

David Le Page  
ENSAE 2000

# Risque de Défaut : Une Approche Intensité.

Sous la direction de:

Nathalie Pistre, Professeur de Finance a l'ENSAE

Pierre de La Noue, CCF

Guillaume Bouet, CCF

## Table des matières

<b>1. Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2. Modélisation du Risque Défaut</b>	<b>11</b>
2.1 Le modèle de Merton (1974) : une lecture optionnelle du passif de la firme . .	11
2.1.1 L'idée de base du modèle . . . . .	11
2.1.2 Les spécifications de Merton (1974) . . . . .	12
2.2 Généralités sur les modèles à intensité . . . . .	14
2.2.1 Cadre et hypothèses de travail en temps continu . . . . .	15
2.2.2 La valorisation risque neutre d'une dette risquée . . . . .	17
2.2.3 Un théorème de représentation du prix de la dette risquée . . . . .	19
2.2.4 Commentaires et premières conséquences . . . . .	21
2.2.5 L'hypothèse H : une hypothèse d'invariance de la propriété de martin- galité . . . . .	23
2.2.6 Le modèle de Jarrow et Turnbull (1995) . . . . .	25
2.2.7 Le modèle de Duffie et Singleton (1998) . . . . .	26
2.2.8 Le modèle de Madan et Unal (1998). . . . .	27
2.2.9 Réécriture du modèle de Madan et Unal (1998) à l'aide de la probabilité forward neutre . . . . .	32
<b>3. Modélisation de l'ampleur de défaut</b>	<b>34</b>
3.1 Modèle proposé par Madan et Unal . . . . .	34
3.1.1 Spécification des fonctions de recouvrement . . . . .	34
3.1.2 Spécification économétrique et estimation . . . . .	38
3.2 Estimation des paramètres sur des séries financières . . . . .	39
3.2.1 Choix des données . . . . .	39

3.2.2	Problème d'information et modèle dégénéré . . . . .	41
3.2.3	Présentation et analyse des résultats . . . . .	44
3.3	Retour à la probabilité réelle . . . . .	52
<b>4.</b>	<b>Modélisation de la probabilité de défaut</b>	<b>54</b>
4.1	Obtention d'une équation aux dérivées partielles . . . . .	54
4.2	Déterminants du spread . . . . .	55
4.3	Modèle proposé . . . . .	59
4.3.1	Spécification de l'intensité de défaut . . . . .	59
4.3.2	Solution proposée par Madan et Unal . . . . .	61
4.3.3	Spécification économétrique . . . . .	62
4.3.4	Résolution par les moindres carrés non linéaires . . . . .	63
4.4	Résolution de l'équation différentielle . . . . .	64
4.5	Résolution numérique . . . . .	67
4.5.1	L'obtention d'une équation de récurrence . . . . .	67
4.5.2	Une nouvelle relation fonctionnelle entre $\phi$ et $s$ . . . . .	68
4.5.3	Schéma implicite versus schéma explicite . . . . .	70
4.5.4	Résolution par le schéma implicite . . . . .	71
4.5.5	Estimation des paramètres . . . . .	73
4.6	Calcul de la probabilité réelle . . . . .	80
<b>5.</b>	<b>Bilan et perspectives</b>	<b>86</b>
5.1	Originalité de la démarche . . . . .	86
5.2	Applications du modèle . . . . .	88
5.2.1	Gestion des risques . . . . .	88
5.2.2	Evaluation de dérivés de crédit . . . . .	89

5.2.3	Valorisation d'une nouvelle dette . . . . .	89
5.3	Développements . . . . .	90
<b>6.</b>	<b>Annexes</b>	<b>94</b>
6.1	Estimation du taux de recouvrement . . . . .	94
6.1.1	Qualité des séries de taux junior et senior . . . . .	94
6.1.2	Estimation des probabilités de survie . . . . .	95
6.2	Modélisation de la probabilité de survie . . . . .	98
6.2.1	Relation entre le cours de l'action et la probabilité de survie . . . . .	98
6.2.2	Résolution de l'équation différentielle . . . . .	100
6.2.3	Résolution numérique de l'équation différentielle . . . . .	102
6.2.4	Retour à la probabilité réelle. . . . .	107

## 1. Introduction

Notre ambition est ici de rappeler quelques “évidences” sur le risque de défaut, ainsi que de faire le point sur les pratiques en vigueur dans l’industrie bancaire, tant d’un point de vue prudentiel que dans une optique de gestion active des portefeuilles de crédits.

Pour bien comprendre le risque de crédit, peut-être est-il nécessaire de revenir dans un premier temps à la source de ce risque, à savoir l’entreprise qui a emprunté des capitaux, soit par le biais d’un crédit bancaire classique, soit en émettant des obligations sur le marché. Le défaut survient lorsque l’entreprise ne peut plus faire face à ses engagements vis à vis de ses créanciers. Lorsqu’un tel évènement survient deux éventualités sont envisageables : soit l’entreprise a la possibilité de renégocier avec ses créanciers les termes de ses engagements<sup>1</sup> (rééchelonnement des versements, diminution du taux...), soit elle ne le peut pas et l’entreprise est déclarée en faillite, le juridique prenant alors le relais. Cette situation de faillite implique un transfert du pouvoir de gestion des actionnaires vers les *ayant droits* : l’ensemble des créanciers, au premier rang desquels l’Etat et les salariés. A ce sujet on signalera à titre d’exemple que les récentes tractations engagées par Renault pour la reprise de certains actifs de Samsung Motor se sont faites avec les créanciers du groupe coréen et non avec ses actionnaires. De plus il existe un ordre de priorité entre les *ayant droits*. En France, l’Etat et les salariés sont prioritaires sur les autres créanciers. En ce qui concerne les dettes issues du crédit, on peut distinguer la dette senior de la dette subordonnée (appelée également dette junior). Une telle distinction implique que le créancier senior dispose d’un droit prioritaire sur le créancier junior sur les actifs de la firme en cas de défaut. La prise en compte de ces règles de priorité est essentielle dans toute modélisation du risque de crédit fondée sur la structure financière de l’entreprise.

---

<sup>1</sup> On peut citer à titre d’exemple le cas d’Eurotunnel qui a fait défaut sur sa dette mais n’a jamais été déclarée en faillite. Suite à des négociations avec les 225 banques débitrices, l’endettement a été rééchelonné, une partie des créances ont été converties en actions et le taux d’intérêt a été réduit.

Une fois la faillite déclarée, deux évolutions sont à nouveau possibles : le redressement judiciaire ou la liquidation judiciaire. Le principe du redressement est de tenter de faire survivre l'entreprise tout en épurant son passif et en rééchelonnant la dette avec l'accord des créanciers. Le redressement n'est d'une part pas toujours possible et peut d'autre part échouer. L'autre éventualité est la liquidation judiciaire : un liquidateur est nommé et il a pour mission de réaliser les actifs de la société pour rembourser si possible les créanciers selon leur ordre de priorité. Notons qu'étant donné le caractère illiquide de certains actifs, la tâche peut s'avérer ardue : il faut arbitrer entre une liquidation rapide durant laquelle les actifs risquent d'être bradés, et une liquidation plus longue qui se ferait au détriment des créanciers. En matière de redressement et de liquidation, les procédures divergent fortement d'un pays à l'autre<sup>2</sup> . Or celles-ci ont un impact significatif sur le coût des faillites, les droits des créanciers, leur rang et la date à laquelle ils seront remboursés. Ainsi dans la réglementation américaine les procédures sont longues, coûteuses et conduisent à modifier le rang des créances et donc à ne pas respecter les termes originaux des contrats d'emprunts. Au Royaume-Uni au contraire, la procédure du règlement judiciaire est généralement rapide. Les créanciers y disposent d'un fort pouvoir de gestion de l'entreprise, leur assurant un meilleur respect des termes contractuels concernant les dettes, au risque toutefois de liquidations prématurées ou inefficaces.

Ceci étant précisé, retournons la problématique et plaçons nous du point de vue du créancier, en particulier la banque. Le risque de crédit auquel elle est soumise repose sur deux incertitudes : l'éventualité d'un défaut du débiteur et le montant qu'il lui sera possible de recouvrer en cas de défaut<sup>3</sup> . La modélisation du risque de crédit consiste en général à spécifier ces deux composantes.

En transformant les disponibilités de court terme de l'économie en crédits à moyen et

---

<sup>2</sup> voir à ce sujet (11)

<sup>3</sup> In fine l'incertitude concernant la date à laquelle le recouvrement va avoir lieu peut être capturée par le montant de ce recouvrement via une actualisation

long terme, les banques sont les premières concernées par le risque de défaut : la défaillance d'un débiteur peut affecter de façon importante leur rentabilité, mais surtout ce défaut peut mettre à mal leur solvabilité. En tant que débiteuses de leurs déposants, elles risquent à leur tour de se retrouver en situation de défaut. Le risque de crédit auquel sont soumises les banques est donc de nature systémique. Cet aspect systémique se retrouve aussi au niveau de la gestion d'actifs : si une obligation fait défaut, cela peut se répercuter sur l'épargne d'un grand nombre d'individus par le biais des FCP.

Etant donné que le risque de crédit met en danger la solvabilité des banques, la réglementation s'est penchée sur le problème. L'accord de Bâle de 1988 définit une procédure standard visant à calculer le capital minimal à allouer pour couvrir le risque d'investissement des établissements financiers : le ratio Cooke. Les contreparties étant classées selon leur nature (état, banque ou corporate), on associe une pondération à chaque classe de risque, ce qui permet de calculer une exposition pondérée au risque de crédit. Le ratio "capital/exposition pondérée" ne doit pas être inférieur à 8%. Ce ratio Cooke représente donc une première tentative de prise en compte du risque de crédit. Cependant il faut remarquer que les différentes classes de risque sont définies de façon grossière : aucune distinction n'est faite entre un gros corporate français et une entreprise exportatrice brésilienne soumise aux aléas du real.

Une telle réglementation a suscité de nombreuses critiques : la plus évidente est qu'elle laisse la porte ouverte à des phénomènes d'antisélection. Pour un capital prudentiel fixé, les banques risquent de s'engager sur les contreparties les plus risquées pour améliorer leur retour sur fonds propres. En fait, il semble communément admis que le respect des normes minimales ne préserve pas ipso facto la solvabilité des banques. Un autre point important qui n'est pas pris en compte par cette réglementation est le lien qui existe entre le risque de crédit et le risque de marché. Comme nous allons le voir plus en détails dans la suite de ce mémoire, ces deux risques ne sont absolument pas séparables. On voit bien notamment que si la valeur

de marché des actifs d'une firme baisse, ce qui génère du risque de marché, cela va induire une augmentation de la probabilité de défaut, et donc du risque de crédit. Réciproquement, une hausse inattendue de la probabilité de défaut va se répercuter par une baisse de la valeur de marché des actifs de la firme. L'absence de séparabilité entre les risques de marché et de crédit affecte la détermination de la valeur du capital prudentiel dont la banque doit disposer pour couvrir ses positions. La banque qui ne prend pas en compte ce lien s'expose soit à une diminution de sa rentabilité en cas de capital trop élevé, soit à une diminution de sa solvabilité en cas de capital insuffisant.

Au cours de la dernière décennie, quelques-unes des plus grandes banques mondiales ont développé des modèles internes dont l'ambition est d'évaluer le risque de crédit auquel leur activité les expose tout en tenant compte de l'intrication de ce risque avec le risque de marché. Évaluer le risque de crédit d'une créance revient à établir le prix de cette dette, c'est à dire le supplément de rémunération que l'emprunteur doit payer par rapport au taux sans risque en fonction du risque qui lui est attaché : il s'agit du spread de taux.

Les applications d'une telle évaluation sont nombreuses : le contrôle des risques en premier lieu, avec la détermination du capital prudentiel ou de limites de trading, mais également les différentes mesures de performances ajustées du risque, ou encore la tarification de produits dérivés dont les sous-jacents sont soumis au risque de crédit, les "dérivés de crédit". Dans un rapport datant de 1999, un groupe de travail du comité de Bâle s'est penché sur la question de ces modèles internes. L'enjeu de tels modèles est énorme : si la réglementation laissait la possibilité (comme cela est déjà le cas pour le risque de marché) aux banques d'utiliser des modélisations internes pour procéder aux allocations prudentielles, les rentabilités de certaines activités pourraient se retrouver sensiblement améliorées. Le rapport conclut à la forte potentialité, dans une optique réglementaire, de l'ensemble de ces démarches. Cependant, il souligne également l'existence de quelques obstacles à l'acceptation de ce type de modéli-



sations en tant qu'aide interne à la détermination du niveau de capital prudentiel adéquat pour la couverture du risque de crédit. Les régulateurs veulent avoir la certitude que ces modèles sont valides tant d'un point de vue conceptuel qu'empirique et d'autre part, qu'ils peuvent fournir des résultats comparables pour l'ensemble des banques. Le rapport de Bâle insiste sur le fait qu'à l'heure actuelle, la rareté des données empiriques limite l'utilisation de ces modèles. En effet, le défaut étant un évènement rare, les données ne permettent pas de valider les modèles comme cela est possible pour des modèles de risque de marché. Le rapport conclut ainsi : "Du fait de la rareté du défaut, il faudrait des données sur de nombreuses années. Ces données n'existant pas, nous n'autorisons pas l'utilisation de modèles de risque de crédit pour le contrôle des risques". Cette vision peut sembler étroite. En effet, de nombreux modèles de risque de crédit sont fondés sur la structure par terme des spreads de crédit. Il semble donc possible de tester ces modèles sur des marchés où l'on dispose de suffisamment données pour construire cette structure.

La problématique de ce mémoire s'insère dans le cadre du risque de crédit auquel sont soumises les dettes négociables, à savoir principalement les obligations. Du point de vue de l'évènement "défaut", une obligation diffère peu d'un crédit bancaire classique. Par contre ces titres possèdent un avantage significatif du fait de leur négociabilité : étant cotés par le marché, on peut raisonnablement penser que l'évolution de leurs prix doit traduire, outre les évolutions de l'offre et la demande sur les produits de taux, les anticipations du marché concernant le risque de défaut de l'émetteur. Quand une entreprise emprunte par le biais d'un crédit bancaire, sa solvabilité anticipée n'est évaluée qu'une fois, lors de la détermination du taux de prêt qui peut être plus ou moins élevé en comparaison avec le taux sans risque vu comme le taux auquel peuvent se refinancer des contreparties jugées sûres, tels que les Etats du G7 ou encore les grandes institutions financières internationales. Dans le cas d'une émission obligataire, l'emprunteur n'aura beau être confronté à sa solvabilité anticipée qu'une

fois (lors de la détermination du taux de coupon), le marché aura quant à lui la possibilité de réévaluer constamment la qualité de la signature de l'emprunteur par le biais du prix auquel sera négociée l'obligation. Si le crédit de l'émetteur se détériore, le prix auquel sera négociée sa dette va baisser. Conceptuellement, cela se traduira par une hausse du taux actuariel rattaché au titre en question. On comprend donc qu'à maturités égales, la comparaison des taux actuariels de différentes obligations doit permettre de comparer les anticipations du marché sur le risque de solvabilité des différents émetteurs. La comparaison historique du taux actuariel d'une obligation cotée avec le taux sans risque de même maturité permet donc d'observer ex-post l'évolution du risque de crédit rattaché à la signature concernée au cours du temps.

La décennie qui s'achève a été particulièrement florissante en matière de risque de crédit tant d'un point de vue *industriel* que *conceptuel*. Le développement des dérivés de crédit a pris son essor sous l'impulsion des problématiques de rentabilité et de contraintes prudentielles. Les premières transactions sont apparues aux Etats-Unis au début de la décennie. La crise asiatique a rappelé que la qualité d'une signature pouvait se détériorer subitement et qu'il y avait donc matière à couverture dans certain cas. Enfin, les perspectives de l'Union Monétaire Européenne laissaient entrevoir le développement d'un très grand marché de capitaux sans risque de change dans lequel les besoins de couverture contre le risque de crédit ne tarderaient pas à se faire sentir.

Parallèlement, le sujet a suscité un intérêt très vif de la part des chercheurs en finance. Les premiers modèles ont été développés dans les années 70 et 80 en tant qu'application de la théorie des options à la suite de l'article fondateur de Merton (1974). Il s'agit des modèles dits à approche *structurelle* car ils reposent sur une modélisation de la structure financière de la firme. Malheureusement, la mise en oeuvre de ces modèles pose un certain nombre de difficultés pratiques liées à l'impossibilité d'observer la valeur de marché des actifs de la

firme. Pour contourner cette difficulté, une nouvelle voie de recherche est apparue durant les années 90 et toute une classe de modèles dits à *intensité* a été proposée. Dans cette approche, le défaut est modélisé comme le premier saut d'un processus de Poisson, encore appelé processus de Cox. L'intensité du processus représente la probabilité de défaut instantané et peut dépendre d'un certain nombre de variables d'états. Ces modèles contournent la difficulté d'obtenir la valeur de marché des actifs en s'appuyant uniquement sur l'observation du spread de taux comme traduction du risque de crédit.

Si d'un point de vue académique on distingue donc deux "écoles", l'une utilisant une approche *optionnelle* (également appelée approche *structurelle*) et l'autre utilisant une approche *intensité* (ou encore *forme réduite*), la plupart des modèles utilisés aujourd'hui par les banques reposent sur l'approche structurelle. C'est notamment le cas des modèles célèbres CreditMetrics et KMV.

L'objectif de ce mémoire est de présenter de manière théorique l'idée commune aux modèles à intensité et d'étudier en détail l'approche proposée par Madan et Unal (1998) dont on verra qu'elle se veut être un "pont" reliant les modèles à intensité et l'approche structurelle. Le mémoire s'articule de la façon suivante : la section 2 présente et discute les concepts théoriques, la section 3 est consacrée à l'étude de la modélisation du taux de recouvrement dans le modèle de Madan et Unal et la section 4 présente la modélisation des probabilités de survie (c'est à dire de non-défaut) dans ce même modèle.

## 2. Modélisation du Risque Défaut

Avant de présenter en détail les modèles à intensité, il est indispensable de rappeler brièvement sur quelles idées reposent les modèles structurels en présentant le modèle fondateur de Merton (1974).

Signalons que la démarche première de l'ensemble des modèles est la suivante : *comment peut-on modéliser le prix d'un zéro-coupon compte-tenu du risque de crédit qui y est rattaché?*

### 2.1 Le modèle de Merton (1974) : une lecture optionnelle du passif de la firme

On fait souvent référence à la théorie de la firme pour parler des modèles structurels de risque de défaut. En effet, ces modèles reposent sur une représentation de la structure financière de la firme, et plus particulièrement de sa dette. Merton (1974) propose une représentation simplifiée du passif de l'entreprise, composé d'une dette uniquement obligataire et des fonds propres.

Actif $A(t)$	Action $E(t)$
	Dette $B$

Structure financière de la firme dans Merton (1974)

#### 2.1.1 L'idée de base du modèle

Merton suppose que la dette obligataire est composée d'un unique un zéro-coupon d'échéance  $T$  et de nominal  $B$ . A toute date  $t$ , les actifs de la firme valent  $A(t)$  et les fonds propres  $E(t)$ .

Il convient de remarquer qu'il s'agit ici non pas des valeurs comptables des actifs et des fonds propres mais de leur valeur de marché.

On peut envisager deux évolutions possibles à la date  $T$ . Soit  $A(T) \geq B$  et dans ce cas la dette est remboursée et les actionnaires récupèrent  $A(T) - B$ . Soit  $A(T) \leq B$  et dans ce cas l'entreprise est en défaut, les obligataires reçoivent  $A(T)$  et deviennent propriétaires de la firme. A la date  $T$  les actionnaires reçoivent  $Max(A(T) - B, 0)$  et les obligataires reçoivent  $Min(A(T), B)$ .

Remarquons que le pay-off final des obligataires peut se réécrire :

$$Min(A(T), B) = B - Max(B - A(T), 0) \quad (1)$$

La détention d'une dette risquée peut donc s'interpréter comme une stratégie où l'on aurait acheté un zéro-coupon sans risque dont on aurait financé une partie du coût par la vente d'un put de sous-jacent  $A$ , de maturité  $T$  et de prix d'exercice  $B$ .

Toute l'originalité des modèles utilisant cette approche repose sur la spécification du processus  $A$ . Elle imposera alors le prix du put précité et la prime de risque puis le spread par rapport au taux sans risque.

### 2.1.2 Les spécifications de Merton (1974)

Merton propose alors de stipuler une dynamique de type Black-Scholes (mouvement brownien géométrique) pour la valeur des actifs de la firme :

$$\frac{dA_t}{A_t} = \alpha dt + \sigma dW_t \quad (2)$$

D'autre part il fait l'hypothèse que le taux sans risque  $r$  est constant. En supposant l'absence d'opportunité d'arbitrage on calcule le prix théorique de la dette risquée à l'aide de la formule de Black-Scholes de valorisation des options.

$$B(A_t, t) = B.e^{-r(T-t)} - (B.e^{-r(T-t)}N(-d_2) - A_t.N(-d_1)) \quad (3)$$

où  $N$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et  $d_1 = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 T - \log(B.e^{r(T-t)}/A_t)}{\sigma\sqrt{T}}$   
 et  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ .

Cette équation se réécrit de la manière suivante :

$$B(A, t) = e^{-r(T-t)}.B.N(d_2) + A_t.(1 - N(d_1)) \quad (4)$$

On peut tirer quelques implications importantes de ces deux formules. Premièrement, on remarque que si l'option est très en dehors de la monnaie ( $A(t) \gg B$ ), la dette se comporte comme un bond sans risque. A l'inverse, quand l'option est dans la monnaie, la valeur de la dette est très sensible à la volatilité de l'actif. Deuxièmement, on voit qu'à mesure que la maturité du bond tend vers 0, le spread de taux tend aussi vers 0. Enfin, ce modèle permet de bien mettre en évidence la relation entre le risque de marché et le risque de crédit à travers la relation comptable qui existe entre la valeur de l'actif, celle de la dette et celle de l'action : la baisse de la valeur des actifs implique une hausse de la probabilité de défaut, et donc du risque de crédit.

Il existe un certain nombre de limites pratiques dans l'implémentation du modèle de Merton.

- Le processus du sous-jacent  $A$  est difficilement observable. Or il est nécessaire de connaître non seulement la valeur des actifs de la firme mais il faut aussi en estimer la volatilité.
- La modélisation de la structure financière peut sembler simpliste. On peut par exemple remarquer qu'en cas de défaut, les *ayant droits* prioritaires que sont l'Etat et les salariés doivent être pris en compte. Dans un modèle structurel où l'on tient compte des

différents niveaux de seniorité, il convient de déterminer simultanément la valeur de toutes les créances, ce qui peut poser des problèmes de calcul.

- La vision du défaut proposée est très mécanique: le défaut a lieu lorsque la valeur des actifs franchit une barrière explicite qui est le nominal de la dette. Dans les faits, le défaut peut survenir soit avant, soit après le franchissement de cette barrière.
- Le défaut ne peut survenir qu'à l'échéance. En pratique, le défaut peut être déclenché avant l'échéance par l'exigibilité d'autres créances comme par exemple le paiement de fournisseurs.
- Le taux d'intérêt sans risque est supposé déterministe. Si cette hypothèse est tenable pour des échéances courtes (inférieures à un an), elle ne l'est plus au delà.

Les nouveaux développements de modèles structurels ont donc consisté à répondre à ces critiques en étoffant les hypothèses concernant la structure financière de la firme, le processus de taux sans risque et à permettre le défaut avant l'échéance. Cela a résulté dans une complexification de l'équation de valorisation qui ne permet plus en général d'avoir une formule fermée. Par ailleurs, l'augmentation du nombre de paramètres induit des difficultés d'estimation. Enfin, la principale limite qui repose sur l'impossibilité d'observer la valeur de marché des actifs demeure quelque soit l'extension du modèle.

Les modèles à intensité que nous allons présenter à présent répondent à ces limites dans la mesure où ils ne s'intéressent plus à la survenance du défaut lui-même mais à sa probabilité instantanée, l'intensité.

## **2.2 Généralités sur les modèles à intensité**

Ces modèles reposent sur l'idée que le défaut est modélisé par le premier saut d'un processus de Poisson. L'instant du défaut correspond à l'instant du premier saut, tandis que l'ampleur du défaut est modélisée par l'importance du saut. L'intensité du processus de Poisson

correspond à l'intensité de défaut, c'est-à-dire à la probabilité instantanée de défaut. Les paramètres de l'intensité sont estimés grâce aux séries de spreads de taux. L'intérêt principal de cette approche est de ne reposer que sur des données de marché observables. Cet avantage est aussi la faiblesse de ces modèles : en s'affranchissant de la modélisation de la structure financière de l'entreprise, il semble que l'on perd le fondement économique de l'explication du défaut. Le risque serait donc d'ignorer dans le modèle certains facteurs économiques du défaut. Nous allons voir que cette faiblesse peut être en partie corrigée en faisant dépendre l'intensité de variables économiques.

La première partie de cette section propose une formulation générale des modèles à intensité à partir de laquelle il est possible de dériver les principaux modèles de cette famille en tenant compte des hypothèses particulières à chaque auteur. Cela nous permettra dans un second temps de présenter les deux modèles à intensité les plus célèbres, le premier historiquement proposé par Jarrow et Turnbull (1995) et le modèle de Duffie et Singleton (1998). Enfin, le modèle de Madan et Unal (1998) est présenté plus en détails. L'originalité de l'article de Madan et Unal est de prendre en considération des dettes junior et senior, ce qui va permettre d'estimer la loi du taux de recouvrement et de pouvoir se passer de spécifier le processus suivi par le taux sans risque.

### **2.2.1 Cadre et hypothèses de travail en temps continu**

On se place dans un espace probabilisé  $\{\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}^*\}$  où  $\mathbb{P}^*$  est une probabilité risque neutre, c'est à dire une probabilité pour laquelle les prix des actifs financiers actualisés sont des martingales. Cela implique que ces prix actualisés sont égaux aux espérances des pay-off futurs actualisés. On fait donc implicitement l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, hypothèse qui nous assure l'existence mais non l'unicité de  $\mathbb{P}^*$ . La plupart des modèles procèdent en plus à l'hypothèse de complétude des marchés. Il en était de même pour les modèles structurels. Cette hypothèse assure l'unicité de la probabilité martingale ce qui im-



plique l'unicité du prix. Il convient de rester prudent vis à vis de cette hypothèse qui est très forte, voire contestable. En effet celle-ci équivaut à la répliquabilité de tout actif par d'autres actifs à l'aide de stratégies autofinancées. Intuitivement on imagine mal qu'il soit possible de répliquer parfaitement un actif pouvant faire défaut à tout moment. On peut par exemple imaginer se couvrir en étant court sur l'action. Mais si une telle stratégie couvre bien le premier aléa, lié à la survenance du défaut, elle ne prend pas en compte l'incertitude liée au taux de recouvrement en cas de défaut qui est aussi aléatoire. Nous ferons néanmoins cette hypothèse dans la suite de notre travail.

On introduit une première filtration  $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  comme étant la filtration engendrée par les prix des actifs financiers.

On modélise l'instant de défaut par une variable aléatoire  $\tau$  positive définie sur  $\{\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}^*\}$ . Cette variable aléatoire n'a a priori aucune raison d'être un  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt. On introduit le processus  $H_t := 1_{\{\tau \leq t\}}$ , auquel on se référera quand on parlera du processus de défaut : il vaut 1 si le défaut est survenu et 0 sinon. On définit alors la filtration engendrée par ce processus :  $\mathbb{H} := \{\mathcal{H}_t\}_{t \geq 0}$  où  $\mathcal{H}_t = \sigma(H_u, u \leq t)$ . Dans cette filtration, l'instant de défaut est un temps d'arrêt par construction. Soit alors la filtration  $\mathbb{G} := \mathbb{H} \vee \mathbb{F}$  c'est à dire que pour tout  $t$  on a  $\mathcal{G}_t := \sigma(\mathcal{H}_u, \mathcal{F}_u, u \leq t)$ . D'un point de vue pratique, on vient d'enrichir la filtration des prix du minimum d'information nécessaire pour rendre le processus de défaut mesurable. C'est comme si on venait "d'installer dans la salle des marchés un réveil qui sonnera à l'instant précis du défaut". On fera l'hypothèse que l'ensemble des informations relatives au défaut est inclu dans  $\mathcal{G}_t$  pour tout  $t$ .

Il convient maintenant de noter que le processus  $H_t$  est une  $\mathbb{G}$ -sous-martingale, pour cela il suffit de remarquer que pour  $t \leq s$  :

$$1_{\{\tau \leq s\}} = 1_{\{\tau \leq t\}} + 1_{\{t < \tau \leq s\}}$$

En prenant l'espérance conditionnelle des deux termes de cette égalité, et en utilisant la

$\mathbb{G}$ -mesurabilité de  $H$  :

$$\mathbb{E}^*(H_s | \mathcal{G}_t) = H_t + \mathbb{E}^*(1_{\{t < \tau \leq s\}} | \mathcal{G}_t) \geq H_t$$

Cette relation assure la propriété de sous-martingalité. L'intuition générale des modèles à intensité est alors motivée par la propriété de Doob-Meyer, qui assure l'existence d'une unique décomposition du processus de défaut de la forme  $H_t = M_t + A_t$  où  $M_t$  est une martingale et  $A_t$  est un processus prévisible et croissant. Cette propriété motive l'hypothèse selon laquelle il existe un unique processus positif  $\mathbb{F}$ -adapté  $(\lambda_t)$ , auquel on se référera sous le nom de taux instantané de défaut (ou encore intensité de défaut), tel que le processus  $M_t$  défini ci-dessous soit une  $\mathbb{G}$ -martingale.

$$M_t := H_t - \int_0^t 1_{\{u \leq \tau\}} \cdot \lambda_u \cdot du \quad (5)$$

Si l'existence de  $\lambda_t$  repose en toute généralité sur des hypothèses techniques très fines (Jeanblanc et Rutowski (1999) proposent à ce sujet une étude complète du problème), on pourra remarquer que dans le cas d'un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$  constant, ce paramètre est exactement l'intensité de défaut du processus tel qu'on l'a défini en toute généralité.

Une conséquence immédiate de cette modélisation est que la probabilité de faire défaut entre  $t$  et  $t + dt$  sachant qu'il n'y pas encore eu défaut en  $t$  est peu différente de  $\lambda(t) \cdot dt$ .

### 2.2.2 La valorisation risque neutre d'une dette risquée

Dans les modèles à intensité, les zéro-coupons risqués de nominal 1 et de maturité  $T$  sont introduits par la donnée d'un couple  $\{\tau, Z\}$  où  $\tau$  est l'instant de défaut et où  $Z$  est un processus ( $\mathbb{F}$ -prévisible) qui désigne le recouvrement du zéro-coupon si le défaut survient avant la maturité.

On introduit de façon classique le processus  $(r_t)_{t \geq 0}$  représentant le taux instantané sans risque. Il est  $\mathbb{F}$ -mesurable. On note également  $B_t := \exp(\int_0^t r_u \cdot du)$ .

L'objectif de ce paragraphe est de fournir plusieurs formes équivalentes de la valorisation risque-neutre du zéro-coupon risqué dont on notera  $V_t$  le processus des prix. La démarche la plus générale est d'introduire le processus  $D$  des dividendes associé à  $\{\tau, Z\}$ . Il est égal soit au recouvrement en cas de défaut, soit au nominal si la dette est remboursée. Ceci se traduit par :

$$D_t := \int_0^t Z_u \cdot dH_u + (1 - H_T)1_{\{t=T\}}$$

D'après la théorie de l'arbitrage, le prix du titre risqué actualisé s'écrit comme l'espérance sous la probabilité risque neutre du pay-off actualisé. En utilisant le processus des dividendes, ce prix s'écrit :

$$V_t := B_t \mathbb{E}^* \left( \int_t^T B_u^{-1} \cdot dD_u \mid \mathcal{G}_t \right)$$

Compte-tenu de la forme de  $D_t$ , on peut réécrire de façon équivalente :

$$V_t = B_t \mathbb{E}^* \left( \int_t^T B_u^{-1} \cdot Z_u \cdot dH_u + B_T^{-1} 1_{\{T < \tau\}} \mid \mathcal{G}_t \right) \quad (6)$$

$$V_t = B_t \mathbb{E}^* \left( B_\tau^{-1} \cdot Z_\tau \cdot 1_{\{t < \tau \leq T\}} + B_T^{-1} 1_{\{T < \tau\}} \mid \mathcal{G}_t \right) \quad (7)$$

En utilisant la définition de l'intensité (5) on peut encore réécrire (6) :

$$V_t = B_t \mathbb{E}^* \left( \int_t^T B_u^{-1} \cdot Z_u \cdot (dM_u + 1_{\{u \leq \tau\}} \lambda_u du) + B_T^{-1} 1_{\{T < \tau\}} \mid \mathcal{G}_t \right)$$

On utilise alors le fait que  $M$  est une  $\mathbb{G}$ -martingale pour conclure que :

$$V_t = B_t \mathbb{E}^* \left( \int_t^T B_u^{-1} \cdot Z_u \cdot 1_{\{u \leq \tau\}} \cdot \lambda_u \cdot du + B_T^{-1} 1_{\{T < \tau\}} \mid \mathcal{G}_t \right) \quad (8)$$

### 2.2.3 Un théorème de représentation du prix de la dette risquée

L'objectif de ce paragraphe, assez technique, est principalement de montrer la formule de valorisation (10) qui est une autre représentation du prix de la dette risquée, valable sous une hypothèse de continuité que nous préciserons. Cette formulation générale permettra de dériver les modèles classiques du risque de défaut en faisant les hypothèses adéquates. On commence par introduire de nouveaux processus :

$$\begin{aligned}\Lambda_t & : = \exp\left(\int_0^t \lambda_u du\right) \\ \tilde{B}_t & : = B_t \cdot \Lambda_t = \exp\left(\int_0^t (\lambda_u + r_u) \cdot du\right) \\ S_t & : = \tilde{B}_t \mathbb{E}^*\left(\int_t^T \tilde{B}_u^{-1} \cdot Z_u \cdot \lambda_u \cdot du + \tilde{B}_T^{-1} | \mathcal{G}_t\right)\end{aligned}$$

**Proposition.** *On a :*

$$U_t := 1_{\{t < \tau\}} S_t = B_t \mathbb{E}^*\left(\int_t^T B_u^{-1} (Z_u + \Delta S_u) dH_u + B_T^{-1} \cdot 1_{\{T < \tau\}} | \mathcal{G}_t\right) \quad (9)$$

**Preuve.** On rappelle que  $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$  par définition pour un processus càdlàg<sup>4</sup>.

On peut écrire

$$\begin{aligned}S_t & = \tilde{B}_t \left(N_t - \int_0^t \tilde{B}_u^{-1} Z_u \lambda_u du\right) \\ \text{où} & : \quad N_t := \mathbb{E}^*\left(\int_0^T \tilde{B}_u^{-1} \cdot Z_u \cdot \lambda_u \cdot du + \tilde{B}_T^{-1} | \mathcal{G}_t\right)\end{aligned}$$

$N_t$ , qui s'écrit comme une espérance conditionnelle, est une  $\mathbb{G}$ -martingale. En appliquant le théorème d'Itô on obtient :

$$dS_t = (r_t + \lambda_t) S_{t-} dt - Z_t \lambda_t dt + \tilde{B}_t dN_t$$

D'autre part on remarque que  $U_t = S_t - H_t S_t$ . En appliquant à nouveau Itô on trouve :

$$dU_t = dS_t - S_{t-} dH_t - H_{t-} dS_t - \Delta S_t \Delta H_t$$

---

<sup>4</sup> continu à droite et limité à gauche

En utilisant (5) on a :  $dH_t = dM_t + (1 - H_{t-})\lambda_t dt$ , et en combinant les deux expressions précédentes on trouve que :

$$dU_t = r_t U_{t-} dt - Z_t dH_t + Z_t dM_t + (1 - H_{t-})\tilde{B}_t dN_t - S_{t-} dM_t - \Delta S_t \Delta H_t$$

Il suffit alors de remarquer que  $H$  est à variations finies et de poser :

$$d\tilde{N}_t = (Z_t - S_{t-})dN_t + (1 - H_{t-})\tilde{B}_t dM_t$$

pour obtenir :

$$dU_t = r_t U_{t-} dt - (Z_t + \Delta S_t)dH_t + d\tilde{N}_t$$

On utilise le fait que  $\tilde{N}$  est une  $\mathbb{G}$ -martingale et que  $U_T = 1_{\{T < \tau\}}$  pour intégrer l'expression précédente et aboutir à (9).

**Corollaire.** *On remarque que l'on peut réécrire :*

$$U_t = B_t \mathbb{E}^*(B_\tau^{-1}(Z_\tau + \Delta S_\tau)1_{\{t < \tau \leq T\}} + B_T^{-1}.1_{\{T < \tau\}} | \mathcal{G}_t)$$

*Sous l'hypothèse de continuité  $\Delta S_\tau = 0$ , on a  $U_t = V_t$  ce qui permet alors de conclure :*

$$V_t = 1_{\{t < \tau\}} \tilde{B}_t \mathbb{E}^* \left( \int_t^T \tilde{B}_u^{-1} \cdot Z_u \cdot \lambda_u \cdot du + \tilde{B}_T^{-1} | \mathcal{G}_t \right) \quad (10)$$

Ce qui donne une dernière expression de la valorisation d'un zéro coupon risqué, à partir de laquelle on pourra dériver plusieurs modèles à intensité classiques. On signalera que l'hypothèse de continuité introduite ici est fondamentale dans le cas général qui est le notre. Au sujet de cette hypothèse, pas toujours énoncée de façon explicite dans tous les articles, on pourra se référer à Jeanblanc et Rutowski (1999) pour une présentation technique de ses enjeux. On se contentera de signaler qu'elle revient à imposer certaines conditions sur la nature du processus  $\lambda$  après l'instant  $\tau$ . Il est vrai qu'alors on sort du domaine strictement financier, dans la mesure où l'on voit mal le marché se préoccuper de la nature de l'intensité de défaut une fois que celui-ci a eu lieu. C'est là probablement une des limites de toutes ces

tentatives de modélisation qui, se voulant très pointues, aboutissent nécessairement à des conjectures qui semblent sortir du domaine financier.

#### 2.2.4 Commentaires et premières conséquences

On remarque tout d'abord que (10) implique que la valeur de la dette est nulle après l'instant de défaut dans ce modèle, ce qui se conçoit aisément dans la mesure où l'on a supposé que le porteur du zéro-coupon est indemnisé (à hauteur de  $Z$ ) à l'instant exact du défaut. Nous avons déjà remarqué dans l'introduction que l'aspect aléatoire du recouvrement permettait de capturer l'effet de capitalisation des intérêts lié à un recouvrement retardé.

Une première conséquence intéressante de (10) est le cas où le recouvrement en cas de défaut est nul. Dans ce cas la valeur du titre peut se réécrire (puisque  $Z_t = 0$  pour tout  $t$ ):

$$V_t^{Z=0} = 1_{\{t < \tau\}} \mathbb{E}^*(e^{-\int_t^T (r_u + \lambda_u) du} | \mathcal{G}_t)$$

Cette formule s'interprète aisément par analogie à la valorisation d'un zéro coupon. Le prix se comporte comme si le titre était un zéro-coupon dont le taux spot vaudrait  $(r_t + \lambda_t)$ . Ce cas particulier donne tout son sens à l'appellation de taux instantané de défaut que l'on donne au processus  $\lambda$ . On voit que quand  $\lambda$  diverge vers l'infini,  $V_t$  tend vers 0, ce qui annonce que le marché anticipe un défaut imminent de l'émetteur.

Plaçons nous dans le cas où  $r = 0$  et  $Z = 0$ . On a alors :

$$V_t = \mathbb{E}^*(1_{\{T < \tau\}} | \mathcal{G}_t) = \mathbb{P}^*(T < \tau | \mathcal{G}_t)$$

Le prix de la dette s'identifie alors à ce que l'on peut appeler la probabilité de non défaut avant maturité (ou encore la probabilité de survie). En utilisant (10) on obtient alors une relation entre la probabilité de survie et le processus  $\lambda$ :

$$\mathbb{P}^*(T < \tau | \mathcal{G}_t) = 1_{\{t < \tau\}} \mathbb{E}^*(e^{-\int_t^T \lambda_u du} | \mathcal{G}_t)$$

Le cas où le taux de recouvrement est égal à une constante  $\delta > 0$  donne des résultats moins intuitifs :

$$V_t^{Z=\delta} = 1_{\{t < \tau\}} \cdot \delta \cdot \tilde{B}_t \mathbb{E}^* \left( \int_t^T \tilde{B}_u^{-1} \lambda_u \cdot du \mid \mathcal{G}_t \right) + V_t^{Z=0}$$

On peut comparer cette expression avec celle que l'on dériverait de (7) :

$$V_t^{Z=\delta} = \delta B_t \mathbb{E}^* (B_\tau^{-1} 1_{\{t < \tau \leq T\}} \mid \mathcal{G}_t) + V_t^{Z=0}$$

En identifiant ces deux égalités il vient :

$$1_{\{t < \tau\}} \cdot \mathbb{E}^* \left( \int_t^T \delta \cdot e^{-\int_t^u r_s ds} \cdot \frac{\partial \Pi_u^t}{\partial u} \cdot du \mid \mathcal{G}_t \right) = 1_{\{t < \tau\}} \mathbb{E}^* (\delta \cdot e^{-\int_t^\tau r_s ds} 1_{\{\tau \leq T\}} \mid \mathcal{G}_t)$$

où l'on a posé

$$\Pi_u^t = 1 - e^{-\int_t^u \lambda_s ds}$$

Ce processus, qui part de l'instant  $t$ , peut s'interpréter comme une intensité de survie sachant qu'il n'y a pas eu défaut en  $t$ . Selon que  $\lambda$  reste faible et stable ou bien qu'il soit élevé et croissant, le processus restera proche de 1 (faible probabilité de défaut) ou bien tendra vers 0 (survie de plus en plus compromise). Remarquons que sur chacune de ses trajectoires, ce processus est décroissant.

Si on se place à un temps  $t$  où le défaut n'a pas eu lieu (donc  $1_{\{t < \tau\}} = 1$ ) alors le deuxième terme de l'égalité précédente s'interprète comme le prix d'un titre qui payera  $\delta$  à une date  $\tau$  aléatoire si cette date survient avant  $T$ . D'après cette égalité, ce prix peut s'interpréter comme l'espérance d'une somme de paiements (les termes  $\delta \cdot e^{-\int_t^u r_s ds}$ ) pondérée par une "mortalité instantanée" (représentée par le terme  $\frac{\partial \Pi_u^t}{\partial u} t$ ). On remarquera que si on avait choisit un  $\lambda$  constant, le risque de crédit aurait été complètement évalué par la donnée de ce  $\lambda$  qui fixerait la forme de  $\Pi_u^t$  et de  $V_t^{Z=0}$ , le seul aspect aléatoire résiderait alors dans le processus du taux spot (on a déjà fixé le recouvrement comme étant constant).

Ces quelques remarques nous montrent que le degré de complexité des modélisations envisageables sera intimement lié aux spécifications formulées sur le couple de processus

$\{Z_t, \lambda_t\}$  ainsi qu'à son lien avec le processus du taux sans risque instantané (en terme de dépendance conditionnelle).

### 2.2.5 L'hypothèse H: une hypothèse d'invariance de la propriété de martingalité

Les modèles à intensité ont la particularité d'imposer des résultats conditionnellement à une information modélisée par une filtration  $(\mathbb{G})$  qui n'est pas la filtration usuelle de prix utilisée en général en finance. Cela peut poser problème lorsque l'on cherche à inclure la théorie du risque de crédit dans une théorie plus générale. Ainsi, si les résultats tels que la formule (10) semblent particulièrement intéressants, ils soulèvent le problème de la modélisation de  $r_t$  ou de toutes autres variables usuelles comme par exemple le processus de prix d'une action. Les modèles de taux ou les modèles de Black-Scholes ont tous été spécifiés dans la filtration brownienne des prix, c'est à dire ici la filtration  $\mathbb{F}$ . Or ici rien ne nous assure a priori que les diffusions employées pour ces modèles aient encore la même loi dans la filtration  $\mathbb{G}$ . C'est pourquoi il peut sembler naturel, avant toute spécification des processus  $\{Z_t, \lambda_t\}$ , de chercher à obtenir des résultats pour lesquels les espérances conditionnelles utilisées pour les valorisations soient relatives à  $\mathbb{F}$ .

Pour cela, il suffit d'introduire une hypothèse, appelée hypothèse H, qui implique que toute  $\mathbb{F}$ -martingale est une  $\mathbb{G}$ -martingale. Cette hypothèse peut se formuler de différentes manières, toutes équivalentes, dont celle-ci peut sembler la plus intéressante du point de vue du risque de crédit :

$$\text{pour tout } 0 < u \leq t \quad \mathbb{P}^*(\tau \leq u | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}^*(\tau \leq u | \mathcal{F}_\infty) \quad (11)$$

Cette hypothèse semble pouvoir s'interpréter de la manière suivante : si à une date  $t$  on s'intéresse à l'évènement "le défaut est survenu il y a quelques jours", alors l'observation des prix ne nous en apprendra pas plus "demain" qu'elle ne nous en apprend aujourd'hui. On fait appel de façon implicite à la notion d'efficience des marchés. D'après (11), si le défaut a déjà



eu lieu les prix reflètent déjà toute l'information disponible sur  $\{\tau \leq u\}$  et ne s'enrichiront plus d'informations nouvelles à ce sujet à l'avenir. Cette hypothèse assure notamment que tout mouvement brownien dans la filtration  $\mathbb{F}$  est aussi un mouvement brownien dans la filtration  $\mathbb{G}$ . Ainsi, il devient possible de travailler de façon équivalente dans la filtration brownienne usuelle des prix  $\mathbb{F}$  sans perte de généralité.

Cette hypothèse ne se retrouve pas de manière explicite dans tous les articles de risque de défaut. Dans certains cas, la simplicité des modèles permet de ne pas passer par (10) et de faire l'économie de (11), cependant cette hypothèse est obligatoire dans le cadre de 2 des modèles que nous allons présenter : le Duffie et Singleton (1994) et le Madan et Unal (1998).

Sous H, le théorème précédent peut se réécrire avec le processus  $S_t$  :

$$S_t := \tilde{B}_t \mathbb{E}^* \left( \int_t^T \tilde{B}_u^{-1} \cdot Z_u \cdot \lambda_u \cdot du + \tilde{B}_T^{-1} | \mathcal{F}_t \right)$$

Comme les processus de prix sont définis dans la filtration brownienne,  $S_t$  ne saute pas (par continuité du mouvement brownien) et l'hypothèse de continuité faite précédemment,  $\Delta S_t = 0$ , est nécessairement vérifiée. Ce processus est une F-martingale mais également une G-martingale d'après (11). Tous les développements précédents restent donc valides si ce n'est que le corollaire s'écrit conditionnellement à  $\mathcal{F}_t$  :

$$V_t = 1_{\{t < \tau\}} \tilde{B}_t \mathbb{E}^* \left( \int_t^T \tilde{B}_u^{-1} \cdot Z_u \cdot \lambda_u \cdot du + \tilde{B}_T^{-1} | \mathcal{F}_t \right) \quad (12)$$

On a de même avec  $r = 0$  :

$$\mathbb{P}^*(T < \tau | \mathcal{F}_t) = 1_{\{t < \tau\}} \mathbb{E}^* \left( e^{-\int_t^T \lambda_u du} | \mathcal{F}_t \right)$$

On se propose à présent de présenter les hypothèses et les résultats des modèles de Jarrow et Turnbull (1995) et de Duffie et Singleton (1998), ce qui nous permettra d'avoir des champs de comparaisons avec le modèle de Madan et Unal (1998) que nous avons étudié plus en détails. Ces modèles pourront être dérivés de la forme générale (12)

### 2.2.6 Le modèle de Jarrow et Turnbull (1995)

Il s'agit du premier modèle à intensité à avoir été publié. Dans ce modèle, le processus de défaut correspond à un simple saut Poissonien au sens classique du terme. Cela revient donc à supposer que le taux instantané de défaut est constant dans le temps et égal à  $\lambda$ . La probabilité de survie à 1 an est donc constante. Ce type de modélisation est à rapprocher du rating émis par les agences de notation : à un rating donné correspond une probabilité annuelle de faire défaut, cette probabilité reste constante tant que le rating reste constant. Mathématiquement cette hypothèse s'écrit :

$$\tilde{B}_t = B_t e^{\lambda t}$$

On remarque que l'on a en particulier :

$$1_{\{t < \tau\}} \cdot \mathbb{P}^*(T < \tau | \mathcal{F}_t) = e^{-\lambda(T-t)}$$

La probabilité de survie (c'est à dire de non défaut d'ici à l'échéance) prend une forme extrêmement simple. D'autre part, le modèle suppose l'indépendance entre le processus des taux spot et le processus de défaut. Nous reviendrons lors de la présentation du modèle Madan et Unal sur les conséquences de cette hypothèse.

En ce qui concerne la modélisation du taux de recouvrement, les deux auteurs supposent que quelque soit l'instant de défaut, le recouvrement capitalisé au taux sans risque vaudra à la date  $T$  une fraction déterministe  $\delta$  du paiement promis (1 ici). On peut réécrire cette hypothèse sous la forme suivante :

$$\delta = Z_u \cdot e^{\int_u^T r_s ds} = Z_u B_T B_u^{-1}$$

Etant donné l'ensemble des hypothèses formulées, (12) devient :

$$V_t = 1_{\{t < \tau\}} \mathbb{E}^*(B_t \cdot B_T^{-1} (\delta \int_t^T \cdot \exp(-\lambda(u-t)) \cdot \lambda \cdot du + \exp(-\lambda(T-t))) | \mathcal{F}_t)$$

d'où, en posant  $B(t, T) = \mathbb{E}^*(B_t \cdot B_T^{-1} | \mathcal{F}_t)$  le prix en  $t$  d'un zéro coupon sans risque d'échéance  $T$  :

$$V_t = 1_{\{t < \tau\}} \cdot B(t, T) \cdot (\delta \cdot (1 - e^{-\lambda(T-t)}) + e^{-\lambda(T-t)}) \quad (13)$$

Le modèle de Jarrow et Turnbull (1995) aboutit donc à une formule très intuitive selon laquelle le prix d'un zéro-coupon risqué se déduit du prix d'un zéro-coupon sans risque en le multipliant par l'espérance sous la probabilité risque neutre du pay-off à la maturité. On remarquera d'autre part que l'avantage de ce modèle réside dans la simplicité de l'équation de tarification ainsi que dans le nombre restreint de paramètres introduits. Cette formule permet notamment d'aboutir à une formule fermée pour le prix d'un call européen sur le zero-coupon risqué.

### 2.2.7 Le modèle de Duffie et Singleton (1998)

L'originalité de la modélisation proposée par Duffie et Singleton repose sur la spécification du processus de recouvrement. On remarquera que dans le modèle de Jarrow et Turnbull, le taux de recouvrement est exogène et indépendant du processus de défaut. Duffie et Singleton proposent de spécifier un taux de recouvrement endogène, c'est à dire dépendant en partie du processus de prix. Pour cela, ils supposent que la perte en capital lors du défaut est une fraction  $L_t$  (éventuellement aléatoire) du processus  $S_t$ . Cette hypothèse s'écrit :

$$Z_t = (1 - L_t)S_t$$

En introduisant cette hypothèse dans la démonstration de (10), par des calculs similaires et en supposant (11) vérifiée on arrive alors au résultat suivant :

$$V_t = 1_{\{t < \tau\}} \mathbb{E}^*(\exp(-\int_t^T (r_u + L_u \lambda_u) du) | \mathcal{F}_t) \quad (14)$$

Cette valorisation s'assimile à celle d'un zéro-coupon sans risque dont on aurait remplacé le taux spot par  $(r_u + L_u \lambda_u)$ . Ce modèle donne en particulier une interprétation explicite du

spread de crédit : le processus  $(L_t \lambda_t)$ . D'autre part l'équation de valorisation ci-dessus laisse encore beaucoup de liberté quand à la modélisation de  $\lambda$ , de  $L$  et de  $r$ . Le taux instantané de défaut et le recouvrement peuvent très bien s'envisager tous les deux stochastiques et corrélés au taux sans risque.

L'idée forte de ce modèle est de montrer que dans une démarche à intensité, le spread est tout autant dépendant de la modélisation de l'intensité  $\lambda$  que de celle du recouvrement  $Z$  et qu'il semble donc illusoire d'estimer les deux en toute généralité avec un seul spread, le marché agrègant les deux.

D'un point de vue pratique ce modèle peut s'implémenter en posant  $L_t = L$  et en spécifiant une diffusion markovienne (de type CIR par exemple) pour le processus  $\lambda$ . On peut aussi imaginer comme nous le verrons dans la section 3 faire dépendre le processus  $\lambda_t$  d'un certain nombre de variables d'états vraisemblablement corrélées au risque de crédit.

### **2.2.8 Le modèle de Madan et Unal (1998).**

Ce modèle, que l'on étudiera en détails d'un point de vue de l'implémentation dans les prochaines parties, présente des similitudes avec les deux modèles précédents.

**H1.** Comme dans le modèle de Jarrow et Turnbull, le processus de défaut est supposé indépendant du processus de taux spot. Si on raisonne d'un point de vue heuristique, il peut paraître surprenant de procéder à une telle hypothèse. Supposons qu'une entreprise soit confrontée à un problème passager de liquidité l'empêchant à priori de payer les intérêts de sa dette. Dans un contexte de taux bas, on peut très bien envisager un refinancement à court-terme permettant d'obtenir les liquidités nécessaires au paiement de ses intérêts. Par contre, dans l'hypothèse où les taux sont trop élevés, il pourrait être impossible pour l'entreprise de rouler sa dette. Un autre cas particulier et très important est celui des établissements financiers comme les banques ou les assurances. Si on considère l'exemple d'une compagnie d'assurance vie qui a garanti un rendement minimum à ses assurés, le taux auquel sont

placés ses actifs conditionne fortement sa capacité à honorer ses engagements et joue sur sa probabilité de défaut. D'une manière générale, il ne paraît donc pas impossible que les taux courts influent sur le processus de défaut. Le modèle peut néanmoins être réécrit sans cette hypothèse comme cela est proposé dans la suite de ce mémoire.

**H2.** En ce qui concerne le recouvrement en cas de défaut, Madan et Unal supposent que le processus :

$$Y_u := Z_u \exp\left(\int_u^T r_s ds\right) = Z_u B_T B_u^{-1}$$

est indépendant du temps, ce qui en fait une variable aléatoire que nous noterons  $Y$ . Cette hypothèse signifie que le recouvrement en cas de défaut "vu à la date  $T$ ", c'est à dire capitalisé au taux sans risque, est indépendant du temps sous la probabilité risque neutre. Le marché fait donc comme s'il ne s'intéressait au recouvrement en cas de défaut qu'en terme de numéraire de la date  $T$ . Cette hypothèse généralise la modélisation de Jarrow et Turnbull dans le sens où  $\delta$  devient ici une variable aléatoire  $Y$ , ce qui est plus réaliste.

**H3.** D'autre part cette variable aléatoire  $Y$  est supposée indépendante du processus  $(r_t)_{t \geq 0}$ . Cette hypothèse semble à notre sens tout aussi discutable que l'hypothèse d'indépendance de  $\lambda$  et de  $r$ . En effet, en cas de défaut, la valeur des actifs d'une entreprise mise en liquidation judiciaire peut être affectée par les conditions du marché de l'emprunt. On peut très bien envisager que le niveau des taux influe sur la vigueur du marché immobilier et par la même occasion sur la valeur liquidative des actifs corporels de l'entreprise. Ceci est bien sûr d'autant plus vrai en ce qui concerne les établissements financiers dont actifs et passifs sont largement dépendants du niveau des taux d'intérêt. La aussi, comme pour H1, nous montrons qu'il est possible de réécrire un modèle présentant les mêmes avantages sans formuler cette hypothèse.

L'hypothèse H2 permet de réécrire l'équation de valorisation (12) sous la forme suivante :

$$V_t = 1_{\{t < \tau\}} \mathbb{E}^* \left( \int_t^T Y(B_t B_T^{-1})(\Lambda_u^{-1} \Lambda_t) \cdot \lambda_u \cdot du + (B_t B_T^{-1})(\Lambda_T^{-1} \Lambda_t) | \mathcal{F}_t \right) \quad (15)$$

d'où, compte-tenu des hypothèses d'indépendance :

$$V_t = 1_{\{t < \tau\}} \mathbb{E}^*(B_t B_T^{-1} | \mathcal{F}_t) [\mathbb{E}^*(Y) \mathbb{E}^* \left( \int_t^T (\Lambda_u^{-1} \Lambda_t) \cdot \lambda_u \cdot du | \mathcal{F}_t \right) + \mathbb{E}^*((\Lambda_t \Lambda_T^{-1}) | \mathcal{F}_t)]$$

Il reste alors à constater que  $\mathbb{E}^*(B_t B_T^{-1} | \mathcal{F}_t)$  est le prix d'un zéro-coupon sans risque de maturité  $T$  et que d'autre part, l'intégrale se calcule explicitement et vaut  $(1 - \Lambda_t \Lambda_T^{-1}) = 1 - \exp(-\int_t^T \lambda_u du)$ . On a donc :

$$V_t = 1_{\{t < \tau\}} B(t, T) [\mathbb{E}^*(\exp(-\int_t^T \lambda_u du) | \mathcal{F}_t) + (1 - \mathbb{E}^*(\exp(-\int_t^T \lambda_u du) | \mathcal{F}_t)) \mathbb{E}^*(Y)]$$

Si on se place à un temps  $t$  antérieur au défaut, on définit alors :

$$F(t, T) := \mathbb{P}^*(T < \tau | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^*(\exp(-\int_t^T \lambda_u du) | \mathcal{F}_t) \quad (16)$$

la probabilité de survie pour une dette d'échéance  $T$  à la date  $t$ . On obtient alors une expression du prix de la dette en fonction de la probabilité de survie et de l'espérance de recouvrement sous  $\mathbb{P}^*$  :

$$V(t, T) = B(t, T) [F(t, T) + (1 - F(t, T)) \mathbb{E}^*(Y)] \quad (17)$$

Cette formule de valorisation est très proche dans l'esprit de celle obtenue par Jarrow et Turnbull. Elle la généralise néanmoins avec un recouvrement et une probabilité de défaut tous deux aléatoires.

Pour bien mettre en évidence les paramètres propres au défaut, les auteurs proposent de travailler avec la variable :

$$W(t, T) := \frac{V(t, T)}{B(t, T)}$$

Par absence d'opportunité d'arbitrage,  $W(t, T)$  peut s'assimiler au prix d'un contrat forward d'échéance  $T$  sur la dette risquée de même échéance. Notons cependant que l'analogie

n'est pas primordiale et qu'il est surtout important de remarquer que l'on obtient une relation entre une variable observable et des paramètres que l'on cherche à estimer :

$$W(t, T) = F(t, T) + (1 - F(t, T))\mathbb{E}^*(Y) \quad (18)$$

Les hypothèses faites ont donc permis de séparer dans la formule de valorisation les deux composantes aléatoires du risque de crédit : le risque de survenance pur du défaut, contenu dans la probabilité de survie  $F(t, T)$ , et les termes du recouvrement  $Y$ . Néanmoins, comme la formule (14) du modèle de Duffie et Singleton (1998) le montre bien, une simple série de spreads ne permet pas de distinguer et donc d'estimer ces deux composantes du risque de crédit.

L'originalité de la démarche de Madan et Unal repose alors sur l'idée que si deux dettes de même échéance présentent à toute date la même probabilité de survie mais des espérances de recouvrement différentes, il est alors possible d'estimer séparément les termes de défaut pur ( $F(t, T)$ ) et les termes de recouvrement  $Y$ . C'est en particulier le cas quand une entreprise émet pour une même échéance deux types de dettes : l'une senior et l'autre junior. Ces dettes se distinguent par le fait que si l'émetteur fait défaut, les obligataires senior ont priorité absolue (en théorie) sur les détenteurs de dette junior pour le remboursement. Si la liquidation de l'entreprise ne permet pas un remboursement intégral de la dette senior, les obligataires junior ne récupéreront rien. On se retrouve alors exactement dans le cas de deux titres ayant la même probabilité de défaut mais des espérances de recouvrement différentes. Un résultat identique pourrait être obtenu en regardant un bond risqué avec un dérivé de crédit ayant comme sous-jacent ce bond. Néanmoins, les prix de ces dérivés ne sont pas à l'heure actuelle suffisamment fiables pour pouvoir être utilisés en toute confiance. Les transactions sur ces nouveaux produits concernent encore des montants faibles et sont relativement rares.

Si on note  $Y$  le taux de recouvrement global de la dette de la firme en cas de défaut et  $q$  la densité de la loi de  $Y$  sous  $\mathbb{P}^*$ , il existe alors deux fonctions déterministes  $S$  et  $J$  exprimant les taux de recouvrement respectifs des deux dettes en cas de défaut telles que (18) puisse s'écrire :

$$W_S(t, T) = F(t, T) + (1 - F(t, T)) \int_0^1 S(y)q(y)dy \quad (19)$$

$$W_J(t, T) = F(t, T) + (1 - F(t, T)) \int_0^1 J(y)q(y)dy \quad (20)$$

A l'aide de ces deux équations on peut éliminer  $F(t, T)$  et écrire :

$$\frac{W_S(t, T) - W_J(t, T)}{1 - W_J(t, T)} = \frac{\int_0^1 (S(y) - J(y))q(y)dy}{\int_0^1 (1 - J(y))q(y)dy} \quad (21)$$

Cette équation doit permettre d'estimer l'ampleur de défaut "risque neutre", c'est à dire la distribution de  $Y$  sous  $\mathbb{P}^*$ . Une fois l'ampleur de défaut estimée, on en déduit les probabilités de survie induites à l'aide de (19) ou de (20). On se référera souvent au terme de gauche de l'égalité (21) sous le terme de *spread relatif*. En effet, cette grandeur traduit l'ampleur du spread junior-senior par rapport au spread senior-sans risque.

On peut alors rentrer dans une deuxième étape liée à la modélisation de l'intensité  $\lambda$  et à son estimation. En ce qui concerne la modélisation du taux instantané de défaut, Madan et Unal se rapprochent de Duffie et Singleton dans la mesure où le processus  $\lambda$  est stochastique. Ce caractère stochastique est introduit par une relation fonctionnelle reliant  $\lambda$  à un vecteur de variables d'état spécifique  $(s_t)_{t \geq 0}$  traduisant la solidité financière de l'émetteur :

$$\lambda_t = \phi(t, s_t)$$

$$F(t, T) = \mathbb{E}^*(\exp(-\int_t^T \phi(u, s_u)du) | \mathcal{F}_t)$$

$$ds_t = \mu(t, s_t)dt + \sigma(t, s_t)'dW_t$$



Le caractère stochastique de  $\lambda_t$  est lié au fait que  $s_t$  suit une diffusion markovienne. Parce qu'il cherche à relier la probabilité de défaut à une information spécifique à la solidité financière de l'entreprise, le modèle de Madan et Unal semble donc vouloir réconcilier l'approche de Merton et les approches à intensité.

### 2.2.9 Réécriture du modèle de Madan et Unal (1998) à l'aide de la probabilité forward neutre

Les hypothèses H1 et H3 formulées par Madan et Unal permettent de séparer les deux composantes du risque sous la probabilité risque neutre et donc en prenant deux dettes de deux seniorités différentes d'estimer séparément ces deux composantes. Néanmoins, nous avons vu que ces hypothèses sont fortes et sont des limites importantes du modèle. Nous montrons ici que ces deux hypothèses peuvent pourtant être évitées en effectuant un changement de numéraire, technique suggérée par Geman, El Karoui et Rochet (1995) pour se débarrasser des problèmes de corrélation avec le processus de taux sans risque dans les formules de valorisation. Au lieu de prendre comme numéraire  $B_t = \exp(-\int_0^t r_s ds)$  comme sous la probabilité risque neutre, on prend le prix d'un zéro-coupon sans risque  $B(t, T)$ .

La probabilité *forward neutre* relative à  $T$  notée  $Q^T$  est définie comme la probabilité qui rend martingale le processus  $(\frac{B(t, T)}{B_t})$ . On a ainsi pour un flux aléatoire  $X_s$   $\mathcal{F}_s$ -mesurable :

$$E^{Q^m}(X_s | \mathcal{F}_t) = E^*(X_s \frac{B(s, m)}{B_s} \frac{B_t}{B(t, m)})$$

On reprend l'équation (15) de valorisation où seule l'hypothèse H2 a été utilisée :

$$V_t = 1_{\{t < \tau\}} \mathbb{E}^*((B_t B_T^{-1}) (\int_t^T Y(\Lambda_u^{-1} \Lambda_t) \cdot \lambda_u \cdot du + (\Lambda_T^{-1} \Lambda_t)) | \mathcal{F}_t)$$

En introduisant la probabilité forward neutre  $Q^T$ , on obtient :

$$V_t = 1_{\{t < \tau\}} \mathbb{E}^{Q^T} (\frac{B(t, T)}{B(T, T)} (\int_t^T Y(\Lambda_u^{-1} \Lambda_t) \cdot \lambda_u \cdot du + (\Lambda_T^{-1} \Lambda_t)) | \mathcal{F}_t)$$

Or comme  $B(t, T)$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable et  $B(T, T) = 1$ , on a :

$$V_t = 1_{\{t < \tau\}} B(t, T) (\mathbb{E}^{Q^T} (Y \int_t^T (\Lambda_u^{-1} \Lambda_t) \cdot \lambda_u \cdot du | \mathcal{F}_t) + \mathbb{E}^{Q^T} (\Lambda_T^{-1} \Lambda_t | \mathcal{F}_t))$$

$\Leftrightarrow$

$$V_t = 1_{\{t < \tau\}} \cdot B(t, T) \cdot (F^{Q^T}(t, T) + (1 - F^{Q^T}(t, T)) \cdot \mathbb{E}^{Q^T}(Y | \mathcal{F}_t)) \quad (22)$$

où

$$F^{Q^T}(t, T) := \mathbb{P}^{Q^T}(T < \tau | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^{Q^T}(\exp(-\int_t^T \lambda_u du) | \mathcal{F}_t) \quad (23)$$

est la probabilité de survie sous la probabilité forward neutre et non plus sous la probabilité risque neutre.  $W(t, T)$  s'écrit en définitive :

$$W(t, T) = F^{Q^T}(t, T) + (1 - F^{Q^T}(t, T)) \cdot \mathbb{E}^{Q^T}(Y | \mathcal{F}_t) \quad (24)$$

La formule de valorisation (24) est équivalente à celle proposée par Madan et Unal (1998) mais avec la probabilité de survie et le taux de recouvrement exprimés sous la probabilité forward neutre. Elle sépare bien les deux composantes du risque de défaut et permet de cette façon l'utilisation de la même méthode pour les estimer à partir du spread relatif.

La section 3 est consacrée à l'étude et l'estimation de l'ampleur de défaut, ainsi qu'à l'estimation des probabilités de défaut. La démarche est alors équivalente, que l'on fasse les hypothèses d'indépendance ou non sur le processus de taux spot. La différence réside uniquement dans le fait que les paramètres estimés ont soit une signification sous la probabilité risque neutre, soit sous la probabilité forward neutre.

La section 4 concernera la modélisation de la probabilité de survie à travers la spécification de l'intensité. C'est à ce niveau que le problème de la probabilité de référence se posera à nouveau.

### 3. Modélisation de l'ampleur de défaut

#### 3.1 Modèle proposé par Madan et Unal

Pour plus de clareté, nous considérerons que les hypothèses H1 et H3 sont vérifiées et que nous estimons les paramètres du taux de recouvrement et les probabilités de survie sous la probabilité risque neutre. La méthodologie et les résultats seraient absolument identiques si on retenait la formule de valorisation (24) utilisant la probabilité forward neutre. Il faudrait dans ce cas interpréter la loi du taux de recouvrement comme étant spécifiée sous cette probabilité et considérer des probabilités de survie forward neutre.

##### 3.1.1 Spécification des fonctions de recouvrement

L'estimation de l'ampleur de défaut repose sur l'équation (21) qui ne dépend plus de la probabilité de défaut mais uniquement du taux de recouvrement.

Ce taux est modélisé par la variable aléatoire  $Y$ , de densité risque neutre  $q(y)$ . Elle représente le montant recouvré en cas de défaut pour un franc de dette contractée. La valeur prise par  $Y$  ne tient donc pas compte de la structure de la dette, et notamment du niveau de séniorité des différentes créances : il s'agit d'une valeur moyenne de recouvrement. On suppose maintenant que la dette de l'entreprise se décompose en deux types de titres, senior et junior. On a donc :

$$y = p_{st}S(y) + (1 - p_{st})J(y) \quad (25)$$

où  $S(y)$  et  $J(y)$  sont les fonctions de remboursement des dettes senior et junior en cas de défaut pour un taux de recouvrement moyen de  $y$  et  $p_{st}$  la proportion de dette senior à l'instant  $t$ .

Il convient dans un premier temps de spécifier la forme des fonctions de remboursement. On supposera qu'il faut que la dette senior soit entièrement remboursée avant que les détenteurs de dette junior puissent commencer à être remboursés. On applique ainsi la règle de

stricte priorité de la dette senior sur la dette junior. Cela se traduit par :

$$S(y, p_{st}) = \text{Min}\left(\frac{y}{p_{st}}, 1\right)$$

et

$$J(y, p_{st}) = \text{Max}\left(\frac{y - p_{st}}{1 - p_{st}}, 0\right)$$

Le recouvrement du détenteur dette senior est donc équivalent au pay-off du vendeur d'un put sur le recouvrement moyen de prix 1 et de cours d'exercice  $p_{st}$ . Le recouvrement du détenteur de dette junior est quant à lui équivalent au pay-off d'un acheteur de call sur le recouvrement moyen de cours d'exercice  $p_{st}$  en quantité  $\frac{1}{1-p_{st}}$ .

Il faut par ailleurs choisir la densité de probabilité  $q(y)$  en respectant un certain nombre de contraintes. Tout d'abord, la variable  $Y$  varie entre 0 et 1. De plus, la moyenne et la variance peuvent être liées de la façon suivante : à mesure que la moyenne se rapproche de 1 ou de 0, la variance tend vers 0. Cette contrainte traduit le fait que lorsque le marché anticipe une faillite très grave (recouvrement moyen nul) ou une faible faillite (recouvrement moyen proche de 1), il le fait de façon consensuelle, donc la variance de  $Y$  est alors très faible.

Madan et Unal proposent d'utiliser la famille de loi Béta qui répond à ces exigences. Sa densité est donnée par :

$$q(y, \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} (1 - y)^{\beta-1}$$

avec  $\Gamma$  la fonction Gamma. L'espérance d'une telle variable vaut  $m = \alpha/(\alpha + \beta)$  et sa variance  $v = m(1 - m)/(1 + \alpha + \beta)$ . Il est intéressant de conserver  $m$  comme paramètre car il représente le niveau moyen de recouvrement attendu sur la dette, paramètre essentiel. Le second paramètre retenu est  $\lambda = \alpha + \beta$ .

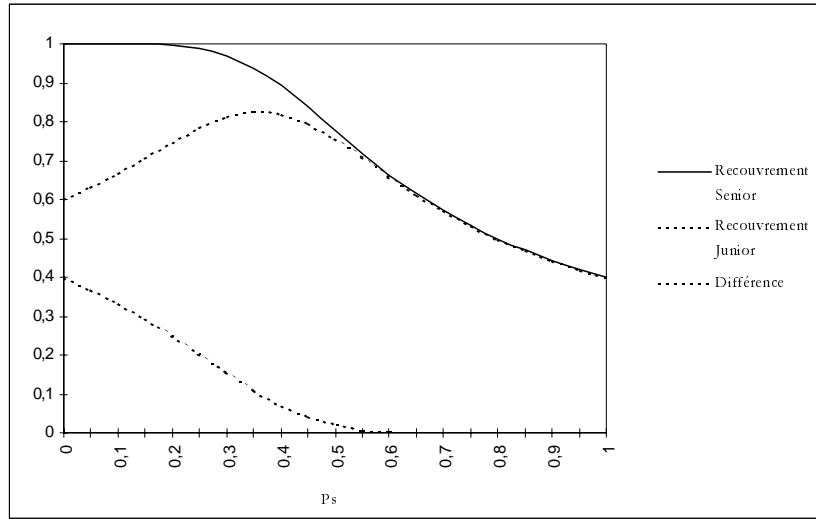
On peut maintenant réécrire l'équation (21) qui lie le spread relatif à l'ampleur de défaut:

$$\frac{W_S(t, T) - W_J(t, T)}{1 - W_J(t, T)} = \frac{m - \int_{p_{st}}^1 J(y, p_{st}) q(y, m\lambda, (1 - m)\lambda) dy}{p_s (1 - \int_{p_{st}}^1 J(y, p_{st}) q(y, m\lambda, (1 - m)\lambda) dy)}$$

L'équation ne dépend que de  $J$ , ce qui permet de n'intégrer qu'à partir de  $p_{st}$ , cette fonction étant nulle sinon. En posant  $\Phi_U(p_{st}, m, \lambda)$  l'espérance de recouvrement d'un zéro-coupon de type  $U = J, S$  en cas de défaut, on obtient :

$$\frac{W_S(t, T) - W_J(t, T)}{1 - W_J(t, T)} = \frac{m - \Phi_J(p_{st}, m, \lambda)}{p_s(1 - \Phi_J(p_{st}, m, \lambda))} \quad (26)$$

Il est intéressant de s'arrêter ici pour étudier les implications de cette équation sur la valeur du spread relatif en fonction de l'évolution des paramètres. Le spread relatif étant le rapport entre le spread junior-senior et le spread sans risque-junior, il sera d'autant plus grand que la dette senior est protégée par rapport à la dette junior. On peut d'abord regarder comment évoluent conjointement  $\Phi_S(p_{st}, m, \lambda)$  et  $\Phi_J(p_{st}, m, \lambda)$ , les taux de recouvrement des deux dettes, en fonction du niveau de  $p_s$ . On a pris pour le graphique suivant  $m = 0, 4$ .

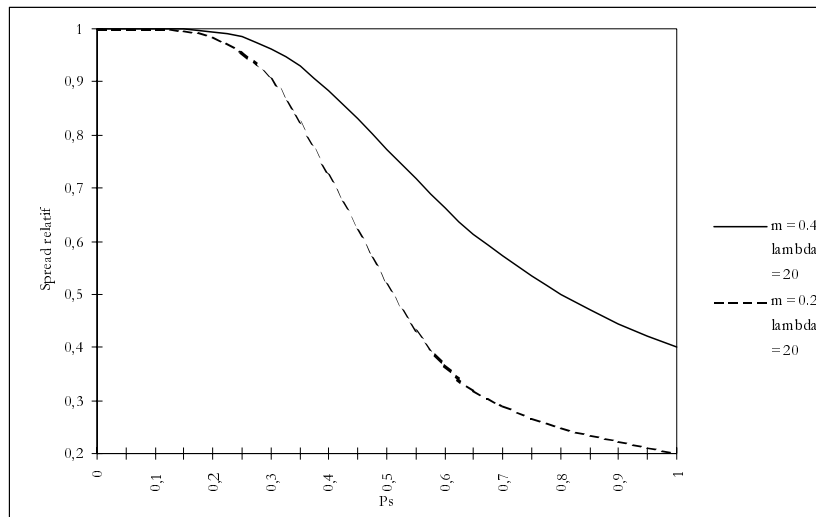


Recouvrement moyen des dettes senior et junior en fonction de  $p_s$

Si la dette senior est en faible proportion, elle se trouve protégée. En revanche, si cette proportion est forte, la dette senior est peu protégée. Dans cette dernière configuration, le détenteur de dette junior peut considérer qu'il ne va rien toucher. Le spread relatif, qui est la variable observée, sera donc d'autant plus faible qu'il y a de dette senior.

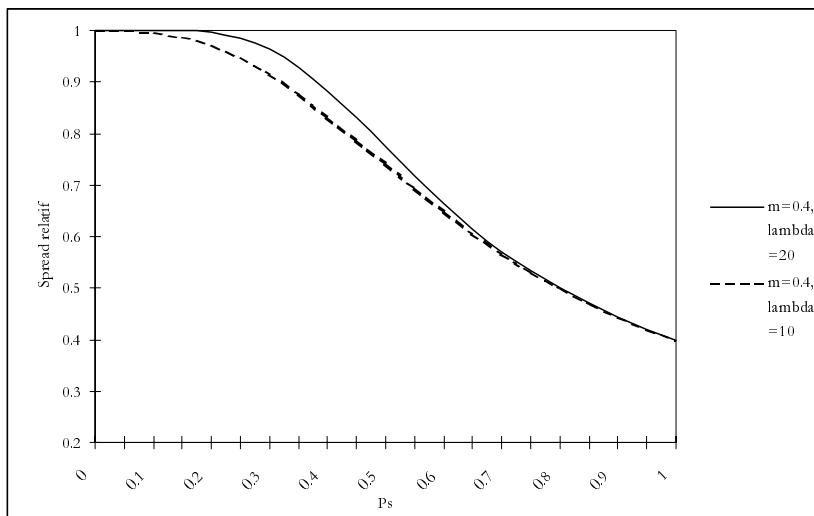
On s'intéresse maintenant à l'influence des paramètres de la loi du taux de recouvrement sur le spread relatif. Il s'agit de déterminer comment cette donnée évolue en fonction de la moyenne et de la variance du taux de recouvrement.

On note que pour une structure de dette fixée, le spread relatif est d'autant plus faible que l'espérance de remboursement  $m$  est basse. Ceci est conforme à l'intuition : si les investisseurs s'attendent en cas de défaut à un faible recouvrement, l'avantage de détenir des titres senior est moindre.



Effet de la moyenne du taux de recouvrement sur le spread relatif

L'effet de la variance est plus faible. Pour une même espérance de recouvrement, le spread est d'autant plus faible que la variance est forte. En effet, quand il y a peu de dette senior, le détenteur de titres subordonnés est avantagé par une forte variance qui augmente les chances d'un plus fort taux de recouvrement. Néanmoins, cet effet est réduit et même négligeable lorsque la proportion de dette senior est élevée.



Effet de la variance du taux de recouvrement sur le spread relatif

### 3.1.2 Spécification économétrique et estimation

Pour estimer l'équation (26), il est nécessaire de calculer le spread relatif. Le prix forward du titre  $W_U(t, T)$ ,  $U = J, S$ , est obtenu en divisant le prix spot du titre par le prix spot d'un zéro-coupon sans risque de même maturité.

Nous notons le spread relatif observé en  $t$   $SR_t$ . L'équation de regression correspondant à l'équation (26) s'écrit :

$$SR_t = \frac{m - \Phi_J(p_{St}, m, \lambda)}{p_{St}(1 - \Phi_J(p_{St}, m, \lambda))} + \varepsilon_t \quad (27)$$

où  $\varepsilon_t \rightsquigarrow N(0, \sigma^2)$  et pour tout  $t \neq t'$ ,  $COV(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0$ .

Nous supposons que les paramètres  $m$  et  $\lambda$  sont constants. Néanmoins, le modèle peut être estimé en testant un nombre fini de ruptures du modèle. Une telle modélisation est intéressante si on veut tester l'influence sur le niveau de risque de certains événements particuliers comme par exemple un changement de législation sur les faillites, ou encore une profonde modification de la structure financière de l'entreprise (OPA, grands projets d'investissements).

La vraisemblance associée à  $SR_t$  s'écrit

$$l_t = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(\varepsilon_t)^2 / \varkappa^2\right)}{\sqrt{2\pi}\varkappa}$$

On obtient ainsi la vraisemblance du modèle :

$$l = \prod_t l_t$$

La maximisation de cette vraisemblance conduit à des estimateurs convergents de  $m$  et de  $\lambda$ .

La spécification économétrique (27) peut sembler naturelle. Toutefois, elle nous invite à une réflexion théorique. L'équation (27) introduit un nouvel aléa : le prix observé du titre sur le marché est "bruité". Si cette démarche est classique en économétrie, elle pose un problème en finance quand on applique la théorie de la valorisation par absence d'opportunité d'arbitrage comme ici. L'introduction d'un nouvel aléa implique que le marché n'est plus complet et la formule de valorisation n'est plus valable. Cette réflexion semble s'appliquer à la plupart des problèmes d'estimation de modèles proposant une valorisation fondée sur la théorie de l'arbitrage. Elle nous suggère une autre méthode d'estimation : les paramètres  $m$  et  $\lambda$  étant déterminés de façon unique pour chaque observation du spread relatif, on peut donc les considérer comme variables et les estimer pour tout  $t$ .

## 3.2 Estimation des paramètres sur des séries financières

### 3.2.1 Choix des données

Madan et Unal n'ajustent pas leur modèle sur des séries de taux d'entreprises mais recomposent une "firme représentative" à partir de certificats de dépôts américains, certains étant assurés par l'Etat Fédéral (les senior), d'autres non (les junior). Ils construisent ainsi une série de spreads relatifs moyens, c'est à dire pondérés par les montants nominaux.

Cette approche est intéressante pour deux raisons :



- La série ainsi reconstituée est lissée et l'estimation est moins sensible à des variations ponctuelles et fortes d'un titre particulier,
- Il est plus facile de connaître la valeur et les variations du paramètre  $p_{st}$ . En effet, il suffit de sommer d'un côté les nominaux assurés et de l'autre ceux non assurés.

Ce choix permet de contourner quelques difficultés essentielles liées à la modélisation comme nous allons le voir. Toutefois, la question du défaut sur des bonds assurés par l'Etat n'est pas évidente : il faudrait pour concevoir une telle situation que l'Etat renie son engagement. Or dans la plupart des cas, l'entreprise va faire défaut et l'Etat va apporter sa garantie aux titres assurés : les titres assurés et non assurés ne semblent ainsi pas faire face au même risque de survenance et l'application du modèle est douteuse.

Nous nous sommes intéressés à des titres de banques françaises puis américaines. Ces titres sont parmi les obligations risquées les plus traités par le marché du fait de leur faible risque de défaut. Ils intéressent donc fortement les professionnels. De plus, cette relative liquidité nous assure d'avoir des prix les plus justes possibles. Enfin, nous rappelons que nous devons trouver des dettes senior et junior ayant environ la même échéance, ce qui est plus facile pour de grandes banques. Par contre, les hypothèses d'indépendance des paramètres du défaut par rapport au processus de taux spot, H1 et H3, sont plus discutables pour des établissements financiers. Elles sont néanmoins acceptables si la gestion actif-passif de ces banques permet une bonne immunisation du bilan par rapport aux variations de taux.

Nous présentons succinctement les cinq séries étudiées :

Entreprise	Echéance	Echantillon	Nombre d'observations
BNP	15/11/05	du 07/09/99 au 17/02/00	115
CIC	15/11/08	du 11/03/99 au 18/02/00	239
Natexis	01/07/04	du 01/01/99 au 12/01/00	262
Citigroup	01/09/05	du 29/01/98 au 24/03/00	582
Mellon Bank	15/05/07	du 01/01/99 au 24/03/00	580

Les taux sans risque ont été calculés à partir des taux de swap d'échéances équivalentes.

### 3.2.2 Problème d'information et modèle dégénéré

**Identifiabilité du modèle en information réduite.** Outre les séries de taux de dettes junior et senior d'une même entreprise et d'échéance équivalente, le modèle prend en entrée la série des  $p_{st}$ , c'est dire les proportions de dette senior à chaque instant  $t$ .

En dehors de toute variation de  $p_{st}$ , le spread relatif n'est pas censé varier, au terme de bruit près. Ainsi, si l'information sur la structure de la dette est faible (et si notamment  $p_{st}$  est approximé par une constante  $p_s$ ), on est tout simplement amené à ajuster ce ratio par une fonction déterministe de deux paramètres,  $m$  et  $\lambda$ . Le modèle n'est dans ce cas plus identifiable.

Or il est en pratique difficile de connaître la proportion de dette senior ou junior dans l'entreprise et qui plus est de savoir comment celle-ci évolue dans le temps pour des données quotidiennes. Nous avons donc du approximer cette valeur en nous référant aux comptes annuels des entreprises, où la dette subordonnée apparaît séparément. La lecture des comptes ne donne cependant qu'une seule valeur de  $p_s$ . Il nous a fallu réécrire le modèle en considérant ce paramètre constant.

**Réécriture du modèle.** L'impact sur la modélisation de prendre  $p_s$  constant est de réduire le degré de liberté sur le choix de la densité risque neutre du taux de recouvrement.

Madan et Unal proposent une loi à 2 paramètres ce qui autorise un degré de liberté dans la relation entre les deux premiers moments. Il nous a fallu choisir des lois ne dépendant plus que d'un seul paramètre, et présentant ainsi une relation déterministe entre les deux premiers moments.

La littérature supposait en général un taux de recouvrement constant  $m$  (Jarrow et Turnbull (1995), Longstaff et Schwartz (1995)). Si on réécrit notre modèle en l'absence d'incertitude sur le taux de recouvrement, on a :

Si  $m \leq p_s$ ,

$$W_S(tT) = F(t, T) + (1 - F(t, T)).m \text{ et } W_J(t, T) = F(t, T)$$

$\Rightarrow$

$$SR_t = \frac{m}{p_s}$$

Si  $m > p_s$ ,

$$W_S(tT) = 1 \text{ et } W_J(t, T) = F(t, T) + (1 - F(t, T))\frac{m - p_s}{1 - p_s}$$

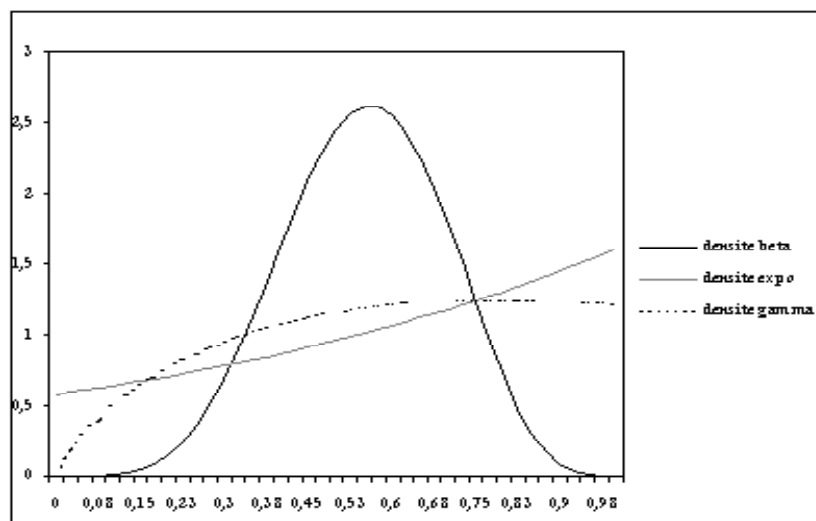
$\Rightarrow$

$$SR_t = 1$$

On voit que dans le cas où  $m > p_s$ , le senior devient sans risque et le modèle, même avec un seul paramètre, n'est plus identifiable. Cependant, le premier cas est le plus intéressant car en général, la proportion de dette junior est assez faible et la première condition est vérifiée. Dans ce cas, le junior ne propose aucun remboursement en cas de défaut. Par rapport à une modélisation plus réaliste avec incertitude, l'espérance de recouvrement sera sous-estimée de façon systématique : la variance jouant en faveur du junior et l'espérance en faveur du senior, l'estimation conduit toutes choses égales par ailleurs à un taux de recouvrement plus faible quand la variance est nulle.

Ainsi, même si nous avons vu que l'effet de la variance reste limité, il nous est apparu plus pertinent de considérer une densité non triviale pour le taux de recouvrement. Nous avons tout d'abord pensé à normaliser des lois positives usuelles à un paramètre sur l'intervalle  $[0, 1]$  comme la loi exponentielle ou la loi gamma. Ces densités sont très plates, ce qui implique une forte variance. La densité exponentielle présente un mode en 0 ou en 1. Dans le premier cas, il s'agit d'un scénario catastrophe : pour une banque dont le défaut est peu probable, la situation risque d'être très grave et le recouvrement nul.

Enfin, nous avons repris la loi bêta proposée par les auteurs en fixant le paramètre  $\beta$ . Cette loi est caractérisée par une variance plus réduite que les deux précédentes avec un mode plus marqué proche de l'espérance de recouvrement. Nous présentons dans le graphique suivant les densités de recouvrement estimées pour le CIC. Le taux moyen de recouvrement estimé varie entre 55% et 58% suivant la densité.



Différentes densités pour le taux de recouvrement

Le choix du paramètre  $\beta$  peut sembler problématique. En fait, on a vu que le modèle est peu sensible au niveau de la variance. On retiendra que plus  $\beta$  est élevé, plus la variance est réduite et qu'un écart type correspondant aux observations historiques<sup>5</sup> de l'ordre de 20%

<sup>5</sup> On peut voir à ce sujet l'article de Duffie et Singleton (1998)

est obtenu pour  $\beta \simeq 5$ .

L'absence de variation du paramètre  $p_s$  sur les échantillons oblige donc à choisir de façon arbitraire la relation entre l'espérance et la variance du taux de recouvrement. Pour un même échantillon, plus la variance est faible, plus le taux de recouvrement estimé sera faible. La loi bêta, avec  $\beta$  fixé, semble être un bon compromis. La forme en cloche de sa densité correspond aux anticipations des professionnels.

### 3.2.3 Présentation et analyse des résultats

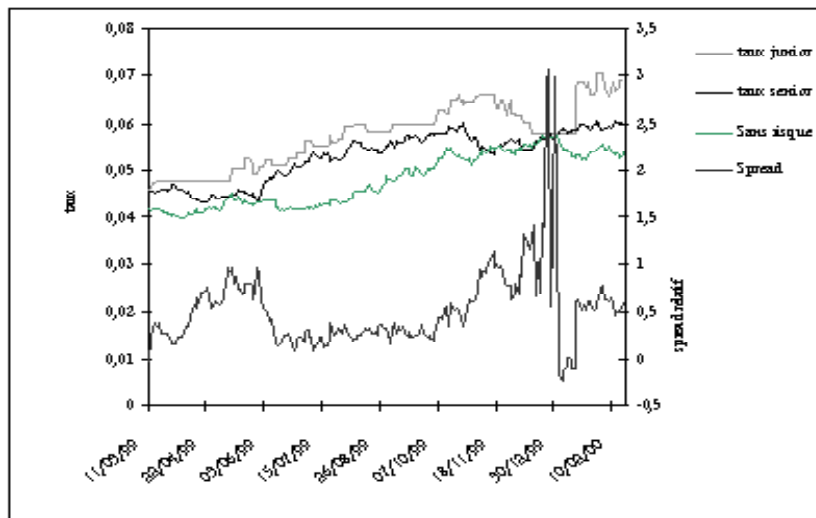
Nous ne présenterons pas ici l'exhaustivité des résultats mais à travers quelques exemples les faits marquants des estimations que nous avons réalisées.

Nous rappelons que cette partie de l'estimation permet non seulement d'estimer une densité pour l'ampleur du défaut, mais aussi deux séries de probabilités de survie, l'une estimée à partir du taux junior, l'autre à partir du taux senior. En réintroduisant l'espérance du taux de recouvrement estimé  $\widehat{R}_U$ , dans la formule de valorisation (17), on trouve la probabilité de survie correspondante sous la probabilité risque neutre :

$$\widehat{F}_U(t, T) = \frac{W_U - \widehat{R}_U}{1 - \widehat{R}_U}$$

pour  $U = S, J$ . On remarque que l'on est sensé avoir pour tout  $t$   $\widehat{F}_S(t, T) = \widehat{F}_J(t, T)$ . Ces estimateurs sont convergents.

**Qualité des données.** Le problème de la qualité des données est essentiel dans la mesure où l'on étudie des séries d'obligations d'entreprises privées moins traitées que les bonds publics, et ce même si nous avons retenu des titres de banques qui sont parmi les plus liquides. Ce problème est d'autant plus important que la démarche implique des titres junior particulièrement peu liquides. On observe sur le graphique suivant que la série du taux junior du CIC est en "escalier".



Taux et spread relatif pour le CIC

Chaque portion plane correspond à une période où le titre junior n'a pas été traité, et donc n'a pas été coté. On voit que l'impact sur le spread relatif, supposé constant en l'absence de variation de  $p_s$ , est assez important. Celui-ci devient même négatif quand le junior passe au dessous du senior et que l'opportunité d'arbitrage est flagrante. On notera que la situation se dégrade particulièrement pendant le congé de Noël. De retour de vacances, le market maker augmente le taux junior de plus de 100 points de base quand le senior reste constant... Il faut donc demeurer très méfiant sur la qualité des données sources. Le nombre d'intervenants sur de tels marchés est très réduit ce qui peut avoir plusieurs conséquences à retenir pour interpréter les résultats :

- L'hypothèse d'AOA n'est pas toujours respectée, les prix des titres privés n'étant pas en permanence réajustés par rapport au taux sans risque.
- Les données peuvent être tributaires d'un modèle: en effet, si l'opérateur principal utilise lui-même un modèle pour fixer ses prix, nous risquons simplement d'estimer son propre modèle.

- Il est vraisemblable que les investisseurs qui s'engagent sur ces titres peu traités vont faire payer une prime de liquidité: le spread au sans risque ne contient donc pas seulement du défaut mais aussi sûrement de la liquidité.

Le modèle ne prend donc pas en compte tous les phénomènes présents ce qui risque de perturber l'estimation.

Le problème de la prime de liquidité semble le plus préoccupant pour les séries européennes. L'application du modèle simple de Fons (1994), où tous les agents sont neutres au risque, fait apparaître une prime de liquidité supplémentaire par rapport à la prime liée au défaut sur les bonds risqués. Ainsi, on peut supposer qu'il y a une prime de liquidité non seulement sur le taux junior mais aussi sur le taux senior, l'ampleur du phénomène étant a priori différente sur chacun des titres. L'impact sur le spread relatif est donc incertain. On remarque que si la prime de liquidité est la même pour les deux titres, cela va induire une diminution du spread relatif, et ainsi une sous estimation du taux de recouvrement. En ce qui concerne les probabilités de survie, celles-ci risquent d'être aussi sous-estimées, le modèle interprétant cette prime de liquidité comme une prime de défaut.

En plus de la prime de liquidité, il existe aussi vraisemblablement une prime liée à l'asymétrie d'information portant sur la structure financière de l'entreprise. Les investisseurs ne disposant pas d'une information financière transparente leur permettant de bien évaluer leur risque vont demander une surprime. Là aussi, si cet effet est équivalent sur les deux titres, le spread relatif diminuera ce qui conduira à une diminution du taux de recouvrement estimé.

Afin de résoudre le problème de la liquidité, nous avons étudié des historiques de prix sur des banques américaines dont les dettes sont nettement plus liquides. Nous remarquons sur ces séries que la prime de risque pour le junior est très faible voire nulle. Flannery et Sorescu (1996) proposent une interprétation de ce phénomène en termes d'anticipations des

investisseurs. Ceux-ci ont conscience du fait que l'Etat interviendra en cas de défaut d'une grande banque afin d'éviter une crise systémique. Ils n'intègrent donc pas tout le risque de défaut dans la prime. Notons qu'un phénomène identique a été observé en France avec la crise du Crédit Lyonnais, dont la signature ne s'est que peu dégradée.

L'étude de Flannery et Sorescu (1996) semble donc indiquer que les modèles de risque de défaut ne sont pas applicables à de grandes banques. Néanmoins, les historiques bancaires étant plus liquides que ceux d'entreprises industrielles, nous avons dû nous en contenter. Nous voyons ici une limite des modèles de risque de crédit, le spread pouvant traduire d'autres phénomènes financiers que le simple défaut.

**Résultats sur l'ampleur de défaut.** Comme nous l'avons signalé, le niveau de l'ampleur de défaut dépend de la relation déterministe existant entre l'espérance du taux de recouvrement et sa variance. Nous présentons ici les résultats de l'estimation en fonction de la densité choisie :

Série	Ampleur constante	Loi Béta <sup>6</sup>	Loi Exponentielle	Loi Gamma
BNP	$\hat{m} = 23,3\%$	$\hat{m} = 23,4\%$ $\hat{\chi} = 15\%$	$\hat{m} = 23,9\%$ $\hat{\chi} = 26\%$	$\hat{m} = 23,3\%$ $\hat{\chi} = 20\%$
CIC	$\hat{m} = 47\%$	$\hat{m} = 55\%$ $\hat{\chi} = 14\%$	$\hat{m} = 57,6\%$ $\hat{\chi} = 25\%$	$\hat{m} = 58,4\%$ $\hat{\chi} = 28\%$
Natexis	$\hat{m} = 61,6\%$	$\hat{m} = 61,7\%$ $\hat{\chi} = 13\%$	$\hat{m} = 65,9\%$ $\hat{\chi} = 26,2\%$	$\hat{m} = 64,9\%$ $\hat{\chi} = 23,4\%$
Citigroup	$\hat{m} = 13,5\%$	$\hat{m} = 13,5\%$ $\hat{\chi} = 9,6\%$	$\hat{m} = 13,5\%$ $\hat{\chi} = 13,3\%$	$\hat{m} = 13,9\%$ $\hat{\chi} = 21,7\%$
Mellon	$\hat{m} = 3,9\%$	$\hat{m} = 3,9\%$ $\hat{\chi} = 2,6\%$	$\hat{m} = 3,9\%$ $\hat{\chi} = 3,9\%$	$\hat{m} = 4,2\%$ $\hat{\chi} = 12,8\%$

<sup>6</sup> La valeur fixée de  $\beta$  est de 5.



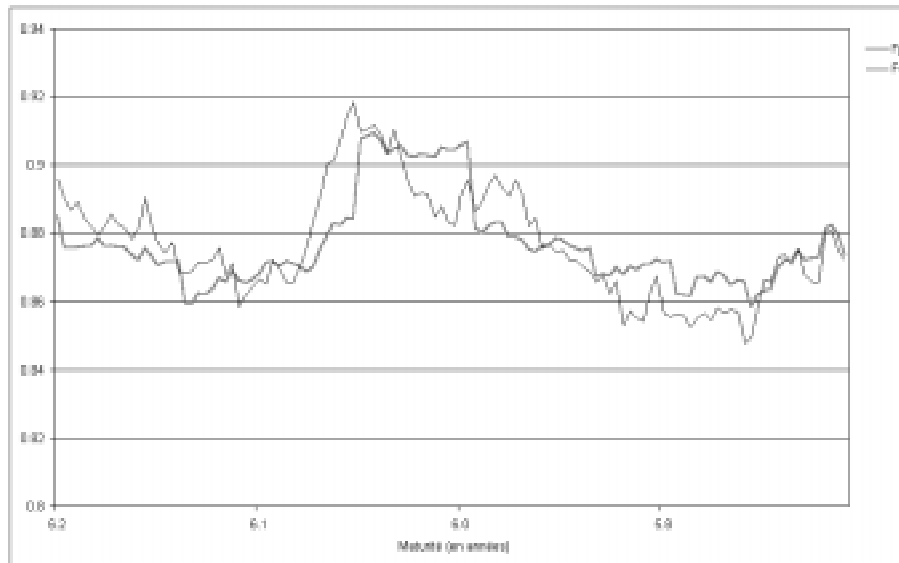
L'interprétation de ces résultats doit tenir compte du fait que la loi du taux de recouvrement qui a été estimée est une loi sous la probabilité risque neutre (si on accepte H1 et H3), ou sous la probabilité forward neutre. Si H1 et H3 sont vérifiées, on peut considérer en première approche que l'ensemble des agents financiers sont neutres au risque. Dans ce cas, la probabilité risque neutre et la probabilité historique sont les mêmes et la loi du taux de recouvrement estimée correspond à celle observée, ce qui en autorise une interprétation. On note que les techniques classiques de l'actuariat font implicitement cette hypothèse d'un monde risque neutre. Enfin, l'espérance du taux de recouvrement estimée pour un taux supposé constant est la même quelque soit la probabilité. La colonne de gauche du tableau précédent présente donc un minorant fiable du taux de recouvrement moyen.

L'espérance de recouvrement des deux banques mutualistes est plus élevée que celle des deux autres banques. L'importance des fonds propres de ce type de banques en France conforte ce résultat. Néanmoins, les taux de recouvrement pour la BNP, le Citigroup et la Mellon Bank sont relativement faibles par rapport aux taux observés en cas de faillites, plutôt proches de 55%.

On peut avancer plusieurs explications. Premièrement, l'existence de primes autres que celle liée au risque de défaut qui toucheraient de façon équivalente les deux titres induit une sous estimation du taux de recouvrement. Ce peut-être le cas pour les banques américaines où le junior est aussi liquide que le senior ce qui permet de supposer qu'il n'y pas de "surprime" de liquidité pour le junior. De plus pour ces dettes américaines, l'anticipation par les investisseurs d'une intervention de l'Etat en cas de défaut peut amener à confondre les titres junior et senior ce qui réduit le spread relatif. Si un même phénomène se retrouve sur les titres français, il ne faut alors pas exclure que la prime observée sur le junior pourrait simplement être due à la liquidité.

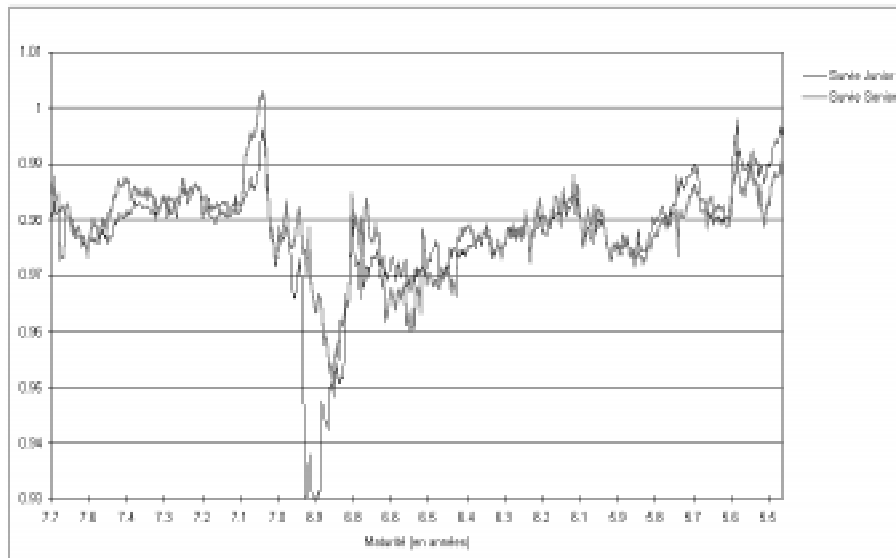
Enfin, si les investisseurs sont finalement averses au risque, ils auront tendance à surestimer l'ampleur du défaut risque neutre et donc à sous-estimer le taux de recouvrement.

**Résultats sur les probabilités de survie.** Les probas de survie de la BNP à environ 6 ans estimées par le modèle (avec une densité bêta) sont représentées sur le graphique suivant:



Probabilités de survie junior et senior estimées pour la BNP

Les séries de probabilités junior et senior obtenues pour le Citigroup sont plus élevées mais aussi plus volatiles :



Probabilités de survie junior et senior pour le Citigroup

L'ensemble des graphiques et des résultats sont présentés en annexes.

Avant tout commentaire, on rappelle qu'il s'agit de probabilités de survie calculées sous la probabilité risque neutre. Elles ne peuvent donc pas être interprétées directement à moins de considérer que tous les agents sont neutres au risque, comme cela est communément fait. Comme nous proposons par la suite une méthodologie pour déduire de ces séries les probabilités de survie historiques, nous ne faisons à ce niveau qu'un commentaire succinct. La qualité des résultats semble néanmoins plutôt bonne. Ils sont satisfaisants pour le CIC, le Citigroup, la Mellonbank et Natexis. Les probabilités de survie de la BNP sont un peu faibles en comparaison avec le bon rating de la banque, même s'il faut voir que les probabilités risque neutre sont inférieures à celles historiques..

De manière générale, on observe :

- Une faible sensibilité du niveau de la probabilité à la densité du taux de recouvrement retenue. Les probabilités junior ou senior estimées sur des modèles différents se superposent quasiment (voir en annexes les probabilités du CIC),

- Les probabilités junior et senior, qui sont supposées égales, sont du même ordre de grandeur et évoluent parallèlement,
- Le modèle est très sensible aux incohérences avec la théorie de l'arbitrage : les probabilités explosent quand le senior passe sous le sans risque,
- Les probabilités observées sont inférieures au rating des entreprises, mais d'un ordre de grandeur équivalent, et, hors mis pour la BNP, classées dans le même ordre.

Série	Echéance moyenne	$F_S$ moyen	$F_J$ moyen	Survie à 1 an
BNP	6 ans	87,8%	87,8%	97,8%
CIC	9 ans	91%	92,1%	99,1%
Natexis	5 ans	97,1%	96,1%	99,4%
Citigroup	6,5 ans	97,8%	97,7%	99,7%
Mellon	8,5 ans	97,2%	97,2%	99,7%

Nous reviendrons sur ce point une fois les probabilités historiques calculées. On peut néanmoins déjà avancer deux explications à cette relative faiblesse des probabilités de survie. La première, que nous allons corriger dans prochaine partie, tient au fait que nous nous plaçons sous la probabilité risque neutre. La seconde réside dans l'existence de primes autres que celle liée au défaut, telles que la prime de liquidité ou celle d'information asymétrique, ce qui implique une sous estimation de la probabilité de survie.

- Les probabilités nous semblent relativement volatiles. Là aussi la liquidité est en cause. En effet, les prix des dettes privées ne s'ajustant pas rapidement et de façon précise aux variations du taux sans risque, le spread observé apparaît très volatile, ce qui se répercute sur les probabilités estimées.
- Les probabilités senior sont plus volatiles que les probabilités junior. Cela s'explique tout d'abord par la plus grande volatilité des taux senior. De plus, les probabilités

senior sont plus sensibles au taux de recouvrement estimé que ne le sont les probabilités junior. Or, nous avons vu que la donnée du spread relatif, qui nous permet d'estimer le recouvrement, est sujette à de nombreuses perturbations. Les probabilité junior, en dépit de la faible liquidité de ces titres, nous semblent ainsi plus fiables car elles dépendent peu de l'estimation du taux de recouvrement.

### 3.3 Retour à la probabilité réelle

Faire l'hypothèse d'un monde risque neutre, comme le fait Fons (1994), autorise une première interprétation des résultats du modèle. Les probabilités de survie risque neutre peuvent en première approche être considérées comme des minorants des probabilités réelles. De plus, une des principales applications de ces modèles, la tarification de dérivés de crédit, ne nécessite pas de disposer des probabilités historiques de défaut. En effet, il suffit pour cela de connaître le processus de variation du prix de la dette risquée, qui est obtenu grâce à la valorisation risque neutre. C'est ainsi que les articles ignorent dans leur ensemble ce problème.

Cependant, dans une optique d'utilisation des modèles de risque de crédit pour le contrôle de risques, il est nécessaire de disposer des probabilités de défaut historiques de façon non approchée. Il est possible ensuite de comparer ces probabilités réelles avec les probabilités fournies par les agences de rating comme Standard & Poors ou comme KMV, qui utilise un modèle structurel pour caculer sa probabilité. Revenons sur la formule de  $F(t, T)$ , la probabilité risque neutre de survie :

$$F(t, T) = \mathbb{P}^*(T < \tau | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^*(\exp(-\int_t^T \phi(u, s_u) du) | \mathcal{F}_t)$$

De la même façon, dans le cas où H1 et H3 ne sont pas vérifiées, et que l'on utilise la formule de valorisation sous la probabilité forward neutre, on a :

$$F^{Q^T}(t, T) = \mathbb{P}^{Q^T}(T < \tau | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^{Q^T}(\exp(-\int_t^T \phi(u, s_u) du) | \mathcal{F}_t)$$

La donnée qui intéresse le contrôleur des risques est donc définie par :

$$\mathbb{P}(T < \tau | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\exp(-\int_t^T \phi(u, s_u) du) | \mathcal{F}_t) \quad (28)$$

avec  $\mathbb{P}$  la probabilité réelle ou historique.

On voit à travers la formule (28) qu'il est possible d'obtenir la probabilité historique de survie à condition de connaître les paramètres de l'intensité  $\phi$  et le processus sous la probabilité réelle des variables d'état,  $(s_t)_{t \geq 0}$ . C'est l'objet de la section suivante.

La deuxième phase de la modélisation consiste à rendre compte des variations des probabilités de survie risque neutre (ou forward neutre) que nous venons d'estimer en fonction de l'évolution des variables d'état.

## 4. Modélisation de la probabilité de défaut

Nous rappelons le théorème fondamental qui lie la probabilité de survie à l'intensité de défaut dans le cas risque neutre :

$$F(t, T) = \mathbb{E}^* \left[ e^{-\int_t^T \phi(u) du} | \mathcal{F}_t \right]$$

où  $\phi(t) = \phi(t, s_t)$  avec  $s_t$  un vecteur de variables d'états suivant une diffusion markovienne.

### 4.1 Obtention d'une équation aux dérivées partielles

Montrons dans un premier temps que ce théorème peut être reformulé de façon équivalente à l'aide d'une équation aux dérivées partielles en suivant le schéma de Feynman-Kack.

D'après les propriétés des espérances conditionnelles fonctions de diffusions markoviennes, il existe une fonction  $\Psi(t, s, T)$  différentiable en  $t$  et  $T$  et deux fois différentiable en  $s$  telle que :

$$F(t, T) = \mathbb{E}^* \left[ e^{-\int_t^T \phi(u) du} | \mathcal{F}_t \right] = \Psi(t, s, T)$$

Le processus  $\int_0^t \phi(u) du$  étant  $\mathcal{F}_t$ -mesurable, on a :

$$e^{-\int_0^t \phi(u) du} \Psi(t, s, T) = \mathbb{E}^* \left[ e^{-\int_t^T \phi(u) du} | \mathcal{F}_t \right]$$

Le terme de droite est une martingale. On peut donc égaliser à 0 le terme en  $dt$  du développement d'Itô du terme de gauche ce qui conduit à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\Psi_t(t, s, T) + \Psi_s(t, s, T)\mu(t, s) + \frac{1}{2} \text{Trace}[\Psi_{ss}(t, s, T)\sigma(t, s)\sigma'(t, s)] = \phi(t, s)\Psi(t, s, T) \quad (29)$$

La condition de bord est donnée par  $\Psi(t, s, t) = F(t, t) = 1$ .

L'équation précédente est similaire à celle obtenue dans Black et Scholes (1973) dans laquelle le taux d'intérêt est remplacé par l'intensité de défaut  $\phi$ . Elle serait la même mais avec comme solution  $F^{Q^T}(t, T)$  dans le cas forward neutre de non indépendance entre les paramètres du défaut et le taux spot.

Pour résoudre cette équation ou encore pour calculer l'espérance de la formule initiale et obtenir  $F(t, T)$  ou  $F^{QT}(t, T)$ , nous devons identifier le processus  $(s_t)_{t \geq 0}$  et spécifier la forme fonctionnelle de  $\phi$ . C'est à ce niveau qu'il est possible de réintroduire un certain nombre de fondements économiques dans les modèles à intensité, tout particulièrement en choisissant des variables d'état adéquates. A cette fin, nous revenons sur quelques études empiriques qui ont été réalisées sur les déterminants du spread.

## 4.2 Déterminants du spread

Dans les modèles structurels, le défaut était une fonction unique du processus de la valeur des actifs de la firme, valeur qui n'est pas directement observable sur les marchés. L'utilisation des modèles à intensité, où l'intensité dépend d'une diffusion markovienne multidimensionnelle  $ds_t = \mu(t, s_t)dt + \sigma(t, s_t)'dW_t$ , va permettre de faire dépendre le défaut d'un certain nombre de données observables. Pour déterminer les variables qui ont un impact significatif sur le spread, on peut se référer à des études empiriques existantes.

Duffee (1998) ajuste une régression de la forme :

$$\Delta Spread_t = b_0 + b_1 \Delta Y_t + \Delta Term_t + e_t$$

en utilisant des données mensuelles de 1985 à 1995 sur des bonds d'entreprises, où  $\Delta Y_t$  correspond à la variation mensuelle du taux des bonds du trésor américain d'échéance 3 mois et  $\Delta Term_t$  correspond à la variation mensuelle du taux emprunteur d'Etat à 30 ans. Les coefficients  $b_1$  et  $b_2$  sont négatifs et d'autant plus importants que le risque de crédit de l'entreprise est fort (entreprises mal notées). Cela signifie donc qu'une hausse du taux sans risque s'accompagne d'une baisse du spread.

Longstaff et Schwartz (1995) quant à eux ajustent la régression suivante :

$$\Delta Spread_t = b_0 + b_1 \Delta Yield_t + b_2 I_t + e_t$$



Leurs données s'étalent de 1997 à 1992 et sont annuelles.  $\Delta Yield_t$  représente la variation annuelle du taux emprunteur d'Etat à 30 ans, tandis que  $I_t$  correspond à un indice adéquat de l'action. Ils observent aussi une baisse du spread quand le taux sans risque augmente, ainsi qu'une baisse du spread quand l'indice de l'action augmente. Ce deuxième résultat n'est pas surprenant et est en conformité avec le modèle de Merton : une hausse de l'action pour un niveau de la dette inchangée implique une hausse de la valeur des actifs et ainsi une baisse de la probabilité de défaut.

L'interprétation du premier effet, c'est-à-dire de la corrélation négative entre le sans risque et le spread, est moins évidente. On pourrait penser que les investisseurs qui vont obtenir une meilleure rémunération avec les bonds sans risque en cas de hausse des taux vont être plus réticents à s'engager sur des bonds risqués, ce qui ferait au contraire augmenter le spread. Un retour sur le modèle de Merton permet de mieux comprendre cet effet : une hausse des taux implique une hausse du rendement des actifs de l'entreprise, donc une hausse de la probabilité de survie et une baisse du spread. On peut reprendre l'exemple de la compagnie d'assurance vie : si son actif est indexé sur le sans risque, et que son passif est essentiellement composé de créances vis-à-vis de ses assurés à un taux garanti, elle va bénéficier de la hausse de taux.

Néanmoins, on constate dans ces deux études que cet effet est d'autant plus faible que les entreprises ont un bon rating, ce qui est le cas pour nos séries. On pourra négliger l'influence du taux sans risque dans un premier temps. Les déterminants essentiels du spread restent ceux le plus liés à son activité, au premier rang desquels l'action. Si on suppose que le niveau de la dette varie peu à court terme, une hausse de l'action traduit une amélioration de la santé financière de l'entreprise (et de la valeur de ses actifs) et donc une baisse du risque de crédit. La régression suivante a été ajustée sur les 5 séries étudiées :

$$\hat{F}_J(t, T) = b_0 + b_1 s_t + b_2 (T - t) + e_t$$

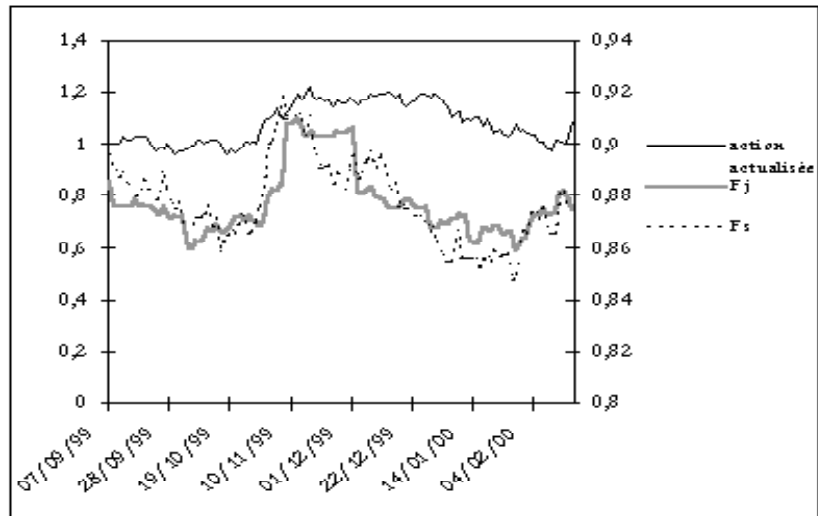
où  $s_t$  est l'action actualisée et  $(T - t)$  la maturité du bond. On prend l'action actualisée afin d'éviter tout effet de taux caché. On s'intéresse ainsi à la situation financière de l'entreprise, en dehors de toute variation de taux. L'influence positive du niveau de l'action actualisée est évidente et testée significativement positive par la statistique de Student pour la plupart des séries. La maturité joue positivement sur la probabilité de défaut, ce qui est conforme à la théorie. Néanmoins, les coefficients  $b_2$  sont souvent proches de 0 et non significatifs pour les séries courtes. Il est en fait assez normal que la variation de la maturité joue un rôle peu significatif pour des dettes observées sur une période courte et dont l'échéance est supérieure à 5 ans.

Le tableau suivant donne le coefficient de corrélation entre différentes séries, notamment l'action et les probabilités de survie. Il faut interpréter ces statistiques avec prudence, la relation entre ces deux variables étant a priori non linéaire.

Série	$F_J - F_S$	$F_J$ -action	$F_S$ -action
BNP	0,76	0,55	0,37
CIC	0,71	0,02	0,25
Natexis	0,47	0,41	0,04
Citigroup	0,75	0,62	0,43
Mellon	0,66	0,33	0,06

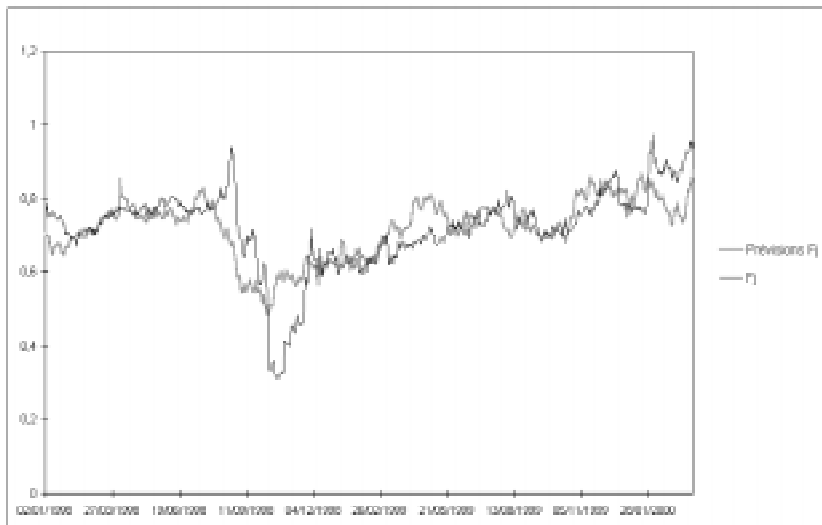
On remarque que le niveau de corrélation est en général assez élevé pour la série de probabilités junior. Ceci s'explique bien car le junior est comme l'action peu tributaire du taux du recouvrement, ce qui n'est pas le cas du senior.

Le graphique suivant présente l'évolution des probabilités estimées et de l'action pour la BNP. L'évolution conjointe des trois courbes semble encourageante. Le même graphique (voir en annexe toutes les probabilités estimées) pour le CIC laisse en revanche plus perplexe.



Variation conjointe de la probabilité de survie et de l'action pour la BNP

Ce graphique donne quant à lui l'ajustement obtenu de la probabilité junior par la régression linéaire sur l'action pour le Citigroup :



Régression de la probabilité de survie Junior du Citigroup sur l'action actualisée

On peut par ailleurs penser à d'autres indicateurs observables de la santé économique des entreprises comme par exemple des variables macroéconomiques. Altman (1983/1990) a étudié l'effet de variables macroéconomiques comme le taux de croissance du PIB, le taux de

croissance de l'offre de monnaie ou le taux de croissance du S&P sur le nombre de faillites. Il trouve des corrélations négatives entre les hausses de ces variables et le nombre de faillites.

### 4.3 Modèle proposé

Cette partie présente le choix retenu quant à la forme de l'intensité. Il s'agit d'un modèle à un seul facteur, l'action actualisée. Ce choix va nous permettre de procéder à l'hypothèse d'indépendance entre l'intensité et le processus de taux. On a vu notamment que les études empiriques montraient que l'effet des taux sans risque était limité en présence d'entreprises bien notées. On retient donc la formulation de Madan et Unal sous la probabilité risque neutre. Nous suggérons dans la section suivante une forme de l'intensité dépendant du taux sans risque ce qui implique l'utilisation de notre formulation forward neutre.

#### 4.3.1 Spécification de l'intensité de défaut

**H4.** L'intensité de défaut est une fonction de la valeur de la firme  $\tilde{s}(t)$  actualisée par le facteur d'accumulation du sans risque  $B(t)$  :

$$s_t := \frac{\tilde{s}(t)}{B(t)}$$

Il s'agit donc d'un modèle à un seul facteur. La valeur de l'action actualisée est appréhendée comme un indicateur de la santé financière de l'entreprise.

Il faut remarquer que cette hypothèse peut sembler contradictoire avec l'hypothèse **H1** qui stipule l'indépendance entre l'intensité de défaut et le taux d'intérêt. Madan et Unal se débarrassent du problème avec l'hypothèse suivante :

**H5.** La valeur actualisée de la firme vérifie l'équation différentielle stochastique :

$$ds_t = \sigma s_t dW_t$$

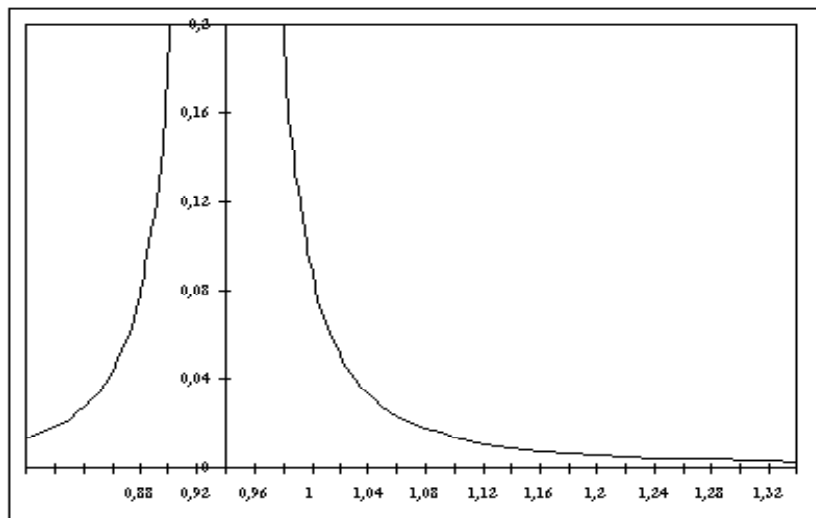
où  $W_t$  est un mouvement brownien sous la probabilité risque neutre.

Cette hypothèse est consistante avec le modèle initial de Black et Scholes(1973) où la volatilité de l'action est constante.

**H6.** L'intensité de défaut est donnée par :

$$\phi(s) = \frac{c}{(\ln(s/\delta))^2}$$

Selon Madan et Unal, la relation entre l'intensité de défaut et l'action actualisée ne peut pas être linéaire, le processus d'intensité étant strictement positif. Le paramètre  $c$  traduit l'importance de cette relation. L'intensité de défaut tend vers l'infini quand  $s$  se rapproche d'un seuil  $\delta$ . On s'attend intuitivement à ce que  $s$  se rapproche de  $\delta$  par le haut mais les auteurs soulignent que le défaut peut survenir non pas immédiatement après une chute de l'action, mais peu après, alors que le cours avait entamé une remonté. Ce graphique représente l'intensité en fonction de l'action. La courbe est obtenue pour  $c = 0.0003$  et  $\delta = 1$ .



Intensité de défaut proposée par Madan et Unal en fonction de l'action actualisée

La modélisation se rapproche donc d'un modèle structurel à la Merton (1974) avec un seuil déclencheur  $\delta$ , dépendant de la valeur de la firme sur les marchés. L'avantage de cette formulation est qu'elle repose sur le cours de l'action qui est observable. Elle peut sembler particulièrement pertinente si on considère que le prix de l'action reflète bien la valeur de

l'entreprise et intègre toute l'information financière disponible: il s'agit de l'hypothèse de marchés efficients. De plus, cette modélisation propose une vision moins mécanique du défaut que dans les modèles structurels.

Sous ces trois hypothèses, on peut réécrire l'équation (29):

$$\Psi_t(t, s, T) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \Psi_{ss}(t, s, T) = \phi(s)\Psi(t, s, T) \quad (30)$$

avec  $\Psi(t, s, t) = 1$ .

### 4.3.2 Solution proposée par Madan et Unal

Les auteurs montrent que la solution de cette équation est donnée par :

$$F(t, T) = \Psi(t, s, T) = G_a(2/d^2(s, \Gamma))$$

où  $a = c/(2\sigma^2)$ ,  $\Gamma = T - t$  l'échéance résiduelle et  $d(s, \Gamma) = \frac{\ln(s/\delta)}{\sigma\sqrt{\Gamma}} - \frac{\sigma\sqrt{\Gamma}}{2}$

et où  $G_a$  est solution de l'équation différentielle :

$$u^2 G_a'' + \left(\frac{3}{2}u - 1\right)G_a' - aG_a = 0 \quad (31)$$

Ils proposent les conditions de bord suivantes:  $G_a(0) = 1$ ,  $G_a'(0) = -a$  et  $G_a(\infty) = 0$ .

La première condition est issue de la condition de bord sur l'équation aux dérivées partielles (30). La seconde est déduite en supposant la régularité de  $G_a$  et en écrivant l'équation (31) en 0. La dernière condition se veut intuitive: la fonction  $d$  étant appréhendée par les auteurs comme une distance entre  $s$  et le seuil  $\delta$ , ils expliquent que lorsque  $s$  tend vers  $\delta$ ,  $d$  tend vers 0 et donc l'argument de  $G_a$  tend vers l'infini. La probabilité de survie étant nulle quand  $s$  se rapproche de  $\delta$ , on en déduit la dernière condition. Néanmoins cette condition est mathématiquement fautive car la fonction  $d$  ne tend en aucun cas vers 0 quand  $s$  se rapproche de  $\delta$ .

Madan et Unal ne résolvent pas cette équation mais proposent une solution approchée :

$$G_a(y) = e^{-ay}$$

On remarque que cette fonction est la solution de l'équation différentielle suivante qui est obtenue en posant  $u = 0$  dans l'équation (31) :

$$G'_a - aG_a = 0 \quad (32)$$

L'intuition est que cette approximation est valable pour des probabilités de survie proche de 1, ce qui équivaut à un argument pour  $G_a$  proche de 0.

La probabilité de survie s'écrit alors :

$$F(t, T) = F(s, \Gamma, c, \sigma, \delta) = \exp\left(-\frac{c\Gamma}{(\ln(s/\delta) - \sigma^2\Gamma/2)^2}\right) \quad (33)$$

La forme (33) de la probabilité de survie est par certains points de vue satisfaisante :

- Elle ne dépend que de la valeur de l'action actualisée  $s$  et de l'échéance résiduelle  $\Gamma$ ,
- Elle est croissante en  $s$  et tend vers 1 quand  $s$  tend vers l'infini,
- Elle tend vers 1 quand  $\Gamma$  tend vers 0.

Par contre, les auteurs reproduisent la même erreur que précédemment : la fonction  $d$  ne tend pas vers 0 quand  $s$  tend vers  $\delta$  et sous cette forme,  $F$  ne tend pas vers 0 quand  $s$  tend vers  $\delta$ . L'approximation retenue n'est donc valable que pour des probabilités proches de 1 mais ne vérifie pas de bonnes propriétés en cas de risque de défaut un peu plus élevé.

### 4.3.3 Spécification économétrique

Le modèle économétrique associé à cette formulation repose sur la théorie des moments généralisés (Hansen (1982)) ou encore sur la théorie équivalente des moindres carrés asymptotiques (Gourieroux et Monfort (1985)). Les paramètres à estimer sont la volatilité de l'action  $\sigma$  et les paramètres de la fonction d'intensité  $c$  et  $\delta$ . Cette méthode statistique est utile

lorsque la série que l'on cherche à modéliser est elle-même estimée de façon convergente, ce qui est bien le cas ici. On écrit dans ce cas :

$$y_U(t, T) = -\frac{1}{\Gamma} \ln(F_U(t, T)) = \frac{c_U}{(\ln s_t + \gamma - \sigma^2 \Gamma / 2)^2} + \varepsilon_{tT}^U$$

pour  $U = S, J$  et on suppose  $E_{t-1}[\varepsilon_{tT}^U] = 0$  et  $E_{t-1}[(\varepsilon_{tT}^U)^2] < \infty$

Les auteurs estiment séparément les paramètres pour les séries senior et junior alors qu'ils sont supposés égaux. Il n'existe aucune restriction théorique sur ce point et il est possible d'estimer les paramètres pour une seule série contenant à la fois les probabilités senior et junior.

#### 4.3.4 Résolution par les moindres carrés non linéaires

Nous avons essayé d'estimer les paramètres en respectant cette spécification. Nous avons réalisé l'estimation par la méthode des moindres carrés non linéaires qui est asymptotiquement équivalente aux moments généralisés. Ce choix est avantageux car la méthode est implémentée sous SAS ou sous Splus.

Malheureusement, les algorithmes numériques de maximisation n'ont pas réussi à converger vers une solution pour nos séries.

On peut avancer deux raisons principales à cet échec :

- Tout d'abord, la solution approchée de l'équation différentielle n'est valable que pour des probabilités de survie très proches de 1. Elle ne vérifie notamment pas de bonnes propriétés à la baisse de l'action et de la probabilité de survie.
- De plus, si le modèle apparaît graphiquement pertinent pour certaines séries comme pour la BNP ou le Citigroup, il semble difficile d'établir pour d'autres une quelconque relation positive entre l'action et les probabilités estimées.



#### 4.4 Résolution de l'équation différentielle

Face aux mauvais résultats obtenus en utilisant l'approximation exponentielle, nous avons tenté de résoudre l'équation différentielle (31). Nous sommes parvenus à un développement en séries entières. Les changements de variable successifs sont les suivants (la démonstration est explicitée en annexe) :

$$1. G_a(x) = U\left(\frac{1}{x}\right) = U(z)$$

⇒

$$z^2 U'' + \left(\frac{1}{2}z + z^2\right)U' - aU \quad (34)$$

$$1. U(z) = T(z) \exp(-z)$$

⇒

$$z^2 T'' + (-z^2 + \frac{1}{2}z)T' + \left(-\frac{1}{2} - a\right)T = 0 \quad (35)$$

$$2. T(z) = z^\alpha H(z)$$

⇒

$$z^2 H'' + \left(2\alpha z + \frac{1}{2}z - z^2\right)H' + \left(\alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{2}\alpha - \alpha z - \frac{z}{2} - a\right)H = 0 \quad (36)$$

3. Le coefficient devant  $H$  peut être simplifié en égalisant à 0 la partie qui ne dépend pas de  $z$ . Cela revient à poser :

$$\alpha = \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + a}$$

⇒

$$z^2 H'' + z\left(\left(1 + \sqrt{\frac{1}{4} + 4a}\right) - z\right)H' - z\left(\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + a}\right)H = 0$$

En divisant par  $z$  et en posant

$$\begin{aligned} m &= 1 + \sqrt{\frac{1}{4} + 4a} \\ n &= \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + a} \end{aligned}$$

on obtient

$$zH'' + (m - z)H' - nH = 0 \quad (37)$$

La solution d'une telle équation est connue sous forme de développement en séries entières :

$$H(z) = C_1M(n, m, z) + C_2z^{1-m}M(1 + n - m, z - m, z) \quad (38)$$

avec

$$M(m, n, z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_{j+1} &= \frac{n + j}{(m + j)(1 + j)} a_j z \end{aligned}$$

et  $C_1$  et  $C_2$  tels que les conditions de bord sont vérifiées.

On retrouve ainsi  $G_a$  :

$$G_a(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)x^{-\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + 4a}} \left[ C_1M\left(n, m, \frac{1}{x}\right) + C_2x^{m-1}M\left(1 + n - m, z - m, \frac{1}{x}\right) \right] \quad (39)$$

Nous avons implémenté cette solution numériquement en Visual Basic.

Si on écrit la solution sous la forme :

$$\begin{aligned} G_a(x) &= C_1L_1(x, n, m) + C_2L_2(x, n, m) \\ G'_a(x) &= C_1L'_1(x, n, m) + C_2L'_2(x, n, m) \end{aligned}$$

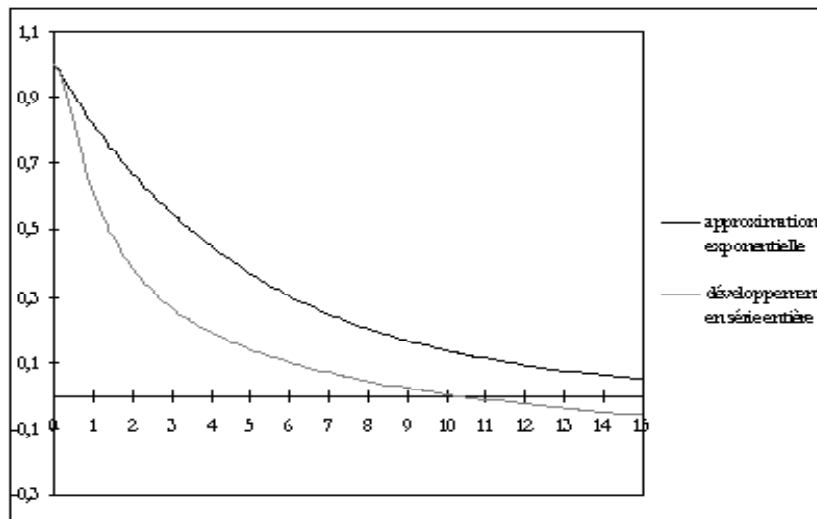
Les constantes sont obtenues en résolvant ce système en 0.

Malheureusement, les valeurs de la probabilité de survie obtenues par cette méthode ne sont pas satisfaisantes car la fonction de probabilité de survie peut descendre en dessous de

0. La résolution numérique confirme pourtant que la solution (39) est juste. Par ailleurs, Mathematica propose une solution de la même forme.

Le problème réside en fait dans le respect des conditions de bord. Celles-ci sont calculées en 0. Or le développement obtenu n'est pas défini pour cette valeur. Il s'agit donc de se rapprocher le plus possible de 0. Si on néglige les termes polynomiaux dans la solution (39), on voit que l'on multiplie  $\exp(-\frac{1}{x})$  qui tend très rapidement vers 0 par le développement de  $H$  donné par (38). Les termes  $a_j$  indiquent que ce développement est de l'ordre de  $\exp(\frac{1}{x})$  qui tend très rapidement vers l'infini. Si le produit converge bien vers une limite finie, il est évident que les valeurs numériques de  $C_1$  et  $C_2$  vont être particulièrement instables.

Mathematica dont la précision en 0 et l'infini est supérieure à celle du Visual Basic ne permet pas non plus d'obtenir une solution acceptable, c'est-à-dire comprise entre 0 et 1. Le graphique suivant présente une solution particulière pour  $a = 0.2$  ainsi que l'approximation proposée par les auteurs.



Fonctions de probabilité de survie

## 4.5 Résolution numérique

Nous avons par la suite tenté de résoudre le problème en ayant recours à la méthode numérique des différences finies. Pour cela, nous revenons à l'équation aux dérivées partielles (EDP) (30) :

$$\Psi_t(t, s, T) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \Psi_{ss}(t, s, T) = \phi(s)\Psi(t, s, T)$$

### 4.5.1 L'obtention d'une équation de récurrence

Pour obtenir une estimation numérique de la solution de cette équation, nous avons opté pour la méthode des différences finies, couramment utilisée pour traiter les EDP issues de modèles financiers ou encore en physique. On aurait de façon équivalente pu utiliser des méthodes de Monte-Carlo à partir de la formule initiale (16) qui montre que la probabilité de survie s'écrit sous la forme d'une espérance.

Posons  $\Psi(t, T, s) = H(\Gamma, \ln(s)) = H(\Gamma, x)$  afin d'obtenir des coefficients constants et une condition initiale dans le temps qui représente ainsi la maturité :

$$-H_\Gamma + \frac{1}{2}\sigma^2 H_{xx} - \frac{1}{2}\sigma^2 H_x = \phi(e^x)H \quad (40)$$

On définit un maillage du domaine  $[0, T-t] \times [-K, K]$  de pas  $\varepsilon$  pour la variable temporelle  $\Gamma$  et  $h = \frac{2K}{N+1}$  pour la variable d'espace  $x$ .

On note

$$t_n = n\varepsilon$$
$$x_i = -K + i\frac{2K}{N+1}$$

$$H^n(i) = H(t_n, x_i)$$

La condition initiale est donnée par  $H^0(i) = 1$ , ce qui signifie que la probabilité de survie à l'échéance, sachant qu'il n'y pas encore eu défaut est de 1. Il convient de se donner également

des conditions de bord en  $-K$  et  $K$  ce qui permettra de définir entièrement les termes de la suite  $H$ . Cela revient, compte tenu de la forme logarithmique de  $H$ , à se donner les limites de  $\Psi$  quand  $s \rightarrow 0$  et quand  $s \rightarrow \infty$ . On voit qu'il se pose alors de façon évidente le problème du choix de la relation fonctionnelle entre  $\phi$  l'intensité de défaut et  $s$ .

#### 4.5.2 Une nouvelle relation fonctionnelle entre $\phi$ et $s$

Si on reprend l'intensité proposée par Madan et Unal, on obtient des conditions de Dirichlet avec  $H$  égale à 1 aux deux extrémités. Néanmoins, cette forme de l'intensité présente un point de discontinuité sur  $[-K, K]$  (pour  $s = \delta$ ). En ce point, le taux instantané de défaut est infini, ce qui implique une forte instabilité numérique.

N'étant pas particulièrement convaincu par une modélisation avec seuil, nous lui avons donc préféré une intensité présentant une simple relation fonctionnelle inverse entre l'action et le taux instantané de défaut. Nous avons opté pour une fonction à deux paramètres du type :

$$\phi(s) = \frac{c}{s^p}$$

Cette formulation est en effet plus souple car elle ne suppose pas l'existence d'un seuil. La vision du défaut est moins mécanique. De plus, la suppression du paramètre de seuil nous autorise à rajouter un paramètre de sensibilité de l'intensité aux variations à la baisse de l'action : c'est le coefficient  $p$ .

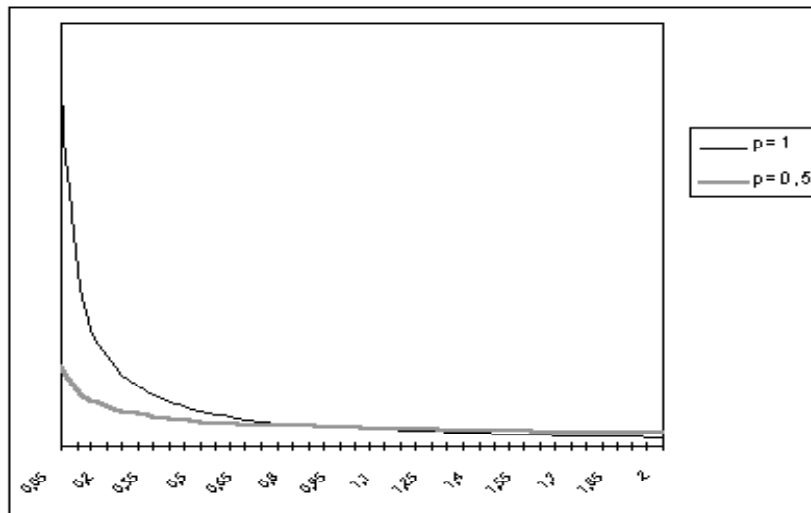
D'un point de vue pratique, il est intéressant de normaliser la valeur de l'action actualisée à 1 pour la première observation de l'échantillon. Cette transformation va permettre de comparer les paramètres  $c$  et  $p$  pour les différentes séries étudiées. Sinon, les valeurs de ces paramètres seraient fortement dépendantes du niveau absolu de l'action ce qui n'a pas de signification financière.

L'utilisation de deux paramètres permet de se donner deux degrés de liberté. Il faut

toutefois noter que ces deux paramètres ont des effets liés et qu'on ne peut notamment pas jouer de façon indépendante sur la dimension "temps" et sur la dimension "action" du défaut.

On remarque quand même que, d'une part, le paramètre  $c$  permet de jouer sur la probabilité de survie "toutes choses égales par ailleurs", c'est à dire quand l'action actualisée reste stable. D'autre part, l'utilisation du paramètre  $p$  permet quant à elle de jouer sur la réactivité de la probabilité de survie aux mouvements de l'action en tant que paramètre de convexité de l'intensité: plus  $p$  est élevé, plus le défaut survient rapidement quand l'action baisse.

Le graphique suivant donne un exemple de la forme de l'intensité pour deux valeurs de  $p$  et pour  $c = 0,0005$ .



Intensité de défaut sans seuil en fonction de l'action

Grâce à cette nouvelle formulation de l'intensité, il n'y a plus de point de discontinuité sur l'intervalle de définition de la probabilité de survie en fonction du niveau de l'action. Les conditions de bord sont alors assez naturelles :

$$\lim_{s \rightarrow 0} H(\Gamma, \ln(s)) = H_0^n = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(\Gamma, \ln(s)) = H_N^n = 1$$

Ces conditions indiquent simplement que la probabilité de survie est nulle quand l'action tend vers 0 et qu'elle est égale à 1 quand l'action tend vers l'infini. Dans la pratique, l'intensité n'étant pas définie en 0, on prendra comme condition de bord en 0  $H(\Gamma, \ln(0, 01)) = H_0^n = 0$  et  $H(\Gamma, \ln(100)) = H_N^n = 1$ .

### 4.5.3 Schéma implicite versus schéma explicite

L'équation est discrétisée en posant :

$$H_\Gamma(t_n, x_i) = \frac{H^{n+1}(i) - H^n(i)}{\varepsilon}$$

$$H_s(t_n, x_i) = \frac{H^n(i+1) - H^n(i-1)}{2h}$$

ou encore

$$H_s(t_n, x_i) = \frac{H^{n+1}(i+1) - H^{n+1}(i-1)}{2h}$$

$$H_{ss}(t_n, x_i) = \frac{H^n(i+1) - 2H^n(i) + H^n(i-1)}{h^2}$$

ou encore

$$H_{ss}(t_n, x_i) = \frac{H^{n+1}(i+1) - 2H^{n+1}(i) + H^{n+1}(i-1)}{h^2}$$

La discrétisation en calculant la dérivée par rapport au cours de l'action en  $n$  permet d'obtenir  $H^{n+1}$  directement en fonction de  $H^n$ . On l'appelle le schéma *explicite*. L'autre schéma de discrétisation est dit *implicite*.

Le schéma explicite permet d'obtenir l'équation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} H^{n+1}(i) &= \left(1 - \frac{\varepsilon\sigma^2}{h^2} - \phi(\exp(ih - K))\varepsilon\right)H^n(i) \\ &+ \frac{\varepsilon\sigma^2}{2h^2}(H^n(i+1) + H^n(i-1)) - \frac{\varepsilon\sigma^2}{4h}(H^n(i+1) - H^n(i-1)) \end{aligned}$$

Ce schéma est très facilement implémentable numériquement car  $H^{n+1}$  ne dépend que des valeurs de  $H^n$ . Néanmoins, il n'est stable que sous certaines conditions<sup>7</sup>.

Comme on peut le voir en note, la condition n'est pas explicite et dépend en plus de la valeur de l'action. On retiendra que plus l'action est élevée, moins le schéma est stable. Par ailleurs, l'instabilité est fortement liée à la valeur du terme  $\varepsilon\sigma^2/h^2$  : si ce terme est trop élevé, l'estimation n'est pas stable. Le changement de variable étant logarithmique,  $h$  doit être suffisamment petit pour reproduire des variations de l'action assez fines. Ainsi, si l'on prend  $h$  petit, il est nécessaire de diminuer parallèlement le pas de temps  $\varepsilon$ , ce qui peut considérablement rallonger le temps de calcul lorsqu'on considère une dette d'échéance longue.

De plus, la stabilité du schéma explicite est conditionnelle à  $\sigma^2$  qui est un des paramètres à estimer : il est donc impossible d'utiliser cette approche dans une phase automatique d'estimation. On trouvera en annexes des graphiques représentant diverses simulations réalisées en utilisant le schéma explicite. Les fonctions numériques obtenues sont satisfaisantes en première approche.

Néanmoins, l'obtention d'une bonne précision en fonction du cours de l'action oblige à recourir au schéma implicite. En effet, celui-ci est stable de façon inconditionnelle.

#### 4.5.4 Résolution par le schéma implicite

L'écriture des dérivées par rapport à l'action en  $n + 1$  conduit à l'équation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\varepsilon\sigma^2}{2h^2} - \frac{\varepsilon\sigma^2}{4h}\right)H_{i-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{\varepsilon c}{\exp(p(hi - K))} + \frac{\varepsilon\sigma^2}{h^2}\right)H_i^{n+1} \\ + \left(-\frac{\varepsilon\sigma^2}{2h^2} + \frac{\varepsilon\sigma^2}{4h}\right)H_{i+1}^{n+1} = H_i^n \end{aligned} \quad (41)$$

---

<sup>7</sup> Il faut que la condition de stabilité de von Neuman pour notre équation soit vérifiée, soit que le module de  $\xi = 1 - \frac{2\varepsilon\sigma^2}{h^2} \sin(\frac{kh}{2}) - i\frac{\varepsilon\sigma^2}{2h} \sin(kh) - \phi(\exp(j.h))$  soit inférieur à 1.



que l'on peut réécrire :

$$aH_{i-1}^{n+1} + b_i H_i^{n+1} + cH_{i+1}^{n+1} = H_i^n \quad (42)$$

En utilisant (42) et les conditions de bord  $H_0^n = 0$  et  $H_N^n = 1$ , on obtient le système linéaire tridiagonal suivant :

$$\begin{pmatrix} b_1 & c & 0 & & & \\ a & b_2 & c & \ddots & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \\ & \ddots & a & b_{N-1} & c & \\ & & 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1^{n+1} \\ H_2^{n+1} \\ \dots \\ H_{N-1}^{n+1} \\ H_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1^n \\ H_2^n \\ \dots \\ H_{N-1}^n \\ H_N^n \end{pmatrix}$$

L'utilisation du schéma implicite conduit à résoudre ce système à chaque incrémentation sur le temps. Il se résout en fait assez facilement : il ne nécessite pas de stocker une matrice de taille  $N \times N$ , mais seulement 3 vecteurs de taille  $N$  et son inversion implique seulement  $2 \times N$  opérations.

L'implémentation de cette méthode en C s'avère assez rapide et ce même avec une bonne précision sur la valeur de l'action ( $h$  petit) et pour des échéances longues.

On peut donner une idée du nombre d'opération à réaliser pour calculer la valeur de la probabilité de survie pour un vecteur de paramètres  $(p, c, \sigma)$  donné :

- Si on veut une précision sur les variations de l'action de l'ordre de 0,1% autour de 1 (qui est la valeur initiale de celle-ci), il faut prendre  $h = 0,001$ , soit  $N$  de l'ordre de 3000.
- Si de plus on veut une évaluation journalière de la fonction, c'est à dire  $\varepsilon = 1$ , il faut réaliser environ 2000 incrémentations pour obtenir la probabilité de survie pour des échéances de 4 ans.

Ce calcul est relativement rapide et ne pose pas de problème de stockage si on se contente de conserver les valeurs de l'approximation numérique uniquement sur l'intervalle d'observation des données et pour des variations de l'action raisonnables : il est sans intérêt de stocker la valeur de la probabilité de survie pour une action dont la valeur aurait été multipliée par 100...

L'optimisation du calcul de la probabilité de survie est un point important : il conditionne en effet la phase d'estimation des paramètres où l'on doit calculer cette fonction à de nombreuses reprises.

#### 4.5.5 Estimation des paramètres

La méthode des différences finies nous a permis de simuler numériquement la probabilité de survie en fonction du vecteur  $\theta = (p, c, \sigma)$ . Nous la noterons  $\tilde{F}_\theta(s, \Gamma)$ . Par ailleurs, nous avons estimé à la section 3 à partir du spread relatif *nobs* valeurs de  $F$  pour un échantillon  $(s_{t_1}, s_{t_2}, \dots, s_{t_{nobs}})$  de valeurs de l'action correspondant. L'échantillon des probabilités s'écrit donc  $(\hat{F}(s_{t_1}, \Gamma_1 = T - t_1), \dots, \hat{F}(s_{t_{nobs}}, \Gamma_{nobs} = T - t_{nobs}))$ . On notera  $\theta_0$  la vraie valeur du vecteur des paramètres.

On rappelle le théorème fondamental de la probabilité de survie :

$$F(s, t, T) = \mathbb{E}^* \left[ e^{-\int_t^T \phi(u) du} | \mathcal{F}_t \right]$$

On peut ainsi appliquer la méthode statistique des moments simulés pour estimer de façon convergente  $\theta_0$  en résolvant le programme suivant :

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \sum_{i=1}^{nobs} (\hat{F}(s_{t_i}, \Gamma_i) - \tilde{F}_\theta(s_{t_i}, \Gamma_i))^2 \quad (43)$$

Ceci se fait à l'aide de méthodes numériques d'optimisation. Or ces méthodes sont d'autant plus lentes et incertaines que le vecteur de paramètres est grand. On remarque ainsi que l'on peut améliorer l'estimation et en réduire son coût en estimant séparément  $\sigma$  la volatilité de l'action actualisée.

**Estimation de la volatilité de l'action actualisée.** On rappelle la spécification de  $s$  sous la probabilité risque neutre :

$$ds_t = \sigma s_t dW_t$$

Si on appelle  $\tilde{s}_t = e^{\int_0^t r_s ds} s_t$  le processus du cours de l'action (non actualisée), on déduit en appliquant Itô que sous la probabilité risque neutre :

$$d\tilde{s}_t = \tilde{s}_t(r_t dt + \sigma dW_t)$$

Ainsi, sous la probabilité réelle :

$$\begin{aligned} d\tilde{s}_t &= \tilde{s}_t(\mu(\tilde{s}_t)dt + \sigma d\tilde{W}_t) \\ d\ln(\tilde{s}_t) &= (\mu(\tilde{s}_t) - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma d\tilde{W}_t \end{aligned}$$

où  $\tilde{W}_t$  est un mouvement brownien sous la probabilité réelle.

On voit ici que l'action non actualisée a la même volatilité sous la probabilité réelle que l'action actualisée sous la probabilité risque neutre. Il nous suffit donc d'estimer la volatilité de l'action non actualisée.

On pose :

$$R_{t_i} = \ln\left(\frac{\tilde{s}_{t_i}}{\tilde{s}_{t_{i-1}}}\right) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mu(\tilde{s}_u)du - \frac{\sigma^2}{2}(t_i - t_{i-1}) + \sigma(\tilde{W}_{t_i} - \tilde{W}_{t_{i-1}})$$

Comme le mouvement brownien est un processus à accroissements indépendants et normaux, c'est dire que  $(\tilde{W}_{t_i} - \tilde{W}_{t_{i-1}}) \rightsquigarrow N(0, t_i - t_{i-1})$  et est indépendant de  $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ , on écrit facilement la vraisemblance de  $(R_{t_1}, \dots, R_{t_{nobs}})$  :

$$l(R_{t_2}, \dots, R_{t_{nobs}}) = \prod_{i=2}^{nobs} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_i - t_{i-1})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(R_{t_i} - m(t_i, t_{i-1}))^2}{\sigma^2(t_i - t_{i-1})}\right)$$

où  $m(t_i, t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mu(\tilde{s}_u)du - \frac{\sigma^2}{2}(t_i - t_{i-1})$

**H7.** On fait ici l'hypothèse que  $\mu(\tilde{s}_t) = \mu$ , c'est à dire que le processus de l'action suit un brownien géométrique comme dans le modèle de Black et Scholes (1973). Cette hypothèse

simplifie considérablement les calculs des estimateurs du maximum de vraisemblance de  $\mu$  et  $\sigma$ . Cela revient à supposer que le trend de l'action est constant.

Sous cette hypothèse,  $m(t_i, t_{i-1}) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t_i - t_{i-1}) = m.(t_i - t_{i-1})$ .

Il faut remarquer à ce niveau que l'on conserve  $(t_i - t_{i-1})$ , et que l'on ne prend pas un pas de temps constant comme cela est souvent fait. Ceci est nécessaire car les observations de l'action ne sont pas journalières : en effet, celle-ci n'est cotée ni les week-ends ni les jours fériés.

Les conditions du premier ordre de la maximisation de la vraisemblance nous donnent comme estimateurs :

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=2}^{nobs} R_{t_i}}{t_{nobs} - t_1}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{nobs - 1} \sum_{i=2}^{nobs} \frac{(R_{t_i} - m(t_i - t_{i-1}))^2}{(t_i - t_{i-1})}$$

L'intérêt d'estimer séparément la volatilité de l'action est donc double. Tout d'abord, cela allège sensiblement le programme d'optimisation (43). Ensuite, les estimateurs du maximum de vraisemblance sont les meilleurs c'est à dire qu'ils sont, parmi les estimateurs convergents, ceux de variance minimale. Il faut donc y avoir recours dès que cela est possible.

Les volatilités estimées par cette méthode sont restituées dans le tableau suivant. Nous donnons les volatilités annuelles qui, compte tenu du fait que l'unité de temps choisi est le jour, sont égales à  $\sigma\sqrt{365}$ .

série	Volatilité annuelle
BNP	14%
CIC	11,2%
Natexis	13,6%
Citigroup	21,3%
Mellon Bank	19,4%

Une remarque s'impose en ce qui concerne la volatilité implicite. La volatilité implicite est calculée en inversant la formule de Black et Scholes (1973) à partir des prix des options sur l'action observés sur le marché. On pourrait être tenté de prendre la volatilité implicite comme estimateur de la volatilité de l'action, puisqu'elle semble correspondre aux anticipations des investisseurs. Cependant, une telle démarche ne serait pas fondée. Tout d'abord, on observe en pratique que la volatilité implicite n'est pas unique : sa valeur dépend du prix d'exercice de l'option que l'on considère. De plus, la non-unicité de la volatilité implicite souligne que le modèle de Black et Scholes (1973) est mal spécifié : utiliser la volatilité implicite n'aurait donc aucun sens puisque cela reviendrait à inverser une formule qui est à priori fausse.

**Reformulation du programme et résultats.** On peut maintenant réécrire le programme d'optimisation (43) avec  $\sigma$  fixé :

$$(\hat{p}, \hat{c}) = \arg \min_{(p,c)} \sum_{i=1}^{nobs} (\hat{F}(s_{t_i}, \Gamma_i) - \tilde{F}_{(p,c)}(s_{t_i}, \Gamma_i))^2 \quad (44)$$

Nous avons retenu comme valeurs de  $\hat{F}$  à ajuster celles obtenues avec les taux junior (probabilités de survie junior). Ce choix est motivé par le fait que ces probabilités sont moins sensibles au taux de recouvrement, dont l'estimation n'apparaît pas toujours satisfaisante. Ceci explique notamment le fait qu'elles sont plus corrélées aux variations de l'action.

Le tableau suivant donne les résultats des estimations pour les 5 series :

Série	$\hat{p}$	$\hat{c}$	Résidu moyen <sup>8</sup>
BNP	0,72	$6,1 \cdot 10^{-5}$	1,21%
CIC	1,65	$3,33 \cdot 10^{-5}$	7,13%
Natexis	0,82	$2,2 \cdot 10^{-5}$	1,1%
Citigroup	1,16	$8,4 \cdot 10^{-6}$	0,9%
Mellon Bank	1,32	$7,6 \cdot 10^{-6}$	0,71%

<sup>8</sup>

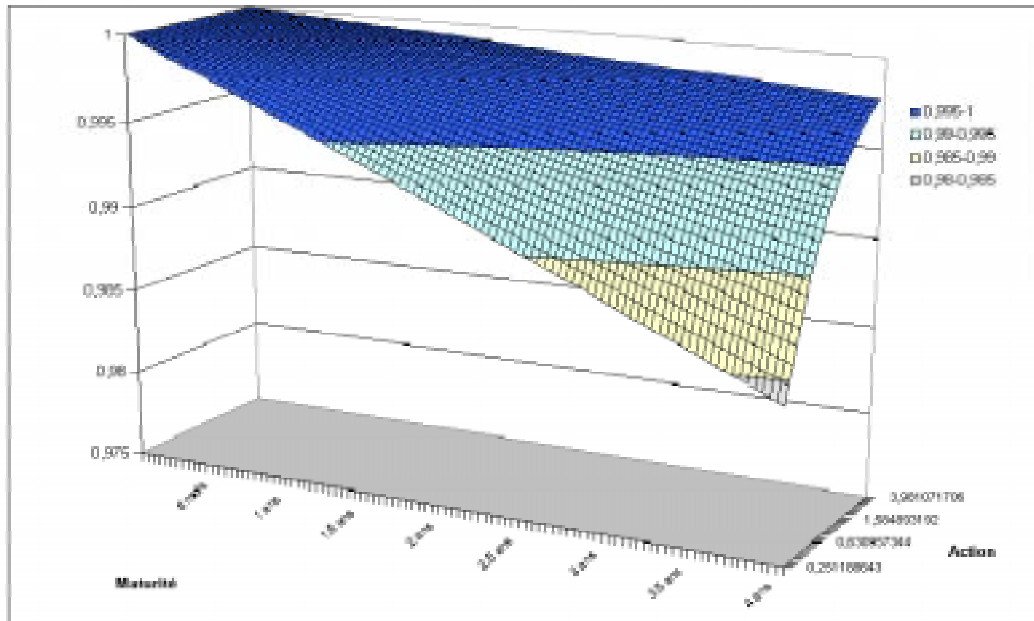
Les résidus moyens sont plutôt bons hors mis pour le CIC. Ceci est conforme aux régressions linéaires des probabilités sur l'action que nous avons dans un premier temps ajustées : les probabilités de survie estimées du CIC sont très peu corrélées avec l'action. En ce qui concerne les autres séries, le pouvoir explicatif de l'action actualisée est important et les probabilités estimées s'ajustent bien aux probabilités observées.

On remarque que les probabilités des banques américaines sont plus sensibles que celles des banques françaises aux variations de l'action ( $p$  est plus petit pour les banques françaises). Ce point est intéressant car il suggère que les marchés de bonds et d'actions américains sont mieux arbitrés que ceux français. Cela confirme l'observation des données brutes qui nous avait montré que les titres américains étaient beaucoup plus liquides et volatiles que les titres français. Notre spécification à un facteur, l'action actualisée, apparaît plus pertinente dans le contexte américain.

La surface donnant la probabilité de survie estimée pour BNP en fonction de l'action et de la maturité, représentée dans le graphique suivant, illustre le fait que les fonctions estimées par la méthode des différences finies respectent bien les deux propriétés fondamentales : la probabilité de survie croît avec l'action actualisée et avec la maturité.

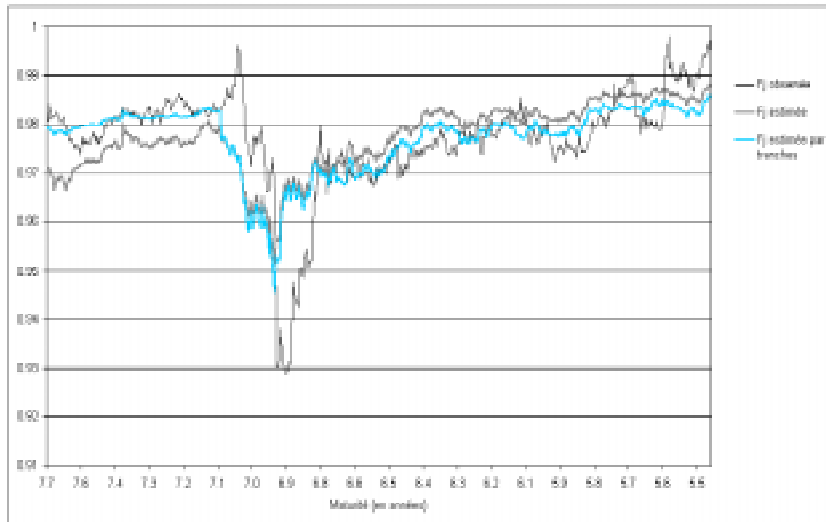
---


$$\text{Résidu moyen} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{nobs} (\hat{F}(s_{t_i}, \Gamma_i) - \tilde{F}_{(\hat{p}, \hat{c})}(s_{t_i}, \Gamma_i))^2}{nobs}}$$



Probabilité de survie de la BNP estimée en fonction de la maturité et de l'action.

On prend l'exemple du Citigroup pour commenter plus particulièrement les résultats. L'ensemble des graphiques d'ajustement de probabilités de survie pour les 5 séries figure en annexes. Le graphique suivant présente deux ajustements de la série des probabilités de survie. Le premier correspond à la solution du programme (44) sur la totalité des 582 observations tandis que le second est la solution du même programme mais sur la série découpée en 3 tranches. Ce second ajustement donne des résultats sensiblement meilleurs. Il permet en effet d'isoler la tranche d'observation pour laquelle les probabilités sont fortement volatiles. Cette période correspond en fait à une forte variation des taux sans risque. Les prix des bonds risqués ne s'ajustant pas assez rapidement aux variations du sans risque, on observe cette instabilité des probabilités de survie.



Probabilités de survie estimées et observées du Citigroup

On se rend compte que la série issue de l’ajustement par tranche s’ajuste sensiblement mieux aux observations. Cela suggère que les valeurs des paramètres sont relativement instables et qu’il faut les recalculer périodiquement. Néanmoins, la division en trois intervalles de la série du Citigroup qui représente un peu plus de deux ans d’observations donne de bons résultats. Le besoin de réajustement n’est donc pas excessivement fréquent.

Par ailleurs, les probabilités estimées sont moins volatiles que celles observées, ce qui est en fait appréciable dans la mesure où la forte volatilité des probabilités observées s’explique en partie par la mauvaise qualité des données. Le fait que les probabilités de survie estimées varient est un point intéressant : on peut penser que notre modèle permet de prendre en compte rapidement des variations de la qualité de la solvabilité des entreprises en intégrant plus rapidement les ajustements perceptibles sur le marché action que ne le font par exemple les agences de rating.

Le modèle apparaît en partie pertinent et doit pouvoir permettre de profiter d’opportunités d’arbitrage passagères sur le marché des bonds, moins liquide que celui des actions à partir duquel les estimations sont réalisées.



## 4.6 Calcul de la probabilité réelle

Les calculs précédents permettent dorénavant de calculer le prix d'un bond risqué, c'est à dire le spread que l'on fait payer à un emprunteur en fonction du risque qui lui est attaché. Ils permettent aussi de calculer le prix des dérivés de crédit.

En revanche, nous n'avons obtenu que des probabilités de survie risque neutre et non réelles, ce qui peut être appréciable dans une optique de gestion des risques. La probabilité historique de survie est donnée par :

$$\mathbb{P}(T < \tau | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\exp(-\int_t^T \frac{c}{s_u^p} du) | \mathcal{F}_t)$$

Une fois estimés  $c$  et  $p$ , il suffit de connaître la loi du processus  $(s_t)_{t \geq 0}$  sous la probabilité historique. Ces paramètres étant connus, on peut soit utiliser la formule précédente directement pour faire du Monte-Carlo, soit indirectement en obtenant une équation différentielle que l'on résoudra comme précédemment grâce à la méthode des différences finies.

On rappelle la forme de la diffusion de  $s$  sous la probabilité réelle :

$$ds_t = s_t((\mu - r_t)dt + \sigma d\widetilde{W}_t)$$

avec  $\widetilde{W}_t$  un brownien sous la probabilité réelle. Il reste à estimer le paramètre  $\mu$  qui représente le trend de l'action non actualisée.

Nous utilisons à cet effet l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\mu$  qui est obtenu à partir de la série du cours de l'action. On a exhibé au paragraphe précédent les estimateurs suivants :

$$\widehat{m} = \frac{\sum_{i=2}^{nobs} R_{t_i}}{t_{nobs} - t_1}$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{nobs - 1} \sum_{i=2}^{nobs} \frac{(R_{t_i} - m(t_i - t_{i-1}))^2}{(t_i - t_{i-1})}$$

où  $m = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$ . On en déduit l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\mu$  :

$$\widehat{\mu} = \widehat{m} + \frac{\widehat{\sigma^2}}{2}$$

L'utilisation de cet estimateur donne les résultats suivants (en rendements annuels égaux à  $\exp(365.\mu) - 1$ ) :

série	rendement annuel
BNP	10,86%
CIC	9,4%
Natexis	12,02%
Citigroup	13,26%
Mellon Bank	3,45%

La limite de l'utilisation des estimateurs du maximum de vraisemblance réside dans le nombre limité de données.

Comme la méthode des différences finies a déjà été programmée, nous utilisons la même méthode pour obtenir les probabilités de survie historiques. Nous reprenons le schéma de Feynman-Kack pour obtenir une équation différentielle. On avait obtenu dans le cas général l'équation suivante :

$$\Psi_t(t, s, T) + \Psi_s(t, s, T)\mu(t, s) + \frac{1}{2}Trace[\Psi_{ss}(t, s, T)\sigma(t, s)\sigma'(t, s)] = \phi(t, s)\Psi(t, s, T)$$

On obtient aisément en tenant compte des hypothèses formulées :

$$\Psi_t(t, s, T) + s(\mu - r_t)\Psi_s(t, s, T) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \Psi_{ss}(t, s, T) = \phi(s)\Psi(t, s, T) \quad (45)$$

En effectuant à nouveau le changement de variables  $\Psi(t, T, s) = H(\Gamma, \ln(s)) = H(\Gamma, x)$  qui permet d'avoir des coefficients constants, il résulte :

$$-H_\Gamma + \frac{1}{2}\sigma^2 H_{xx} + (\mu - r_t - \frac{1}{2}\sigma^2)H_x = \phi(e^x)H \quad (46)$$

Il s'agit d'une équation différentielle similaire à celle obtenue dans le cas de la probabilité risque neutre, le terme devant  $H_x$  étant égal à  $(\mu - r_t - \frac{1}{2}\sigma^2)$  au lieu de  $(-\frac{1}{2}\sigma^2)$ . Les conditions de bord sont identiques et soumises à la même interprétation.

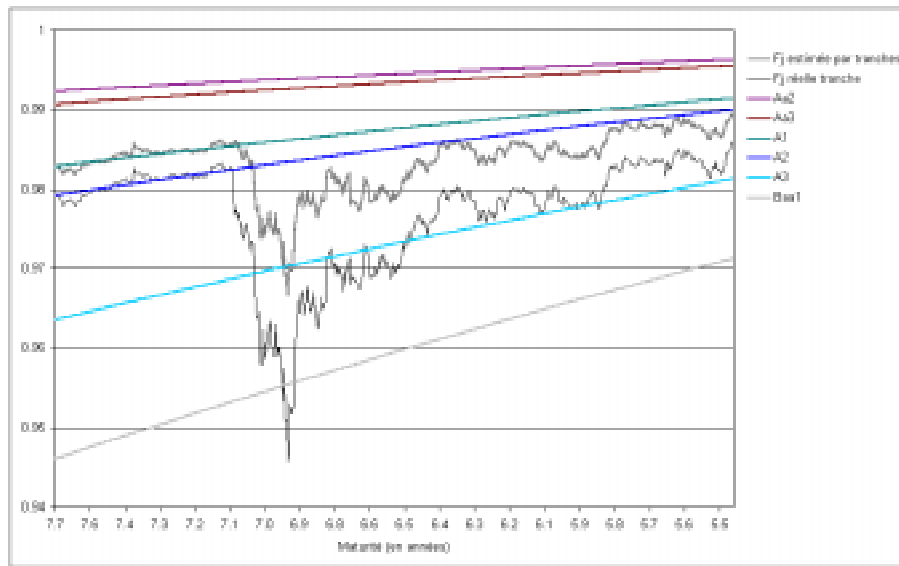
L'équation de récurrence obtenue par discrétisation de (46) est :

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\varepsilon\sigma^2}{2h^2} - \frac{\varepsilon\sigma^2}{4h} + \frac{\varepsilon\mu}{2h} - \frac{\varepsilon r_t}{2h}\right)H_{i-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{\varepsilon c}{\exp(p(hi - K))} + \frac{\varepsilon\sigma^2}{h^2}\right)H_i^{n+1} \\ & + \left(-\frac{\varepsilon\sigma^2}{2h^2} + \frac{\varepsilon\sigma^2}{4h} - \frac{\varepsilon\mu}{2h} + \frac{\varepsilon r_t}{2h}\right)H_{i+1}^{n+1} = H_i^n \end{aligned} \quad (47)$$

L'utilisation de ce schéma dans lequel on introduit l'ensemble des paramètres estimés permet d'obtenir une estimation des probabilités de survie historiques.

Il est important de remarquer à ce niveau que la méthode que nous avons proposé ne nous a pas obligé à faire des hypothèses sur le processus suivi par le taux sans risque, hors mis son indépendance vis-à-vis des paramètres du défaut. Ce point est intéressant car il diminue le nombre de paramètres à estimer. Le modèle permet donc d'obtenir des probabilités historiques de survie en dehors de toute modélisation du processus de taux sans risque.

Le changement de probabilité induit une augmentation sensible de la probabilité de survie, et ce d'autant plus que l'excès de rendement estimé,  $\hat{\mu} - r_t$ , est élevé. Le graphique montre le passage de la probabilité risque neutre à la probabilité réelle pour le Citigroup. Il donne aussi les probabilités de survie en fonction du niveau de rating Moody's.



Probabilités de survie risque neutre et historiques estimées pour le Citigroup

On peut tirer trois enseignements des résultats obtenus. On voit tout d'abord que la technique utilisée pour revenir aux probabilités historiques est relativement simple dans le cas présent d'un modèle à un facteur.

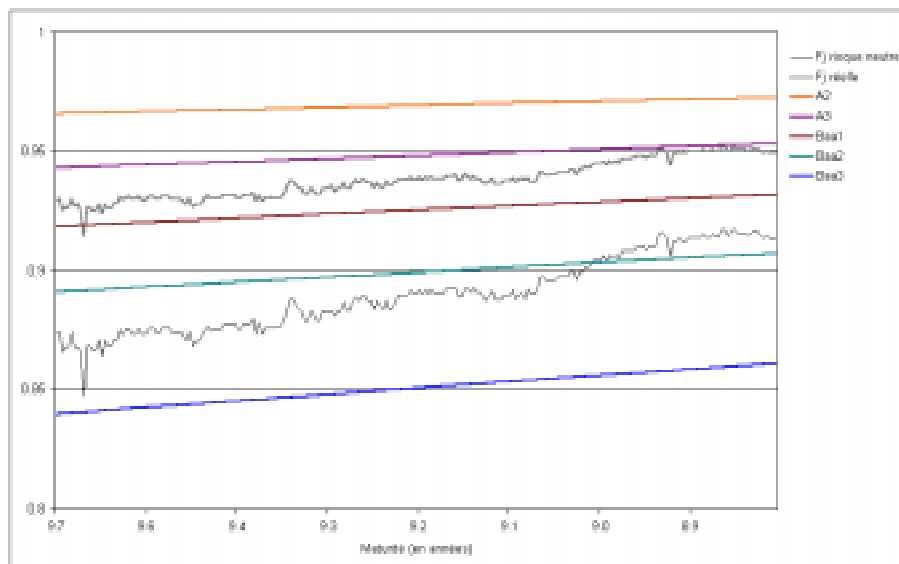
Ensuite, l'effet de cette manipulation est important et permet d'obtenir des probabilités de survie (et donc de défaut) qui sont plus interprétables. Cela montre notamment que les modélisations qui supposent les agents neutres au risque procèdent à une simplification qui n'est pas tenable. Si on considère les probabilités de survie risque neutre, on estime que le Citigroup est dans un premier temps noté A2 puis A3. En regardant les probabilités réelles, on passe de A1 à A2, ce qui se rapproche de la réalité.

Le Citigroup est en fait noté par Moody's AA3, soit un rating supérieur à celui que nous trouvons ici. Ce constat est général pour l'ensemble des séries étudiées. Cela confirme l'existence d'une prime de liquidité ou encore d'information asymétrique dans le spread qui n'est pas prise en compte par notre modèle, celui-ci ne modélisant que le défaut. Une extension naturelle des modèles à intensité, qui utilisent comme unique information la série des spreads, serait d'incorporer une prime de liquidité dans la modélisation du spread.

Le tableau suivant donne le rating Moody's des entreprises étudiées, ainsi que celui que l'on déduit de nos estimations, dans un premier temps sous la probabilité risque neutre, puis sous la probabilité réelle.

Série	Rating Mood'ys	Rating issu de l'estimation risque neutre	Rating après changement de probabilité
BNP	Aa3	Ba1	Baa3
CIC	A2	Baa2	A3
Natexis	Aa3	Baa2	Baa1
Citigroup	Aa2	A2/A3	A1/A2
Mellon	Aa3	A2	A1/A2

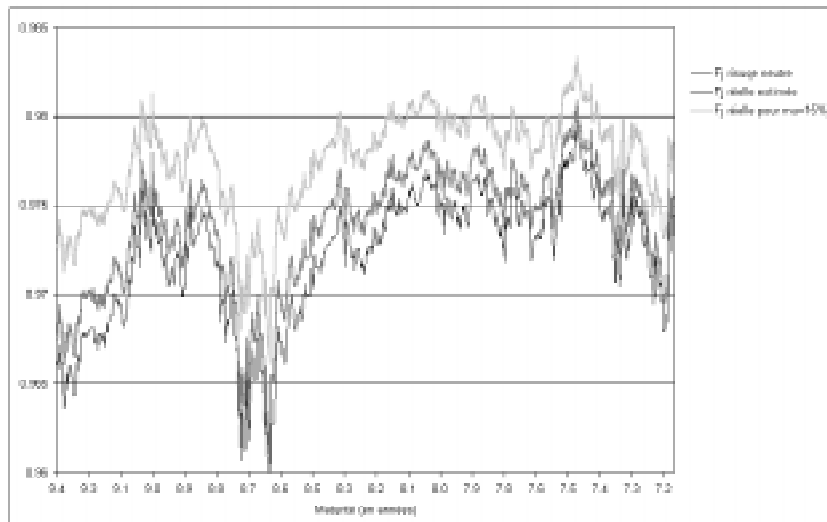
L'application du modèle au calcul de la probabilité de survie ou de défaut semble assez prometteuse. Il suffit pour pour l'améliorer de prendre en compte dans la modélisation du spread d'autres phénomènes financiers comme par exemple le niveau de liquidité du titre.



Probabilités de survie risque neutre et historiques estimées pour le CIC

Les autres résultats sont en annexes.

Un remarque s'impose sur le rôle joué par le rendement de l'action,  $\mu$ . Ce paramètre disparaît en général des formules de valorisation risque neutre. C'est notamment le cas dans notre modèle où la valorisation d'un bond risqué ne nécessite pas la détermination de  $\mu$ . En effet, dans ces modélisations, l'absence d'opportunité d'arbitrage implique une redondance entre les paramètres  $\sigma$  et  $\mu$ : un certain niveau de risque  $\sigma$  est nécessairement associé à un niveau de rendement  $\mu$ . Dans le calcul des probabilités historiques de survie, le rôle du rendement de l'action est pourtant essentiel. Un meilleur rendement de l'action est corrélé avec un meilleur rendement des actifs, ce qui induit une baisse de la probabilité de défaut. Sur le graphique suivant, on illustre ce rôle en donnant diverses valeurs au paramètre  $\mu$ .



Effet de la valeur de  $\mu$  sur le changement de probabilité

## 5. Bilan et perspectives

L'objet de cette partie est de faire le point sur la démarche qui a été adoptée ici, puis de présenter les principales utilisations possibles de ce travail et enfin de proposer quelques développements et améliorations envisageables.

### 5.1 Originalité de la démarche

Le but de ce mémoire était de regarder comment il était possible d'implémenter un modèle de risque de défaut à intensité pour modéliser le spread de crédit des titres obligataires d'entreprises. Nous avons pour cela repris la structure du modèle de Madan et Unal (1998) qui avançait l'idée originale de prendre en compte le niveau de seniorité des titres dans la modélisation. Cela permet en effet d'estimer séparément les deux composantes du risque de crédit que sont le taux de recouvrement en cas de défaut et la probabilité de survie.

Pour arriver à une formule qui séparait ces deux risques, Madan et Unal font l'hypothèse d'indépendance entre le processus de taux d'intérêt sans risque et les paramètres du défaut. Nous avons montré qu'il était possible d'obtenir une formule similaire sans faire cette hypothèse en utilisant l'outil de la probabilité forward neutre. Cette nouvelle formule permet d'élargir le cadre d'application du modèle.

Nous avons par la suite appliqué le modèle à 5 séries de spreads de banques françaises et américaines, ce qui nous a permis dans un premier temps d'obtenir des taux de recouvrement et des probabilités de survie sous la probabilité risque neutre. L'estimation de la loi du taux de recouvrement s'est avérée doublement problématique. Tout d'abord, elle nécessitait l'observation en continu de la proportion de dette senior de chacune des entreprises. Or il est difficile d'obtenir cette donnée de façon précise à chaque instant. Il nous a donc fallu reformuler le modèle en supposant cette proportion constante, ce qui a notamment conduit à établir une relation déterministe entre l'espérance et la variance du taux de recouvrement.

Par ailleurs, nous avons vu que les titres obligataires risqués d'entreprises étaient peu traités. Cela suggère l'existence de primes telle qu'une prime de liquidité dans le spread de taux, qui ne sont pas prises en compte par notre modélisation. La première conséquence est d'induire une sous estimation de l'espérance du taux de recouvrement. Nous avons vu que cela se répercutait aussi à travers une sous estimation des probabilités de survie.

Nous avons ensuite modélisé les probabilités de survie risque neutre en proposant une intensité de défaut originale à un facteur. Celle-ci dépend en effet du niveau de l'action actualisée à travers une forme fonctionnelle à deux paramètres dont un de niveau et l'autre de sensibilité à l'action. La valeur de l'action, si les marchés sont efficients et intègrent donc toute l'information financière, est un bon indicateur de la capacité de l'entreprise à rembourser ses emprunts. Cela nous a permis de rendre compte d'une bonne partie des variations des probabilités de survie risque neutre.

Le calcul des paramètres de l'intensité et du taux de recouvrement suffisent à calculer le prix d'une dette risquée ainsi que celui de produits dérivés de cette dette. La littérature ne va d'ailleurs en général pas plus loin. Néanmoins, dans une optique de gestion des risques, il est intéressant de calculer les probabilités historiques de survie des entreprises. Cela donne notamment un élément de comparaison avec les probabilités de survie publiées par les grandes agences de notation telles que Moody's ou Standard and Poors. Nous avons proposé une méthode qui permet d'obtenir ces probabilités à partir des estimations réalisées en y incorporant les rendements historiques des actions des entreprises. Les probabilités réelles estimées se sont avérées légèrement inférieures à celles des agences de rating. Cela a confirmé l'existence de primes autres que celle liée au défaut dans les spreads de crédit.

Nous allons voir maintenant rapidement comment cette modélisation peut être utilisée dans la gestion du risque ou dans la valorisation de produits complexes.



## 5.2 Applications du modèle

On peut identifier deux grandes catégories d'applications du modèle : la gestion des risques et la valorisation de produits complexes.

### 5.2.1 Gestion des risques

L'évaluation du risque financier, à la fois de marché et de crédit, attaché à un portefeuille est une problématique essentielle de la gestion de risque. Une modélisation du processus de prix des titres d'emprunt risqués ouvre un certain nombre de possibilités. Notre modèle fait dépendre la valeur du spread du niveau de l'action. Il peut donc être utilisé directement pour mettre en évidence des phénomènes de corrélation dans un portefeuille entre des titres obligataires risqués, qu'ils soient junior ou senior, et des positions sur l'action. On peut par exemple imaginer se couvrir contre du défaut en se positionnant court sur l'action.

Pour valoriser un portefeuille plus complexe, tout en tenant compte des corrélations entre des titres correspondant à différentes entreprises, on voit qu'il faut estimer une matrice de corrélation entre les cours des actions. Cette estimation peut néanmoins s'avérer coûteuse et incertaine. Si on s'intéresse à un portefeuille composé uniquement d'obligations, l'utilisation d'un modèle à intensité peut s'avérer particulièrement intéressante. Il suffit pour y incorporer de la corrélation de faire dépendre l'intensité de chaque bond de variables communes. On peut ainsi imaginer faire dépendre l'intensité de défaut du taux d'intérêt sans risque, ce qui suppose d'utiliser notre formulation sous la probabilité forward neutre. Une autre solution, qui n'est pas exclusive de la précédente, serait de faire dépendre l'intensité d'un indice de marché fortement lié à l'action. On peut ainsi introduire de la corrélation à moindres frais entre différents titres obligataires. La puissance des modèles à intensité réside donc dans l'opportunité de spécifier l'intensité de défaut comme une fonction d'un grand nombre de variables d'états pertinentes.

Il faut remarquer dans ce cas que l'estimation de l'intensité devient plus difficile, mais reste toujours plus simple que celle d'une matrice de corrélation.

On peut enfin imaginer considérer un portefeuille qui intégrerait des dérivés de crédit.

### 5.2.2 Evaluation de dérivés de crédit

Nous voyons ici rapidement comment valoriser des dérivés de crédit en utilisant notre modèle à intensité.

Prenons l'exemple d'une option d'achat européenne sur le prix de la dette d'échéance  $T$   $V(t, T)$ , de cours d'exercice  $K$  et d'échéance  $L$  ( $L < T$ ). En appliquant le principe de la valorisation risque neutre, le prix de l'option est donné par :

$$C_t(K, L) = E^*(\max(V(L, T) - K)/B(L)|\mathcal{F}_t)/B(t)$$

Comme nous disposons d'une formule de valorisation de  $V(t, T)$  dont les paramètres sont maintenant connus, la valeur de l'option peut être calculée avec la formule précédente par exemple en utilisant des méthodes de Monte-Carlo. Il faut malgré tout à ce niveau spécifier le processus suivi par le taux sans risque. Les simulations porteront alors sur ce processus ainsi que sur celui de l'action.

### 5.2.3 Valorisation d'une nouvelle dette

Nous avons jusqu'à maintenant modélisé l'évolution du prix d'une dette risquée qui avait déjà été émise. Le problème peut se poser de valoriser une dette risquée qui n'est pas cotée sur le marché. Il faudrait pour cela connaître les paramètres de l'intensité de cette entreprise.

Nous avons dans ce travail estimé les paramètres de l'intensité de défaut série par série, considérant de cette façon que ces paramètres étaient propres à chaque titre. On pourrait toutefois très bien imaginer estimer ces paramètres de façon unique sur un panel d'entreprises. Une telle démarche serait notamment pertinente si l'intensité retenue est elle-même fonction

d'un certain nombre de variables propres à chaque entreprise. Il serait envisageable par exemple de faire dépendre l'intensité du rating de l'entreprise, d'un indice sectoriel ou encore des variations du cours de l'action.

Cette démarche rend possible la détermination de la valeur de la dette d'une entreprise n'ayant pas encore d'emprunt coté. Ceci peut être utile dans deux situations distinctes. On peut tout d'abord vouloir évaluer le spread de taux à faire payer à une entreprise qui veut émettre une obligation. La deuxième application se rapporte à l'activité en plein essor de la titrisation : quelle est la valeur de marché d'une dette déjà contractée mais pas encore cotée?

### **5.3 Développements**

On devine que la plupart des développements possibles des modèles à intensité reposent sur la forme de l'intensité de défaut. Un des risques majeurs des modèles à intensité repose sur le fait qu'il n'y a pas de véritable fondement économique à la modélisation. S'il est vrai que l'action possède pour certains titres un fort pouvoir explicatif sur les variations du spread, il est possible que d'autres informations soient responsables de ces variations. Cela peut par exemple être la participation de l'Etat dans l'actionnariat de l'entreprise qui risque de diminuer la probabilité de défaut. En effet, celui-ci risque vraisemblablement de se porter au secours de son entreprise en cas de difficultés, contrairement à la plupart des actionnaires. Notre modèle peut intégrer ces informations à court terme à travers la valeur des paramètres  $c$  et  $p$ , mais pas leur changement sur le long terme.

Une première piste serait de faire dépendre l'intensité non seulement de l'action mais aussi du processus de taux sans risque. Le modèle de Madan et Unal doit alors être réécrit sous la probabilité forward neutre comme nous l'avons déjà suggéré.

Il faut aussi tirer des enseignements des comparaisons que nous avons pu faire entre les

résultats fournis par notre modèle et les probabilités de survie fournies par les agences de rating. Nous avons en effet conclu que le spread de taux sur les bonds risqués ne contenait pas uniquement du défaut mais aussi certainement une prime de liquidité ou une prime d'information asymétrique. Il conviendrait donc d'intégrer un ces phénomènes dans la modélisation. Duffie et Singleton (1998) suggèrent d'introduire un paramètre de liquidité  $l_t$  dans leur formule de valorisation du zéro-coupon qui devient alors :

$$V(t, T) = E^*(\exp(-\int_t^T (r_u + \lambda_u L_u + l_t) du))$$

avec  $\lambda_t$  l'intensité de défaut et  $L_t$  le taux de recouvrement en cas défaut.

Cette formulation semble particulièrement intéressante si on considère les résultats que nous avons obtenus. Le problème essentiel de ce modèle est l'estimation des différents paramètres sous l'intégrale qui peut demander de nombreux calculs et poser des problèmes d'identifiabilité. Il faut en effet résoudre ici un problème d'optimisation portant sur de nombreuses variables à l'aide de méthodes de simulations ou de différences finies.

## REFERENCES

- Altman E. I. (1983/1990), *Corporate Financial Distress*, Wiley, New York.
- Basle Committee on Banking Supervision (April 1999), *Credit Risk Modelling: Current Practice and Applications*.
- Black F. et Scholes M. (1973), *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, 81, 637-654.
- Bohn J. R. (1998), *A survey of Contingent Claims Approaches to Risky Debt Valuation*, Working paper, Haas School of Business, University of California, Berkeley.
- Dana R.A. et Jeanblanc-Picqué M. (1998), *Marchés Financiers en Temps Continu, Valorisation et Equilibre*, Economica.
- Duffee G.R. (1998), *The relationship between treasury yields and corporate bond yield spreads*, Journal of Finance, 53 (6), 2225-2241.
- Duffie D. et Singleton K. (1998), *Modelling term structure of defaultable bonds*, Stanford University.
- Duffie D. et Lando D. (1997), *Term structure of credit spreads with incomplete accounting information*, preprint, CAF Copenhagen.
- Flannery M.J. et Sorescu S.M. (1996), *Evidence of Bank Market Discipline in Subordinated Debenture Yields: 1983-1991*, Journal of Finance, 51, 1347-1377.
- Fons J.S. (1994), *Using default rates to model the term structure of credit risk*, Financial Analyst Journal, 50, 25-32.
- Francks J., Nyborg K. et Torous W. (29/05/98), *Faillites, le maquis des réglementations nationales*, Art de la Finance, supplément les Echos.
- Gouriéroux C., Monfort A., Trognon A. (1985), *Moindres Carrés Asymptotiques*, Annales de l'INSEE, 58, 91-122.
- Harrison M. et Kreps D. (1979), *Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets*, Journal of Economic Theory, 20, 381-408.
- Hansen L. P. (1982), *Large Sample Properties of Generalized Method of Moment Estimators*, Econometrica, 50, 1029-1054.
- Jarrow R.A. et Turnbull S.M. (1995), *Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk*, Journal of Finance, 50, 53-85.
- Jarrow R.A., Lando D. et Turnbull S.M. (1997), *A markov model for the term structure of credit risk spreads*, Review of Financial Studies, 10, 481-523.
- Jarrow R.A., Lando D. et Turnbull S.M. (2000), *The intersection of market and credit risk*, Journal of Banking and Finance, 24, 271-299.

- Jeanblanc M. et Rutowski M. (1999), *Modeling default risk: an overview*. Mathematical Finance: Theory and practice, Fudan University. A venir dans Modern Mathematics Series, High Education Press.
- Lamberton D. et Lapeyre B. (1991), *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*, Mathématiques et applications, Ellipse, Paris.
- Lando D. (1994/1998), *On Cox processes and credit risky securities*, Department of Operations Research, University of Copenhagen.
- Longstaff F. et Schwartz E. (1995), *A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt*, Journal of Finance, 50, 789-819.
- Kusuoka S. (1999), *A remark on default risk models*, Advances in Mathematical Economics, 1, 69-82.
- Madan D. et Unal H. (1998), *Pricing the the risk of default*, The Review of Derivatives Research, 2, 121-160.
- Madan D. et Unal H. (1998), *A Two-Factor Hazard-Rate Model for Pricing Risky Debt in a Complex Capital Structure*, preprint, Robert H. Smith School of Business, University of Maryland.
- Merton R. (1974), *On the princing of corporate debt: the risk structure of interest rates*, Journal of Finance, 3, 449-470.
- Shane H. (1994), *Comovements of low grade debt and equity returns of highly levered firms*, Journal of Fixed Income, 3/4,79-89.
- Wilson T. (1997a), *Portfolio credit risk (1)*, Risk 10 (9), 111-116.
- Wilson T. (1997b), *Portfolio credit risk (1)*, Risk 10 (10), 56-61.

## 6. Annexes

### 6.1 Estimation du taux de recouvrement

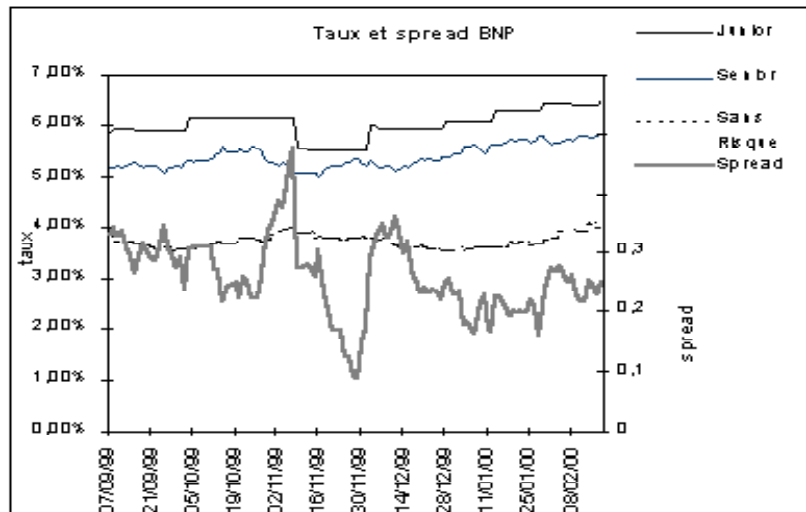
#### 6.1.1 Qualité des séries de taux junior et senior

Nous présentons dans cette partie des séries de taux d'obligations européennes et américaines.

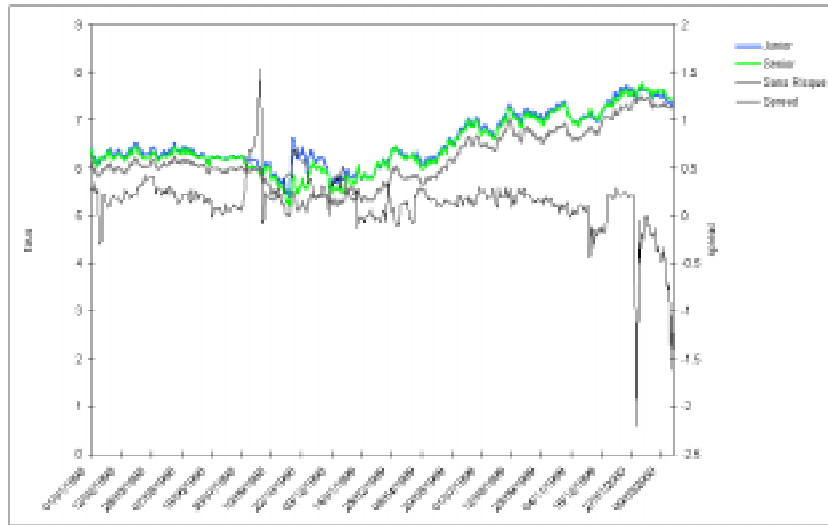
Les titres européens sont très peu traités, notamment sur le junior. A l'inverse, les titres américains sont beaucoup plus liquides mais les taux junior et senior se confondent parfois.

Il arrive pour certaines séries que le junior soit durablement en dessous du senior.

#### Taux sur obligations européennes

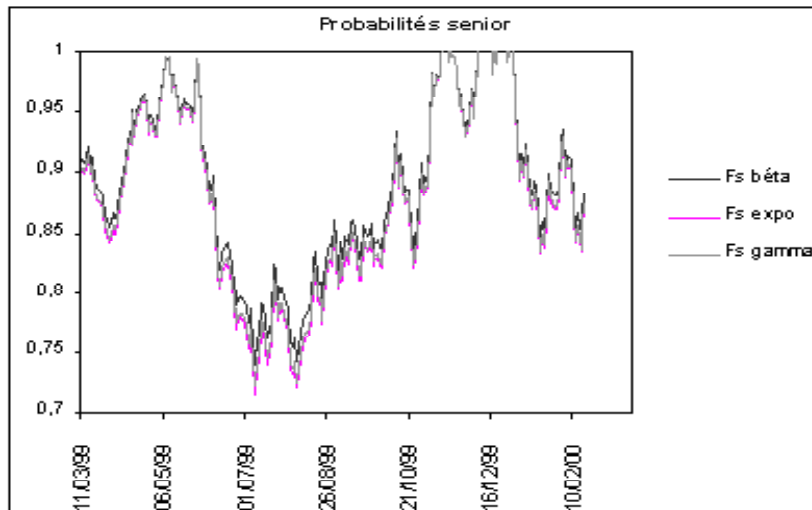


#### Taux sur obligations américaines

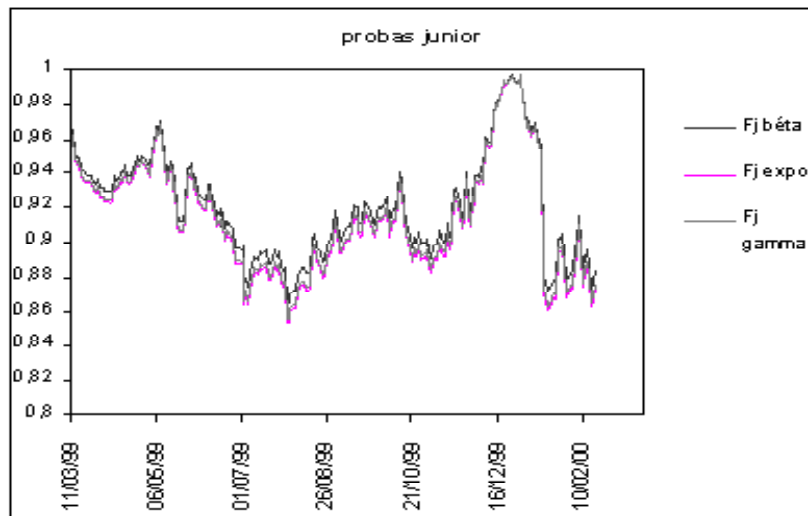


### 6.1.2 Estimation des probabilités de survie

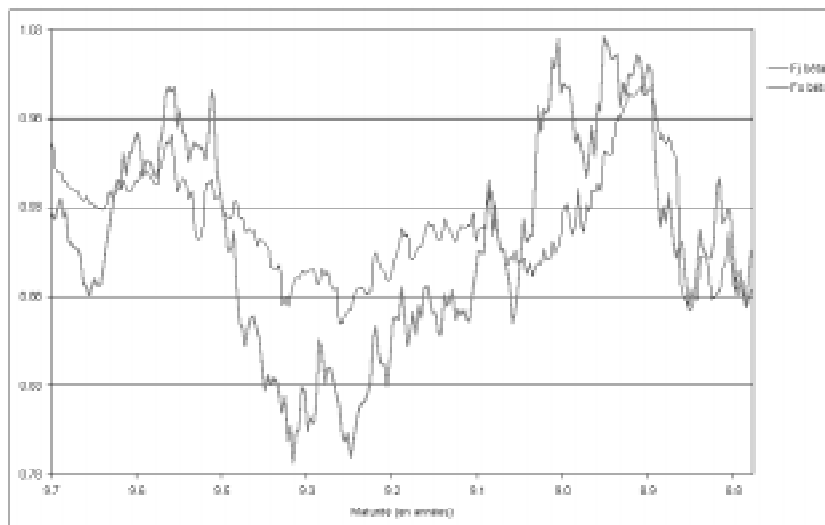
**Sensibilité des estimations à la densité** Les deux graphiques suivants présentent pour le CIC les probabilités de survie junior et senior en fonction de la densité risque neutre retenue pour le taux de recouvrement. On remarque que la valeur des estimations est peu sensible à ce choix.



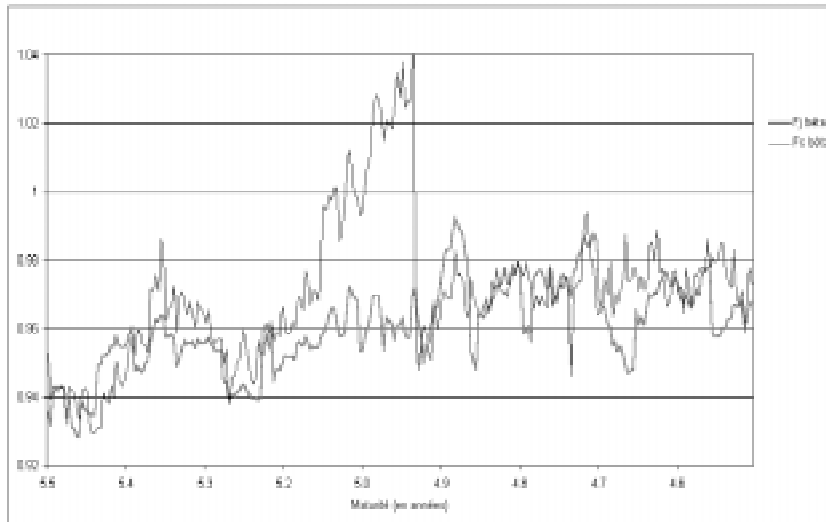




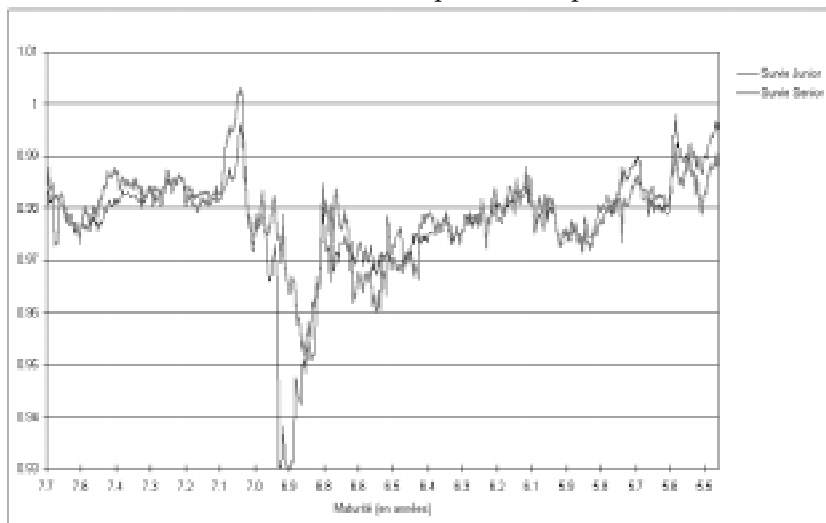
**Probabilités pour les différentes séries** Les graphiques suivants donnent les estimations des probabilités de survie risque neutre, pour des paramètres constants, pour les 5 séries étudiées.



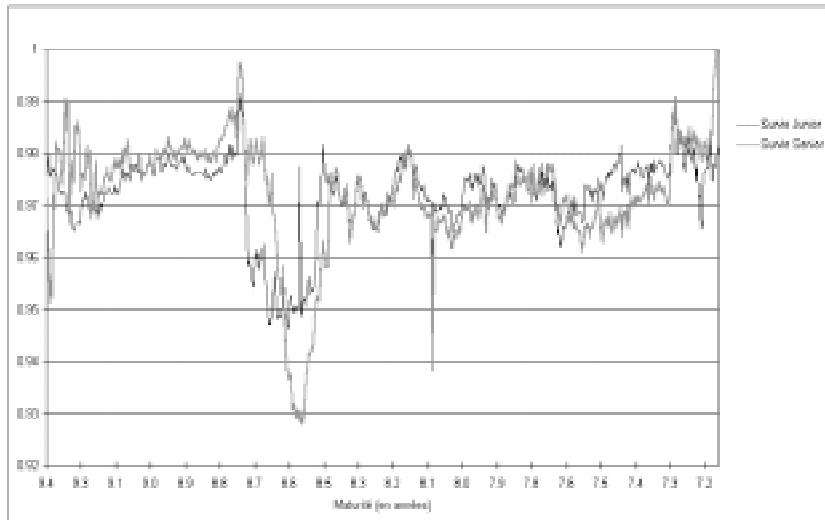
Probabilités de survie risque neutre pour le CIC



Probabilités de survie risque neutre pour natexis



Probabilités de survie risque neutre pour le Citigroup



Probabilités de survie risque neutre pour la Mellonbank

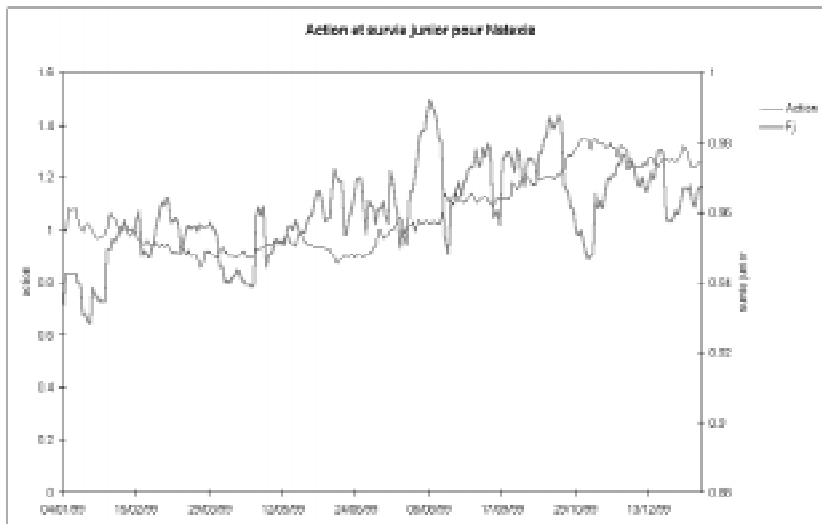
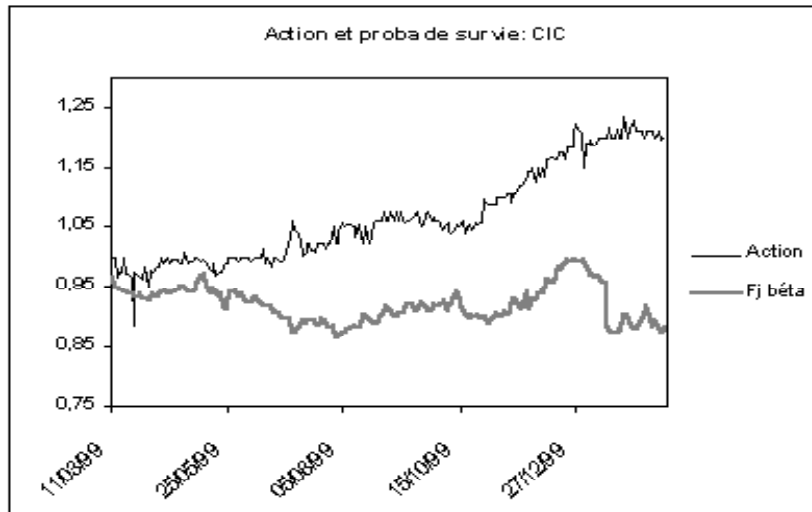
## 6.2 Modélisation de la probabilité de survie

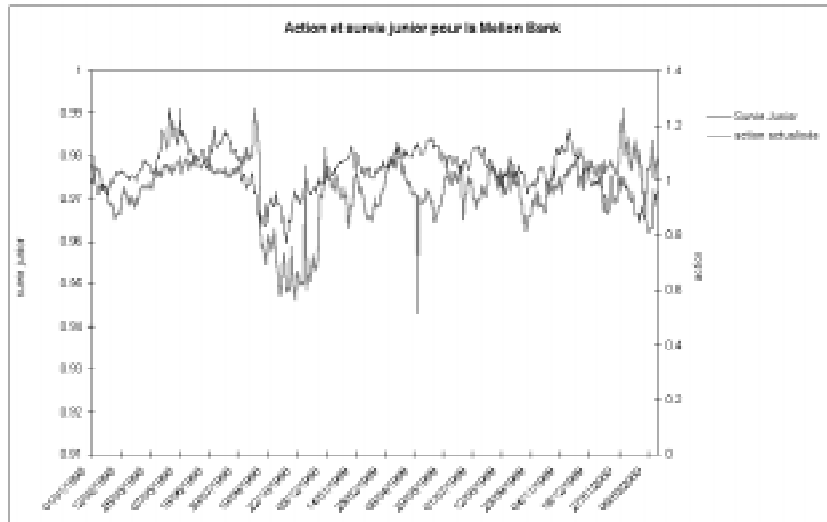
### 6.2.1 Relation entre le cours de l'action et la probabilité de survie

**Corrélations** Le tableau suivant donne les coefficients de corrélation entre les différentes séries, notamment l'action et la probabilité de survie. Il faut cependant prendre ces coefficients avec prudence car ils indiquent une corrélation linéaire, et le modèle étudié suggère plutôt une relation non linéaire.

Série	Junior-senior	Junior-action	Senior-action
BNP	0,76	0,55	0,37
CIC	0,71	0,02	0,25
Natexis	0,47	0,54	0,01
Citigroup	0,84	0,67	0,49
Mellon	0,7	0,36	0,01

**Graphiques** Les graphiques suivants illustrent la relation qui existe entre l'action actualisée et les probabilités de survie. Nous nous intéressons aux probabilités junior pour lesquelles la relation est la plus évidente.





## 6.2.2 Résolution de l'équation différentielle

**Démonstration** Nous explicitons ici les changements de variable pour obtenir une solution sous forme de développement en série entière.

$$1. G_a(x) = U\left(\frac{1}{x}\right) = U(z)$$

⇒

$$G'_a(x) = -z^2 U'(z) \text{ et } G''_a(x) = 2z^3 U'(z) + z^4 U''(z)$$

⇒

$$z^2 U'' + \left(\frac{1}{2}z + z^2\right)U' - aU \tag{48}$$

$$2. U(z) = T(z) \exp(-z)$$

⇒

$$U'(z) = \exp(-z)[T'(z) - T(z)] \text{ et } U''(z) = \exp(-z)[T''(z) - 2T'(z) + T(z)]$$

⇒

$$z^2 T'' + \left(-z^2 + \frac{1}{2}z\right)T' + \left(-\frac{1}{2} - a\right)T = 0 \tag{49}$$

3.  $T(z) = z^\alpha H(z)$

$\Rightarrow$

$$T'(z) = \alpha z^{\alpha-1} H(z) + z^\alpha H'(z) \text{ et } T''(z) = \alpha(\alpha-1)z^{\alpha-2} + 2\alpha z^{\alpha-1} H'(z) + z^\alpha H''(z)$$

$\Rightarrow$

$$z^2 H'' + (2\alpha z + \frac{1}{2}z - z^2)H' + (\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{2}\alpha - \alpha z - \frac{z}{2} - a)H = 0 \quad (50)$$

4. Le coefficient devant  $H$  peut être simplifié en égalisant à 0 la partie qui ne dépend pas de  $z$ . Cela revient à poser :

$$\alpha = \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + a}$$

$\Rightarrow$

$$z^2 H'' + z((1 + \sqrt{\frac{1}{4} + 4a}) - z)H' - z(\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + a})H = 0$$

En divisant par  $z$  et en posant

$$\begin{aligned} m &= 1 + \sqrt{\frac{1}{4} + 4a} \\ n &= \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + a} \end{aligned}$$

on obtient

$$zH'' + (m - z)H' - nH = 0 \quad (51)$$

La solution d'une telle équation est connue sous forme de développement en série entière :

$$H(z) = C_1 M(n, m, z) + C_2 z^{1-m} M(1 + n - m, z - m, z) \quad (52)$$

avec

$$M(m, n, z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j$$

$$a_0 = 1$$

$$a_{j+1} = \frac{n+j}{(m+j)(1+j)} c_j z$$

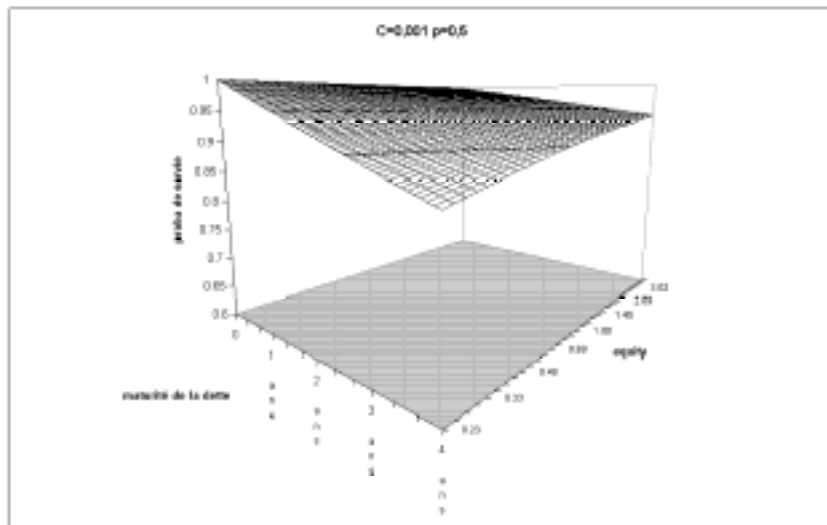
et  $C_1$  et  $C_2$  tels que les conditions de bord sont vérifiées.

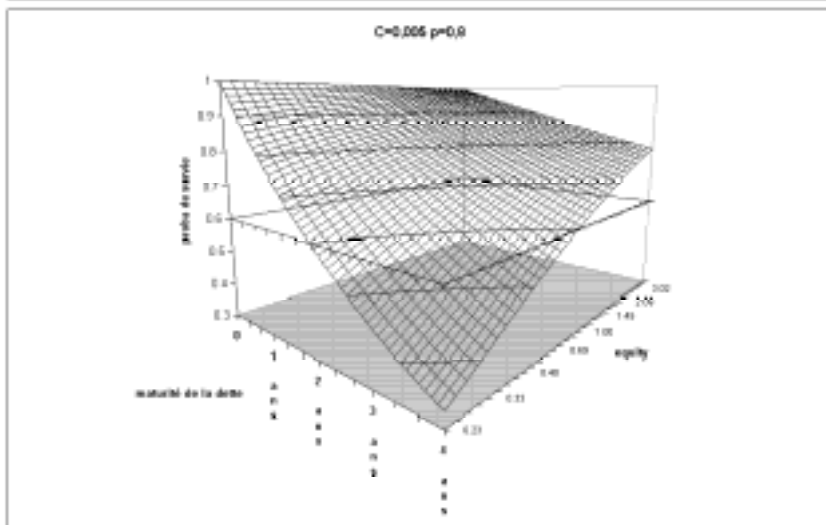
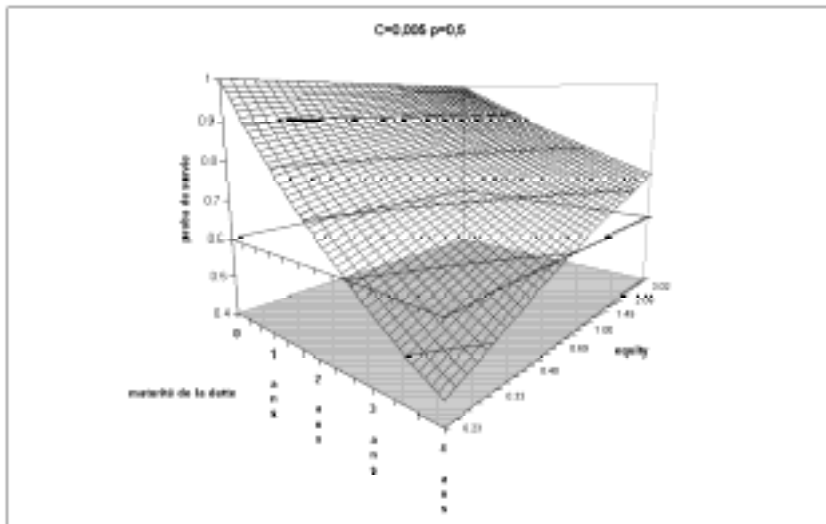
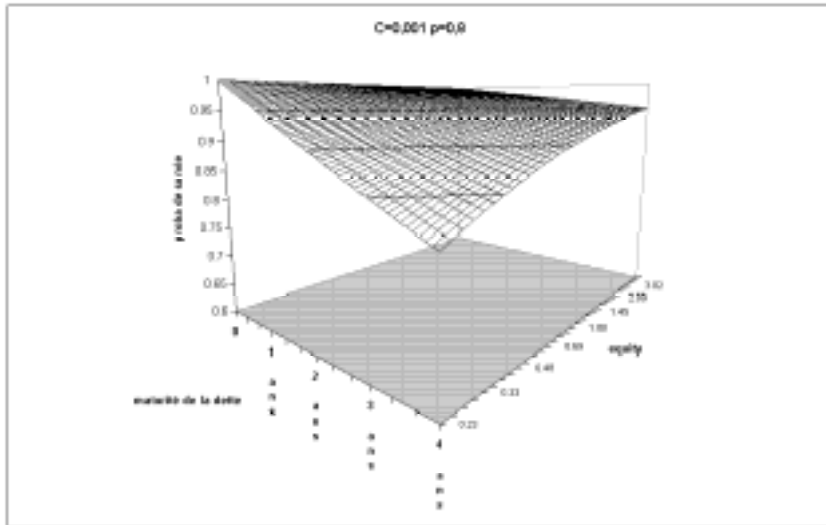
On retrouve ainsi  $G_a$  :

$$G_a(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right) x^{-\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + 4a}} \left[ C_1 M\left(n, m, \frac{1}{x}\right) + C_2 x^{m-1} M\left(1+n-m, z-m, \frac{1}{x}\right) \right] \quad (53)$$

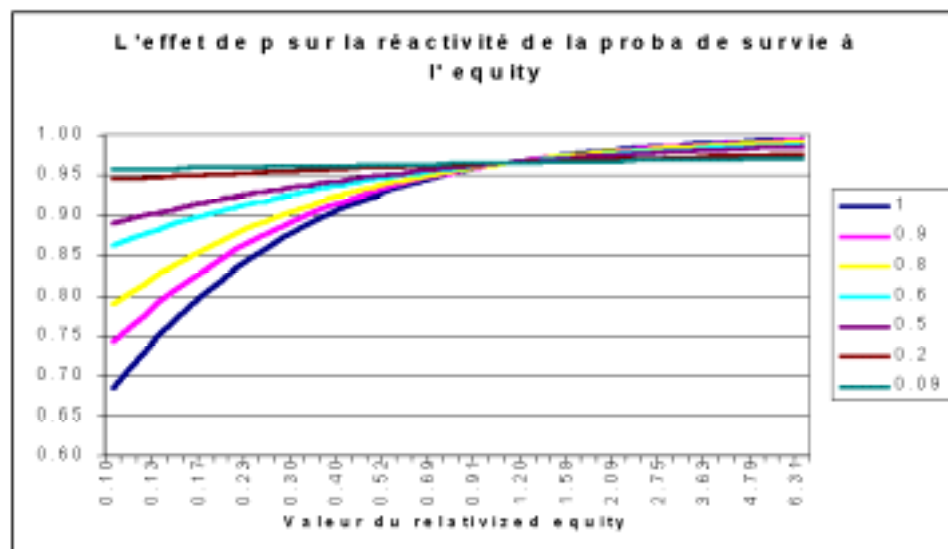
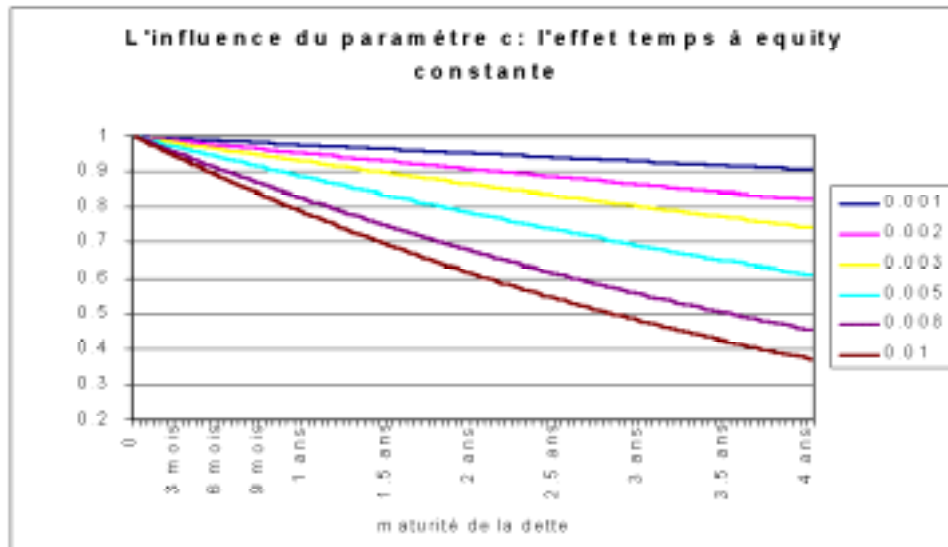
### 6.2.3 Résolution numérique de l'équation différentielle

Simulations de surfaces de probabilité de survie pour divers valeurs des paramètres  $p$  et  $c$ .

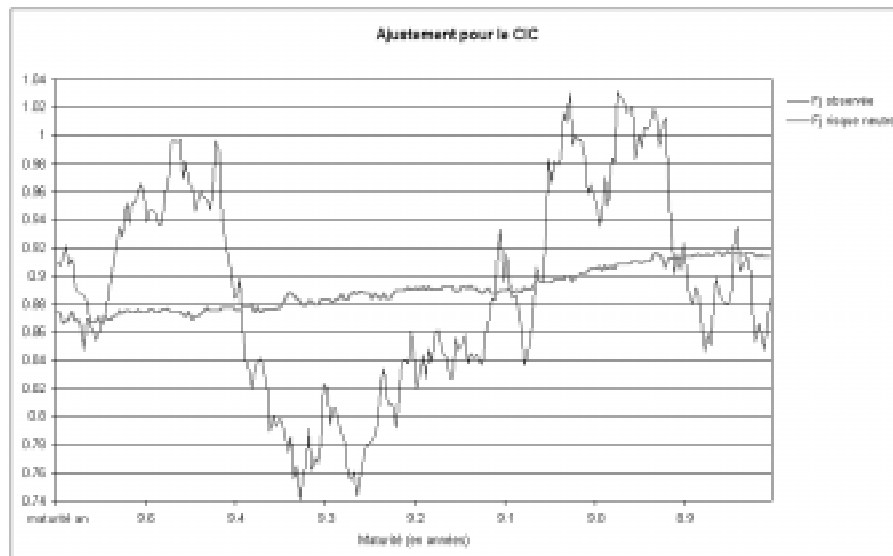
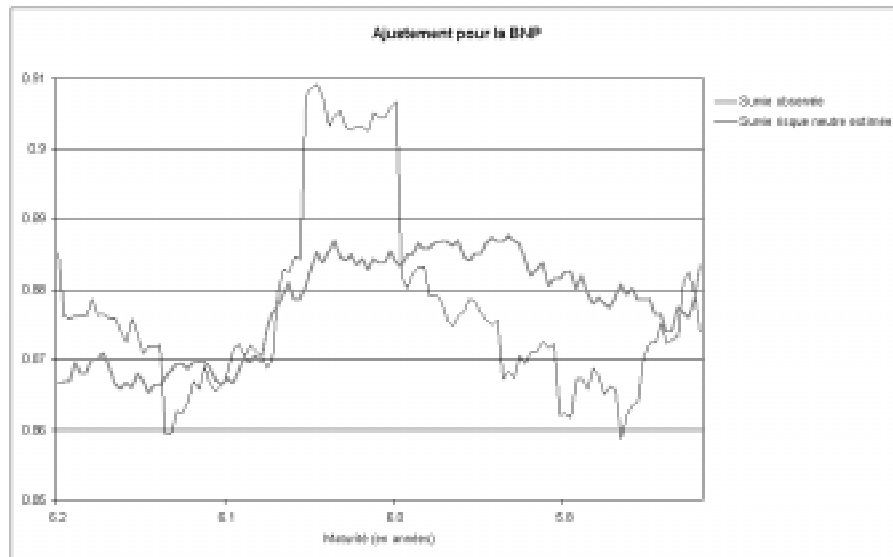


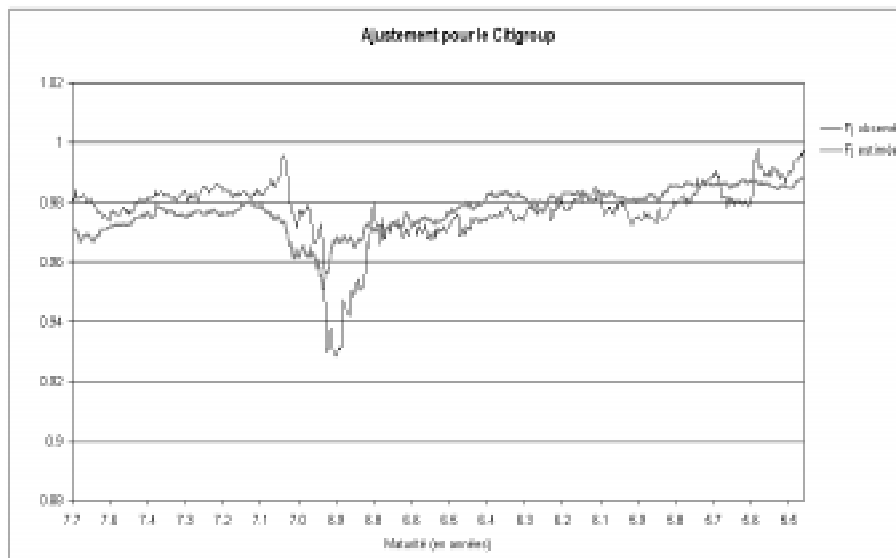
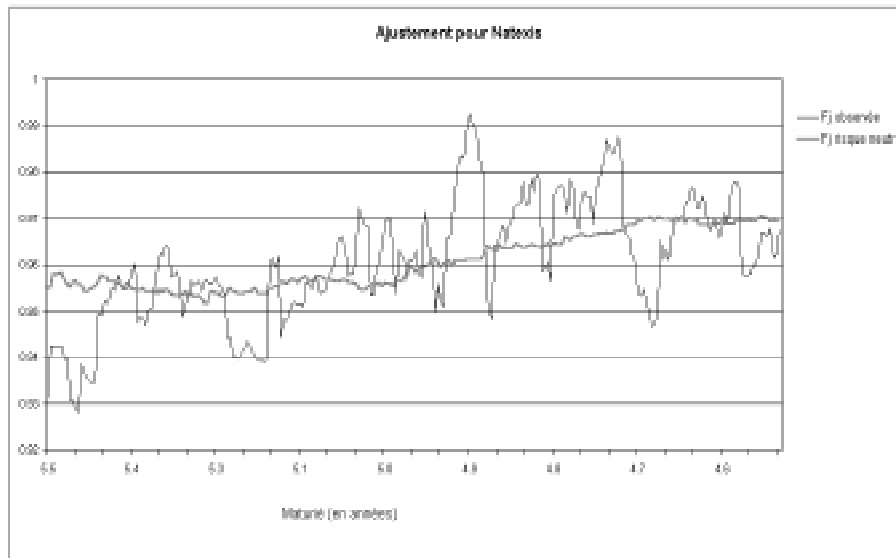


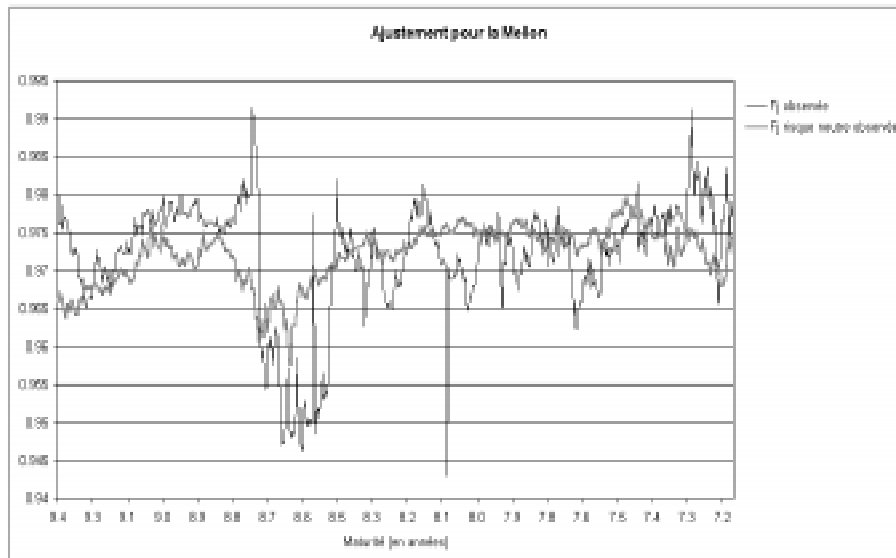




**Ajustements des probabilités junior observées par notre approximation numérique.** Les graphiques suivants superposent la série des probabilités junior estimées dans la première partie et l'ajustement possible en tenant compte des variations de l'action.







### 6.2.4 Retour à la probabilité réelle.

Les graphiques suivants montrent l'effet du changement de probabilité sur le rating pour les 3 séries qui n'ont pas été analysées dans le corps du texte..

