=} \triangle S_{EV} + b_{EV} - \triangle L_1 - R_L \cdot l + R_A \cdot a + (l - a) \cdot r_0 + u \cdot r_0$$

Bezeichnet Z den **Gewinn oder Verlust aus der Versicherungstechnik**, d.h. aus der Zeichnung der Risiken und der Abwicklung der Spätschäden

$$Z := \triangle S_{EV} + b_{EV} - \triangle L_1 - (R_L - r_0) \cdot l,$$

so lässt sich obige Gleichung vereinfachen zu

$$\boxed{\triangle U = Z + (R_A - r_0) \cdot a + r_0 \cdot u}. \tag{4.53}$$

Wir führen folgende Notation ein:

$$\begin{aligned}
\mu_Z &:= E[Z] = E\big[E[S_{EV}]\big] - E[S_{EV}] + b_{EV} - \underbrace{E[\triangle L_1]}_{=0} - (\underbrace{E[R_L]}_{=\mu_L} - r_0) \cdot l \\
&= b_{EV} - (\mu_L - r_0) \cdot l = \underline{\alpha}^\top \underline{b} - (\mu_L - r_0) \cdot l \qquad (4.54)\\
\sigma_Z^2 &:= Var[Z] \\
&= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 Var[X_i^S] + \sum_{j=m+1}^{n} Var[X_j^L] + l^2 \cdot Var[R_L] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{n} 2 \cdot \alpha_i \cdot Cov[X_i^S, X_j^L] + 2 \cdot l \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot Cov[X_i^S, R_L] \right) \\
&\quad + 2 \cdot l \cdot \left(\sum_{j=m+1}^{n} Cov[X_j^L, R_L] \right) \qquad (4.55)\\
\delta_A &:= E[R_A] - r_0 = \mu_A - r_0 \qquad (4.56)\\
\sigma_{R_A}^2 &= Var[R_A] \\
\kappa &:= Corr[Z, R_A] = \frac{Cov[Z, R_A]}{\sigma_Z \sigma_{R_A}} \\
&= \frac{1}{\sigma_{R_A} \sigma_Z} \Big(-\sum_{i=1}^{m} \alpha_i Cov[X_i^S, R_A] - \sum_{j=m+1}^{n} Cov[X_j^L, R_A] - l \cdot Cov[R_L, R_A] \Big) \qquad (4.57)
\end{aligned}$$

Im anschließenden Satz wird das optimale Verhältnis von risikoloser Anlage zur Investition in Assets berechnet.

Satz 4.10
Angenommen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ *seien konstant und* $\nu(\mu_{EV}(a), \sigma_{EV}^2(a))$ *bezeichnet die Erwartungsnutzenfunktion. Die Lösung des Optimierungsproblems*

$$a \mapsto \nu(\mu_{EV}(a), \sigma_{EV}^2(a)) = \theta \cdot \mu_{EV}(a) - \sigma_{EV}^2(a) \to max \tag{4.58}$$

unter der Nebenbedingung $0 \leq a \leq l + u$ *ist gegeben durch*

1. Fall: $a^* = \frac{\delta_A \theta u - 2\kappa \sigma_{R_A} \sigma_Z}{2\sigma_{R_A}^2}$ *für* $0 < \theta u \delta_A - 2\kappa \sigma_{R_A} \sigma_Z < 2\sigma_{R_A}^2 (l + u)$
2. Fall: $a^* = 0$ *für* $0 \geq \theta u \delta_A - 2\kappa \sigma_{R_A} \sigma_Z$
3. Fall: $a^* = l + u$ *für* $\theta u \delta_A - 2\kappa \sigma_{R_A} \sigma_Z \geq 2\sigma_{R_A}^2 (l + u)$.

Beweis:
Ausgangsgleichung:

$$\triangle U \overset{(4.53)}{=} Z + (R_A - r_0) \cdot a + r_0 \cdot u$$

Maximiere den Erwartungsnutzen

$$\nu(\mu_{EV}(a), \sigma_{EV}^2(a)) = \theta \cdot \mu_{EV}(a) - \sigma_{EV}^2(a)$$

unter den Nebenbedingungen

i) $a \geq 0$ und

ii) $a \leq l + u$.

Formulierung als konvexes Minimierungsproblem:
Minimiere

$$\nu(\mu_{EV}(a), \sigma_{EV}^2(a)) = \sigma_{EV}^2(a) - \theta \cdot \mu_{EV}(a)$$

unter den Nebenbedingungen

i) $c_1(a) = a \geq 0$ und

ii) $c_2(a) = l + u - a \geq 0$,

wobei $\nu(a)$ eine konvexe Funktion ist und $c_1(a), c_2(a)$ sind linear in a.

Hilfssatz 4.11 (Kuhn-Tucker Theorem)
Falls $\nu(a), c_1(a), c_2(a)$ differenzierbar in a, so gilt: a^* löst obiges Minimierungsproblem genau dann, wenn $y = (y_1, y_2)$ mit $y_1, y_2 \geq 0$ existiert, so dass die Kuhn/Tucker-Bedingungen gelten:

(*KKT 1*) $L_a(a, y_1, y_2) = 0$
mit Ableitung der Lagrangefunktion nach a:
$$L_a(a, y_1, y_2) = \frac{\partial}{\partial a}\big(\sigma_{EV}^2(a) - \theta \cdot \mu_{EV}(a) - y_1 \cdot a - y_2 \cdot (l + u - a)\big)$$

(*KKT 2*) $c_1(a) \geq 0$
$c_2(a) \geq 0$

(*KKT 3*) $y_1 \cdot c_1(a) = 0$
$y_2 \cdot c_2(a) = 0$

Beweis: siehe [Fle81, S. 68] ■

Mit

$$\mu_{EV} \overset{(4.48)}{=} \frac{E[\triangle U]}{u} = \frac{\mu_Z + \delta_A a + r_0 u}{u} \quad \text{und}$$
$$\sigma_{EV}^2 \overset{(4.50)}{=} \frac{Var[\triangle U]}{u^2} = \frac{\sigma_Z^2 + a^2\sigma_{R_A}^2 + 2a\kappa\sigma_{R_A}\sigma_Z}{u^2}$$

erhält man die Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} L(a,y_1,y_2) &= \sigma^2_{EV}(a) - \theta \cdot \mu_{EV}(a) - y_1 \cdot a - y_2 \cdot (l+u-a) \\ &= \frac{1}{u^2}\big(\sigma_Z^2 + a^2\sigma_{R_A}^2 + 2a\kappa\sigma_{R_A}\sigma_Z\big) - \frac{\theta}{u}\big(\mu_Z + \delta_A a + r_0 u\big) - y_1 \cdot a \\ & \quad -y_2 \cdot (l+u-a)\,. \end{aligned}$$

(KKT 1): $L_a(a,y_1,y_2) \stackrel{!}{=} 0$

$$\begin{aligned} L_a(a,y_1,y_2) &= \frac{1}{u^2}\big(2a\sigma_{R_A}^2 + 2\kappa\sigma_{R_A}\sigma_Z\big) - \frac{\theta}{u}\delta_A - y_1 + y_2 \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow\ 2a\sigma_{R_A}^2 + 2\kappa\sigma_{R_A}\sigma_Z - \theta u\delta_A - y_1u^2 + y_2u^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow\ a = \frac{1}{2\sigma_{R_A}^2}\big(y_1u^2 - y_2u^2 - 2\kappa\sigma_{R_A}\sigma_Z + \theta u\delta_A\big) \qquad (*) \end{aligned}$$

$(KKT\,2)$: **1. Fall:** $0 < a < l+u$
$(KKT\,3) \Rightarrow y_1 = y_2 = 0$
$(*) \Rightarrow a^* = \frac{1}{2\sigma_{R_A}^2}\left(\theta u\delta_A - 2\kappa\sigma_{R_A}\sigma_Z\right)$

2. Fall: $a^* = 0 < l+u$
$(KKT\,3) \Rightarrow y_2 = 0$
$(*) \Rightarrow y_1 = \frac{1}{u^2}\left(2\kappa\sigma_{R_A}\sigma_Z - \theta u\delta_A\right) \stackrel{!}{\geq} 0$

3. Fall: $a^* = l+u > 0$
$(KKT\,3) \Rightarrow y_1 = 0$
$(*) \Rightarrow y_2 = \frac{1}{u^2}\big(\theta u\delta_A - 2\kappa\sigma_{R_A}\sigma_Z - 2\sigma_{R_A}^2(l+u)\big) \stackrel{!}{\geq} 0$

Zusammenfassend ergeben sich für die drei Fälle folgende Bedingungen an die Parameter:

1. Fall: $0 < \theta u\delta_A - 2\kappa\sigma_{R_A}\sigma_Z < 2\sigma_{R_A}^2(l+u)$
2. Fall: $0 \geq \theta u\delta_A - 2\kappa\sigma_{R_A}\sigma_Z$
3. Fall: $\theta u\delta_A - 2\kappa\sigma_{R_A}\sigma_Z \geq 2\sigma_{R_A}^2(l+u)$

■

4.5.3 Das optimale Unternehmensportfolio

In diesem Abschnitt wird nun das Versicherungsportfolio - bestehend aus dem gezeichneten Risiko, dem Gewinn (oder Verlust) aus der Abwicklung der Spätschäden und der Kapitalanlage - bezüglich der Rückversicherungsquote und der risikobehafteten Anlagemöglichkeit optimiert. Ausgangspunkt der Optimierung ist wieder die Gleichung

$$\begin{aligned} \triangle U &\stackrel{(4.44)}{=} \triangle S_{EV} + b_{EV} - \triangle L_1 - R_L \cdot l + R_A \cdot a + (l-a)\cdot r_0 + u \cdot r_0 \\ &\stackrel{(4.45)}{=} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(b_i - X_i^S) - \sum_{i=m+1}^{n} X_i^L - (R_L - r_0)\cdot l + (R_A - r_0)\cdot a + r_0 u\,. \end{aligned}$$

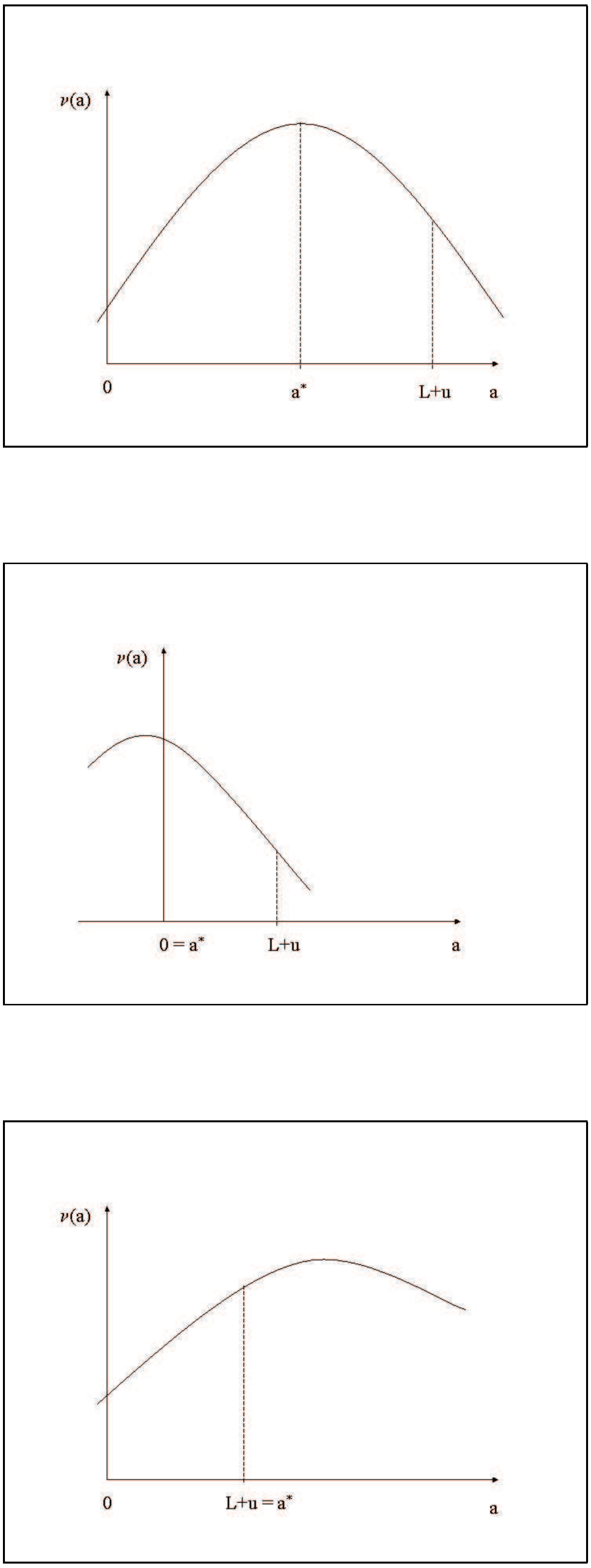

Abbildung 4.6: Drei mögliche Fälle, die bei der Optimierung aufteten können

Wir führen folgende Notation ein: $\quad (Cov[X,Y] := \sigma_{XY})$

$$
\begin{aligned}
\underline{X}^S &:= (X_1^S, \ldots, X_m^S)^\top \in \mathbb{R}^{m\times 1} \\
\underline{X}^L &:= (X_{m+1}^L, \ldots, X_n^L)^\top \in \mathbb{R}^{n-m\times 1} \\
\Sigma^S &:= (\sigma_{S_iS_j})_{i,j=1,\ldots,m} \in \mathbb{R}^{m\times m} \quad \text{mit} \quad \sigma_{S_iS_i} := \sigma_{S_i}^2 := Var[X_i^S] \\
\Sigma^L &:= (\sigma_{L_iL_j})_{i,j=m+1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n-m\times n-m} \quad \text{mit} \quad \sigma_{L_iL_i} := \sigma_{L_i}^2 := Var[X_i^L] \\
\Sigma^{SL} &:= (\sigma_{S_iL_j})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=m+1,\ldots,n}} \in \mathbb{R}^{m\times n-m} \\
\sigma_{R_L}^2 &:= Var[R_L] \\
\sigma_{R_A}^2 &:= Var[R_A] \\
\underline{\sigma}_{SR_L} &:= (\sigma_{S_1R_L}, \ldots, \sigma_{S_mR_L})^\top \in \mathbb{R}^{m\times 1} \\
\underline{\sigma}_{SR_A} &:= (\sigma_{S_1R_A}, \ldots, \sigma_{S_mR_A})^\top \in \mathbb{R}^{m\times 1} \\
\underline{\sigma}_{LR_L} &:= (\sigma_{L_{m+1}R_L}, \ldots, \sigma_{L_nR_L})^\top \in \mathbb{R}^{n-m\times 1} \\
\underline{\sigma}_{LR_A} &:= (\sigma_{L_{m+1}R_A}, \ldots, \sigma_{L_nR_A})^\top \in \mathbb{R}^{n-m\times 1} \\
\chi_{SR_A} &:= \underline{\sigma}_{SR_A}^\top (\Sigma^S)^{-1} \underline{\sigma}_{SR_A} \qquad (4.59) \\
C^* &:= \theta u \delta_A + \underline{1}^\top \underline{\sigma}_{LR_A} + l \cdot \sigma_{R_LR_A} + \frac{1}{2}(\theta u \underline{b} - \Sigma^{SL}\underline{1} - l \cdot \underline{\sigma}_{SR_L})^\top (\Sigma^S)^{-1} \underline{\sigma}_{SR_A} \qquad (4.60) \\
\underline{1} &:= (1, \ldots, 1)^\top \qquad \text{Einsvektor von geeigneter Dimension}
\end{aligned}
$$

Mit diesen und den Bezeichnungen von Seite 63 lässt sich das Unternehmensrisiko und der Unternehmensertrag schreiben als

$$
\begin{aligned}
\mu_{EV} &\overset{(4.48)}{=} \frac{E[\triangle U]}{u} \\
&= \frac{1}{u} \cdot \Big(\underline{\alpha}^\top \underline{b} - (\mu_L - r_0) \cdot l + \delta_A \cdot a \Big) + r_0 \quad \text{und} \qquad (4.61) \\
\sigma_{EV}^2 &\overset{(4.50)}{=} \frac{Var[\triangle U]}{u^2} \\
&= \frac{1}{u^2} \Big(\underbrace{Var[\underline{\alpha}^\top \underline{X}^S]}_{=\underline{\alpha}^\top \Sigma^S \underline{\alpha}} + \underbrace{Var[\underline{1}^\top \underline{X}^L]}_{=\underline{1}^\top \Sigma^L \underline{1}} + l^2 \cdot Var[R_L] + a^2 \cdot Var[R_A] \\
&\quad + \sum_{i=1}^m \sum_{j=m+1}^n \alpha_i Cov[X_i^S, X_j^L] + l \cdot \sum_{i=1}^m \alpha_i Cov[X_i^S, R_L] - a \cdot \sum_{i=1}^m \alpha_i Cov[X_i^S, R_A] \\
&\quad + l \cdot \sum_{j=m+1}^n Cov[X_j^L, R_L] - a \cdot \sum_{j=m+1}^n Cov[X_j^L, R_A] - a \cdot l \cdot Cov[R_L, R_A] \Big) \\
&= \frac{1}{u^2} \Big(\underline{\alpha}^\top \Sigma^S \underline{\alpha} + \underline{1}^\top \Sigma^L \underline{1} + l^2 \sigma_{R_L}^2 + a^2 \sigma_{R_A}^2 + \underline{\alpha}^\top \Sigma^{SL} \underline{1} + l \cdot \underline{\alpha}^\top \underline{\sigma}_{SR_L} - a \cdot \underline{\alpha}^\top \underline{\sigma}_{SR_A} \\
&\quad + l \cdot \underline{1}^\top \underline{\sigma}_{LR_L} - a \cdot \underline{1}^\top \underline{\sigma}_{LR_A} - a \cdot l \cdot \sigma_{R_LR_A} \Big). \qquad (4.62)
\end{aligned}
$$

Satz 4.12

Bezeichne $\nu_{EV}(a, \underline{\alpha})$ die Erwartungsnutzenfunktion, die Kovarianzmatrix Σ^S sei positiv definit und es gilt $2\sigma_{R_A}^2 - \frac{1}{2}\chi_{SR_A} > 0$. Zur Lösung des Optimierungsproblems

$$(a, \underline{\alpha}) \mapsto \nu_{EV}(a, \underline{\alpha}) \to max$$

unter der Nebenbedingung $0 \leq a \leq l+u$ werden folgende drei Fälle unterschieden.

1. Fall: *Für $0 < C^* < (l+u)(2\sigma^2_{R_A} - \frac{1}{2}\chi_{SR_A})$ ist die optimale Lösung $(a^*, \underline{\alpha}^*)$ gegeben durch*

$$a^* = \frac{C^*}{2\sigma^2_{R_A} - \frac{1}{2}\chi_{SR_A}} \tag{4.63}$$

$$\underline{\alpha}^* = \frac{1}{2}(\Sigma^S)^{-1}\Big(a^*\underline{\sigma}_{SR_A} + \theta u\underline{b} - \Sigma^{SL}\underline{1} - l \cdot \underline{\sigma}_{SR_L}\Big)\,. \tag{4.64}$$

2. Fall: *Für $0 \geq C^*$ ist die optimale Lösung $(a^*, \underline{\alpha}^*)$ gegeben durch*

$$\begin{aligned} a^* &= 0 \\ \underline{\alpha}^* &= \frac{1}{2}(\Sigma^S)^{-1}(\theta u\underline{b} - \Sigma^{SL}\underline{1} - l \cdot \underline{\sigma}_{SR_L})\,. \end{aligned}$$

3. Fall: *Für $C^* \geq (l+u)(2\sigma^2_{R_A} - \frac{1}{2}\chi_{SR_A})$ ist die optimale Lösung $(a^*, \underline{\alpha}^*)$ gegeben durch*

$$\begin{aligned} a^* &= l+u \\ \underline{\alpha}^* &= \frac{1}{2}(\Sigma^S)^{-1}\left(a^*\underline{\sigma}_{SR_A} + \theta u\underline{b} - \Sigma^{SL}\underline{1} - l \cdot \underline{\sigma}_{SR_L}\right)\,. \end{aligned}$$

Beweis:
Maximiere den Erwartungsnutzen

$$\nu(a, \underline{\alpha}) = \theta \cdot \mu_{EV}(a, \underline{\alpha}) - \sigma^2_{EV}(a, \underline{\alpha})$$

unter den Nebenbedingungen

i) $a \geq 0$ und

ii) $a \leq l+u$.

Formulierung als konvexes Minimierungsproblem:
Minimiere

$$\nu(a, \underline{\alpha}) = \sigma^2_{EV}(a, \underline{\alpha}) - \theta \cdot \mu_{EV}(a, \underline{\alpha})$$

unter den Nebenbedingungen

i) $c_1(a) = a \geq 0$ und

ii) $c_2(a) = l + u - a \geq 0$,

wobei $\nu(a, \underline{\alpha})$ eine konvexe Funktion ist und $c_1(a), c_2(a)$ sind linear in a.
Nach dem Kuhn/Tucker Theorem (siehe Seite 64) müssen für ein optimales $(a^*, \underline{\alpha}^*)$ die Kuhn/Tucker-Bedingungen gelten:

$$\begin{array}{ll} \text{(KKT 1)} & L_a(a, \underline{\alpha}, y_1, y_2) = 0 \\ & L_{\underline{\alpha}}(a, \underline{\alpha}, y_1, y_2) = 0 \\ \text{(KKT 2)} & c_1(a) \geq 0 \\ & c_2(a) \geq 0 \\ \text{(KKT 3)} & y_1 \cdot c_1(a) = 0 \\ & y_2 \cdot c_2(a) = 0 \end{array}$$

Mit (4.61) und (4.62) erhält man die Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} L(a, \underline{\alpha}, y_1, y_2) &= \frac{1}{u^2}\Big(\underline{\alpha}^\top \Sigma^S \underline{\alpha} + \underline{1}^\top \Sigma^L \underline{1} + l^2 \sigma_{R_L}^2 + a^2 \sigma_{R_A}^2 + \underline{\alpha}^\top \Sigma^{SL} \underline{1} + l \cdot \underline{\alpha}^\top \underline{\sigma}_{SR_L} \\ &\quad - a \cdot \underline{\alpha}^\top \underline{\sigma}_{SR_A} + l \cdot \underline{1}^\top \underline{\sigma}_{LR_L} - a \cdot \underline{1}^\top \underline{\sigma}_{LR_A} - a \cdot l \cdot \sigma_{R_L R_A}\Big) \\ &\quad - \frac{\theta}{u} \cdot \Big(\underline{\alpha}^\top \underline{b} - (\mu_L - r_0) \cdot l + \delta_A \cdot a\Big) + r_0 - y_1 \cdot a - y_2 \cdot (l + u - a) \end{aligned}$$

(KKT 1): $L_a(a, \underline{\alpha}, y_1, y_2) \stackrel{!}{=} 0$

$$\begin{aligned} L_a(a, \underline{\alpha}, y_1, y_2) &= \frac{1}{u^2}\left(2a\sigma_{R_A}^2 - \underline{\alpha}^\top \underline{\sigma}_{SR_A} - \underline{1}^\top \underline{\sigma}_{LR_A} - l \cdot \sigma_{R_L R_A}\right) - \frac{\theta}{u}\delta_A - y_1 + y_2 \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \quad (I) \quad a^* &= \frac{1}{2\sigma_{R_A}^2}\left(\theta u \delta_A + y_1 u^2 - y_2 u^2 + \underline{\alpha}^\top \underline{\sigma}_{SR_A} + \underline{1}^\top \underline{\sigma}_{LR_A} + l \cdot \sigma_{R_L R_A}\right) \end{aligned}$$

$$L_{\underline{\alpha}}(a, \underline{\alpha}, y_1, y_2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{aligned} L_{\underline{\alpha}}(a, \underline{\alpha}, y_1, y_2) &= \frac{1}{u^2}\left(2\Sigma^S \underline{\alpha} + \Sigma^{SL}\underline{1} + l \cdot \underline{\sigma}_{SR_L} - a \cdot \underline{\sigma}_{SR_A}\right) - \frac{\theta}{u}\underline{b} \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \quad (II) \quad \underline{\alpha}^* &= \frac{1}{2}(\Sigma^S)^{-1}\left(a^* \cdot \underline{\sigma}_{SR_A} + \theta u \underline{b} - \Sigma^{SL}\underline{1} - l \cdot \underline{\sigma}_{SR_L}\right) \end{aligned}$$

Einsetzten von (II) in (I):

$$\begin{aligned} a^* &= \frac{1}{2\sigma_{R_A}^2}\Big(\theta u \delta_A + y_1 u^2 - y_2 u^2 + \frac{1}{2}(a\underline{\sigma}_{SR_A} + \theta u \underline{b} - \Sigma^{SL}\underline{1} - l \cdot \underline{\sigma}_{SR_L})^\top (\Sigma^S)^{-1} \underline{\sigma}_{SR_A} \\ &\qquad + \underline{1}^\top \underline{\sigma}_{LR_A} + l \cdot \sigma_{R_L R_A}\Big) \\ \Leftrightarrow \quad & a^*(1 - \frac{1}{4\sigma_{R_A}^2}\underbrace{\underline{\sigma}_{SR_A}^\top (\Sigma^S)^{-1}\underline{\sigma}_{SR_A}}_{=:\chi_{SR_A}} = \frac{1}{2\sigma_{R_A}^2}\Big(y_1 u^2 - y_2 u^2 + \theta u \delta_A + \underline{1}^\top \underline{\sigma}_{LR_A} + l \cdot \sigma_{R_L R_A} \\ &\qquad + \frac{1}{2}(\theta u \underline{b} - \Sigma^{SL}\underline{1} - l \cdot \underline{\sigma}_{SR_L})^\top (\Sigma^S)^{-1} \underline{\sigma}_{SR_A}\Big) \\ \Leftrightarrow \quad & a^* \stackrel{(4.60)}{=} \frac{1}{2\sigma_{R_A}^2 - \frac{1}{2}\chi_{SR_A}}\Big(y_1 u^2 - y_2 u^2 + C^*\Big) \qquad (*) \end{aligned}$$

Aus der zweiten Kuhn/Tucker-Bedingung (KKT 2) lassen sich drei Fälle ableiten.

1. Fall: $0 < a < l + u$

$$\begin{aligned}
(\text{KKT } 3) \quad &\Rightarrow \quad y_1 = y_2 = 0 \\
(*) \quad &\Rightarrow \quad a^* = \frac{C^*}{2\sigma_{R_A}^2 - \frac{1}{2}\chi_{SR_A}} \\
(II) \quad &\Rightarrow \quad \underline{\alpha}^* = \frac{1}{2}(\Sigma^S)^{-1}\left(\frac{C^*}{2\sigma_{R_A}^2 - \frac{1}{2}\chi_{SR_A}} \cdot \underline{\sigma}_{SR_A} + \theta u\underline{b} - \Sigma^{SL}\underline{1} - l \cdot \underline{\sigma}_{SR_L}\right)
\end{aligned}$$

2. Fall: $a^* = 0 < l + u$

$$\begin{aligned}
(\text{KKT } 3) \quad &\Rightarrow \quad y_2 = 0 \\
(*) \quad &\Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2\sigma_{R_A}^2 - \frac{1}{2}\chi_{SR_A}}\left(y_1 u^2 + C^*\right) \\
&\Leftrightarrow \quad y_1 = -\frac{C^*}{u^2} \overset{!}{\geq} 0 \\
(II) \quad &\Rightarrow \quad \underline{\alpha}^* = \frac{1}{2}(\Sigma^S)^{-1}(\theta u\underline{b} - \Sigma^{SL}\underline{1} - l \cdot \underline{\sigma}_{SR_L})
\end{aligned}$$

3. Fall: $a^* = l + u > 0$

$$\begin{aligned}
(\text{KKT } 3) \quad &\Rightarrow \quad y_1 = 0 \\
(*) \quad &\Rightarrow \quad l + u = \frac{1}{2\sigma_{R_A}^2 - \frac{1}{2}\chi_{SR_A}}\left(-y_2 u^2 + C^*\right) \\
&\Leftrightarrow \quad y_2 = \frac{1}{u^2}\Big(C^* - (l+u)(2\sigma_{R_A}^2 - \frac{1}{2}\chi_{SR_A})\Big) \overset{!}{\geq} 0 \\
(II) \quad &\Rightarrow \quad \underline{\alpha}^* = \frac{1}{2}(\Sigma^S)^{-1}\left((l+u)\underline{\sigma}_{SR_A} + \theta u\underline{b} - \Sigma^{SL}\underline{1} - l \cdot \underline{\sigma}_{SR_L}\right)
\end{aligned}$$

Zusammenfassend ergeben sich für die drei Fälle folgende Bedingungen an die Parameter:

1. Fall: $0 < C^* < (l+u)(2\sigma_{R_A}^2 - \frac{1}{2}\chi_{SR_A})$
2. Fall: $0 \geq C^*$
3. Fall: $C^* \geq (l+u)(2\sigma_{R_A}^2 - \frac{1}{2}\chi_{SR_A})$

■

Bemerkungen:

- Im vorhergehenden Satz wurden nur Restriktionen an den Parameter a gefordert. Ergänzt man das Optimierungsproblem durch die Nebenbedingung $0 \leq \alpha_i \leq 1$ $(i = 1, \ldots, I)$, so lässt sich die Lösung nicht mehr geschlossen darstellen (vergleiche Kapitel 4.3.3, Bemerkung auf Seite 44). Die Lösung des konvexen Optimierungsproblems

$$-\nu_{EV}(a, \underline{\alpha}) \rightarrow Minimum$$

mit Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} c_1(a) &= a \geq 0 \\ c_2(a) &= l + u - a \geq 0 \\ c_3(\underline{\alpha}) &= \underline{\alpha} \geq 0 \\ c_4(\underline{\alpha}) &= \underline{1} - \underline{\alpha} \geq 0 \end{aligned}$$

kann jedoch mittels Kuhn/Tucker-Bedingungen (siehe Kuhn/Tucker Theorem Seite 64) numerisch bestimmt werden. $(a^*, \underline{\alpha}^*)$ muss folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{array}{ll} \text{(KKT 1)} & L_a(a, \underline{\alpha}, y_1, y_2) = 0 \\ & L_{\underline{\alpha}}(a, \underline{\alpha}, y_1, y_2) = 0 \\ \text{(KKT 2)} & c_1(a) \geq 0 \\ & c_2(a) \geq 0 \\ & c_3(\underline{\alpha}) \geq 0 \\ & c_4(\underline{\alpha}) \geq 0 \\ \text{(KKT 3)} & y_1 \cdot c_1(a) = 0 \\ & y_2 \cdot c_2(a) = 0 \\ & \underline{y_3}^\top \cdot c_3(\underline{\alpha}) = 0, \quad \text{d.h.} \displaystyle\sum_{i=1}^{I} y_{3i} \cdot \alpha_i = 0 \\ & \underline{y_4}^\top \cdot c_4(\underline{\alpha}) = 0, \quad \text{d.h.} \displaystyle\sum_{i=1}^{I} y_{4i} \cdot (1 - \alpha_i) = 0 \end{array}$$

- Durch Annahme 4.9 wurde im Portfolio der Spätschadenreserve keine Rückversicherung beachtet. Nimmt man jedoch an, dass die Spätschadenreserve ebenfalls durch eine Quotenrückversicherung abgesichert wird, so hat dies Auswirkungen auf die Größen

$$\begin{aligned} \triangle L_1 &= \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i X_i^L, \\ R_L &= R_L(\underline{\alpha}) \qquad \text{und} \\ l &= l(\underline{\alpha}) \,. \end{aligned}$$

  Folglich blieben Σ^L, σ_{R_L} und $\underline{\sigma}_{LR_L}$ bei der Optimierung erhalten und es wäre zu berücksichtigen, dass die Rückversicherungsquote $\underline{\alpha}$ auch die Höhe der diskontierten Verbindlichkeiten $l = l(\underline{\alpha})$ beeinflußt.

- Im Modell ist bisher nur eine einzige risikobehaftete Anlagemöglichkeit a enthalten. Eine Erweiterung auf mehrere Assetklassen erfolgt durch Ersetzen von a durch den Vektor $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_J)^\top$. Dabei ist jedoch zu beachten, dass die Maximierung des Erwartungsnutzens zu einer Lösung führt, die sich nicht mehr geschlossen darstellen läßt. Das System der Kuhn/Tucker-Bedingungen wird somit noch vergrößert. ■

4.5.4 Kapitalallokation zu Einzelrisiken

Sei $\triangle U = \sum_{i=1}^{I} \triangle U_i$ eine Zuordnung der Unternehmenskapitaländerung auf einzelne Unternehmensbereiche (z.B. Versicherungstechnik). Es stellt sich nun die Frage, wie man in sinnvoller Art und Weise das Gesamtkapital u auf die Bereiche $i = 1, \ldots, I$ aufteilen kann. Um den Begriff Kapitalallokation zu klären, gilt folgende Definition.

Definition 4.13 (Kapitalallokation)
*Gegeben sei $I \in \mathbb{N} und \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^+$. Eine Abbildung $\Psi : \mathbb{U} \longrightarrow (\mathbb{R}^+)^I$ heißt **Kapitalallokation**, falls $\forall\ u \in \mathbb{U}$ gilt:*

$$\sum_{i=1}^{I} \Psi_i(u) = u, \quad \Psi(u) = (\Psi_1(u), \ldots, \Psi_I(u))$$

■

Erinnern wir uns an Kapitel 3.2.3, Seite 19. Dort haben wir eine unter Normalverteilungsannahme stabile und faire Aufteilung eingeführt: das Kovarianzprinzip. Mit $u = \sum_{i=1}^{I} u_i$ erhält man

$$\boxed{u_i = \frac{Cov[\triangle U_i, \triangle U]}{Var[\triangle U]} \cdot u}. \tag{4.65}$$

Die Aufteilung nach dem Kovarianzprinzip $u \rightarrow (u_1, \ldots, u_I)$ ist im Allgemeinen eine Kapitalallokation, da

- $\sum_{i=1}^{I} Cov[\triangle U_i, \triangle U] = Cov\left[\sum_{i=1}^{I} \triangle U_i, \triangle U\right] = Cov[\triangle U, \triangle U] = Var[\triangle U]$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{I} u_i = \frac{\sum_{i=1}^{I} Cov[\triangle U_i, \triangle U]}{Var[\triangle U]} \cdot u = \frac{Var[\triangle U]}{Var[\triangle U]} \cdot u = u$$

- $Cov[\triangle U_i, \triangle U] > 0$ plausibel, da der Gewinn (bzw. der Verlust) des Unternehmens im Allgemeinen steigt (fällt), wenn der Gewinn (bzw. der Verlust) in einem Unternehmensbereich steigt (fällt).

$$\Rightarrow\ u_i = \frac{Cov[\triangle U_i, \triangle U]}{Var[\triangle U]} \cdot u > 0$$

Das Performance-basierte Kapital

$$u \overset{(4.9)}{=} \frac{1}{\sigma^*} \cdot \sigma(\triangle U)$$

ist proportional zu $\sigma(\triangle U)$. Durch

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{Cov[\triangle U_i, \triangle U]}{Var[\triangle U]} \cdot u_P \\ &= \frac{1}{\sigma^*} \cdot \frac{Cov[\triangle U_i, \triangle U]}{\sigma(\triangle U)}, \quad i = 1, \ldots, I \end{aligned} \tag{4.66}$$

erhält man eine Aufteilung des Performance-basierten Kapitals auf die einzelnen Unternehmensbereiche i. Der Überschuss-Gewinn (oder -verlust), den das Unternehmen unter der Risikoannahme $\sigma(\triangle U)$ zu erreichen erwartet, ist $(\mu - r_0) \cdot u$, wobei r_0 wieder die Rendite der risikolosen Anlage bezeichnet. Teilt man den erwarteten Überschuss-Gewinn auf die einzelnen Unternehmensbereiche auf, so wird dieser Betrag als fairer Sicherheitszuschlag des jeweiligen Bereichs bezeichnet.

Definition 4.14 (fairer Sicherheitszuschlag (Fair Economic Loading))
*Der **faire Sicherheitszuschlag** für $\triangle U_i$, $i = 1, \ldots, I$ ist*

$$(\mu - r_0) \cdot u_i = (\mu - r_0) \cdot u \cdot \frac{Cov[\triangle U_i, \triangle U]}{Var[\triangle U]} \tag{4.67}$$

und entspricht somit den Kapitalkosten für die Unsicherheit bezüglich des Ergebnisses, das der Bereich i $(1 \leq i \leq I)$ im betrachteten Jahr erzielt. ■

Kapitel 5

Praktische Modellrechnung

In diesem Kapitel wird das in Kapitel 4 vorgestellte stochastische Modell an einem Beispielportfolio durchgerechnet. Das Portfolio besteht aus drei Sparten, deren Bestand jeweils als homogen angenommen wird. Da wir der Berechnung das individuelle Modell[27] zugrunde legen, wird erst die Verteilungsfunktion eines Einzelrisikos bestimmt und anschließend durch Faltung die Gesamtschadenverteilung. Für die Simulationen wird das Programm @Risk in Kombination mit Microsoft EXCEL verwendet. @Risk ist eine Simulationssoftware, die für auf EXCEL basierende Modelle Zufallsvariablen erzeugt und verschiedenste Routinen zur Auswertung der Ergebnisse zur Verfügung stellt.

5.1 Das Portfolio

Das Beipielportfolio wird aus folgenden drei Sparten aufgebaut:

- Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung mit 40.000 versicherten Risiken: S^H
- sonstige Kraftfahrtversicherung (Fahrzeugvollversicherung, Fahrzeugteilversicherung und Kraftfahrtunfallversicherung) mit 25.000 Risiken: S^K
- Feuer- und Sachversicherung (z.B. Sturmversicherung, verbundene Hausratversicherung, Technische Versicherungen, Transportversicherung) mit 400.000 Risiken: S^F

Somit hat unser Beispielportfolio folgende Struktur

$$
\begin{aligned}
S &= S^H + S^K + S^F && (5.1)\\
&= \sum_{i=1}^{40.000} S_i^H + \sum_{i=1}^{25.000} S_i^K + \sum_{i=1}^{400.000} S_i^F\,. && (5.2)
\end{aligned}
$$

Die Risiken jeder Sparte werden in diesem Beispiel durch Gamma-verteilte Zufallsvariablen mit Sparten-spezifischen Parametern simuliert[28]. Die zugehörigen Parameter werden aus Daten der Geschäftsberichte der ARAG Allgemeinen geschätzt. In Kapitel 3.2.4 wurden außer der Gammaverteilung noch zwei weitere Schadenverteilungen eingeführt. Wir

[27] Das individuelle Modell wird z.B. in [Mac97, Kapitel 1.3] genauer beschrieben.
[28] Für das Thema Simulation sei auf [Rub81] oder [Rip87] verwiesen.

beschränken uns in diesem Beispiel jedoch auf die Gammaverteilung. Die genaue Vorgehensweise wird im Folgenden erläutert.

5.2 Berechnung der Gesamtschadenverteilung

Annahmen:

- Jede Sparte hat einen homogenen Bestand $S_1, \ldots, S_{v_j}$, $j = \{H, K, F\}$.
- Die Einzelschäden S_i $(1 \leq i \leq v_j)$ sind $\Gamma(q, \lambda)$-verteilt mit Dichte

$$f(x) = \frac{\lambda^q}{\Gamma(q)} x^{q-1} e^{-\lambda \cdot x}$$

  und Erwartungswert bzw. Varianz

$$E[S_i] = \frac{q}{\lambda} \quad \text{und} \quad Var[S_i] = \frac{q}{\lambda^2}, \quad i = 1, \ldots, I.$$

■

Durch die Substitution

$$\mu := \frac{q}{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{q}{\mu}$$

erhält man die Erwartungswert-Darstellung der Gammaverteilung und die **Einzelschäden** $S_1, \ldots, S_{v_j}$ sind folglich $\Gamma(q, \frac{q}{\mu})$-verteilt mit Dichte

$$f(x) = \frac{\left(\frac{q}{\mu}\right)^q}{\Gamma(q)} x^{q-1} e^{-\frac{q}{\mu} \cdot x}$$

und Erwartungswert bzw. Varianz

$$E[S_i] = \mu \quad \text{und} \quad Var[S_i] = \frac{\mu^2}{q}, \quad i = 1, \ldots, v_j.$$

Faltet man die Dichten der Einzelrisiken eines Jahres, so erhält man den **Gesamtschaden für jede Sparte** j, S^j und es gilt:

$$S^j = \sum_{i=1}^{v_j} S_i^j \quad \text{mit} \quad S_i^j \sim \Gamma(q_j, \frac{q_j}{\mu_j}), \quad i = 1, \ldots, v_j \quad \text{und} \quad j = \{H, K, F\}.$$

Nach Kredler gilt:

> [Kre, S. 121]: „Die Summe $X + Y$ unabhängiger $\Gamma(q, \lambda)$- bzw. $\Gamma(r, \lambda)$-verteilter Zufallsvariablen X bzw. Y ist $\Gamma(q + r, \lambda)$-verteilt, wobei $q, r, \lambda > 0$.“

Folglich ist der Jahresgesamtschaden jeder Sparte $j = \{H, K, F\}$ $\Gamma(v_j q_j, \frac{q_j}{\mu_j})$-verteilt. Die zugehörige Dichtefunktion ist nun von der Form

$$f(x) = \frac{\left(\frac{q_j}{\mu_j}\right)^{v_j q_j}}{\Gamma(v_j q_j)} x^{v_j q_j - 1} e^{-\frac{q_j}{\mu_j} x} \tag{5.3}$$

mit Erwartungswert bzw. Varianz

$$E[S^j] = \mu_j \cdot v_j \quad \text{und} \quad Var[S^j] = \frac{\mu_j^2}{q_j} \cdot v_j, \quad j = \{H, K, F\}. \tag{5.4}$$

Um für das Portfolio Schäden simulieren zu können, werden die noch unbekannten Parameter μ_j und q_j jeder Sparte $j = H, K, F$ anhand der Realisierungen $\frac{s_t}{v_t}$ der Schäden der Jahre $t = 1, \ldots, T$ geschätzt[29]. Die Momentenschätzer sind in [Mac97, S. 47] angegeben, die Berechnung der Maximum-Likelihoodschätzer wird im Folgenden ausgeführt.

Maximum-Likelihoodschätzer

Likelihoodfunktion: $l(s_t, \mu, q) = \prod_{t=1}^{T} f(s_t)$

Loglikelihood: $L(s_t, \mu, q) = \ln\Big(l(s_t, \mu, q)\Big) = \sum_{t=1}^{T} \ln\big(f(s_t)\big)$

Mit (5.3) erhält man die zu maximierende Loglikelihoodfunktion

$$L(s_t, \mu, q) = \sum_{t=1}^{T} \Big(v_t q(\ln q - \ln \mu) + (v_t q - 1) \ln s_t - \frac{q}{\mu} s_t - \ln \Gamma(v_t q) \Big).$$

Ableitung nach dem Parameter μ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \mu} &= \sum_{t=1}^{T} \Big(-\frac{v_t q}{\mu} + \frac{q}{\mu^2} s_t \Big) \stackrel{!}{=} 0 \\
&\stackrel{q,\mu>0}{\Leftrightarrow} \quad -\sum_{t=1}^{T} v_t + \frac{1}{\mu} \sum_{t=1}^{T} s_t = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \hat{\mu} = \frac{\sum_{t=1}^{T} s_t}{\sum_{t=1}^{T} v_t}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

[29]Betrachtet man die Schäden über mehrere Jahre hinweg, so werden Erwartungwert und Varianz der Einzelrisiken als konstant angenommen. Lediglich das im Formparameter als Faktor vorkommende Volumen v_t unterliegt einer jährlichen Veränderung.

Ableitung nach dem Parameter q:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q} &= \sum_{t=1}^{T}\Big(v_t \ln q + v_t - v_t \ln \mu + v_t \ln s_t - \frac{s_t}{\mu} - v_t \frac{\Gamma'(v_t q)}{\Gamma(v_t q)}\Big) \\
&= \sum_{t=1}^{T}\Big(v_t(\ln q - \ln \mu + \ln s_t) + v_t - \frac{s_t}{\mu} - v_t \Psi(v_t q)\Big) \\
&= \sum_{t=1}^{T} v_t \ln \frac{q s_t}{\mu} + v_t - \frac{s_t}{\mu} - v_t \Psi(v_t q)\Big) \\
&\stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Mit $z_t := \frac{s_t}{v_t}$ und $\sum\limits_{t=1}^{T} v_t - \frac{1}{\mu}\sum\limits_{t=1}^{T} s_t \stackrel{(5.5)}{=} 0$ gilt:

$$\sum_{t=1}^{T} v_t \Big(\ln \frac{q v_t z_t}{\mu} - \Psi(v_t q)\Big) = 0 \tag{5.6}$$

$\Psi(x) := \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ bezeichnet die Digammafunktion. Mit der Rekursion

$$\Psi(x) \quad = \quad \Psi(x+1) - \frac{1}{x}$$

kann nach [Mac97, S. 48] $\Psi(v_t q)$ mit Hilfe der für $x > 5$ auf 8 Dezimalen genauen Approximation

$$\Psi(x) \quad \approx \quad \ln(x) - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{\frac{1}{x^4} - \frac{0{,}46}{x^6}}{120}$$

iterativ gelöst werden. Um sicherzustellen, dass $x > 5$ erfüllt ist, verwendet man den Ausdruck

$$\Psi(qv_t) = \Psi(qv_t + 5) - \frac{1}{qv_t + 4} - \frac{1}{qv_t + 3} - \frac{1}{qv_t + 2} - \frac{1}{qv_t + 1} - \frac{1}{qv_t}.$$

Der Parameterschätzer $\hat{q}$ ist eine Lösung der Gleichung (5.6) und wurde mit Hilfe von EXCEL berechnet. Folgende Tabelle 5.1 enthält die aus den Geschäftsberichten der ARAG Allgemeinen entnommenen Daten sowie die daraus resultierenden Schätzer. Für jede Sparte sind die Schäden s_j in Tausend Euro, das Volumen v_j und deren Quotient für verschiedene Jahre aufgeführt. In der Sparte Kfz-Haftpflicht wurden dabei nur Daten aus den Jahren 1998 - 2001 und in der Sparte sonstige Kfz Daten aus den Jahren 1997 - 2001 verwendet. Die Schätzung in der Sparte Feuer/Sach basiert hingegen auf den Jahren 1995 - 2001.

	Kfz-HP			*sonstige Kfz*			*Feuer/Sach*		
Jahr	s_H	v_H	$\frac{s_H}{v_H}$	s_K	v_K	$\frac{s_K}{v_K}$	s_F	v_F	$\frac{s_F}{v_F}$
1995							24.594	426.883	58
1996							18.990	413.587	46
1997				3.804	28.717	132	23.104	398.566	58
1998	11.360	42.331	268	3.704	26.734	139	19.916	387.546	51
1999	8.821	37.951	232	3.678	24.261	152	23.079	378.957	61
2000	10.950	38.297	286	3.698	24.203	153	17.953	369.474	49
2001	10.217	37.937	269	3.715	23.732	157	19.743	396.294	50
$\hat{\mu}$			264			146			53
$\hat{q}$			0,004616			0,009290			0,000262

Tabelle 5.1: Geschätzte Parameterwerte für die Einzelrisiken der verschiedenen Sparten, basierend auf den Schäden s_j (angegeben in Tausend Euro) und dem Volumen v_j

Abbildung 5.1 zeigt die Dichte der beiden Gammaverteilungen der Einzelrisiken in den Sparten Kfz-Haftpflichtversicherung und sonstige Kfz-Versicherungen. Vergleicht man die Graphiken mit Abbildung 3.1 auf Seite 22, so erkennt man, dass die beiden Kurven der dort angegebenen Kurve A, die steil von $f(0) = \infty$ abfällt, ähnelt. Die Dichtefunktion der Sparte Feuer- und Sachversicherung ist aber noch etwas extremer (näher an Null), da der Formparameter α noch näher an Null liegt.

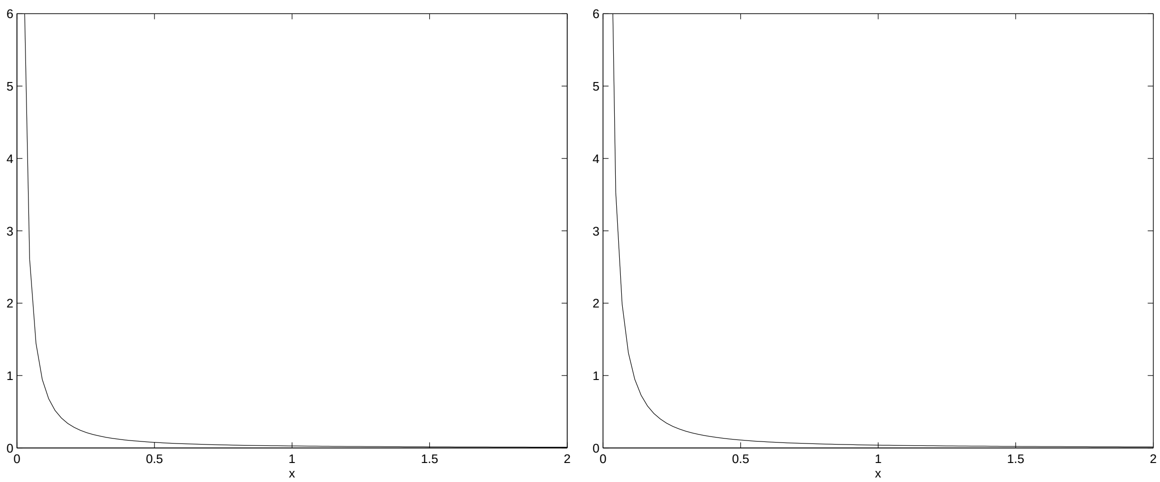

Abbildung 5.1: Dichtefunktionen der Einzelrisiken in den Sparten Kfz-Haftpflicht bzw. sonstige Kfz

Die Schäden der drei Sparten unseres Beispielportfolios werden also durch die Verteilungen

Kfz-Haftpflicht: $S_H \sim \Gamma\,(v_H \cdot 0,004616; 57.197, 33^{-1}), \quad v_H = 40.000$

sonstige Kfz: $S_K \sim \Gamma\left(v_K \cdot 0,009290; 15.715,82^{-1}\right), \quad v_K = 25.000$
Feuer/Sach: $S_F \sim \Gamma\left(v_F \cdot 0,000262; 202.290,08^{-1}\right), \quad v_F = 400.000$

bestimmt. Folglich befinden sich in unserem Portfolio

$$v = v_H + v_K + v_F = 465.000 \quad \text{versicherte Risiken.}$$

Um von der Schadenverteilung der drei Portfolios auf die Gesamtschadenverteilung überzugehen, simuliert man nun die Faltung der drei Gammafunktionen 10.000-mal. Anschließend lassen sich mit Hilfe von @Risk verschiedene Verteilungen an das Simulationsergebnis anpassen. Tabelle 5.2 zeigt die zwei am Besten angepassten Verteilungen und die Abbildungen 5.2 bis 5.5 die zugehörigen Histogramme bzw. QQ-Plots[30]. Die Rechtsschiefe der simulierten Daten ist bei genauerer Betrachtung der Histogramme zu sehen. Die QQ-Plots lassen jedoch kaum einen qualitativen Unterschied der Verteilungen erkennen.

	Input 10.000 simulierte Daten	*Fit* Normal(μ, σ^2)	*Fit* Lognormal(μ, σ^2) mit Shift von - 3.813.432
Minimum	27.633.668	$-\infty$	- 3.813.432
Maximum	44.641.508	$+\infty$	$+\infty$
Mean	35.410.075	35.410.075	35.410.076
Mode	33.771.016 [est]	35.410.075	35.221.214
Median	35.359.270	35.410.075	35.347.021
Std. Deviation	2.226.774	2.226.774	2.226.761
Variance	4.958.028.123.000	4.958.523.976.000	4.958.466.670.000
Skewness	0,1675	0	0,1705
Kurtosis	3,0251	3	3,0517

Tabelle 5.2: Vergleich des Ergebnisses der Simulation der Gesamtschadenverteilung mit der angepassten Normalverteilung bzw. der Lognormalverteilung

Mittelwert und Standardabweichung der Normalverteilung entsprechen genau den zugehörigen Größen der Input-Daten; die Werte der Lognormalverteilung weichen äußerst geringfügig davon ab. Man stellt jedoch fest, dass trotz 465.000 versicherter Risiken immer noch eine Rechtsschiefe von 16,75 % vorhanden ist. Bei Wahl einer Normalverteilung (symmetrisch!) wird dieser Tatsache jedoch nicht Rechnung getragen. Folglich gehen wir davon aus, dass der Gesamtschaden unseres Portfolios lognormalverteilt ist:

$$\boxed{S = S_H + S_K + S_F \sim LogN(35.410.076; 2.226.761)} \tag{5.7}$$

Dabei gehen wir davon aus, dass die einzelnen Sparten unkorreliert sind, d.h. es gilt die in Tabelle 5.3 angegebene Korrelationsstruktur.

[30] In einem Quantil-Quantil-Plot (QQ-Plot) werden die Quantile des Simulationsergebnisses und die Quantile der angepassten Verteilung in einem Koordinatensystem abgetragen. Bilden diese Punkte eine Gerade, so kann die Verteilungsannahme bestätigt werden.

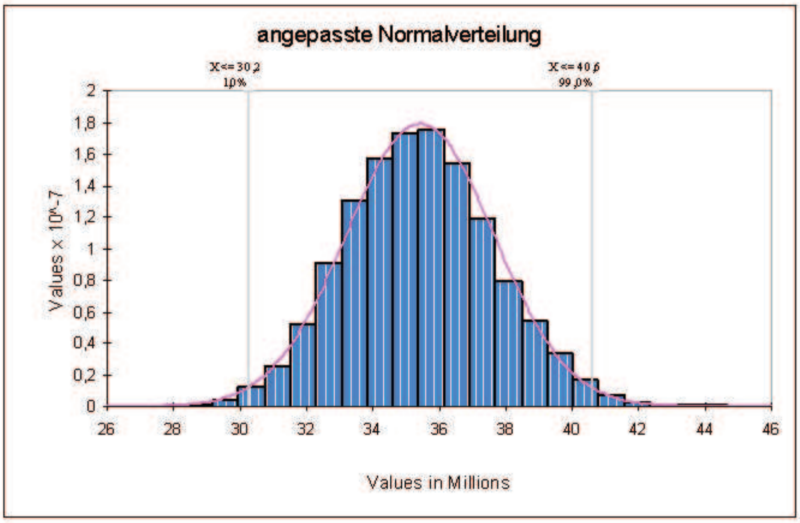

Abbildung 5.2: Histogramm der simulierten Daten des Gesamtportfolios mit angepasster Normalverteilung

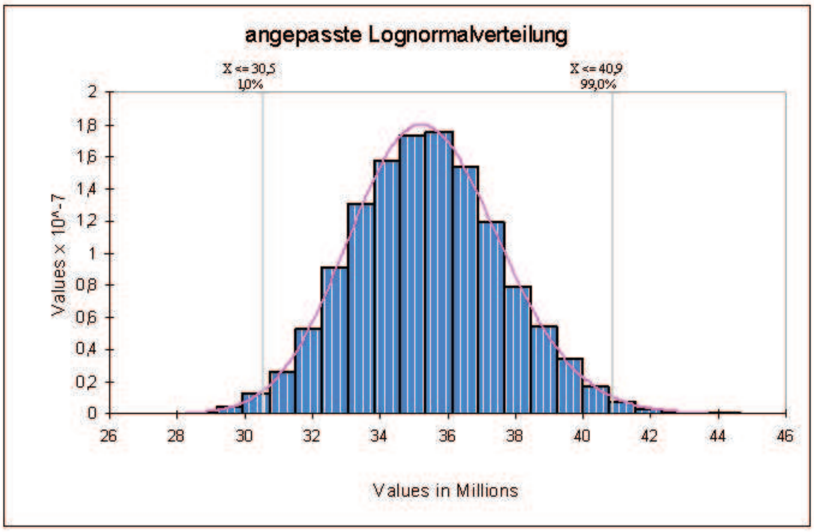

Abbildung 5.3: Histogramm der simulierten Daten des Gesamtportfolios mit angepasster Lognormalverteilung

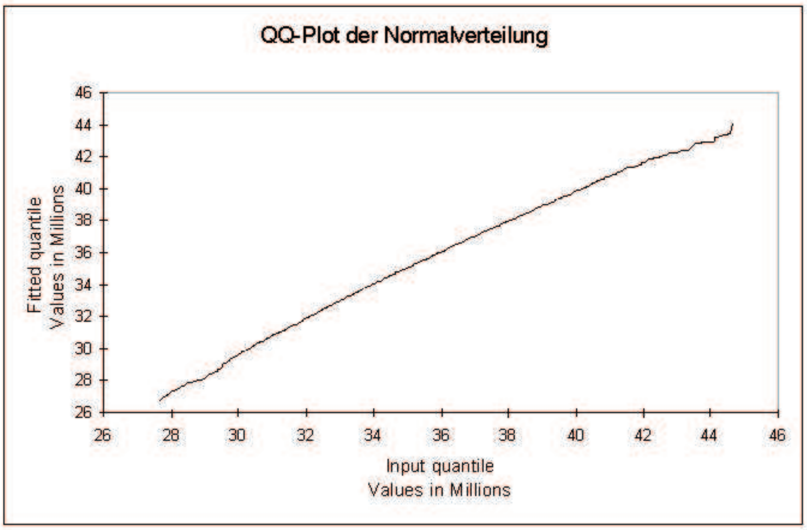

Abbildung 5.4: QQ-Plot der angepassten Normalverteilung

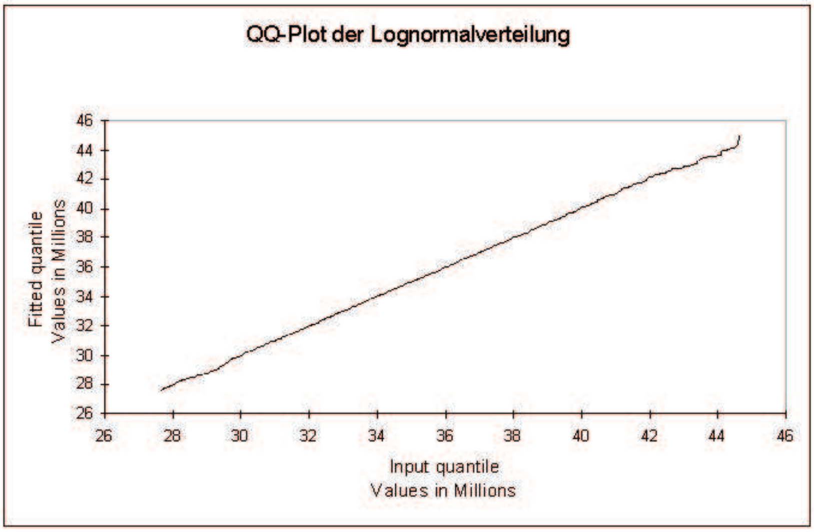

Abbildung 5.5: QQ-Plot der angepassten Lognormalverteilung

	S_H	S_K	S_F
S_H	1	0	0
S_K	0	1	0
S_F	0	0	1

Tabelle 5.3: Korrelation zwischen den einzelnen Sparten

5.3 Das vereinfachte Modell

Dieser Modellrechnung legen wir zu Grunde, dass in unserem Unternehmen zu Beginn des Jahres ein Kapital in Höhe von 12 Millionen Euro vorhanden ist und sich die Rendite der risikolosen Anlage auf 4,5 % beläuft. An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, dass dieses Beispiel nur das Modell demonstrieren soll und die folgenden Zahlen keinem reellen Unternehmen entnommen worden sind. Die Berechnungen werden mit Microsoft EXCEL durchgeführt, was dazu führt, dass die Werte bei Zwischenschritten nicht gerundet werden.

In Kapitel 3.2.2, Seite 17 haben wir eine Formel zur Berechnung des Sicherheitszuschlags b hergeleitet. Hier sieht man deutlich, dass die Wahl der Gesamtschadenverteilung großen Einfluss auf alle weiteren Berechnungen nimmt. Unter Annahme einer Normalverteilung als Gesamtschadenverteilung würde das Unternehmen bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von $1-\epsilon$ einen Sicherheitszuschlag b_ϵ von

$$b^N_{0{,}01} \overset{(3.1)}{=} 2,33 \cdot \sigma \quad \text{bzw.} \quad b^N_{0{,}05} = 1,64 \cdot \sigma$$

benötigen. Der Sicherheitszuschlag unter Annahme einer Lognormalverteilung beläuft sich je nach gewähltem Sicherheitsniveau wegen

$$b^{LN}_{0{,}01} = 10,24 \cdot \sigma \quad \text{bzw.} \quad b^{LN}_{0{,}05} = 5,18 \cdot \sigma$$

etwa auf das 4,4 bzw. 3,2-fache. Da wir als Gesamtschadenverteilung eine Lognormalverteilung (vergleiche (5.7)) gewählt haben, die durch ihre Rechtsschiefe auch extreme Schäden berücksichtigt, reicht uns eine Sicherheitswahrscheinlichkeit von $1-\epsilon = 82\%$ für die Berechnung des Sicherheitszuschlags b aus. Wir erhalten folglich

$$b = 2,50 \cdot \sigma = 2,50 \cdot 2.226.761 = 5.561.754\,.$$

Zur Vereinfachung nehmen wir im Folgenden an, dass dem Versicherungsunternehmen ein Sicherheitszuschlag in Höhe von 5,5 Millionen Euro zur Verfügung steht.

Gegeben sind folglich die Größen

- $r_0 = 4,5\%$
- $u = 12.000.000$
- $b = 5.500.000$

und es gelten die **Annahmen 4.1:**

- $\triangle A = r_0 \cdot u = 0,045 \cdot 12.000.000 = 540.000$
- $\triangle L = 0$

Somit erhält man als Ausgangsgleichung

$$\triangle U \overset{(4.5)}{=} E[S] + b - S + 0,045 \cdot u,$$

wobei der Gesamtschaden S $LogN(35.410.076; 2.226.761)$-verteilt ist mit Erwartungswert bzw. Standardabweichung (vergleiche Tabelle 5.2)

$$\begin{aligned} E[S] &= 35.410.076 \quad \text{und} \\ \sigma(S) &= 2.226.761\,. \end{aligned}$$

In Kapitel 3.2.2 haben wir festgestellt, dass der erwartete Schaden $E[S]$ als Prämie nicht ausreicht. Deshalb wird der Sicherheitszuschlag b noch eingerechnet und das Unternehmen nimmt somit eine Prämie in Höhe von

$$\pi(S) \overset{(3.2)}{=} 35.410.076 + 5.500.000 = 40.910.076 \;\; \text{ein.}$$

Das Versicherungsunternehmen besitzt laut Kapitel 4.2, Seite 34 einen Ertrag bzw. ein Risiko von

$$\begin{aligned} \mu &\overset{(4.6)}{=} \frac{5.500.000}{12.000.000} + 0,045 = 0,5033 \quad \text{und} \\ \sigma &\overset{(4.7)}{=} \frac{2.226.761}{12.000.000} = 0,1856. \end{aligned}$$

Folglich ist der Risiko-Ertrags-Quotient des Unternehmens

$$k \overset{(4.8)}{=} \frac{5.500.000}{2.226.761} = 2,47$$

und es können alle Risiko-Ertrags-Paarungen auf der Geraden

$$\mu - 0,045 = 2,47 \cdot \sigma$$

erreicht werden.

Quadratische Nutzenfunktion:

Um das für das Unternehmen optimale Risiko-Ertrags-Paar zu finden, wird der Erwartungsnutzen optimiert. Wir nehmen im Folgenden an, dass die Präferenzen der Unternehmensführung durch die Nutzenfunktion

$$\mathcal{V}(R_U) = \mu^2 + 0,1 \cdot R_U - R_U^2$$

mit maximaler Rendite $r_{max} = 5\%$ abgebildet werden. Der Risiko-Ertrags-Präferenz-Parameter wurde folglich $\theta = 0,1$ gewählt. Der Erwartungsnutzen

$$\nu(\mu, \sigma^2) = 0,1 \cdot \mu - \sigma^2 \tag{5.8}$$

wird durch das Risiko-Ertrags-Paar

$$\begin{aligned}\mu^* &\overset{(4.12)}{=} \frac{0,1}{2} \cdot 2,47^2 + 0,045 = 0,3500\\ \sigma^* &\overset{(4.13)}{=} \frac{0,1}{2} \cdot 2,47 = 0,1235\end{aligned}$$

optimiert. Somit beläuft sich das zugehörige Performance-basierte Kapital auf

$$u_P \overset{(4.9)}{=} \frac{5.500.000}{0,3500 - 0,045} = 18.030.780\,.$$

Man kann nun den Betrag $\mu^* - r_0 = 0,3500 - 0,045 = 0,305$ als Risikoprämie interpretieren, die den Kapitalgebern die Übernahme des Risikos $\sigma^* = 0,1235$ vergütet. Vergleicht man den tatsächlichen Erwartungsnutzen ν mit den optimalen Erwartungsnutzen ν^*

$$\begin{aligned}\nu(\mu, \sigma^2) &\overset{(5.8)}{=} 0,1 \cdot 0,5033 - 0,1856^2 = 0,0159\\ \nu^*(\mu^*, (\sigma^*)^2) &= 0,1 \cdot 0,3500 - 0,1235^2 = 0,0198,\end{aligned}$$

so ist der optimale Erwartungnutzen größer, als der vom Unternehmen realisierte. Dies bedeutet, dass das Unternehmen alleine durch Änderung der Risiko-Ertrags-Position von (σ, μ) auf (σ^*, μ^*) den Erwartungsnutzen steigern kann. Eine Möglichkeit, die Risiko-Ertrags-Position zu verändern, wird im folgenden Kapitel dargestellt.

Optimierung des Erwartungsnutzens

Mit S_H, S_K und S_F werden die Gesamtschäden der drei Sparten Kfz-Haftpflicht, sonstige Kfz und Feuer-/Sachversicherung bezeichnet. Da die Gesamtschäden der drei Sparten jeweils Gamma-verteilt sind, können Erwartungswert und Varianz mit Hilfe der Parameter aus Tabelle 5.1 nach Formel (5.4) berechnet werden:

$$\begin{aligned}E[S_H] &= 264 \cdot 40.000 = 10.560.000\\ \sigma_H &:= \sigma(S_H) = \sqrt{\frac{264^2}{0,004616} \cdot 40.000} = 777.143 \qquad (5.9)\\ E[S_K] &= 146 \cdot 25.000 = 3.650.000\\ \sigma_K &:= \sigma(S_K) = \sqrt{\frac{146^2}{0,009290} \cdot 25.000} = 239.505 \qquad (5.10)\\ E[S_F] &= 53 \cdot 400.000 = 21.200.000\\ \sigma_F &:= \sigma(S_F) = \sqrt{\frac{53^2}{0,000262} \cdot 400.000} = 2.070.881\,. \qquad (5.11)\end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass die drei Sparten unkorreliert sind und können deshalb den Sicherheitszuschlag $b = 5.500.000$ nach dem auf Seite 20 eingeführten Varianzprinzip aufteilen:

$$\begin{aligned} b_H &= \frac{777.143^2}{2.226.761^2} \cdot 5.500.000 = 669.912 \\ b_K &= \frac{239.505^2}{2.226.761^2} \cdot 5.500.000 = 63.628 \\ b_F &= \frac{2.070.881^2}{2.226.761^2} \cdot 5.500.000 = 4.756.921 \end{aligned}$$

Da die Standardabweichungen der verschiedenen Sparten nur auf geschätzten Parametern und die Standardabweichung der Gesamtschadenverteilung auf einer an simulierte Daten angepassten Verteilung basiert, ergibt die Summe der Sicherheitszuschläge der drei Sparten nicht den Gesamtsicherheitszuschlag des Unternehmens. Deshalb orientieren wir uns nur am Varianzprinzips und teilen den Sicherheitszuschlag folgendermaßen auf:

$$\begin{aligned} b_H &= 670.000 \\ b_K &= 70.000 \\ b_F &= 4.760.000 \end{aligned}$$

In Korollar 4.5 auf Seite 45 ist für den Spezialfall unkorrelierter Teilrisiken die optimale Selbstbehaltsquote α_i^* für $i = H, K, F$ angegeben[31]:

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{H}}{}^* &\overset{(4.25)}{=} \frac{0,1}{2} \cdot \frac{670.000}{777.143^2} \cdot 12.000.000 = \mathbf{0,6656} \\ \alpha_{\mathbf{K}}{}^* &= \frac{0,1}{2} \cdot \frac{70.000}{239.505^2} \cdot 12.000.000 = \mathbf{0,7322} \\ \alpha_{\mathbf{F}}{}^* &= \frac{0,1}{2} \cdot \frac{4.760.000}{2.070.881^2} \cdot 12.000.000 = \mathbf{0,6660} \end{aligned}$$

Nach Rückversicherung bleiben für unser Unternehmen die Größen

$$\begin{aligned} E[S_{EV}] &\overset{(4.15)}{=} 0,6656 \cdot 10.560.000 + 0,7322 \cdot 3.650.000 + 0,6660 \cdot 21.200.000 = 23.819.714 \\ b_{EV} &\overset{(4.16)}{=} 0,6656 \cdot 670.000 + 0,7322 \cdot 70.000 + 0,6660 \cdot 4.760.000 = 3.667.182 \\ \sigma(S_{EV}) &\overset{(4.22)}{=} \sqrt{0,6656^2 \cdot 777.143^2 + 0,7322^2 \cdot 239.505^2 + 0,6660^2 \cdot 2.070.881^2} = 1.483.418 \end{aligned}$$

erhalten. Der Erwartungsnutzen steigt von vorher $\nu = 0,0159$ auf

$$\nu_{EV} \overset{(4.24)}{=} 0,1 \cdot \left(\frac{3.667.182}{12.000.000} + 0,045\right) - \frac{1.483.418^2}{12.000.000^2} = 0,0198$$

und das Verhältnis Überschussrendite zu Risiko ist mit

$$k_{EV} \overset{(4.26)}{=} \sqrt{\frac{670.000^2}{777.143^2} + \frac{70.000^2}{239.505^2} + \frac{4.760.000^2}{2.070.881}} = 2,47$$

[31] Da $0 \leq \alpha_H, \alpha_K, \alpha_F \leq 1$ ist die Nebenbedingung automatisch erfüllt.

gleich geblieben. Es ist jedoch besser als jeder Risiko-Ertrags-Quotient der einzelnen Sparten

$$\begin{aligned} k_{EV}^H &\stackrel{(4.8)}{=} \frac{670.000}{777.143} = 0,86 \\ k_{EV}^K &= \frac{70.000}{239.505} = 0,29 \\ k_{EV}^F &= \frac{4.760.000}{2.070.881} = 2,30. \end{aligned}$$

Die nachfolgende Tabelle 5.4 stellt noch einmal verschiedene Kenngrößen des Unternehmens vor und nach Rückversicherung gegenüber.

	vor Rückversicherung	*nach Rückversicherung*
$E[S]$	35.410.076	23.820.714
$\sigma(S)$	2.226.761	1.483.418
b	5.500.000	3.667.182
ν	1,59 %	1,98 %

Tabelle 5.4: Vergleich verschiedener Kenngrößen vor und nach Rückversicherung

Die Prämie des Erstversicherers $\pi(S) = E[S] + b$ sinkt von 40.910.076 auf 27.487.896, bei einer geringeren Standardabweichung von 1.483.418 statt 2.226.761. Als Folge ergibt sich eine Erwartungsnutzensteigerung von 1.59% auf 1.98%.

Grundlage der bisherigen Berechnungen war immer ein vereinfachtes Unternehmensmodell. Es wurden weder die Spätschäden berücksichtigt, noch war die Möglichkeit einer riskanten Kapitalanlage vorhanden. Als Erweiterung des Modells werden im nächsten Abschnitt die Spätschäden genauer betrachtet.

5.4 Die Spätschadenreserve

Nun wird die Änderung der Spätschadenreserve unseres Beispielportfolios berechnet. Wir nehmen an, dass jeder Schaden nach spätestens vier Jahren abgewickelt ist. Um dies sicherzustellen, wird für jedes Anfalljahr der Schaden S^s einmal simuliert und auf die Abwicklungsjahre nach folgendem Schema (Tabelle 5.5) aufgeteilt:

	Abwicklungsjahr t			
Anfalljahr s	1	2	3	4
s	$0,45 \cdot S^s$	$0,3 \cdot S^s$	$0,2 \cdot S^s$	$S^s - \sum_{j=1}^{3} Z_{s,j}$

Tabelle 5.5: Faktoren für die Zahlungen in den einzelnen Abwicklungsjahren.

Wir verwenden für unsere Berechnungen deshalb folgendes Abwicklungsdreieck.

	Abwicklungsjahr t			
Anfalljahr s	1	2	3	4
1	15.510.798	10.340.532	6.893.688	1.723.422
2	16.338.451	10.892.300	7.261.534	
3	14.980.516	9.987.011		
4	16.878.586			

Tabelle 5.6: Abwicklungsdreieck

In Kapitel 4.4 wurde die Änderung der Spätschadenreserve $\triangle L$ aufgeteilt in den Gewinn (oder Verlust) aus der reinen Abwicklung der Spätschäden $\triangle L_1$ und den Gewinn (oder Verlust) aus der Verzinsung der Spätschäden $\triangle L_2$. Diese beiden Größen werden zuerst für jedes Anfalljahr berechnet. Wie auf Seite 55 erläutert wird, verursacht der Schaden S^s einen Gewinn (oder Verlust) aus der reinen Abwicklung der Spätschäden von

$$ {}_1C_{s,w-s+1} \overset{(4.33)}{=} \sum_{j=w-s+1}^{w} P(w, s-1+j) \cdot \Big(E[Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s}] - E[Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s+1}] \Big) \quad (5.12) $$

und der Gewinn (oder Verlust) aus der Verzinsung der Spätschäden beläuft sich auf

$$ {}_2C_{s,w-s+1} \overset{(4.34)}{=} \sum_{j=w-s+1}^{w} E[Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s}] \cdot \Big(P(w-1, s-1+j) - P(w, s-1+j) \Big). \quad (5.13) $$

Um diese beiden Größen berechnen zu können, benötigt man

a) Die Schätzung der noch ausstehenden Zahlungen auf Basis des heutigen Informationsstandes

   $E[Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s+1}]$.

b) Die Schätzung der noch ausstehenden Zahlungen auf Basis der im vergangenen Jahr verfügbaren Information $E[Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s}]$.

c) Den Zins zur Berechnung des Barwertes einer Geldeinheit $P(w, s-1+j)$.

zu a): Schätzung der noch ausstehenden Zahlungen mit Hilfe der Chain-Ladder-Methode

Die noch ausstehenden Zahlungen sollen auf Basis der Information, die zum heutigen Zeitpunkt über die Zahlungen verfügbar ist, geschätzt werden. Dies wird durch den bedingten Erwartungswert $E[Z_{s,j}|\mathcal{H}_{s,w-s+1}]$ ausgedrückt. Eine Methode diese Zahlungen zu berechnen, ist das **Chain-Ladder-Verfahren**[32]. In Tabelle 5.7 wird zunächst das Abwicklungsdreieck von Tabelle 5.6 modifiziert.

[32]Für eine ausführliche Darstellung sei auf [Mac97, S. 243 ff] verwiesen.

	Abwicklungsjahr t			
Anfalljahr s	1	2	3	4
1	15.510.798	25.851.330	32.745.018	34.468.440
2	16.338.451	27.230.752	34.492.285	
3	14.980.516	24.967.527		
4	16.878.586			

Tabelle 5.7: Kumuliertes Abwicklungsdreieck

Die einzelnen Zellen enthalten nun die kumulierten Zahlungen

$$K_{ik} = \sum_{j=1}^{k} Z_{ij}, \quad 1 \leq k \leq w,$$

die man auch in der multiplikativen Form

$$K_{ik} = K_{i1} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} F_{ij} \quad \text{mit} \quad F_{ij} = \frac{K_{i,j+1}}{K_{ij}}, \quad K_{ij} \neq 0$$

schreiben kann.

Modellannahmen:

(CL 1) Es existieren Abwicklungsfaktoren $f_1, \ldots, f_{w-1}$ mit

$$E[F_{ik}|K_{i1}, \ldots, K_{ik}] = f_k, \quad 1 \leq i \leq w, \quad 1 \leq k \leq w-1 \quad \text{für } K_{ik} > 0$$

D.h. der bedingte Erwartungswert von $K_{i,k+1}$ ist nur vom kumulierten Schaden im letzten Abwicklungsjahr K_{ik} abhängig, nicht von früheren Abwicklungsjahren.

(CL 2) Die Anfalljahre $i = 1, \ldots, w$ sind unabhängig, d.h. die Aufteilung des Endschadens auf die Abwicklungsjahre ist im Schnitt für alle Anfalljahre gleich. ■

f_k bezeichnet die durchschnittliche Steigerung des Schadenstandes von Abwicklungsjahr k auf Abwicklungsjahr $k+1$ und wird folgendermaßen geschätzt:

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{w-k} K_{ik} F_{ik}}{\sum_{i=1}^{w-k} K_{ik}} = \frac{\sum_{i=1}^{w-k} K_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{w-k} K_{ik}}, \quad 1 \leq k \leq w-1$$

Die Schätzer für f_k $(k = 1, 2, 3)$ lauten in unserem Beipiel

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 &= 1,67, \\ \hat{f}_2 &= 1,27 \quad \text{und} \\ \hat{f}_3 &= 1,05\,. \end{aligned}$$

	Abwicklungsjahr t			
Anfalljahr s	1	2	3	4
1	15.510.798	25.851.330	32.745.018	34.468.440
2	16.338.451	27.230.752	34.492.285	*36.307.668*
3	14.980.516	24.967.527	*31.625.534*	*33.290.036*
4	16.878.586	*28.130.976*	*35.632.570*	*37.507.968*

Tabelle 5.8: Ergänztes kumuliertes Abwicklungsdreieck

Mit Schätzung der fehlenden kumulierten Zahlungen durch

$$\hat{K}_{ik} = K_{i,w+1-i} \cdot \hat{f}_{w+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{k-1}, \quad 2 \leq i, k \leq w,$$

lässt sich das kumulierte Abwicklungsdreieck zu einem Quadrat ergänzen, wie Tabelle 5.8 zeigt.

Geht man nun wieder zum ursprünglichen Abwicklungsdreieck über, so sind die Zahlungen, die das Dreieck zu einem Quadrat ergänzen, die gesuchten Zahlungen (in Tabelle 5.9 *kursiv* dargestellt).

	Abwicklungsjahr t			
Anfalljahr s	1	2	3	4
1	15.510.798	10.340.532	6.893.688	1.723.422
2	16.338.451	10.892.300	7.261.534	*1.815.383*
3	14.980.516	9.987.011	*6.658.007*	*1.664.502*
4	16.878.586	*11.252.390*	*7.501.594*	*1.875.398*

Tabelle 5.9: Ergänztes Abwicklungsdreieck

zu b): Schätzung der noch ausstehenden Zahlungen auf Basis der im vergangenen Jahr verfügbaren Information

Betrachtet man das für das vergangene Jahr relevante Abwicklungsdreieck, so ist das Anfalljahr 4 aus Tabelle 5.6 für die Bildung einer Spätschadenreserve noch nicht von Bedeutung. Statt dessen wird der Schaden aus dem Anfalljahr $s = 0$ im Betrachtungsvorjahr abschließend reguliert und ist somit im Abwicklungsdreieck enthalten. Des weiteren wurden die Zahlungen Z_{14}, Z_{23} und Z_{32} noch nicht geleistet und sind folglich in den Tabellen 5.10 und 5.11 *kursiv* dargestellt. Zur Berechnung der noch ausstehenden Zahlungen wird wieder das Chain-Ladder-Verfahren angewendet.
Die geschätzten Modellparameter sind nun

$$\begin{aligned} \hat{f}_0 &= 1,72 \\ \hat{f}_1 &= 1,27 \quad \text{und} \\ \hat{f}_2 &= 1,05 \end{aligned}$$

und nach analogen Berechnungen erhält man die in den Tabellen 5.10 und 5.11 dargestellten Abwicklungsdreicke.

	Abwicklungsjahr t			
Anfalljahr s	1	2	3	4
0	17.264.194	28.773.657	36.446.632	38.364.876
1	15.510.798	25.851.330	32.745.018	*34.468.440*
2	16.338.451	27.230.751	*34.492.285*	*36.307.668*
3	14.980.516	*25.701.795*	*32.555.607*	*34.269.060*

Tabelle 5.10: Kumuliertes Abwicklungsdreieck des Vorjahres

	Abwicklungsjahr t			
Anfalljahr s	1	2	3	4
0	17.264.194	11.509.463	7.672.975	1.918.244
1	15.510.798	10.340.532	6.893.688	*1.723.422*
2	16.338.451	10.892.300	*7.261.534*	*1.815.383*
3	14.980.516	*10.721.279*	*6.853.812*	*1.713.453*

Tabelle 5.11: Abwicklungsdreieck des Vorjahres

zu c): Berechnung des Barwertes einer Geldeinheit

Die auf Seite 49 angegebene Formel zur Berechnung des Barwertes zum Zeitpunkt w einer zum Zeitpunkt $w + j$ $(j > 0)$ bezahlten Geldeinheit lautet

$$P(w, w + j) \overset{(4.28)}{=} e^{-\int_w^{w+j} r(x)dx} .$$

Zur Vereinfachung wird für dieses Beispiel die Annahme getroffen, dass der Zins $r(x) =: r$ konstant ist. Folglich gilt

$$\begin{aligned} P(w, w + j) &\overset{Ann.}{=} \exp\{-[r \cdot x]_w^{w+j}\} \\ &= \exp\{-r \cdot j\} . \end{aligned}$$

Der konstante Zinsatz beträgt in diesem Beispiel $r = 4\%$. Dies bedeutet, dass man am Kapitalmarkt vier Prozent des am Ende des Jahres benötigten Kapitals erwirtschaften muss, um keinen Verlust zu machen. Den Barwert zum Zeitpunkt w einer zum Zeitpunkt $w + j$ bezahlten Geldeinheit entnimmt man aus Tabelle 5.12.
Nun kann man mit (5.12) und (5.13) den Gewinn (oder Verlust) aus der Abwicklung bzw. der Verzinsung der Spätschäden aus den verschiedenen Anfalljahren berechnen (Tabelle 5.13).

j	0	1	2	3
$P(w, w+j)$	1	0,96	0,92	0,89

Tabelle 5.12: Barwert einer Geldeinheit für r=4%

s	${}_1C_{s,5-s}$	${}_2C_{s,5-s}$
1	0	−67.576
2	0	−353.120
3	967.583	−740.612

Tabelle 5.13: Gewinn (oder Verlust) aus der Abwicklung bzw. der Verzinsung der Spätschäden für die einzelnen Anfalljahre

Mit Formel (4.36) auf Seite 55 erhält man den Gewinn (oder Verlust) aus der Abwicklung bzw. Verzinsung der Spätschäden

$$\begin{aligned} \triangle L_1 &= -967.583 \quad \text{bzw.} \\ \triangle L_2 &= 1.161.308\,. \end{aligned}$$

Die Änderung der Spätschadenreserve ist folglich

$$\triangle L = \triangle L_1 + \triangle L_2 = 193.725\,.$$

Der Gewinn (oder Verlust) aus der Verzinsung der Spätschäden $\triangle L_2$ kann auch folgendermaßen dargestellt werden.

$$\triangle L_2 \overset{(4.39)}{=} R_L \cdot l\,. \tag{5.14}$$

Diese Darstellung vereinfacht im anschließenden Kapitel die Berechung des allgemeinen Modells. Zur Berechnung des Bondportfoliopreises

$$\begin{aligned} l &= \sum_{t=0}^{w-2} K_t \cdot P(w-1, w+t) \\ &= \sum_{t_0}^{2} K_t \cdot P(3, 4+t) \end{aligned} \tag{5.15}$$

und der Rendite des Bondportfolios

$$\begin{aligned} R_L &= \frac{L(w) - L(w-1)}{L(w-1)} \\ &\overset{(4.40)}{=} \frac{\sum_{t=0}^{2} K_t \cdot P(4, 4+t) - \sum_{t=0}^{2} K_t \cdot P(3, 4+t)}{\sum_{t=0}^{2} K_t \cdot P(3, 4+t)} \end{aligned}$$

benötigt man die Auszahlungen K_t, die am Ende der Jahre $w+t$ $(t = 0, 1, 2)$ fällig werden.

$$K_t = \sum_{s=t+1}^{w-1} E[Z_{s,t+w-s+1} | \mathcal{H}_{s,w-s}]$$

Mit den entsprechenden Werten aus Tabelle 5.11 erhält man

$$\begin{aligned} K_0 &= 19.706.235, \\ K_1 &= 8.668.195 \quad \text{und} \\ K_2 &= 1.713.453\,. \end{aligned}$$

Die zur Berechnung des Bondportfoliopreises und dessen Rendite liest man die Barwerte $P(w, w+j)$ einer Geldeinheit aus Tabelle 5.12 ab und erhält letztendlich

$$\begin{aligned} l &\overset{(5.15)}{=} 28.455.915, \\ L(w) &= \sum_{t=0}^{2} K_t \cdot P(4, 4+t) = 29.617.223 \quad \text{und} \\ R_L &= \frac{29.617.223 - 28.455.915}{28.455.915} = 4,1\%\,. \end{aligned}$$

Mit (5.14) ergibt sich für $\triangle L_2$ wieder:

$$\triangle L_2 \overset{(5.14)}{=} 28.455.915 \cdot 4,1\% = 1.161.308$$

5.5 Das allgemeine Modell

In diesem letzten Abschnitt der praktischen Modellrechnung wird das Ergebnis aus den Kapitalanlagen ergänzt. Dabei wird angenommen, dass das Unternehmen entweder in die risikolose Anlage mit Rendite $r_0 = 4,5\%$ oder in ein risikobehaftetes Asset mit Rendite R_A investieren kann. Aufgrund fehlender Daten werden Erwartungswert und Standardabweichung der Renditen des risikobehafteten Assets R_A und des Bondportfolios R_L frei gewählt. Wir nehmen im Folgenden an, dass diese durch

$$\begin{aligned} \mu_A &= 12\% && (5.16) \\ \sigma_{R_A} &= 15\% && (5.17) \\ \mu_L &= 7\% && (5.18) \\ \sigma_{R_L} &= 4\% && (5.19) \end{aligned}$$

gegeben sind.

Laut Annahme 4.9 auf Seite 58 erfolgt keine Rückversicherung des Portfolios der Spätschadenreserve. Nach Rückversicherung und im Gleichgewicht von Vermögen und Verbindlichkeiten lautet die Unternehmensgleichung nun

$$\begin{aligned} \triangle U &\overset{(4.44)}{=} \triangle S_{EV} + b_{EV} - \triangle L_1 - R_L \cdot l + R_A \cdot a + (l-a) \cdot r_0 + u \cdot r_0 \qquad (5.20) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \alpha_i (E[S_i] - S_i) + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i b_i - \triangle L_1 - R_L \cdot l + R_A \cdot a + (l-a) \cdot r_0 + u \cdot r_0 \end{aligned}$$

Zur Optimierung des Kapitalanlageportfolios (vergleiche Kapitel 4.5.2) muss jedoch noch die Korrelationsstruktur zwischen den einzelnen Zufallsvariablen bekannt sein. Wir nehmen folgende Korrelationsmatrix (Tabelle 5.14) an:

	S_H	S_K	S_F	$\triangle L_1$	R_L	R_A
S_H	1	0	0	1	0	0
S_K	0	1	0	1	0	0
S_F	0	0	1	1	0	0
$\triangle L_1$	1	1	1	1	1	0
R_L	0	0	0	1	1	0
R_A	0	0	0	0	0	1

Tabelle 5.14: Korrelationsmatrix

Somit gehen wir davon aus, dass die drei Sparten Kfz-Haftpflicht, sonstige Kfz-Versicherung und Feuer-/Sachversicherung unkorreliert sind und auch keine Korrelation zum Kapitalmarkt (R_L und R_A) aufweisen. Die Korrelation zwischen dem Gewinn oder Verlust aus der Abwicklung der Spätschäden $\triangle L_1$ und der Rendite des risikobehafteten Assets R_A wurde ebenfalls gleich Null gesetzt. Nach Simulation verschiedener Zinssätze $r(x)$ zur Berechnung des Barwertes $P(w, w + j)$ und der Größen R_L und $\triangle L_1$ wurde auf Basis eines empirischen Korrelationskoeffizienten von $0,999$ eine Korrelation von $Corr[\triangle L_1, R_L] = 1$ angenommen. Über die Korrelationen $Corr[S_H, \triangle L_1], Corr[S_K, \triangle L_1], Corr[S_F, \triangle L_1]$ und $Corr[R_L, R_A]$ konnte aufgrund fehlender Annahmen und Information keine Aussage getroffen werden. Im Folgenden werden deshalb die Korrelationen $Corr[S_H, \triangle L_1]$, $Corr[S_K, \triangle L_1]$ und $Corr[S_F, \triangle L_1]$ gleich Null gesetzt, die Größe $Corr[R_L, R_A]$ wird variiert.

Mit den Standardabweichungen der einzelnen Zufallsvariablen

$$
\begin{aligned}
\sigma_H &\overset{(5.9)}{=} 777.143 \\
\sigma_K &\overset{(5.10)}{=} 239.505 \\
\sigma_F &\overset{(5.11)}{=} 2.070.881 \\
\sigma_{\triangle L_1} &= 8.782 \quad \text{(dieser Wert wurde aufgrund von 10 Simulationen geschätzt)} \\
\sigma_{R_L} &\overset{(5.19)}{=} 0,04 \\
\sigma_{R_A} &\overset{(5.17)}{=} 0,15
\end{aligned}
$$

kann man die Kovarianzmatrix (Tabelle 5.15) berechnen.

5.5.1 Optimierung des Kapitalanlageportfolios

Zur Optimierung des Kapitalanlageportfolios bezeichnet Z den Gewinn oder Verlust aus der Versicherungstechnik und ist gegeben durch

$$Z := \triangle S_{EV} + b_{EV} - \triangle L_1 - (R_L - r_0) \cdot l\,.$$

	S_H	S_K	S_F	$\triangle L_1$	R_L	R_A
S_H	$603.951 \cdot 10^6$	0	0	$6.825 \cdot 10^6$	0	0
S_K	0	$57.363 \cdot 10^6$	0	$2.103 \cdot 10^6$	0	0
S_F	0	0	$4.288.550 \cdot 10^6$	$18.186 \cdot 10^6$	0	0
$\triangle L_1$	$6.825 \cdot 10^6$	$2.103 \cdot 10^6$	$18.186 \cdot 10^6$	$77 \cdot 10^6$	351	0
R_L	0	0	0	351	$0,0016$	0
R_A	0	0	0	0	0	$0,0225$

Tabelle 5.15: Kovarianzmatrix

Gleichung (5.20) lässt sich vereinfachen zu

$$\triangle U = Z + (R_A - r_0) \cdot a + r_0 \cdot u$$

und man kann mit Tabelle 5.15 (Kovarianzmatrix) und der Notation auf Seite 63 nachfolgende Größen berechnen:

$$\begin{aligned} \mu_Z &\overset{(4.54)}{=} 2.955.785 \\ \sigma_Z &\overset{(4.55)}{=} 1.884.767 \\ \delta_A &= \mu_A - r_0 = 7,5\% \\ \sigma_{R_A} &= 15\% \\ \kappa &\overset{(4.57)}{=} 0 \end{aligned}$$

In Satz 4.10 auf Seite 63 werden drei Fälle unterschieden. Da im vorliegenden Beispiel wegen

$$\theta u \delta_A - 2\kappa\sigma_{R_A}\sigma_Z = 90.000 \quad \in \big(0, 2\sigma_{R_A}^2(l+u)\big) = (0, 1.820.516)$$

der 1. Fall vorliegt, ist der optimale Betrag, der in das risikobehaftete Asset angelegt werden soll, gegeben durch

$$\mathbf{a}^* = \frac{\theta u \delta_A - 2\kappa\sigma_{R_A}\sigma_Z}{2\sigma_{R_A}^2} = \mathbf{2.000.000}\,.$$

Folglich wird

$$l + u - a^* = 38.455.915$$

zum risikolosen Zinssatz $r_0 = 4,5\%$ angelegt.

Bemerkung: Variationen der Korrelationsmatrix

- Trifft man die Annahme, dass die Renditen der risikobehafteten Anlage R_A und des Bondportfolios R_L folgendermaßen positiv korreliert sind

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho(R_A, R_L) = 0 \\ \rho_2 &= \rho(R_A, R_L) = 0,25 \\ \rho_3 &= \rho(R_A, R_L) = 0,5 \\ \rho_4 &= \rho(R_A, R_L) = 1\,, \end{aligned}$$

so hat diese Änderung der Korrelationsstruktur auch Auswirkungen auf die Optimierung des Kapitalanlageportfolios. Folgende Tabelle gibt einen Überblick über die sich ändernden Größen.

	$\rho_1 = 0$	$\rho_2 = 0,25$	$\rho_3 = 0,5$	$\rho_4 = 1$
$Cov[R_A, R_L]$	0	0,00055	0,0011	0,0022
κ	0	$-15,10\%$	$-30,20\%$	$-60,39\%$
$\mathbf{a}^*$	**2.000.000**	**3.897.061**	**5.794.122**	**9.588.244**
$l + u - a^*$	38.455.915	36.558.854	34.661.793	30.867.671

Tabelle 5.16: Variation der Korrelation $Corr[R_A, R_L]$

Aus Tabelle 5.16 kann abgelesen werden: Je stärker die beiden Renditen R_A und R_L positiv korreliert sind, desto mehr Kapital kann in Assets investiert werden. ■

Die Risiko-Ertrags-Analyse (vergleiche Tabelle 4.3 auf Seite 60) unseres fiktiven Unternehmens ist für $a^* = 2.000.000$ in Tabelle 5.17 dargestellt.

	Risiko/ Ertrag	*erwart. Überschussertrag*	*Beitrag zum Gesamtrisiko*
versicherte Risiken	$-66,56\%(E[S_H] - S_H)$	445.963	$66,56\% \cdot Cov[-S_H, \triangle U]$
	$-73,22\%(E[S_K] - S_K)$	51.253	$73,22\% \cdot Cov[-S_K, \triangle U]$
	$-66,60\%(E[S_F] - S_F)$	3.169.967	$66,60\% \cdot Cov[-S_F, \triangle U]$
Spätschaden			
-abwicklung	$\triangle L_1$		$Cov[-\triangle L_1, \triangle U]$
-verzinsung	$-R_L \cdot 28.455.915$	-711.398	$28.455.915 \cdot Cov[-R_L, \triangle U]$
riskantes Asset	$R_A \cdot 2.000.000$	150.000	$2.000.000 \cdot Cov[R_A, \triangle U]$

Tabelle 5.17: Risiko-Ertrags-Analyse der Modellrechnung

Der erwartete Überschussertrag des Unternehmens beläuft sich nun auf

$$E[\triangle U - r_0 \cdot u] \overset{(4.46)}{=} \underline{\alpha}^\top \underline{b} - (\mu_L - r_0) \cdot l + (\mu_A - r_0) \cdot a^*$$

Ertrag und Risiko des Unternehmens, sowie der optimale Erwartungsnutzen sind nach Rückversicherung gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mu_{EV} &\overset{(4.48)}{=} \frac{1}{u} \cdot \Big(\underline{\alpha}^\top \underline{b} - (\mu_L - r_0) \cdot l + (\mu_A - r_0) \cdot a^* \Big) + r_0 \\
\sigma^2_{EV} &\overset{(4.50)}{=} \frac{1}{u^2} \cdot \Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i Cov\left[-X_i^S, \triangle U\right] + \sum_{i=m+1}^{n} Cov\left[-X_i^L, \triangle U\right] + l \cdot Cov\left[-R_L, \triangle U\right] \\
&\quad + a^* \cdot Cov\left[R_A, \triangle U\right] \Big) \\
\nu_{EV} &\overset{(4.58)}{=} \theta \cdot \mu_{EV} - \sigma^2_{EV} \, .
\end{aligned}$$

Nachfolgende Tabelle 5.18 gibt einen zusammenfassenden Überblick.

	$\rho_1 = 0$	$\rho_2 = 0,25$	$\rho_3 = 0,5$	$\rho_4 = 1$
$E[\triangle U] - r_0 u$	3.105.785	3.248.064	3.390.344	3.674.903
μ_{EV}	$30,38\%$	$31,57\%$	$32,75\%$	$35,12\%$
σ_{EV}	$2,53\%$	$2,47\%$	$2,30\%$	$1,63\%$
ν_{EV}	$2,97\%$	$3,10\%$	$3,22\%$	$3,49\%$

Tabelle 5.18: Ertrag, Risiko und Erwartungsnutzen für verschiedene a^*

5.5.2 Das optimale Unternehmensportfolio

Grundlage der Optimierung des Unternehmensportfolios ist natürlich das vollständige Modell. Darin enthalten sind die Bereiche Versicherungstechnik mit der Risikozeichnung und der Spätschadenreservierung sowie die Kapitalanlagen. Der Gewinn oder Verlust des Unternehmens in der betrachteten Periode wird folglich ausgedrückt durch

$$\triangle U \overset{(4.44)}{=} \triangle S_{EV} + b_{EV} - \triangle L_1 - R_L \cdot l + R_A \cdot a + (l - a) \cdot r_0 + u \cdot r_0 \,.$$

Für die anschließenden Berechnungen wird die Kovarianzmatrix aus Tabelle 5.15 zerlegt:

$$\begin{aligned}
\Sigma^S &= \begin{pmatrix} 603.951.242.449 & 0 & 0 \\ 0 & 57.362.645.025 & 0 \\ 0 & 0 & 4.288.548.116.161 \end{pmatrix} \\
\Sigma^L &= 77.117.043 \\
\Sigma^{SL} &= \begin{pmatrix} 6.824.583.054 \\ 2.103.244.531 \\ 18.185.712.770 \end{pmatrix} \\
\sigma^2_{R_L} &= 0,0016 \\
\sigma^2_{R_A} &= 0,0225 \\
\underline{\sigma}_{SR_L} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\underline{\sigma}_{LR_L} &= 351 \\
\underline{\sigma}_{SR_A} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\underline{\sigma}_{LR_A} &= 0 \\
\sigma_{R_L R_A} &= 0
\end{aligned}$$

Die Inverse von Σ^S und in der Folge χ_{SR_A} berechnen sich durch

$$(\Sigma^S)^{-1} = 10^{-10} \cdot \begin{pmatrix} 0,0166 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1743 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0023 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\chi_{SR_A} \overset{(4.59)}{=} 10^{-10} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,0166 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1743 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0023 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \,.$$

Um festzustellen, welcher Fall von Satz 4.12 auf Seite 67 vorliegt berechnen wir den Ausdruck

$$\begin{aligned}
C^* &:= \theta u \delta_A + \underline{1}^\top \underline{\sigma}_{LR_A} + l \cdot \sigma_{R_L R_A} + \frac{1}{2}(\theta u \underline{b} - \Sigma^{SL}\underline{1} - l \cdot \underline{\sigma}_{SR_L})^\top (\Sigma^S)^{-1} \underline{\sigma}_{SR_A} \\
&= 0,1 \cdot 12.000.000 \cdot 0,075 + 0 + 0 \\
&\quad + \left(\begin{pmatrix} 395.175.416.946 & 39.896.755.469 & 2.837.814.287.230 \end{pmatrix} \left(\Sigma^S\right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= 90.000\,.
\end{aligned}$$

Da für unsere Parameter gilt

$$0 < 90.000 < 1.820.516 = (l+u)(2\sigma^2_{R_A} - \frac{1}{2}\chi_{SR_A}),$$

befinden wir uns im ersten Fall und die optimale Lösung $(a^*, \underline{\alpha}^*)$ ist im Satz 4.12 für diesen Fall gegeben durch

$$\mathbf{a}^* \overset{(4.63)}{=} \frac{C^*}{2\sigma^2_{R_A} - \frac{1}{2}\chi_{SR_A}} \tag{5.21}$$

$$= \mathbf{2.000.000}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\alpha}^* &\overset{(4.64)}{=} 0,5 \cdot \left(\Sigma^S\right)^{-1} \left(a^* \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 804.000.000.000 \\ 84.000.000.000 \\ 5.712.000.000.000 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. - \begin{pmatrix} 6.824583.054 \\ 2.103.244.531 \\ 18.185.712.770 \end{pmatrix} - l \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{0,6600} \\ \mathbf{0,7139} \\ \mathbf{0,6638} \end{pmatrix}. \tag{5.23}$$

Interpretation des Ergebnisses:

- Da die gezeichneten Risiken S_H, S_K, S_F unseres Portfolios unkorreliert zur Rendite der risikobehafteten Anlage R_A sind (folglich gilt $\underline{\sigma}_{SR_A} = (0\,0\,0)^\top$), lässt sich die optimale Lösung a^* von Satz 4.12 (Seite 67) auf die optimale Lösung a^* von Satz 4.10 (Seite 63) zurückführen.
- Aufgrund dieser Unkorreliertkeit ist die optimale Lösung $\underline{\alpha}^*$ nicht von a^* abhängig, wie man aus Gleichung (5.22) ablesen kann. Dies bedeutet auch, dass die in Kapitel 5.5 auf Seite 95 durchgeführte Variation der Korrelation von R_A und R_L keinen Einfluss auf die optimale Selbstbehaltsquote $\underline{\alpha}^*$ hat.
- Vergleicht man den optimalen Selbstbehalt des vereinfachten Modells aus Kapitel 5.3 mit dem des vollständigen Modells, so kann man eine Aussage über den Einfluss der Spätschadenreserve treffen.

	vereinfachtes Modell	vollständiges Modell
α_H	66,56%	66,00%
α_K	73,22%	71,39%
α_F	66,60%	66,38%

Tabelle 5.19: Vergleich der optimalen Selbstbehaltsquoten im vereinfachten und im vollständigen Modell

Der geringfügige Rückgang des optimalen Selbstbehalts in Tabelle 5.19 ist darauf zurückzuführen, dass durch Berücksichtigung der Spätschadenreserve ein weiterer Unsicherheitsfaktor ins Modell aufgenommen worden ist. Durch Verringerung des Selbstbehalts und folglicher Erhöhung der Rückversicherungsquote kann das Unternehmen aber einen Teil des zusätzlichen Risikos an den Rückversicherer weitergeben.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Abschließend werden noch einmal die wichtigsten Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel zusammengefasst und ein kurzer Ausblick gegeben.

Grundlage dieser Arbeit war der Artikel „Capital Allocation and Solvency Testing“ von René Schnieper, der 1997 in den Scor Notes erschienen ist ([Sch97b]). Dabei wurde das Ziel verfolgt, das von Schnieper verwendete Modell zu modifizieren und somit ein Modell zur Ertragsoptimierung eines Sachversicherungsunternehmens zu entwickeln. Die Themenbereiche „Capital Allocation“ und „Solvency Testing“ des Ausgangsartikels traten dabei in den Hintergrund.

Wie in der Einleitung in Kapitel 1 erläutert wurde, sind Versicherungsunternehmen schon alleine aufgrund der momentan schwierigen wirtschaftlichen Lage gezwungen, qualifiziertes Risikomanagement zu betreiben. Ein Ansatzpunkt hierfür ist eine Risiko-Ertrags-Betrachtung des Unternehmens. In das in Kapitel 4 vorgestellte Modell fließen Risiken[27] aus den Bereichen der Versicherungstechnik (Zeichnung und Spätschadenreservierung) und der Kapitalanlage ein. Operationale Risiken (betreffen Qualität und Effizienz der Unternehmensorganisation, der funktionalen Abläufe, des Personals usw.), globale Risiken aus Änderungen der wirtschaftlichen, rechtlichen oder politischen Rahmenbedingungen sowie strategische Risiken finden keinen Eingang in das Modell.
Risiko wird hier durch die Standardabweichung der Rendite quantifiziert. Die erwartete Rendite definiert den Unternehmensertrag. Intuitiv möchte man immer einen möglichst hohen Ertrag bei minimalem Risiko erzielen. Da jedoch ein gewisser Ertrag ein bestimmtes Risiko impliziert und umgekehrt[28], geht man dazu über, den Erwartungsnutzen des Unternehmens zu maximieren. Über den Risiko-Ertrags-Präferenz-Parameter wird dabei das für das betrachtete Unternehmen optimale Verhältnis von Risiko zu Ertrag festgelegt.

In den drei zentralen Sätzen dieser Arbeit (Satz 4.4 auf Seite 43, Satz 4.10 auf Seite 63 und Satz 4.12 auf Seite 67) wird jeweils der Erwartungsnutzen maximiert.
Satz 4.4 geht dabei nur von einem vereinfachten Modell aus, das keine Spätschadenreservierung beachtet und auch nur eine risikolose Kapitalanlage zulässt. Aufgrund der

[27]Vergleiche Definition auf Seite 5.

[28]Dies wird z.B. durch die Gerade der vom Unternehmen erreichbaren Risiko-Ertrags-Paarungen in Abbildung 4.1 auf Seite 35 veranschaulicht.

Möglichkeit, einen Teil des gezeichneten Risikos durch Quotenrückversicherung an ein Rückversicherungsunternehmen weiterzugeben, kann man folglich den optimalen Selbstbehalt berechnen. Die Sätze 4.10 und 4.12 basieren beide nach Ergänzung der Spätschadenreserve[29] und Aufnahme einer risikobehafteten Kapitalanlagemöglichkeit auf dem vollständigen Modell. Der Unterschied begründet sich jedoch in der Annahme einer konstanten Selbstbehaltquote in Satz 4.10. Somit kann nur das Verhältnis risikolose zu risikobehafteter Kapitalanlage optimiert werden. Satz 4.12 behandelt letztendlich mit der gleichzeitigen Optimierung der Selbstbehaltquote und des Anteils der Investition in ein risikobehaftetes Asset den allgemeinen Fall.
Beim Übergang von unrestringierter zu restringierter Optimierung kann die Lösung meist nicht mehr geschlossen dargestellt werden. Sie kann jedoch über die Kuhn/Tucker-Nebenbedingungen[30] numerisch bestimmt werden.

Anhand eines selbst zusammengestellten Beispielunternehmens wird das Modell in Kapitel 5 durchgerechnet und so die Anwendbarkeit in der Praxis demonstriert.

Zur weiteren Forschung und besseren Anpassung des Modells an die Praxis ergeben sich unter anderem folgende Ansatzpunkte:

- Übergang zu einer mehrjährigen Betrachtung.
- Aufnahme anderer Rückversicherungsformen in das Modell.

[29] Vergleiche Kapitel 4.5.
[30] Siehe Hilfssatz auf Seite 64.

Anhang A

Symbole und Abkürzungen

Zeichen	*Bedeutung*
$\rightarrow$	geht gegen
$\uparrow$	geht von unten gegen
$\equiv$	identisch
$\hat{=}$	entspricht
∞	unendlich
$1_{(0,\infty)}$	Indikatorfunktion
$\underline{1} := (1, \ldots, 1)^\top$	Einsvektor von geeigneter Dimension
A	
a	Betrag, der in das risikobehaftete Asset investiert wird
$\bar{a}$	Priorität
A_t	Ereignisse
$\triangle A$	Gewinn oder Verlust aus Kapitalanlagen
α	Risikoanteil, den das Unternehmen selbst einbehält
$1 - \alpha$	Anteil, den das Unternehmen an den Rückversicherer abtritt
$\underline{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_I)^\top$	Anteile der Einzelrisiken, die das Unternehmen selbst behält
B	
b	Sicherheitszuschlag
b_{EV}	Sicherheitszuschlag, der dem Erstversicherer bleibt
$\underline{b} := (b_1, \ldots, b_I)^\top$	Sicherheitszuschläge für die Einzelrisiken
BAV	Bundesaufsichtsamt für das Versicherungswesen
$BAFin$	Bundesanstalt für Finanzdienstleistungen
β	Anteil am Unternehmenskapital
(β, ϵ)	Bereitschaft, einen Teil des Kapitals zu verlieren
C	
$C_{s,w-s+1}$	Gewinn (oder Verlust) aus der Abwicklung des Spätschadens von S^s
${}_1C_{s,w-s+1}$	Gewinn (oder Verlust) aus der reinen Abwicklung des Spätschadens aus Anfalljahr s
${}_2C_{s,w-s+1}$	Gewinn (oder Verlust) aus der Verzinsung des Spätschadens von S^s

Zeichen	*Bedeutung*
$Cov[S_i, S_j] = \sigma_{i,j}$	Kovarianz von S_i und S_j
$\sim \Gamma(q, \lambda)$	gammaverteilt mit Parameter q und λ
$\Gamma(q)$	Gammafunktion
D	
$\delta_A = E[R_A] - r_0$	
E	
$E[S]$	Erwartungswert von S
$E[S\|\mathcal{F}_t]$	bedingter Erwartungswert von S bezüglich $\mathcal{F}_t$
EW	Erwartungswert
$\mathbb{E}$	Einheitsmatrix von geeignetem Rang
ϵ	Insolvenzwahrscheinlichkeit
$1 - \epsilon$	Sicherheitswahrscheinlichkeit
F	
F	Verteilungsfunktion der Gesamtschadenverteilung
$F_{0,1}$	Verteilungsfunktion der standardisierten Gesamtschadenverteilung
$\mathcal{F}, \mathcal{F}_t$	σ-Algebren
Φ	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
G	
GuV	Gewinn- und Verlustrechnung
GoV	Gewinn oder Verlust
$\mathcal{G}$	σ-Algebra
$\mathcal{G}_t$	Information, die das Unternehmen im Jahr t über den Zins besitzt
H	
h	Betrag, auf den die Rückversicherung begrenzt ist
$\mathcal{H}_{s,t}$	Information über die im Abwicklungsjahr t bzgl. Anfalljahr s geleisteten Zahlungen
η	Spread (Marge) über die Rendite der risikolosen Anlage
I	
i	Index für verschiedene Risiken ($1 \leq i \leq I$)
$IBNR$	incurred but not reported
$IBNER$	incurred (and reported) but not enough reserved
K	
k	Risiko-Ertrags-Quotient
k_{EV}	Risiko-Ertrags-Quotient des Erstversicherers
K_t	Auszahlungen des Portfolios aus Nullkuponanleihen
$\kappa = Corr[Z, R_A]$	

Zeichen	*Bedeutung*
L	
$\sim LogN(\mu, \sigma^2)$	logarithmisch normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2
l	Preis eines Portfolios aus Nullkuponanleihen (entspricht den versicherungstechnischen Rückstellungen)
$\triangle L$	Spätschadenreserve
$\triangle L_1$	Gewinn oder Verlust aus der Abwicklung von Spätschadenreserven
$\triangle L_2$	Gewinn oder Verlust aus der Verzinsung der Spätschadenreserve
$L_{s,w-s+1}$	geschätzte Spätschadenreserve für S^s am Ende des Betrachtungsjahres w
$\mathcal{L}^1$	Klasse der einmal integrierbaren Zufallsvariablen
M	
$\mu := E[R_U]$	Ertrag (Return)
$\mu_A := E[R_A]$	erwartete Rendite des risikobehafteten Assets
μ_{EV}	Ertrag für den Erstversicherer
$\mu_L := E[R_L]$	erwartete Rendite des Bondportfolios
$\mu_Z = E[Z]$	
N	
$\sim N(\mu, \sigma^2)$	normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2
$\nu = E[V(R_U)]$	Erwartungsnutzen
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen vereinigt mit der Null
P	
$\mathbb{P}$	Wahrscheinlichkeitsmaß
$P - f.s.$	stochastische Konvergenz
$P(w, w+j)$	Barwert zum Zeitpunkt w einer zum Zeitpunkt $w+j$ bezahlten Geldeinheit
$\pi(S)$	Prämie für die Übernahme von Risiko S
Q	
$Q_{1-\epsilon}$	$(1-\epsilon)$ Quantil der standardisierten Gesamtschadenverteilung
θ	Risiko-Ertrags-Präferenz-Parameter
R	
r_0	Rendite der risikolosen Anlage
r_{max}	Maximum der Nutzenfunktion
$r(x)$	Zinssatz zum Zeitpunkt x
R_A	Rendite des Assets j
R_L	Rendite des Bondportfolios
R_U	Rendite des Unternehmens
$RBNS$	reported but not settled
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\rho(S_i, S_j)$	Korrelation von S_i und S_j

Zeichen	*Bedeutung*
S	
s, t	Index für verschiedene Zeitpunkte ($1 \leq s, t \leq w$)
S	Gesamtschaden
S^s	Risiko bzw. Portfolio von Risiken aus dem Anfallsjahr s
$S_1, \ldots, S_I$	Einzelrisiken bzw. Teilportfolios
S_{EV}	Selbstbehalt des Erstversicherers
S_M, S_L	Teilportfolios
$\triangle S$	Gewinn oder Verlust aus der Zeichnung des Risikos S
$\triangle S_{EV}$	Gewinn oder Verlust aus der Zeichnung des Risikos S nach Rückversicherung
$\sigma := \sigma(R_U)$	Risiko
σ_{EV}	Risiko für den Erstversicherer
$\sigma(S)$	Standardabweichung von S
$\sigma_{i,j} = Cov[S_i, S_j]$	
$\sigma_Z^2 = Var[Z]$	
$\sigma_{R_A}^2 = Var[R_A]$	
$\sigma_{R_L}^2 = Var[R_L]$	
$\Sigma := (\sigma_{i,j})$	
$\underline{\sigma}_{LR_A}$	$\underline{\sigma}_{LR_A} := (\sigma_{L_{m+1}R_A}, \ldots, \sigma_{L_nR_A})^\top$
$\underline{\sigma}_{LR_L}$	$\underline{\sigma}_{LR_L} := (\sigma_{L_{m+1}R_L}, \ldots, \sigma_{L_nR_L})^\top$
$\underline{\sigma}_{SR_A}$	$\underline{\sigma}_{SR_A} := (\sigma_{S_1R_A}, \ldots, \sigma_{S_mR_A})^\top$
$\underline{\sigma}_{SR_L}$	$\underline{\sigma}_{SR_L} := (\sigma_{S_1R_L}, \ldots, \sigma_{S_mR_L})^\top$
Σ^L	$\Sigma^L := (\sigma_{L_iL_j})_{i,j=m+1,\ldots,n}$ mit $\sigma_{L_iL_i} := \sigma_{L_i}^2 := Var[X_i^L]$
Σ^S	$\Sigma^S := (\sigma_{S_iS_j})_{i,j=1,\ldots,m}$ mit $\sigma_{S_iS_i} := \sigma_{S_i}^2 := Var[X_i^S]$
Σ^{SL}	$\Sigma^{SL} := (\sigma_{S_iL_j})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=m+1,\ldots,n}}$
U	
u	Unternehmenskapital
u_R	Risiko-basiertes Kapital
u_P	Performance-basiertes Kapital
u.U	unter Umständen
$\triangle U$	Veränderung des Unternehmenskapitals
$\triangle U_i$	Aufteilung des Unternehmensgewinns (-verlustes) auf die einzelnen Bereiche
V	
v_i	Versicherungssumme des Risikos i
v_0	Maximum des Selbstbehalts
$V = V(R_U)$	Nutzenfunktion
$Var[S] = \sigma^2(S)$	Varianz von S
W	
w	Anzahl der Abwicklungsjahre

Zeichen	*Bedeutung*
ω	Ergebnis
Ω	Stichprobenraum
X	
X_i	Verlust aus der Zeichnung der Risiken oder aus der Abwicklung der Spätschäden des Teilportfolios i
X_i^S	Verlust aus der Zeichnung der Risiken des Teilportfolios i
X_i^L	Verlust aus der Abwicklung der Spätschäden des Teilportfolios i
$\underline{X}^L$	$\underline{X}^L := (X_{m+1}^L, \ldots, X_n^L)^\top$
$\underline{X}^S$	$\underline{X}^S := (X_1^S, \ldots, X_m^S)^\top$
χ_{SR_A}	$\chi_{SR_A} := \underline{\sigma}_{SR_A}^\top (\Sigma^S)^{-1} \underline{\sigma}_{SR_A}$
Z	
$Z_{s,t}$	Betrag, der im Abwicklungsjahr t für im Anfalljahr s eingetretene Schäden aufgewendet wird

Literaturverzeichnis

[Alb01] ALBRECHT, PETER: *Asset Liability Management bei Versicherungen.* Working Paper [http://www.bwl.uni-mannheim.de/Albrecht] unter Forschung/Schriftenreihe/Mannheimer Manuskripte, erscheint in: Rudolf, M., Leser, H. (Hrsg.): Asset Liability Management, Wiesbaden 2002, 2001.

[Bun] BUNDESAUFSICHTSAMT FÜR FINANZDIENSTLEISTUNGEN: *Gesetz über die Beaufsichtigung von Versicherungsunternehmen (Versicherungsaufsichtsgesetzt).* [http://www.bafin.de/gesetze/vag.htm].

[Elt95] ELTON, EDWIN AND GRUBER, MARTIN: *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis.* John Wiley, fith edition, 1995.

[Far89] FARNY, DIETER: *Versicherungsbetriebslehre.* Verlag Versicherungswirtschaft e.V, Karlsruhe, 1989.

[Fle81] FLETCHER, R.: *Practical Methods of Optimization*, Band 2, Constrained Optimization. John Wiley, 1981.

[Kre] KREDLER, CHRISTIAN: *Vorlesungsskript Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, TU-München.* WS 1998/99.

[Mac] MACK, THOMAS: *Vorlesungsskript Schadensversicherungsmathematik.* WS 2000/01.

[Mac97] MACK, THOMAS: *Schadensversicherungsmathematik, Heft 28.* Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik. Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe, 1997.

[Mü] MÜNCHENER-RÜCK: *Topics, Jahresrückblick Naturkatastrophen 2002.* [http://www.munichre.com/default_d.asp] unter Publikationen.

[Rip87] RIPLEY, BRIAN: *Stochastic Simulation.* Series in Pobability and Mathematical Statistics. John Wiley, 1987.

[Rub81] RUBINSTEIN, REUVEN: *Simulation and the Monte Carlo Method.* Series in Pobability and Mathematical Statistics. John Wiley, 1981.

[Rus] RUSS, JOCHEN UND ZWIESLER, HANS-JOACHIM: *Skript ALM für Versicherungen, Uni-Ulm.* SS 2002.

[Sch97a] SCHMEISER, HATO: *Risikotheoretisch fundierte Ansätze zur Neugestaltung des Europäischen Solvabilitätssystems für Schadenversicherer*. Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe, 1997.

[Sch97b] SCHNIEPER, RENÉ: *Capital Allocation and Solvency Testing*. Score Notes, Seiten 49 – 104, january 1997.

[Sch98] SCHÜRGER, DR. KLAUS: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Oldenbourg Verlag, München, 1998.

[Sch02] SCHMIDT, KLAUS: *Versicherungsmathematik*. Springer Verlag, 2002.

[Sha99] SHARPE, WILLIAM F. ET AL: *Investments*. Prentice Hall, New Jersey, sixth edition, 1999.

[Spr96] SPREMANN, KLAUS: *Wirtschaft, Investition und Finanzierung*. International Management and Finance. Oldenbourg Verlag, München, 5. Auflage 1996.

[Spr00] SPREMANN, KLAUS: *Portfoliomanagement*. Oldenbourg Verlag, München, 2000.

[Ste00] STEINER, MANFRED UND BRUNS, CHRISTOPH: *Wertpapiermanagement*. Schaeffer - Poeschel Verlag, Stuttgart, 7. Auflage, 2000.

[Uhl94] UHLIR, HELMUT UND STEINER, PETER: *Wertpapieranalyse*. Physica Verlag, Heidelberg, 3. Auflage, 1994.

[vE81] EEGHEN, J. VAN: *Loss Reserving Methods*. Surveys of Actuarial Studies, No. 1. Nationale Nederlanden, Rotterdam, 1981.

[Wil91] WILLIAMS, DAVID: *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[Zag02] ZAGST, RUDI: *Interest Rate Management*. Springer Finance. Springer Verlag, 2002.