

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE DI MILANO
Interfacoltà di Economia - Scienze Bancarie,
Finanziarie e Assicurative
Corso di Laurea in Scienze Statistiche, Attuariali ed Economiche



LONGEVITY RISK E TAVOLE DI MORTALITÀ:
UNA PROPOSTA PER LA POPOLAZIONE ITALIANA

Tesi di Laurea di:
Federico GUERRESCHI
Matr. N° 3703688

Relatore: Chiar.ma Prof.ssa Piera MAZZOLENI

Anno accademico 2009/2010

INDICE ANALITICO

INTRODUZIONE	pag. 5
CAPITOLO 1	
Storia della mortalità nel mondo	pag. 7
Trend della mortalità in Italia	pag. 8
<i>Dati di riferimento</i>	pag. 8
<i>Tavole di mortalità: introduzione teorica</i>	pag. 9
<i>Tavole di popolazione e tavole di mercato: un confronto</i>	pag. 10
<i>Analisi empirica della popolazione italiana</i>	pag. 11
CAPITOLO 2	
Mortalità e previsioni: introduzione	pag. 22
<i>Mortalità sistematica e non sistematica</i>	pag. 23
<i>Assicurazioni vita e piani pensionistici</i>	pag. 23
Elementi di base	pag. 24
<i>Tassi di mortalità</i>	pag. 24
<i>Tasso istantaneo di mortalità</i>	pag. 24
<i>Indice di sopravvivenza</i>	pag. 24
<i>Spot and forward survival probabilities</i>	pag. 25
<i>Real-world e risk-neutral probabilities</i>	pag. 25
<i>Zero-coupon bond a reddito fisso e longevity bond</i>	pag. 26
<i>Risk-neutral spot e forward survival probabilities</i>	pag. 27
<i>Forward mortality surface</i>	pag. 28

Modelli stocastici per la mortalità: osservazioni introduttive	pag. 28
<i>Criteri per la selezione del modello</i>	pag. 29
<i>Coerenza con i dati storici e ragionevolezza biologica</i>	pag. 30
<i>Robustezza delle stime dei parametri e previsioni</i>	pag. 31
<i>Plausibilità delle previsioni</i>	pag. 31
<i>Implementazione</i>	pag. 31
<i>Criterio della “parsimonia”</i>	pag. 32
<i>Sample paths e intervalli di previsione</i>	pag. 32
<i>Incertezza dei parametri</i>	pag. 32
<i>Cohort effect</i>	pag. 32
<i>Struttura di correlazione</i>	pag. 33
Modelli a tempo discreto	pag. 33
<i>Il metodo esponenziale</i>	pag. 34
<i>Il modello di Lee-Carter</i>	pag. 36
<i>Modelli multifactor age-period</i>	pag. 40
<i>Il modello Renshaw-Haberman con effetto di coorte</i>	pag. 41
<i>Il modello Cairns-Blake-Dowd con effetto di coorte</i>	pag. 43
<i>P-splines</i>	pag. 46
<i>Questioni “filosofiche”</i>	pag. 46
<i>Modelli di mercato a tempo discreto</i>	pag. 47
Modelli a tempo continuo	pag. 48
<i>Questioni “filosofiche”: diffusione o salti?</i>	pag. 48
<i>Modelli short-rate</i>	pag. 49
<i>Modelli forward-rate</i>	pag. 50
<i>Modelli di mercato a tempo continuo e cambio di numéraire</i>	pag. 51
<i>Il modello di mercato SCOR</i>	pag. 52

<i>Modelli forward-rate e modelli di mercato: vantaggi e svantaggi</i>	pag. 53
Osservazioni conclusive	pag. 54
 CAPITOLO 3	
Assicurazione e mortalità: aspetti generali	pag. 55
<i>Il fenomeno della sopravvivenza in questioni di carattere attuariale</i>	pag. 55
<i>L'impatto del longevity risk su differenti tipi di polizze assicurative</i>	pag. 58
Longevity risk: introduzione e rappresentazione	pag. 58
<i>Rischio di mortalità</i>	pag. 58
<i>Rappresentazione della mortalità: problemi di modellizzazione stocastica</i>	pag. 60
<i>Rappresentazione del longevity risk</i>	pag. 62
Misurazione del longevity risk	pag. 64
<i>Assegnazione della distribuzione di probabilità</i>	pag. 68
<i>Scelta e aggiornamento dei pesi</i>	pag. 69
Gestione del longevity risk	pag. 71
<i>Prospettive di risk management</i>	pag. 71
<i>Strategie di portafoglio</i>	pag. 72
<i>Strategie di natural hedging</i>	pag. 74
<i>Strategie di riassicurazione</i>	pag. 75
Trasferimento alternativo del rischio	pag. 77
<i>Life insurance securitization</i>	pag. 77
<i>Mortality-linked securities</i>	pag. 78
Impatto del longevity risk sui prodotti di rendita	pag. 82
Pricing del longevity risk	pag. 84
Longevity risk e Solvency II: nuove prospettive	pag. 86

CAPITOLO 4

Demografia e finanza: un modello per il longevity risk	pag. 91
<i>Modello multivariato per la mortalità: impostazione teorica</i>	pag. 91
<i>Parametrizzazione del modello</i>	pag. 94
<i>Misura di prezzo risk adjusted</i>	pag. 95
Applicazione pratica: dati di base e metodologia	pag. 96
<i>Stima dei parametri e massima verosimiglianza</i>	pag. 100
<i>Struttura di dipendenza e analisi delle componenti principali</i>	pag. 104
<i>Analisi dell'adattamento</i>	pag. 108
Simulazione del modello	pag. 112
Pricing delle rendite: una proposta	pag. 121
<i>Costruzione delle tavole di mortalità e utilizzo delle medie simulate</i>	pag. 121
<i>PH-Transform</i>	pag. 127
<i>Percentili</i>	pag. 130
Valutazione delle riserve: best estimate e risk margin	pag. 133
Problematiche e conclusioni	pag. 137
 BIBLIOGRAFIA	pag. 139
 SITOGRAFIA	pag. 144
 Appendice 1: tavole di mortalità simulate (maschi)	pag. 145
 Appendice 2: tavole di mortalità simulate (femmine)	pag. 146

INTRODUZIONE

Le dinamiche demografiche stanno cambiando inesorabilmente, influenzando così molteplici aspetti della vita moderna. Molti Paesi sviluppati sono stati caratterizzati da un forte invecchiamento della popolazione, causato da una parte da una persistente bassa fecondità, e dall'altra da un aumento della longevità. Solo agli inizi del secolo scorso nessuno avrebbe mai pensato di raggiungere e superare i cento anni di vita. Un'utopia per la popolazione di una volta, divenuta realtà negli ultimi decenni.

Le condizioni di vita favorevoli, la fine dei grandi conflitti mondiali, l'attenuarsi delle malattie virali, gli sviluppi in campo medico e uno stile di vita sempre più agiato hanno consentito all'uomo di incrementare la speranza di vita media, permettendo il raggiungimento in salute di età molto avanzate.

Questi cambiamenti di carattere biologico e demografico hanno avuto effetti in diversi ambiti della società. Innanzitutto, l'invecchiamento della popolazione è una delle cause per cui la classe dirigente e la rappresentanza politica (specialmente in Italia) sono composte principalmente da soggetti prossimi al pensionamento. Anche il peso relativo degli anziani nel popolo votante è aumentato, spingendo la politica verso differenti direzioni. Un altro problema è costituito dalla spesa previdenziale: in un sistema caratterizzato dal metodo della ripartizione, i lavoratori attivi devono finanziare attraverso i loro contributi i pensionati attuali. Con la crescente longevità si sta giungendo a un rapporto di quasi un anziano inattivo per ogni lavoratore. Si tratta di una situazione che nel tempo potrebbe diventare insostenibile, alla quale i governi stanno cercando di porre rimedio attraverso numerose riforme.

In aggiunta a tutti questi aspetti, è importante ricordare come l'incremento della longevità influenzi in modo sostanziale anche l'ambito assicurativo. Le imprese di assicurazione vita e i fondi pensione vengono inevitabilmente interessati da questo fenomeno, appunto perché nascono come istituti che costruiscono prodotti e offrono servizi riferendosi proprio alle dinamiche demografiche. In questo caso le tavole di mortalità di una certa popolazione costituiscono uno strumento fondamentale, capace di sintetizzare con un buon grado di approssimazione la speranza di vita dei sottoscrittori.

La trattazione che seguirà è proprio incentrata sullo studio e l'analisi dell'evolversi della mortalità, con particolare attenzione a quel rischio che può sorgere per un assicuratore in corrispondenza di un forte aumento della longevità: il longevity risk. Nello specifico ci si focalizzerà nell'ambito italiano in modo da fornire strumenti in grado di tener opportunamente conto delle diverse problematiche che si possono prospettare.

In particolare nel Capitolo 1 si analizzerà la popolazione italiana, investigando gli sviluppi demografici attraverso i dati ricavati dalle tavole di mortalità storiche. Si cercherà di evidenziare come l'Italia sia caratterizzata da una longevità molto sostenuta, sia per i maschi che per le femmine, che la pone tra i primi posti a livello mondiale riguardo la speranza di vita alla nascita e il numero medio di anni vissuti in buona salute.

Nel Capitolo 2, invece, saranno presentati differenti tipi di modelli per rappresentare la mortalità. Nel corso degli anni si sono susseguiti diversi studi empirici a riguardo, con la conseguente creazione delle più diverse impostazioni teoriche. Saranno introdotte le caratteristiche fondamentali che deve avere un buon modello, e si passerà poi alla descrizione di modelli a tempo discreto e continuo. È importante ricordare come la scelta di una determinata impostazione parametrica è il più delle volte soggettiva, tanto che non vi è un modello oggettivamente riconosciuto come il migliore. Molto dipende dalla popolazione che si sta analizzando, nonché da quali risultati si vogliono ottenere. Inoltre, pochi modelli sono stati creati espressamente per rappresentare il longevity risk, quindi cercare di approfondire tale argomento risulta molto interessante.

Dopo la premessa sui vari modelli di mortalità, il Capitolo 3 si occuperà del rischio di longevità in senso stretto. Saranno presentati differenti modi di rappresentazione, nonché l'impatto che esso può avere sulla gestione assicurativa. Inoltre verranno anche trattate le problematiche di gestione e trasferimento del rischio, con la descrizione di prodotti di mercato innovativi e che ancora non hanno trovato una collocazione definitiva. Alla fine del capitolo, invece, si parlerà delle nuove prospettive definite dal progetto Solvency II, il quale evidenzia l'importanza del longevity risk.

Infine, nel Capitolo 4 verrà introdotto e applicato un modello creato proprio per analizzare il rischio di longevità. Tale impostazione deriva dagli studi di Wills S. e Sherris M. (2008), che si propongono di rappresentare l'evoluzione della mortalità in età avanzate attraverso una dinamica tipica dell'ambito finanziario. Tutto ciò verrà applicato ai dati della popolazione italiana, in modo tale da stimare i parametri e proiettare l'andamento demografico nel futuro per costruire le tavole di mortalità. Successivamente si andrà oltre alla semplice rappresentazione, fornendo alcune interessanti proposte per il pricing delle rendite e la valutazione delle riserve tecniche.

Al termine di tutta la trattazione si cercheranno di analizzare le problematiche che un'impresa di assicurazione vita o un fondo pensione possono riscontrare a causa del longevity risk, specificando anche il punto di vista dell'assicurato. In conclusione si definirà come l'applicazione pratica del Capitolo 4 può essere in grado di far fronte alle diverse problematiche, garantendo una soluzione che coniuga immediatezza ed efficacia.

CAPITOLO 1

1.1 Storia della mortalità nel mondo

La mortalità nel mondo ha subito enormi cambiamenti nel corso dei secoli, con sviluppi sostanziali negli ultimi decenni. La speranza di vita alla nascita tra i primi esseri umani oscillava all'incirca tra i 20 e i 30 anni, come testimoniano le iscrizioni sulle tombe, gli archivi genealogici e i resti ossei. Verso la seconda metà del Settecento, nei Paesi nordici cominciò a essere costruita la prima raccolta di dati sulla popolazione nazionale. Durante tale periodo, la speranza di vita alla nascita risultava già più elevata e si attestava tra i 35 e i 40 anni nei Paesi più sviluppati. I valori aumentarono ulteriormente dopo la metà del 1800, in cui si riscontrarono valori tra i 40 e i 45 anni. Rapidi miglioramenti iniziarono alla fine del diciannovesimo secolo, tanto che alla metà del ventesimo si raggiunsero i 60-65 anni. All'inizio del ventunesimo secolo la speranza di vita arrivò ai 70 anni. Dall'evidenza storica passata è possibile osservare un aumento della durata media della vita, la quale è più o meno triplicata nel corso della storia dell'uomo. La maggior parte di questo incremento è occorso negli ultimi 150 anni: il ventesimo secolo è stato caratterizzato da un enorme incremento della longevità media, se comparato con i secoli precedenti. In generale, la speranza di vita media è cresciuta di circa 25 anni nei 10.000 antecedenti il 1850. Un ulteriore incremento di 25 anni è avvenuto solamente tra il 1850 e il 2000. Inoltre, non vi è evidenza che i miglioramenti nella longevità stiano rallentando.

La prima metà del Novecento è stata testimone di significativi miglioramenti nella mortalità infantile, nella mortalità dei bambini e delle loro madri, grazie al progresso della sanità pubblica e della nutrizione. Queste due ultime condizioni hanno permesso alla popolazione mondiale di resistere alle pericolose malattie infettive che, nel corso degli anni, hanno colpito numerose regioni nel mondo in modo differente. Dalla seconda metà del ventesimo secolo, i guadagni nella speranza di vita sono dovuti maggiormente a fattori medici, i quali hanno ridotto la mortalità delle persone anziane. Contemporaneamente si sono verificate riduzioni delle morti causate dai "tre grandi assassini" (malattie cardiovascolari, cancro e ictus) e, attualmente, la speranza di vita continua a migliorare.

La popolazione nei Paesi industrializzati ha subito un'importante transizione nelle dinamiche della mortalità nel corso del 1900. Nei decenni recenti, essa è divenuta notevolmente più anziana, soprattutto a causa di due fattori:

- L'incremento della sopravvivenza nelle età più avanzate.
- La diminuzione delle nascite (il cosiddetto "*baby bust*", che iniziò negli anni Settanta).

In questo nuovo contesto demografico, le problematiche riguardanti la longevità hanno acquisito una grande importanza per le politiche e la fiscalità pubblica.

In particolare, i sistemi di sicurezza sociale, che nei Paesi industrializzati sono organizzati seguendo un metodo *Pay As You Go*, sono minacciati dall'invecchiamento della popolazione causato dal *baby bust* combinato con l'incremento della speranza di vita. Come conseguenza, molte nazioni stanno discutendo riguardo aggiustamenti e profonde riforme per far fronte a questo problema. Anche l'Italia, a partire dal 1992 con la riforma Amato, è entrata nella cosiddetta "era delle riforme" riguardanti la previdenza pubblica e lo sviluppo della previdenza complementare.

È molto importante ricordare che questa incredibile evoluzione demografica della popolazione mondiale non è solamente fine a se stessa. Una maggiore longevità ha naturali ripercussioni sulle imprese di assicurazione e sui fondi pensione. Le basi attuariali per il calcolo delle prestazioni e delle controprestazioni sono proprio le tavole di mortalità di riferimento, le quali si modificano anche in modo sostanziale nel corso degli anni a causa delle evoluzioni demografiche.

1.2 Trend della mortalità in Italia

1.2.1 Dati di riferimento

Per meglio analizzare l'evolversi della dinamica demografica, è possibile focalizzarsi su un singolo Paese, al fine di comprendere i fattori che hanno indotto l'attuale situazione.

In particolare, in questo contesto, verranno presi in considerazione i dati relativi alla popolazione italiana. Le rilevazioni comprendono 134 anni, dal 1872 al 2006. Prima di tale epoca, nessun dato viene considerato attendibile; solo alla fine del 1800 i censimenti cominciarono a essere precisi ed efficaci, adatti a essere utilizzati come riferimento per calcoli e considerazioni.

Le basi di dati sono state ottenute dallo Human Mortality Database (HMD). Tale raccolta elettronica di dati, reperibile gratuitamente al sito <http://www.mortality.org>, è nata nel maggio del 2002 allo scopo di creare dettagliate rilevazioni sulla mortalità della popolazione di differenti Paesi del mondo. È stata ideata dal Dipartimento di Demografia dell'Università della California, Berkeley (USA), e dall'istituto Max Planck per la ricerca demografica a Rostock (Germania).

Lo Human Mortality Database contiene calcoli relativi ai tassi e alle tavole di mortalità delle popolazioni di diverse nazionalità, così come i dati di partenza usati per ottenerli. Inoltre è possibile trovare le tavole di mortalità per singolo anno di età fino a 109 anni, con un intervallo aperto per i dati relativi alle età superiori a 110. In particolare, le rilevazioni riferite al nostro Paese si appoggiano agli studi ISTAT compiuti nel corso del tempo. Però, mentre sul sito dell'Istituto nazionale di statistica le tavole sono attualmente reperibili fino al 1974, lo HMD mette a disposizione i dati dal 1872, permettendo una visione migliore dell'evoluzione demografica.

1.2.2 Tavole di mortalità: introduzione teorica

Prima di passare all'analisi vera e propria è utile introdurre il concetto teorico di *tavola di mortalità*.

La tavola di mortalità è una sequenza (finita) $l_0, l_1, \dots, l_\omega$. Il generico elemento l_x si riferisce all'anno di calendario (intero) x e rappresenta il numero stimato di persone in vita a quell'età in una popolazione propriamente definita (da un'iniziale gruppo di l_0 individui all'età zero).

Nella letteratura sono presenti due differenti tavole di mortalità: *cohort life table* e *period life table*.

Nel primo caso, si assume che la sequenza $l_0, l_1, \dots, l_\omega$ sia fornita da dati statistici, basata su una *longitudinal observation* del numero attuale di sopravvivenuti alle età $1, 2, \dots, \omega$ e riferita a un'iniziale generazione di l_0 neonati. L'anno (intero) ω è il *limiting age*, tale che $l_\omega > 0$ e $l_{\omega+1} = 0$. La sequenza $l_0, l_1, \dots, l_\omega$ è chiamata *cohort life table*. Chiaramente, la costruzione di una *cohort table* considera $\omega+1$ anni.

Nel secondo caso, l'evidenza statistica consiste nella frequenza di morte riferita ai vari anni, osservata interamente in un determinato periodo, per esempio un anno. Si assume che la frequenza di morte all'età x (eventualmente dopo una traslazione rispetto a x) sia una stima della probabilità di morte q_x . Per $x = 0, 1, \dots, \omega-1$ si definisce dunque:

$$l_{x+1} = l_x(1 - q_x) \quad [1]$$

con l_0 (la radice) assegnato (per esempio: $l_0 = 100.000$). Quindi, l_x è il numero previsto di sopravvivenuti di una generazione fittizia (anche chiamata *synthetic cohort*) costituita inizialmente da l_0 individui. La sequenza $l_0, l_1, \dots, l_\omega$, definita dalla precedente equazione ricorsiva [1], è chiamata *period life table*, ottenuta appunto da osservazioni di periodo.

Le osservazioni di periodo sono anche chiamate *cross-sectional observations*, proprio perché analizzano un'esistente popolazione (in termini di frequenza di morte) attraverso i vari anni (o gruppi di anni).

Occorre prendere in seria considerazione un'importante ipotesi sottostante alla formula [1]. Dato che i q_x sono supposti stimati dall'esperienza sulla mortalità in un determinato periodo (per esempio un anno), il calcolo degli l_x si basa sull'assunto che la mortalità rimanga pressoché invariata in futuro. Nella pratica questa assunzione non è realistica, poiché, come si è osservato e si osserverà in seguito, la mortalità della popolazione mondiale è diminuita in modo molto importante nel corso del ventesimo secolo e in particolare negli ultimi decenni. Date queste premesse, l'ipotesi assunta in linea di principio di una mortalità statica non può essere considerata, specialmente se ci si riferisce a lunghi periodi. Nelle applicazioni assicurative del ramo vita o nell'ambito dei fondi pensione, l'uso di *period life tables* è ristretto ai soli contratti di breve-media durata (5 o 10 anni), anche se tale utilizzo dovrebbe essere evitato nei fondi pensione.

Tutti questi prodotti richiedono, dunque, tavole di mortalità che permettano di anticipare i futuri trend di mortalità; da qui si nota con gran chiarezza l'importanza delle *projected tables* (tavole proiettate) costruite sulla base dell'esperienza dei precedenti trend di mortalità.

Per ogni data sequenza $l_0, l_1, \dots, l_\omega$ è possibile inoltre definire:

$$d_x = l_x - l_{x+1} \quad x = 0, 1, \dots, \omega$$

dove d_x è il numero atteso di individui che decedono tra l'età x e $x+1$. Si avrà infine:

$$\sum_{x=0}^{\omega} d_x = l_0$$

1.2.3 Tavole di popolazione e tavole di mercato: un confronto

I dati sulla mortalità, e anche le tavole di mortalità, possono essere ricavati da: osservazioni riguardanti l'intera popolazione nazionale, una specifica parte di una popolazione (per esempio i pensionati, i disabili, ecc.), il portafoglio di un'impresa di assicurazione e così via.

Le tavole di mortalità costruite sulla base di osservazioni riguardanti un'intera popolazione nazionale (solitamente divise tra maschi e femmine) sono comunemente chiamate *population tables*.

Le *market tables* sono invece costruite usando i dati sulla mortalità provenienti da un insieme di portafogli assicurativi e/o fondi pensione. Solitamente vengono definite tavole distinte per le assicurazioni e le rendite sottoscritte da singoli individui. La ragione per distinguere le diverse tavole di mercato risiede nel fatto che i livelli di mortalità possono essere significativamente differenti muovendosi da una tipologia di prodotto assicurativo a un'altra.

Le tavole di mercato permettono di considerare dati basati sull'esperienza per il calcolo dei premi e delle riserve, nonché per la valutazione dei profitti attesi. Le tavole di popolazione possono essere utilizzate come un punto di partenza quando le tavole di mercato non sono disponibili. Altresì, possono rivelare tassi di mortalità più elevati rispetto alle tavole di mercato e possono costituire una prudente valutazione della mortalità nei portafogli assicurativi. Le tavole di popolazione possono essere utilizzate per prezzare contratti assicurativi al fine di includere margini di profitto (o un implicito caricamento di sicurezza) nel calcolo dei premi. In realtà, nella recente storia delle assicurazioni vita, le tavole di popolazione sono state utilizzate nel calcolo di premi, e questa prudente valutazione della mortalità ha permesso a molte compagnie di realizzare profitti inattesi.

È però opportuno considerare un problema molto importante che affligge principalmente il territorio italiano. A differenza di altri Paesi, l'Italia non è caratterizzata da una forte presenza di prestazioni in forma di rendita e anche la previdenza complementare è alle fasi iniziali.

Tavole di mercato che rispecchino la composizione dei vitaliziati non possono essere costruite partendo da una buona base di dati. Molte tavole usate per definire le prestazioni all'interno di un'impresa vita (per esempio l'IPSS 55) sono state ricavate partendo da quelle di altri Paesi (per esempio facendo riferimento alla Gran Bretagna). Con l'evoluzione della previdenza complementare e col previsto sviluppo delle prestazioni in forma di rendita (specialmente in età avanzate), la definizione di tavole in grado di rappresentare la mortalità futura è un aspetto fondamentale. L'ANIA (Associazione Nazionale fra le Imprese Assicuratrici) sta attualmente cercando di definire tavole basate su dati riferiti ai soggetti vitaliziati, collaborando con l'INPS (Istituto Nazionale della Previdenza Sociale), che dispone di enormi informazioni utili allo scopo. Risulta dunque importante considerare che un iniziale studio basato sui dati dell'intera popolazione è molto utile, almeno finché il nostro mercato non sarà abbastanza sviluppato da fornire basi di dati idonee a un'accettabile valutazione statistica.

1.2.4 *Analisi empirica della popolazione italiana*

In generale, l'esperienza numerica derivante dalla mortalità ha evidenziato, specialmente negli ultimi decenni, alcuni aspetti molto importanti riguardanti la forma delle rappresentazioni grafiche relative alle differenti misurazioni che possono essere effettuate in ambito demografico. In particolare, si possono evidenziare tre aspetti importanti a livello generale:

- *Rettangolarizzazione*: crescente concentrazione dei decessi attorno alla moda (nelle età più avanzate) della curva rappresentante gli stessi decessi. Di conseguenza, il grafico della funzione dei sopravvissuti sta assumendo una forma sempre più rettangolare col passare del tempo.
- *Espansione*: la moda della curva dei decessi, che a causa della rettangolarizzazione tende a coincidere con l'età massima ω , si sposta nel tempo verso destra, raggiungendo età sempre più avanzate.
- *Young mortality hump*: maggiori livelli e forte dispersione delle morti accidentali alle età giovani.

Attraverso l'utilizzo e la rappresentazione dei dati sulla mortalità italiana richiamati in precedenza, è stato possibile analizzare le caratteristiche dei trend presenti nel nostro Paese, riuscendo a porre l'attenzione sull'evoluzione che è avvenuta dalla fine del diciannovesimo secolo all'inizio del ventesimo.

Nel precedente paragrafo si è potuto apprendere come le tavole di mortalità siano create attraverso la costruzione di un'ipotetica generazione di un certo numero prefissato di soggetti all'età zero; lo HMD fa riferimento a un gruppo iniziale di 100.000 neonati e lo sottopone alle probabilità di morte annuali osservati sulla popolazione italiana analizzata. Sono presenti, inoltre, due differenti tavole di mortalità. In particolare, la *period life table* rappresenta l'esperienza della mortalità di una popolazione durante un breve periodo di tempo, solitamente tra uno e tre anni.

Le tavole di mortalità basate sui dati di una popolazione sono generalmente costruite nella forma di *period life tables*, poiché i decessi e le varie rilevazioni sono più facilmente disponibili in riferimento a un determinato periodo di tempo. Questo tipo di tavole è molto utile per analizzare i cambiamenti nell'evoluzione della mortalità di una certa popolazione presa in esame.

Preliminarmente è opportuno specificare il significato di alcune notazioni utilizzate, presenti all'interno delle tavole di mortalità reperite e utili alle successive rappresentazioni. I più importanti sono:

- $q_x = \frac{d_x}{l_x}$, probabilità di morte. Esprime il rischio che una persona di età x muoia prima del compimento del compleanno $x+1$. Se si tratta di una probabilità quinquennale (${}_5q_x$) esprime il rischio che una persona di età x muoia prima del compimento del compleanno $x+5$.
- l_x rappresenta coloro che, provenienti dalla generazione iniziale fittizia di 100.000 nati, sopravvivono ai vari compleanni (assumendo dunque $l_0 = 100.000$).
- d_x , coloro che muoiono tra il compleanno x e il compleanno $x+1$. Il valore riepilogativo quinquennale è ${}_5d_x = d_x + d_{x+1} + \dots + d_{x+4}$.
- $e_x = \frac{L_x + L_{x+1} + \dots + L_{\omega-1}}{l_x}$ rappresenta il numero medio di anni che restano da vivere ai sopravvissuti all'età x .
- $L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$, numero di individui in età x (in anni compiuti). Esprime anche il numero di individui dell'ipotetica popolazione "stazionaria" associata alla tavola di mortalità. Il valore riepilogativo quinquennale è ${}_5L_x = L_x + L_{x+1} + \dots + L_{x+4}$.

Va inoltre ricordato che tutte le rilevazioni sono state prese ed elaborate in questa analisi preliminare dalle "tavole 5x10" dello HMD, cioè quelle tavole le cui età (da 0 a 110+) sono suddivise in gruppi di 5 anni, mentre l'intervallo temporale di riferimento della tavola (in relazione all'anno di calendario) è di 10 anni. Questa scelta ha permesso di rendere le rappresentazioni grafiche meno pesanti da osservare e più chiare da commentare.

L'evoluzione della mortalità nel nostro Paese ha mostrato negli ultimi anni un andamento in linea con quello degli altri Paesi occidentali, caratterizzato sia dall'incremento del numero dei decessi che da una diminuzione dei tassi di mortalità. Tale apparente contraddizione può essere spiegata dal fenomeno dell'invecchiamento della popolazione: una vita media sempre più lunga combinata con il declino della fecondità porta a un progressivo aumento del numero di individui nelle classi di età più anziane.

L'analisi inizia, dunque, con un'evidenza molto esplicita dell'attuale situazione italiana: le nascite nel corso degli anni. Tali rilevazioni riguardano un lasso temporale maggiore rispetto alle tavole di mortalità, coprendo un periodo di 144 anni, dal 1862 al 2006. Si è deciso di lasciare inalterata tale caratteristica per porre l'attenzione anche sugli anni più lontani dalla situazione attuale.

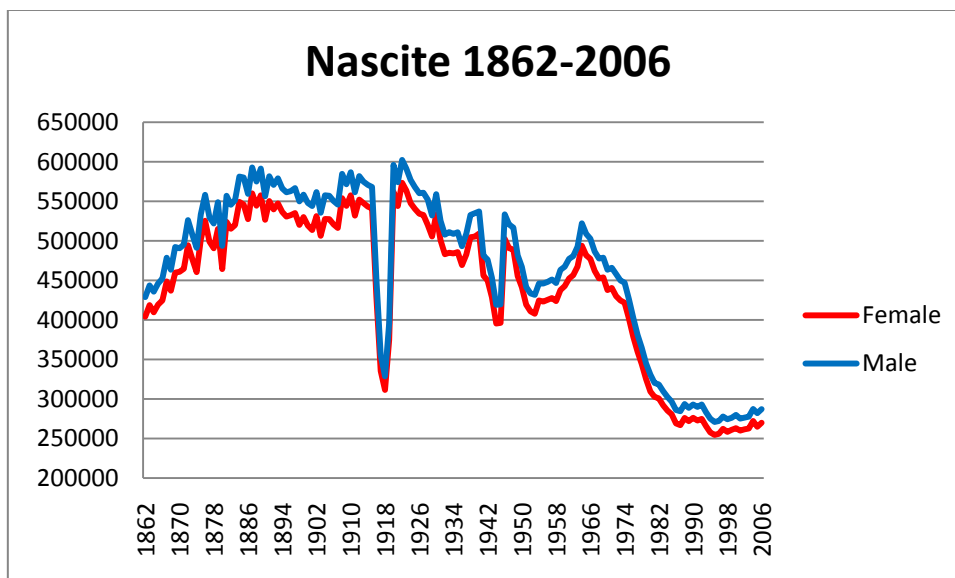


Figura 1

Come ben rappresentato dalla Figura 1, il numero di nati nel 1862 è maggiore rispetto al 2006. Questo è un fatto davvero allarmante ed è stato uno dei fattori più importanti che hanno condotto a definire l'Italia un "Paese di anziani". Le nascite, costantemente maggiori per i maschi, hanno avuto un aumento quasi sempre presente fino all'inizio della Prima Guerra Mondiale, dove si denota una fortissima diminuzione. Un altro dato negativo è riscontrabile nel corso della Seconda Guerra Mondiale, seppur più contenuto rispetto al primo conflitto mondiale. È però incredibile constatare che il punto di minimo raggiunto nel 1918 è rimasto tale solamente sino agli anni Ottanta, quando la natalità è diminuita così tanto da andare al di sotto di tale soglia minima. Da quel decennio in poi, tali andamenti molto bassi (anche se confrontati con la media europea) hanno caratterizzato tutto il ventunesimo secolo.

Importanti cambiamenti sono avvenuti altresì nell'andamento dei decessi e delle probabilità di morte. Da qui in poi saranno riportati i dati relativi alle tavole di mortalità 5x10 riferite al lasso temporale 1872-2006. In particolare, si è deciso di rappresentare solamente alcuni anni significativi (le prime rilevazioni disponibili, gli anni delle due guerre mondiali e gli ultimi dati del 2006), in modo tale da rendere il grafico più comprensibile e meno confuso.

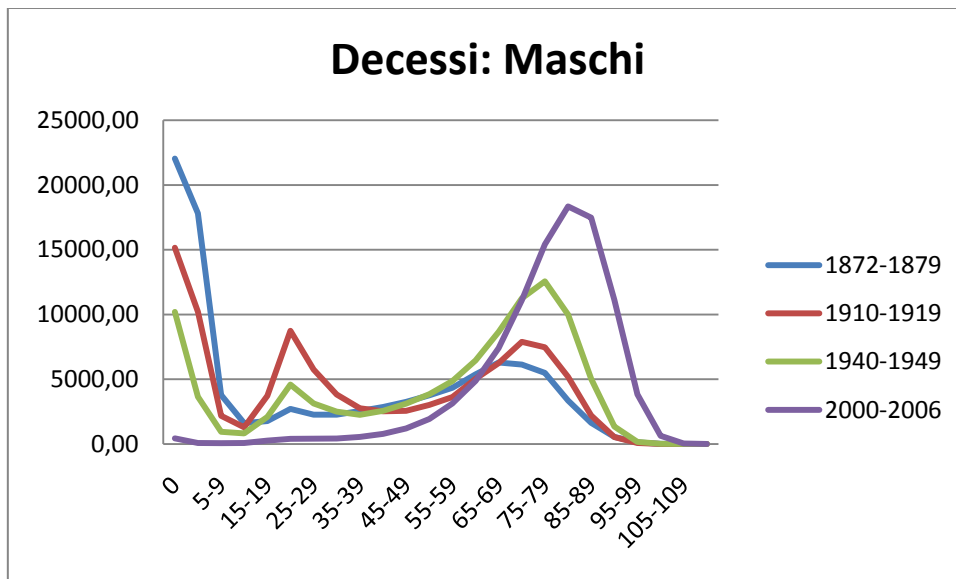


Figura 2

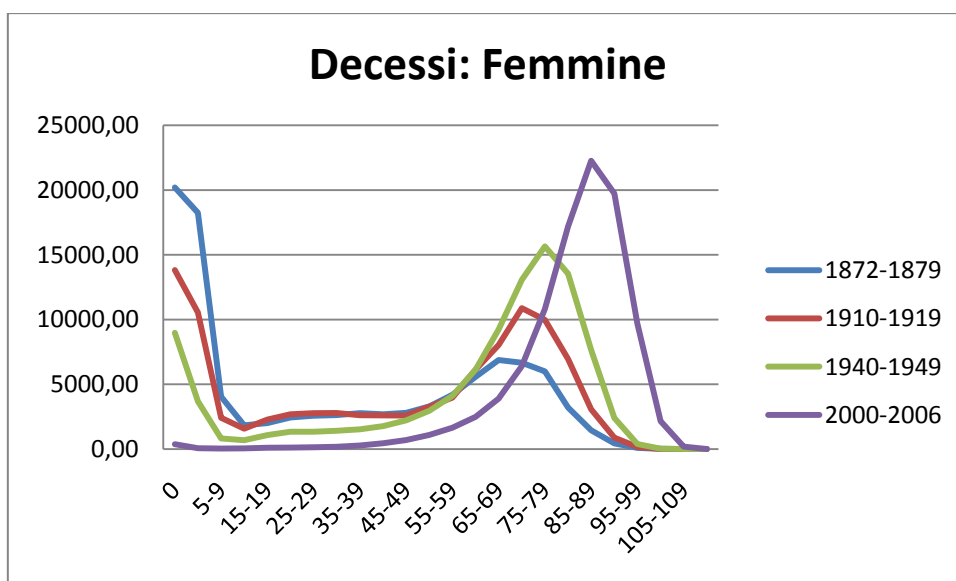


Figura 3

In questi grafici è facilmente distinguibile il fenomeno dell'*espansione*. Il punto modale delle curve del numero di decessi si sposta sempre più verso destra, con un salto di circa 30 anni dal 1872 al 2006. Sempre più soggetti giungono in vita alle età più avanzate, con una predominanza numerica del sesso femminile rispetto a quello maschile. È ormai diffusa l'evidente realtà che le femmine sono più longeve rispetto ai maschi, grazie anche a una minore mortalità legata ai problemi del parto, superati grazie allo sviluppo della medicina. Il picco di decessi che si riscontra nella Figura 2 nelle età 20-25 è dovuto allo scoppio delle due guerre mondiali.

Le curve interessate sono infatti quelle relative ai periodi 1910-1919 e 1940-1949; in quegli anni erano solo gli uomini ad andare a combattere, aumentando di molto la mortalità negli anni di gioventù.

Un caso particolare si è avuto nel 2002, anno in cui sul territorio italiano sono stati rilevati 560.390 decessi e per la prima volta il numero di decessi di persone di sesso femminile ha superato quello dei maschi: 281.094 le prime e 279.296 i secondi. Questo fenomeno è dovuto soprattutto alla mortalità nelle classi di età più anziane dove il contingente femminile diventa negli anni sempre più numeroso rispetto a quello maschile. Infatti la maggior parte dei decessi si verifica oltre i 75 anni (il 56% dei decessi negli uomini e il 75% nelle donne) e solo dopo gli 80 anni di età si osserva un numero di decessi più alto tra le donne che tra gli uomini. I tassi di mortalità rimangono sempre inferiori nelle donne fino ai 99-100 anni, poi però, per le ultracentenarie, si possono riscontrare molto spesso tassi di decesso più elevati rispetto agli uomini. Nello specifico, le femmine sperimentano un maggior numero di decessi alle età avanzate perché in molte arrivano alle età estreme. I maschi, invece, difficilmente diventano ultracentenari, ma i pochi sopravvissuti risultano più resistenti della media; quindi la probabilità di morte è più bassa anche perché il loro numero è davvero esiguo.

Passando ora alle probabilità di morte, le Figure 4 e 5 permettono di comprenderne meglio l'evoluzione.

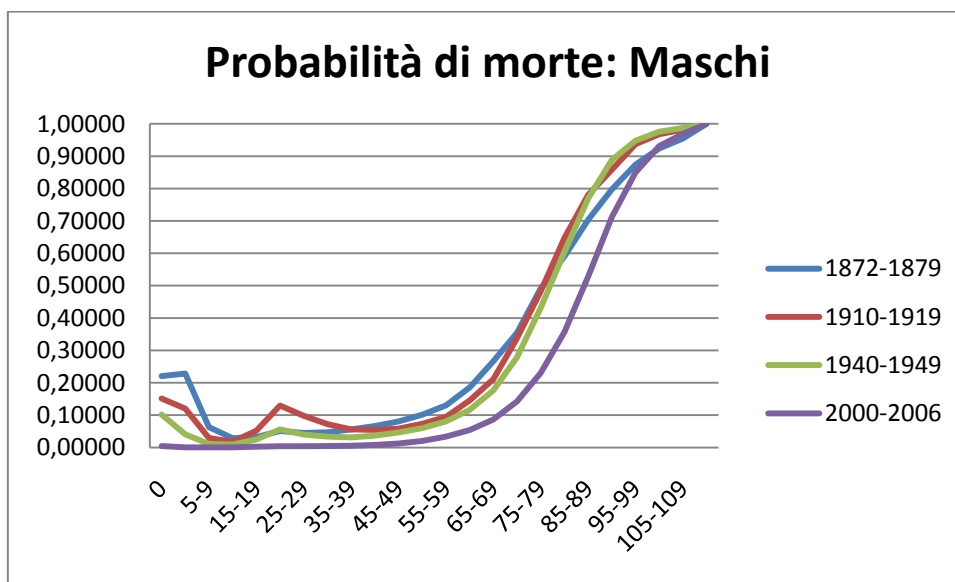


Figura 4

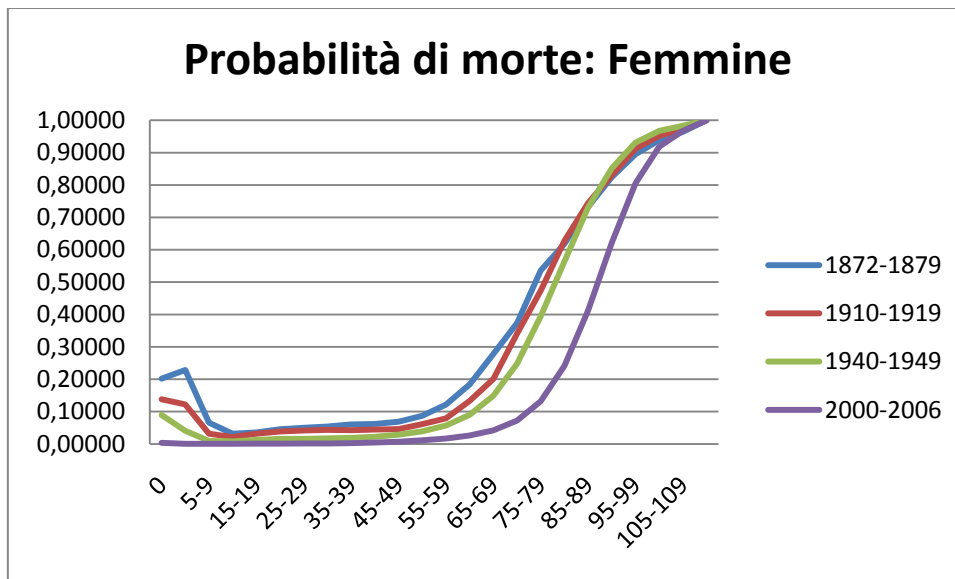


Figura 5

Il più importante miglioramento nella mortalità durante il ventesimo secolo si è verificato alle età più giovani, grazie principalmente al controllo delle malattie infettive. Il decremento nel tempo in riferimento alle età 20-30 per le femmine riflette il rapido declino della mortalità relativa alla gravidanza. Incidenti, infortuni e suicidi sono la causa maggiore dell'eccesso di probabilità di morte maschile al di sotto dei 45 anni. Anche in questo caso è possibile notare un picco di probabilità di morte per i maschi in corrispondenza delle due guerre mondiali; l'effetto affligge maggiormente le età più giovani rispetto a quelle più anziane, per ovvie ragioni di "chiamata alle armi" di coloro in grado di sostenere fisicamente l'impegno gravoso di una guerra.

Di particolare importanza sono inoltre le probabilità di morte oltre gli 80 anni; dopo il 1970 in Italia, come in altri Paesi europei, è avvenuta una forte diminuzione di tali probabilità, causando una maggiore longevità della popolazione anziana. È possibile rilevare il fenomeno dello *young mortality hump* nella parte sinistra del grafico, con la presenza di differenti e disperse probabilità di morte nelle età più giovani.

Osservando, inoltre, l'andamento della mortalità nei 25 anni intercorrenti tra il 1975 e il 2000 (lasso di tempo relativo all'ultima analisi dal titolo "Tavole di mortalità della popolazione italiana" redatta dall'ISTAT) si rileva che i guadagni in termini di sopravvivenza sono risultati regolari nel tempo, interessando ogni età. Infatti, confrontando l'andamento della mortalità del 1975 con quello del 2000, la probabilità di morire nel primo anno di vita si è abbattuta di ben cinque volte, scendendo dal 26,2% al 5,2% per un bambino, e dal 20,8% al 4,5% per una bambina. Proseguendo con l'età, a 40 anni un uomo aveva una probabilità di morire del 2,4% contro una pari a 1,5% nel 2000, una donna una probabilità di morire pari a 1,3% contro una pari a 0,8%. Ancora più importante, ai fini dell'allungamento della durata media della vita, è stata la riduzione che ha interessato principalmente le età anziane: ad esempio, a 65 anni la mortalità si è all'incirca dimezzata, passando dal 28,7% al 16,1% per un uomo, e dal 13,6% al 7,4% per una donna.

Questi semplici confronti aiutano a comprendere le dimensioni di un fenomeno che, anno dopo anno, ha fatto sì che aumentasse il numero di individui cui è permesso di raggiungere le età più avanzate dell'esistenza. Nel 2006 è possibile valutare, nella misura dell'85% e del 92%, rispettivamente per uomini e donne, la quota di individui che sono in grado di raggiungere i 65 anni di vita (nel 1975, 72% e 84%). Analogamente, ben il 33% degli uomini e oltre il 54% delle donne raggiunge la significativa soglia degli 85 anni di vita (nel 1975, 14% e 29%). Alla luce di questi importanti cambiamenti che hanno caratterizzato l'evoluzione della mortalità nel Paese è molto interessante, anche ai fini delle future prospettive, valutare in quali classi di età la riduzione dei rischi di morte abbia contribuito maggiormente all'incremento della speranza di vita alla nascita.

L'ultimo aspetto richiamato in precedenza è quello della *rettangolarizzazione*.

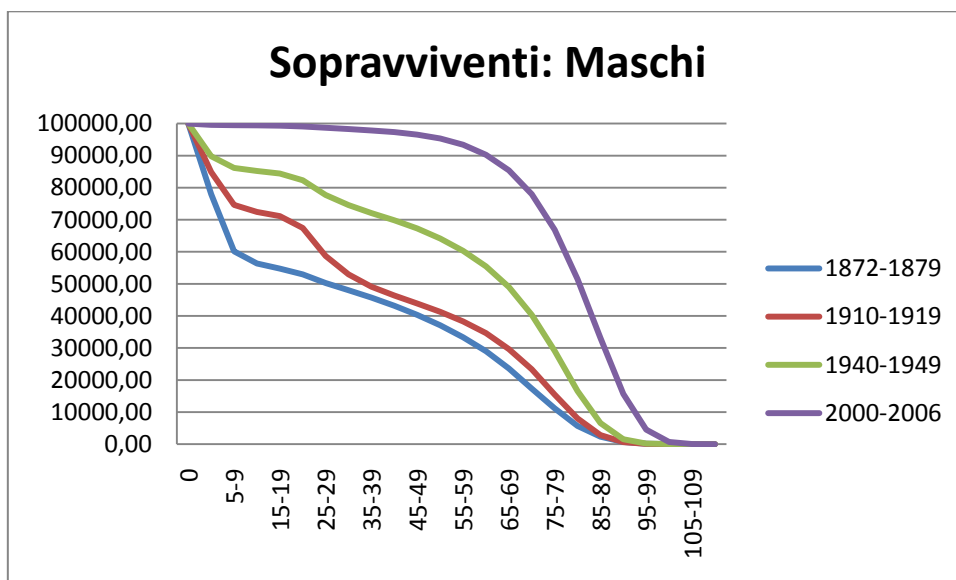


Figura 6

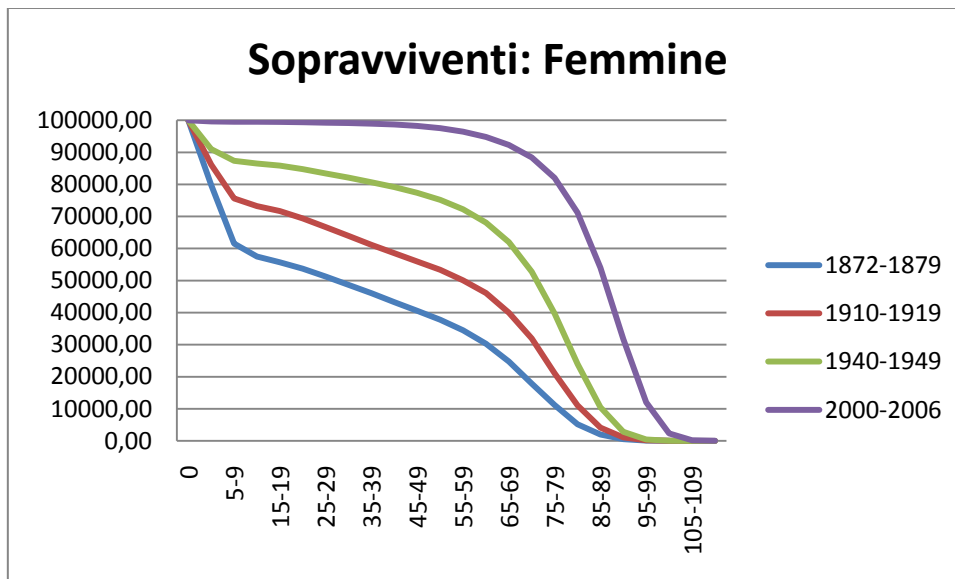


Figura 7

Le Figure 6 e 7 rappresentano in modo chiaro tale fenomeno. Il punto di Lexis, cioè il valore modale delle precedenti curve di sopravvivenza, si sposta gradualmente verso destra, dando alla figura una rappresentazione che si avvicina sempre di più a un ipotetico rettangolo. Evidenti progressi si sono osservati nel corso del ventesimo secolo grazie all'eliminazione dei principali rischi di mortalità giovanile che affliggevano i primi anni del Novecento. La porzione di popolazione ancora in vita ad una certa età aumenta man mano che ci si sposta in avanti con l'anno di calendario. Come conseguenza, col passare del tempo l'andamento della curva dei sopravvissuti è divenuta sempre più rettangolare (e meno diagonale). Questo concetto viene anche chiamato *"curve squaring concept"*.

Il fenomeno della rettangolarizzazione è associato alla riduzione della variabilità dell'età di morte. Dato che i decessi sono divenuti sempre più concentrati in una fascia d'età ogni volta più ristretta, l'andamento della curva dei sopravvissuti in questo range d'età si presenta più "ripido", assomigliando sempre più a un rettangolo. Conseguentemente la distribuzione delle morti per età si è spostata verso destra, diventando nel contempo meno variabile.

Altro aspetto molto importante è l'analisi della speranza di vita. Le statistiche riferite a tale misurazione sono utili per riassumere le rilevazioni sulla mortalità e hanno certamente un impatto grafico intuitivo.

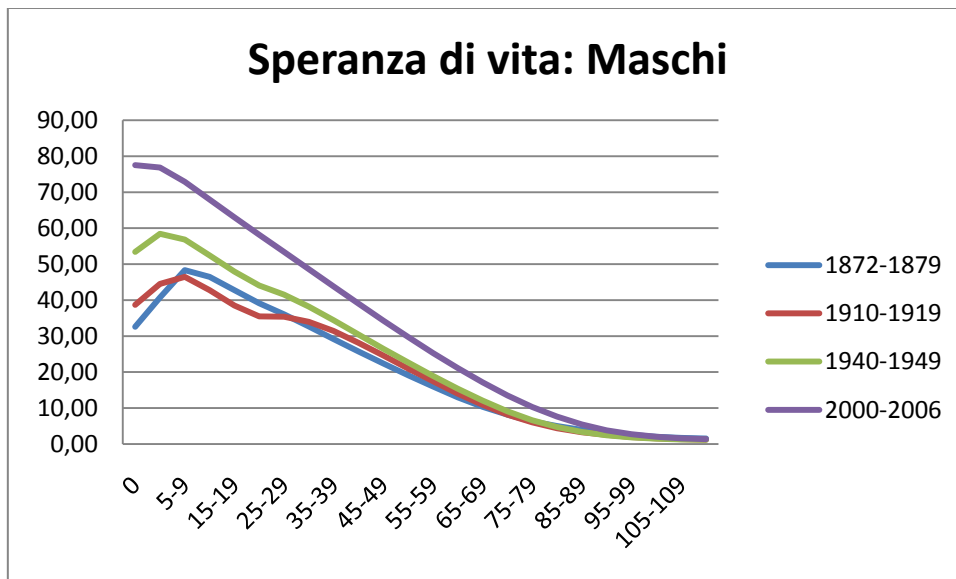


Figura 8

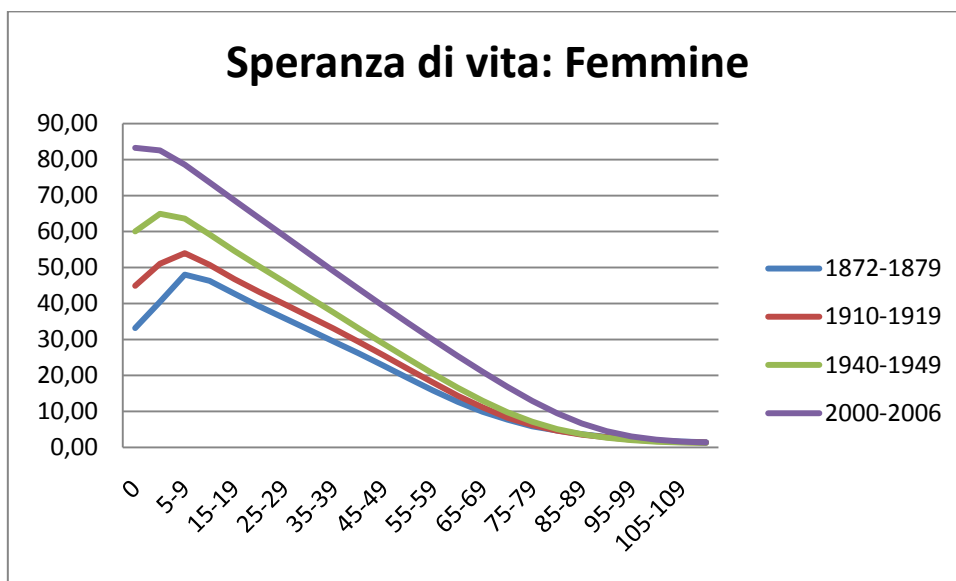


Figura 9

Le Figure 8 e 9 considerano la speranza di vita maschile e femminile per ogni intervallo d'età (composto da 5 anni, come definito in precedenza) nel corso dei decenni analizzati. È molto evidente la grande evoluzione avvenuta col passare del tempo, con la curva riferita al lasso di tempo 2000-2006 che si discosta inizialmente di circa 50 anni da quella rappresentativa degli anni 1872-1879. Man mano che il tempo passa le curve convergono tendendo allo zero, per l'ovvia ragione che più ci si avvicina alle età avanzate e più la speranza di vita decresce.

Ancor più esplicativo è il grafico espressivo della speranza di vita alla nascita.

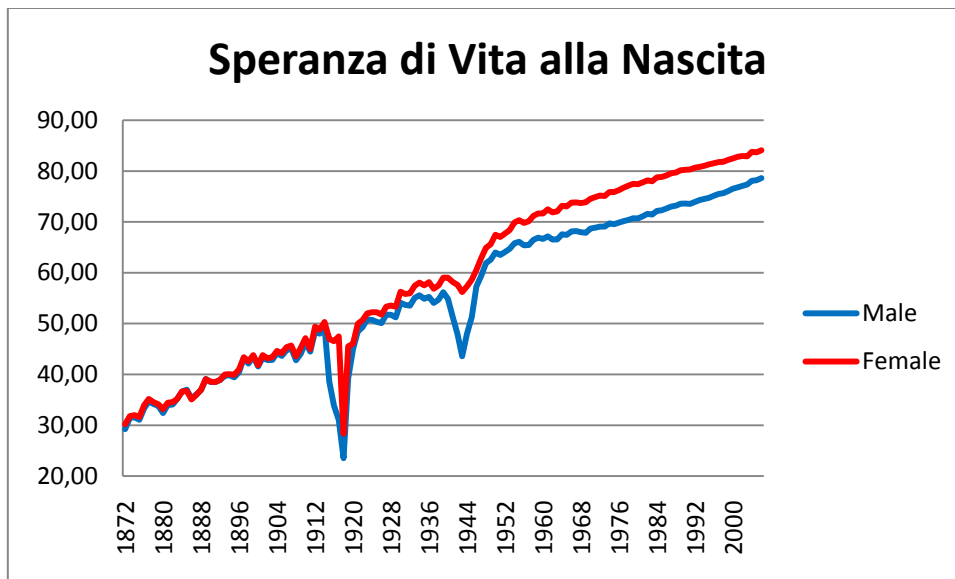


Figura 10

Tale indicatore cresce regolarmente sino a giungere in prossimità delle due guerre mondiali, dove si ha un evidente crollo della speranza di vita alla nascita. Dagli anni '50 in poi, la crescita pare non rallentare mai, portando a un continuo aumento che non accenna a dare segni di arresto. In questo grafico è ancora più evidente lo scostamento tra gli ultimi anni dell'Ottocento e i primi anni del ventunesimo secolo: nel 1872 la speranza di vita alla nascita era all'incirca di 30 anni, mentre nel 2006 sale addirittura a quasi 79 anni per gli uomini e 84 per le donne.

La riduzione dei rischi di morte a tutte le età della vita è un processo che ha caratterizzato l'Italia in tutto il secolo scorso, e che continua anche nei primi anni del nuovo millennio. A livello europeo l'Italia ha una delle popolazioni più longeve. Aspettative di vita migliori si registrano solo in Svezia e in Svizzera limitatamente agli uomini, e in Francia e in Svizzera per quanto riguarda le donne. Analizzando l'evoluzione dei livelli di sopravvivenza dai primi anni Settanta risultano evidenti i continui incrementi che hanno fatto sì che nel 2000 un neonato, sia di sesso maschile che di sesso femminile, possa contare su una speranza di vita superiore di circa sette anni rispetto a un suo coetaneo del 1975.

Analizzando il fenomeno a livello territoriale risulta che la ripartizione geografica che ha usufruito di un maggior guadagno in termini di sopravvivenza è quella del Nord, con aspettative di vita che, rispetto al 1975, aumentano nel nuovo millennio di circa otto anni per gli uomini e di circa sette per le donne. Il divario di genere negli anni Settanta è andato aumentando fino a sfiorare i sette anni di differenza nel 1979. Gli anni Ottanta invece sono caratterizzati da una differenza tra la speranza di vita alla nascita dei maschi e delle femmine in leggera diminuzione. Negli anni Novanta, dopo una breve parentesi di ricrescita dei differenziali di genere, culminata nel 1992 con un picco di 6,8 anni, ha avuto inizio un sostanziale recupero da parte degli uomini che si è protratto fino al 2000, anno nel quale il divario, sebbene ancora elevato, si è ridotto a soli sei anni.

Considerando nella sua interezza l'analisi appena proposta, è possibile notare che all'interno della popolazione italiana (come generalmente avviene anche nelle altre popolazioni mondiali) vi sono differenze nella speranza di vita con riferimento al sesso. Questo fenomeno viene indicato con il termine *eterogeneità*. Altre differenze si possono riscontrare in relazione alla classe sociale, valutata attraverso l'occupazione, il reddito o l'educazione.

Nei decenni recenti, i dati relativi alla popolazione hanno mostrato un ampio differenziale nella mortalità con riferimento alle classi socio-economiche. La maggior causa di decesso responsabile di queste differenze sono le malattie cardiovascolari: persone appartenenti a un'alta classe sociale hanno registrato diminuzioni molto più importanti della mortalità in questo ambito rispetto ai soggetti delle classi meno abbienti. Un'altra possibile spiegazione riguarda il fumo (il cui consumo varia notevolmente in relazione alle differenti classi) così come l'alimentazione, i meccanismi di selezione, le condizioni abitative peggiori e il livello di occupazione. In generale, persone di un'elevata classe socio-economica vivono più a lungo rispetto a coloro che non godono delle stesse condizioni di vita.

CAPITOLO 2

2.1 Mortalità e previsioni: introduzione

Come si è potuto constatare nel capitolo precedente, l'evoluzione della mortalità è stata fortemente contraddistinta da cambiamenti sostanziali; infatti nel ventesimo secolo si è assistito a miglioramenti significativi dei tassi di mortalità. In generale si possono sintetizzare alcuni fattori che hanno caratterizzato, oltre l'Italia, la maggior parte dei paesi sviluppati:

- I tassi di mortalità hanno avuto una consistente diminuzione in tutte le età.
- Considerando specifici anni, i tassi hanno avuto variazioni più o meno importanti, con miglioramenti significativi in alcuni decenni e nessun miglioramento in altri decenni. Per esempio, per la popolazione maschile di Inghilterra e Galles, il tasso di mortalità riferito ai venticinquenni è incredibilmente migliorato prima del 1960 per poi stabilizzarsi. Per quanto riguarda i soggetti giunti al sessantacinquesimo anno di età si è verificato esattamente l'opposto.
- L'evoluzione dei tassi è stata molto differente a seconda delle età analizzate. Per esempio, sempre considerando i maschi inglesi e gallesi, i miglioramenti per i quarantacinquenni sono stati più elevati rispetto a quelli riferiti agli ottantacinquenni.
- I tassi di mortalità a livello aggregato hanno rivelato un'importante volatilità da un anno all'altro. Questo aspetto è veritiero sia per i giovani, tra i quali il numero dei decessi è relativamente basso, sia per le età più avanzate. In quest'ultimo caso il numero di decessi risulta elevato, con la presenza di consistenti fluttuazioni annuali dei tassi di mortalità. Le fluttuazioni potrebbero essere dovute, per esempio, dall'incidenza delle influenze invernali o dalle ondate di caldo estive che, in alcuni anni, causano l'aumento della mortalità negli anziani.

Da un punto di vista statistico, si può aggiungere un'ulteriore considerazione. Dal momento che i tassi di mortalità hanno subito fluttuazioni significative nel corso del tempo, in futuro vi sarà una notevole incertezza nella loro previsione.

In alcuni paesi, si può altresì osservare come i modelli che studiano il miglioramento della mortalità siano legati all'anno di nascita, proprio perché la generazione di origine dei soggetti influenza fortemente la loro speranza di vita. Talvolta, viene indicata una vera e propria "generazione d'oro", caratterizzata da una longevità maggiore rispetto alle altre; questa generazione può essere stata favorita dalla naturale presenza di una sorta di "dieta sana" (o, per essere più precisi, dalla scarsità di cibo malsano che ha caratterizzato gli anni '40 e '50 del Novecento) e da un sistema sanitario nazionale efficiente.

2.1.1 Mortalità sistemática e non sistemática

È opportuno a questo punto discutere della mortalità con un'impostazione un po' più scientifica. Si definisce, dunque, $q(x,t)$ la sottostante probabilità di morte aggregata nell'anno t all'età x . Questo è un dato non osservabile. Quello che è possibile osservare dipende da come, per esempio, le statistiche nazionali ufficiali rilevano i decessi e la dimensione della popolazione. Comunque in molti paesi è possibile calcolare il tasso di morte "grezzo" (*crude death rate*), $m_c(x,t)$, che rappresenta il numero di decessi, $D(x,t)$, di età x alla data di morte e durante l'anno t , diviso per l'esposizione, $E(x,t)$ (la popolazione media di età x nell'anno t):

$$m_c(x,t) = \frac{D(x,t)}{E(x,t)}$$

L'incertezza nei futuri tassi di mortalità può essere suddivisa in due componenti:

- *Rischio di mortalità non sistemático*: anche se il vero tasso di mortalità è noto, il numero di decessi, $D(x,t)$, sarà casuale. Più grande è la popolazione, più contenuto è il rischio di mortalità non sistemático; questo è il risultato della compensazione dei rischi, altresì definita diversificazione.
- *Rischio di mortalità sistemático*: rappresenta la componente non diversificabile del rischio di mortalità che influisce sugli individui nello stesso modo. In particolare, le previsioni dei tassi di mortalità futuri sono incerte.

2.1.2 Assicurazioni vita e piani pensionistici

La modellizzazione e la gestione del rischio di mortalità sistemático sono due delle maggiori preoccupazioni per le grandi imprese di assicurazione operanti nel ramo vita e per i fondi pensione. I principali quesiti ai quali è necessario rispondere sono:

- Nell'ambito modellizzazione:
 - Qual è il miglior modo per prevedere i futuri tassi di mortalità e per modellizzare l'incertezza che caratterizza queste previsioni?
 - Come è possibile valutare il rischio legato ai futuri flussi di cassa che a loro volta dipendono dai futuri tassi di mortalità?
- Nell'ambito della gestione:
 - Come può essere gestito il suddetto rischio, includendolo così in un'efficiente strategia di risk management?
 - Quali strumenti di copertura sono più semplici da apprezzare rispetto ad altri?

Per rispondere a queste domande fondamentali, occorre precisare alcuni aspetti: prima di tutto sono necessari modelli stocastici per la mortalità in grado di adattarsi bene ai dati, capaci di prevedere la distribuzione dei futuri tassi di mortalità e aiutare a quantificare e apprezzare il rischio di mortalità.

In secondo luogo, è utile dotarsi di strumenti per gestire o trasferire il rischio di mortalità. Oltre a focalizzarsi su questi aspetti, è bene tener sempre presente il continuo sviluppo di modelli e strumenti in grado di risolvere problemi di modellizzazione e gestione di tale rischio.

2.2 Elementi di base

Ai fini della modellizzazione è necessario definire alcune notazioni generali.

2.2.1 Tassi di mortalità

$q(x,t)$ è la sottostante probabilità che un individuo di età x al tempo t muoia prima del tempo $t+1$. Il periodo che va da t a $t+1$ è anche chiamato "anno t ". La quantità $q(x,t)$ è normalmente definita solo per valori interi di x e t , ed è osservabile dopo il tempo $t+1$.

2.2.2 Tasso istantaneo di mortalità

$\mu(x,t)$ è il sottostante tasso istantaneo di mortalità al tempo t ed età x , per x e t (numeri) reali. Si ha la relazione:

$$q(x,t) = 1 - \exp \left[- \int_t^{t+1} \mu(x-t+u, u) du \right]$$

Anche in questo caso è possibile osservarlo dopo il tempo $t+1$.

2.2.3 Indice di sopravvivenza

L'indice di sopravvivenza è definito come:

$$S(x,t) = \exp \left[- \int_0^t \mu(x+u, u) du \right]$$

Un modo più informale per pensare a $S(x,t)$ è considerare che esso rappresenti la porzione di una popolazione di grandi dimensioni di età x al tempo 0 che sopravvive fino all'età $x+t$ al tempo t . Formalmente, $S(x,t)$ è \mathcal{M}_t -misurabile, dove \mathcal{M}_t rappresenta la filtrazione generata dalla curva dei tassi istantanei di mortalità fino al tempo t . Si consideri ora un singolo individuo di età x al tempo 0. Sia $I(t)$ l'indicatore della variabile casuale uguale ad 1 se l'individuo è ancora vivo al tempo t e 0 se è deceduto. In tal modo $Pr[I(t) = 1 \mid \mathcal{M}_t] = S(x,t)$. Inoltre $Pr[I(t) = 1 \mid \mathcal{M}_u] = S(x,t)$ per ogni $u \geq t$.

2.2.4 Spot and forward survival probabilities

In precedenza si è considerato il caso in cui $u \geq t$, senza prendere in esame cosa accade quando $u < t$. È quindi possibile definire per $0 < u < t$:

$$\Pr[I(t) = 1 | \mathcal{M}_u] = E[S(x, t) | \mathcal{M}_u] = S(x, u) E \left[\frac{S(x, t)}{S(x, u)} | \mathcal{M}_u \right]$$

Queste uguaglianze permettono di definire le *spot survival probabilities*:

$$p(x, u, t) = \Pr[I(t) = 1 | I(u) = 1, \mathcal{M}_u]$$

da cui $\Pr[I(t) = 1 | \mathcal{M}_u] = S(x, u)p(x, u, t)$.

Infine, tutto ciò fa emergere la definizione della *forward survival probabilities* per $T_0 < T_1$:

$$p(x, t, T_0, T_1) = \Pr[I(T_1) = 1 | I(T_0) = 1, \mathcal{M}_t] \quad [2]$$

Il nome “forward survival probability” suggerisce che $t \leq T_0$, ma la probabilità è ben definita per ogni t .

È importante ricordare che le spot e le forward survival probabilities, $p(x, u, t)$ e $p(x, t, T_0, T_1)$, prendono in considerazione individui di età x al tempo 0 e non al tempo t .

2.2.5 Real-world e risk-neutral probabilities

Nei paragrafi precedenti si è implicitamente assunto che le probabilità e le previsioni vengano calcolate attraverso la vera misura di *real-world probability*, P , cioè la probabilità associata alla realtà empirica. Quando è invece necessario focalizzarsi sul pricing (ovvero la “prezzatura”), si è soliti utilizzare un’artificiale misura di probabilità risk-neutral, la cosiddetta *risk-neutral probability measure* Q (misura di probabilità di mercato). La differenza tra P e Q dipende, per esempio, da quanto le imprese di assicurazione ed i fondi pensione siano disposti a pagare per far fronte al rischio di mortalità sistematico o non sistematico, dando così origine al di prezzo di mercato del rischio.

Molti degli studi in letteratura (v. per esempio Cairns et al., 2006a) considerano che esista un prezzo di mercato solo per il rischio di mortalità sistematico, mentre il prezzo per il rischio non sistematico, essendo diversificabile, non viene considerato. Sotto questa assunzione:

$$\Pr_Q[I(t) = 1 | \mathcal{M}_t] = \Pr_P[I(t) = 1 | \mathcal{M}_t] = S(x, t)$$

Però, è importante precisare che nel caso in cui $u < t$, $\Pr_Q[I(t) = 1 | \mathcal{M}_u]$ e $\Pr_P[I(t) = 1 | \mathcal{M}_u]$ non sono necessariamente uguali.

In un mercato illiquido, è plausibile che gli assicuratori siano preparati a pagare un premio per far fronte alla loro esposizione al rischio di mortalità non sistematico.

Nello stesso modo gli individui sono preparati a pagare all'assicuratore un premio basato sulla correttezza attuariale (per esempio in riferimento a P) del prezzo di una rendita, al fine di assicurarsi contro il loro personale longevity risk. In queste circostanze, è necessario definire un tasso istantaneo di mortalità risk-neutral $\tilde{\mu}_Q(x, t)$ e il corrispondente indice di sopravvivenza risk-neutral:

$$\tilde{S}(x, t) = \exp \left[- \int_0^t \tilde{\mu}(x + u, u) du \right]$$

In tal caso $Pr_Q[I(t) = 1 | \mathcal{M}_t] = \tilde{S}(x, t)$. Il concetto di “non-zero market price” per il rischio non sistematico della mortalità è preso in considerazione in modo più approfondito da Biffis et al. (2009).

Molti modelli stocastici per la mortalità hanno assunto che la dinamica della curva dei tassi istantanei di mortalità sia indipendente dall'evoluzione della struttura dei tassi di interesse. In queste circostanze, il valore al tempo t di un cashflow X legato alla mortalità al tempo T , può essere definito come il prodotto tra il prezzo di uno zero-coupon bond $P(t, T)$ e il valore atteso risk-neutral di X , ipotizzando di conoscere le informazioni fino al tempo t .

Di conseguenza, nonostante si stia parlando di mortalità, per approfondire l'importante concetto di misura di probabilità di mercato Q e di calcolo del pricing, è necessario introdurre l'impostazione teorica degli zero-coupon bond e dei longevity bond. Nei paragrafi successivi tutto ciò verrà utilizzato per definire i modelli di mercato a tempo discreto e a tempo continuo relativi alla mortalità.

2.2.6 Zero-coupon bond a reddito fisso e longevity bond

Al fine di analizzare il valore dei mortality-linked cashflows è necessario introdurre due tipi di asset finanziari: zero-coupon fixed-income bonds (cioè zero-coupon a reddito fisso) e zero-coupon longevity bonds. Come già accennato, queste premesse saranno successivamente alla base della definizione di vari modelli di mercato riferiti alla mortalità. Nel Capitolo 3, invece, i longevity bond verranno analizzati attraverso una diversa impostazione teorica al fine di studiarne con maggior dettaglio l'importanza nella gestione del rischio di longevità (che rappresenta l'obiettivo principale di tali strumenti).

Al tempo T di maturazione lo zero-coupon bond paga un ammontare fisso pari ad 1. Il prezzo al tempo t di questo bond è descritto come $P(t, T)$. Si assuma inoltre che i sottostanti tassi di interesse siano stocastici¹. Altrettanto rilevante in questo contesto è il cash account $C(t)$ che è costantemente reinvestito al tasso di interesse risk-free, $r(t)$, tale per cui $C(t) = \exp \left[\int_0^t r(u) du \right]$.

¹ Si veda Cairns (2004) o Brigo e Mercurio (2001) per ulteriori approfondimenti sulla stocasticità dei tassi di interesse.

Gli zero-coupon longevity bonds possono a loro volta avere due forme. Entrambe le tipologie sono caratterizzate da una data di maturazione, T , e dal riferimento ad una coorte di età x al tempo 0. La notazione utilizzata sarà (x,T) -longevity bond.

I due tipi sono:

- *Tipo A*: paga $S(x,T)$ al tempo T e il valore di mercato al tempo t di questo bond sarà definito come $B_S(x, t, T)$.
- *Tipo B*: paga $C(T)S(x,T)$ al tempo T e il valore di mercato al tempo t sarà definito come $B_{CS}(x, t, T)$.

Per semplicità, successivamente si assumerà che la struttura dei tassi di interesse sia indipendente dalla struttura della mortalità e che il prezzo di mercato per il rischio di mortalità non sistematico sia pari a zero. Ne consegue che (v. per esempio Cairns et al., 2006a):

$$B_S(x, t, T) = \frac{P(t, T)B_{CS}(x, t, T)}{C(t)}$$

Inoltre, i prezzi sono collegati a un'artificiale misura risk-neutral di pricing Q in questo modo:

$$B_{CS}(x, t, T) = E_Q \left[\frac{C(t)}{C(T)} C(T)S(x, T) | \mathcal{H}_t \right] = C(t)E_Q[S(x, T) | \mathcal{M}_t] \quad [3]$$

dove \mathcal{H}_t rappresenta la filtrazione che include le informazioni riguardo sia la mortalità che i tassi di interesse fino al tempo t .

In questo contesto è utile ricordare il *Teorema Fondamentale dell'Asset Pricing*, il quale enuncia che se esiste una misura risk-neutral Q e se i prezzi sono calcolati in accordo con l'equazione [3], allora il mercato è privo di arbitraggio (anche nel caso in cui tale mercato sia incompleto o illiquido).

Ne consegue che $B_{CS}(x, t, T) = C(t)S(x, t)p_Q(x, t, T)$, dove $p_Q(x, t, T)$ è la risk-neutral spot survival probability. In questo caso $E_Q[S(x, T)/S(x, t) | \mathcal{M}_t]$ rappresenta la risk-adjusted probability basata sulle informazioni disponibili fino al tempo t , che un individuo di età $x+t$ al tempo t ha di sopravvivere fino all'età $x+T$.

2.2.7 Risk-neutral spot e forward survival probabilities

Se il mercato riferito ai bond del Tipo B è sufficientemente liquido per una gamma di scadenze, allora è possibile prendere come dati i prezzi dei bond, $B_{CS}(x, t, T)$, al tempo t . Si possono così definire le risk-neutral spot survival probabilities come:

$$p_Q(x, t, T) = \frac{B_{CS}(x, t, T)}{C(t)S(x, t)}$$

Da questa equazione è possibile ricavare le risk-neutral forward survival probabilities:

$$\begin{cases} p_Q(x, t, T_0, T_1) = \frac{p_Q(x, t, T_1)}{p_Q(x, t, T_0)} & \text{per } t \leq T_0 \\ p_Q(x, t, T_0, T_1) = \frac{S(x, t)}{S(x, T_0)} p_Q(x, t, T_1) & \text{per } t > T_0 \end{cases} \quad [4]$$

2.2.8 Forward mortality surface

Nella tradizionale impostazione della mortalità, il tasso istantaneo viene definito come $\mu_{x+t} = -\partial \log {}_t p_x / \partial t$. Questo concetto può essere sviluppato anche per singole coorti.

Si assuma che per una data generazione di età x al tempo 0 le spot survival probabilities, $p_Q(x, t, T)$, siano conosciute al tempo t per tutti i $T > 0$ (non solo per valori interi di T). La forward force of mortality surface (o, più semplicemente, *forward mortality surface*) è definita come (v. Dahl, 2004):

$$\tilde{\mu}(x + T, t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \log p_Q(x, t, T) \quad [5]$$

Ad un determinato tempo t , l'equazione [5] può essere rappresentata a livello grafico come una superficie bidimensionale che dipende dall'età x e dalla scadenza T . Viene anche considerata come una stima centrale, basata sulle informazioni disponibili al tempo t , dal tasso di mortalità al tempo futuro T (quindi spostata di $T-t$ anni in avanti) per gli individui di età $x+T$ al tempo T .

2.3 Modelli stocastici per la mortalità: osservazioni introduttive

Nel tempo sono nati numerosi modelli per la rappresentazione della mortalità² e molti di essi furono creati più di cento anni fa (v. Rosina, 2010a, 2010b). Si può quindi affermare che l'attenzione alle dinamiche demografiche è da sempre molto radicata nelle scienze matematiche e non solo; infatti l'andamento di una popolazione è argomento di interesse per molte discipline oltre alla demografia, quali: l'economia, la sociologia, la statistica attuariale.

In realtà, però, solo recentemente si sono sviluppati modelli di carattere stocastico in grado di effettuare una buona proiezione della mortalità al fine di indagare sulle dinamiche future. I modelli erano nati principalmente per la rappresentazione della mortalità, ma non erano pensati come veri e propri modelli di previsione.

In generale, esiste una grande gamma di approcci estrapolativi che possono modellizzare la mortalità. Alcuni modelli sono a tempo discreto, altri a tempo continuo.

² A livello storico è possibile ricordare i modelli storici di: Moivre (1725), Gompertz (1825), Makeham (1867), Thiele (1872), Perks (1932), Vaupel et al. (1979), Hellingman-Pollard (1980), Coale e Kisker (1990), Kannisto et al. (1994).

Nell'ambito del tempo discreto, molte ricerche si sono focalizzate sull'analisi statistica e sulla proiezione di dati annuali sulla mortalità, usando i cosiddetti modelli short-rate. Altri studi hanno invece utilizzato il metodo P-splines e i modelli di mercato a tempo discreto. Nell'ambito del tempo continuo, invece, molte ricerche si sono concentrate sui modelli short-rate riferiti alla mortalità. Inoltre, per modellizzare le dinamiche demografiche, sono stati anche proposti approcci analoghi ai modelli forward-rate o ai modelli di mercato relativi alla modellizzazione dei tassi di interesse.

2.3.1 Criteri per la selezione del modello

Una volta che il modello è stato sviluppato e i parametri sono stati stimati o calibrati, è importante valutare se si è in presenza di un buon modello oppure no. Quest'analisi richiede una check-list di criteri per la valutazione della bontà, secondo le linee guida proposte da Cairns, Blake e Dowd (2006a) e Cairns et al. (2007,2008). L'elenco di ipotesi da soddisfare (possibilmente) è il seguente:

- I tassi di mortalità devono essere positivi.
- Il modello deve essere consistente rispetto ai dati storici.
- Le dinamiche di lungo periodo all'interno del modello devono essere biologicamente ragionevoli.
- Le stime dei parametri devono essere robuste relativamente al periodo di riferimento dei dati e alla gamma degli anni interessati.
- Le previsioni del modello devono essere robuste relativamente al periodo di riferimento e alla gamma degli anni interessati.
- I livelli di previsione dell'incertezza e le traiettorie centrali devono essere plausibili e consistenti con i trend e la variabilità storica, in relazione ai dati a disposizione sulla mortalità.
- Il modello dovrebbe essere semplice da attuare mediante metodi analitici o veloci algoritmi numerici.
- Il modello deve essere relativamente parsimonioso.
- Dovrebbe essere possibile utilizzare il modello per generare percorsi campionari e calcolare intervalli di previsione.
- La struttura del modello dovrebbe consentire di integrare l'incertezza dei parametri all'interno delle simulazioni.
- Almeno per alcuni paesi, il modello dovrebbe incorporare un effetto stocastico di coorte (stochastic cohort effect).
- Il modello dovrebbe avere una struttura di correlazione non banale.

Alcuni di questi punti richiedono ulteriori approfondimenti per capirne a fondo l'importanza; di seguito verranno esposte diverse tematiche fondamentali.

2.3.2 Coerenza con i dati storici e ragionevolezza biologica

Un buon modello deve essere, come minimo, coerente con i dati storici della mortalità. Se questo non avviene, il dubbio maggiore va posto sulla validità delle previsioni prodotte dal modello stesso.

Inoltre, nello studio di Cairns et al. (2006a) viene introdotto il concetto di ragionevolezza biologica, che si basa sul concetto di ragionevolezza economica riferito alla modellizzazione del tasso di interesse.

Diversi studiosi possono avere differenti idee su ciò che costituisce un modello biologicamente ragionevole, ma vi sono alcuni esempi di ciò che quasi all'unanimità viene considerato biologicamente irragionevole:

- Le period mortality tables (o life analogamente, v. Capitolo 1) hanno storicamente mostrato una crescita dei tassi di mortalità a età avanzate. Un modello di previsione che comporti la costruzione di period mortality tables con tassi di mortalità che diminuiscono con l'età, *potrebbe* essere considerato biologicamente irragionevole. Da sottolineare molto bene la parola "potrebbe", poiché l'analisi di alcune popolazioni ha riscontrato che in età molto avanzate (oltre i 100 anni) la probabilità di morte può avere diversi andamenti. Non c'è ancora un consenso definitivo in letteratura riguardo al fatto che i rischi individuali di morte alle età anziane, e in particolare quelli dei grandi anziani (dopo gli 80 anni, e ancor più dopo i 100) possano crescere a ritmi costanti (legge di Gompertz), a ritmi accelerati, oppure rallentino. A livello teorico, l'andamento di suddetti rischi può anche raggiungere un plateau (struttura detta logistica), o addirittura diminuire con l'età. È possibile affermare che gli studi sui soggetti ultracentenari non permettono ancora di giungere a una conclusione universalmente accettata, ma è importante porre l'attenzione sulle differenti dinamiche demografiche che possono caratterizzare diverse popolazioni.
- Il fenomeno dello short-term mean reversion³ può essere considerato biologicamente ragionevole a causa delle annuali variazioni ambientali. Il long-run mean reversion intorno a un trend deterministico *potrebbe*, d'altra parte, essere considerato biologicamente irragionevole. Nel lungo periodo, i miglioramenti della mortalità potranno essere influenzati, tra le altre ragioni, da importanti sviluppi nell'ambito della medicina, come ad esempio la scoperta della cura per il cancro. È veramente molto difficile prevedere quando questi miglioramenti potranno aver luogo o quale sarà l'impatto di un nuovo trattamento sanitario. Un livello deterministico di mean-reversion suggerirebbe la possibilità di conoscere *quali* miglioramenti stiano per accadere e *quale* sarà il loro impatto; ciò che non è possibile sapere è *quando* accadrà.

³ La mean reversion è la tendenza di molti fenomeni (finanziari e non) ad oscillare intorno a valori medi normali: in caso di livelli raggiunti eccessivamente superiori o, viceversa, inferiori rispetto a tali medie, presto o tardi si verificherà un movimento di ritorno.

2.3.3 Robustezza delle stime dei parametri e previsioni

Quando si definisce un modello, è necessario innanzitutto specificare qual è il range di anni di calendario e la serie di età da utilizzare per stimare i parametri. In definitiva, si vuole avere fiducia nelle previsioni che sono prodotte. Con molti modelli, si riscontra che un cambio della gamma di anni o di età considerati comporta una modificazione relativamente modesta delle stime dei parametri, in linea con la variazione storica dei dati. Questi modelli possono essere definiti *robusti*.

Per altri modelli, i medesimi cambiamenti sopra descritti possono generare stime dei parametri qualitativamente diverse e previsioni sulla futura mortalità sostanzialmente differenti. Questi tipi di modelli non sono robusti e non possono essere utilizzati per produrre previsioni ragionevoli e consistenti.

2.3.4 Plausibilità delle previsioni

La plausibilità delle previsioni è anch'essa una questione piuttosto soggettiva, come anche discusso nello studio di Cairns et al. (2008). In generale, non si può mai affermare con assoluta certezza e con oggettività che una serie di previsioni possano sembrare ragionevoli. Tuttavia Cairns et al. (2008) espongono alcuni esempi di modelli che forniscono un buon adattamento ai dati storici, ma poi producono proiezioni del tutto inverosimili sulla mortalità. Esempi di tali previsioni inverosimili possono essere: un cambiamento improvviso e drammatico nel trend centrale dei tassi di mortalità a specifiche età, oppure la costruzione di intervalli di previsione per la mortalità che risultano estremamente ampi o estremamente limitati.

2.3.5 Implementazione

Nella realtà pratica, non ha senso avere un modello molto complesso se ciò comporta un eccessivo tempo di elaborazione e di calcolo per ricavare le quantità di interesse allo studio. Se questo accade, allora si deve raggiungere un compromesso, preferibilmente senza sacrificare troppo la capacità di adattamento ai dati.

2.3.6 Criterio della “parsimonia”

È opportuno anche evitare modelli eccessivamente parametrizzati. Questo problema può essere affrontato utilizzando, per esempio, il Bayesian Information Criterion (BIC)⁴ per scegliere tra diversi tipi di modelli. Ciò assicura che ulteriori parametri vengano inclusi solamente se vi è un miglioramento significativo dell’adattamento.

2.3.7 Sample paths e intervalli di previsione

Molti modelli (a eccezione dei modelli P-splines) generano sample paths (percorsi o traiettorie campionarie) che permettono di valutare l’incertezza dei futuri cashflows legati alla mortalità e di prezzarli. Il pricing potrebbe richiedere la modifica delle misure e ciò comporterebbe, a sua volta, la necessità di un modello stocastico molto specifico e comprensivo di sample paths.

2.3.8 Incertezza dei parametri

Solitamente si ha a disposizione una quantità limitata di dati da utilizzare per stimare i parametri del modello e quindi tali parametri potranno essere oggetto di errore di stima. È importante essere in grado di saper gestire l’incertezza dei parametri, al fine di valutare l’impatto dell’errore di stima. Per esempio, Cairns et al. (2006a) e Dowd et al. (2007) hanno studiato questa problematica all’interno del “Cairns-Blake-Dowd two-factor model”, trovando che l’inclusione dell’incertezza dei parametri ha un impatto significativo sui livelli di previsione di incertezza nei tassi di mortalità e sulla speranza di vita futura, specialmente in orizzonti temporali di lungo periodo.

2.3.9 Cohort effect

Come sottolineato in precedenza, alcuni paesi sviluppati hanno tassi di mortalità che sembrano essere determinati non solo dall’età o dagli effetti di periodo, ma anche dagli effetti riferiti all’anno di nascita. Cairns et al. (2007) hanno dimostrato che la considerazione di questo cohort effect ha comportato un significativo miglioramento statistico dell’adattamento ai dati. Si suppone, inoltre, che questi effetti persisteranno nel futuro e le previsioni potranno essere migliorate dall’introduzione del cohort effect.

⁴ In statistica, il Bayesian Information Criterion (BIC) o Schwarz Criterion (anche SBC, SBIC), sviluppato da Gideon E. Schwarz, è un criterio per la scelta del modello tra una classe di modelli parametrici con un diverso numero di parametri. Quando si stimano i parametri del modello con la stima di massima verosimiglianza, è possibile aumentare tale verosimiglianza con l’aggiunta di ulteriori parametri, che possono generare l’overfitting. Il BIC risolve questo problema introducendo un termine di penalità per il numero di parametri nel modello. La formula per il BIC è: $-2\log(L) + k \log(n)$, dove L è il valore massimizzato della funzione di massima verosimiglianza per il modello, k il numero di parametri da stimare e n il numero delle osservazioni.

2.3.10 Struttura di correlazione

Come già accennato in precedenza, i tassi di miglioramento riferiti a diverse età differiscono sia da un anno all'altro che nel lungo periodo. In altre parole, i miglioramenti alle svariate età potrebbero essere correlati, ma non perfettamente. L'uso di un modello che presupponga perfetta correlazione può essere problematico per due ragioni:

- I livelli aggregati di incertezza in riferimento al portafoglio potrebbero essere esagerati (in quanto si presume che non vi siano benefici derivanti dalla diversificazione tra le età).
- La perfetta correlazione potrebbe erroneamente suggerire che strumenti derivati legati alla mortalità a una determinata età, potrebbero essere utilizzati per coprire perfettamente i miglioramenti della mortalità a età differenti. Quando le strategie di copertura adottate si basano sulla perfetta correlazione, ignorare questo problema comporterebbe un certo grado di rischiosità di base non osservabile.

2.4 Modelli a tempo discreto

I dati della mortalità a livello nazionale vengono generalmente pubblicati su base annuale e per singoli anni di età; queste caratteristiche portano ad un naturale sviluppo dei modelli a tempo discreto. Tipicamente, i valori delle tavole sono presentati nella forma di tassi di decesso "grezzi" (detti anche *tassi di decesso centrali*, nella notazione generale dello Human Mortality Database), calcolati con la seguente formula:

$$m_c(x, t) = \frac{D(x, t)}{E(x, t)} = \frac{\text{numero di decessi ad età } x \text{ nell'anno di calendario } t}{\text{popolazione media di età } x \text{ nell'annodi calendario } t}$$

La popolazione media (o esposizione) è solitamente un'approssimazione, basata sulla popolazione a metà anno oppure sulle stime della popolazione all'inizio di ogni anno. Il numero di decessi è solitamente conosciuto con maggior accuratezza, sebbene tale precisione dipenda dalle leggi locali riguardanti le rilevazioni sulla mortalità.

Alcuni autori hanno scelto di modellizzare i tassi di decesso ($m_c(x, t)$) in modo diretto, mentre altri scelgono di focalizzare l'attenzione sulle probabilità di morte, $q(x, t)$, cioè la sottostante probabilità che un individuo deceda tra il tempo t e il tempo $t+1$.

Queste due misure sono strettamente legate e, tipicamente, la loro relazione è rappresentata attraverso queste due approssimazioni:

- $q(x, t) = 1 - \exp[-m(x, t)]$
- $q(x, t) = \frac{m(x, t)}{1 + \frac{1}{2}m(x, t)}$

2.4.1 Il metodo esponenziale

Questo modello (forse meglio definito con il più comune appellativo di “metodo”) è uno dei più semplici nel campo delle applicazioni a tempo discreto ed è sempre citato in letteratura proprio per la sua immediatezza di esecuzione. In generale, si suppone che i logaritmi naturali delle probabilità di morte, $q(x,t)$, siano approssimativamente lineari per ogni età x . In questo modo è possibile trovare un valore δ_x tale per cui, per $h = 1,2,\dots,n-1$, si ottiene l'approssimazione:

$$\ln q(x, t_{h+1}) - \ln q(x, t_h) \approx -\delta_x(t_{h+1} - t_h)$$

Da cui:

$$\frac{q(x, t_{h+1})}{q(x, t_h)} \approx \exp[-\delta_x(t_{h+1} - t_h)]$$

Oppure, definendo $r_x = e^{-\delta_x}$:

$$q(x, t_{h+1})/q(x, t_h) \approx r_x^{t_{h+1}-t_h} \quad [6]$$

Assumendo che, per ogni età x , il parametro δ_x (o r_x) sia stimato, per esempio, attraverso la procedura dei minimi quadrati, può essere calcolata la stima della probabilità, $\hat{q}(x, t)$. Il vincolo $\hat{q}(x, t_n) = q(x, t_n)$ è solitamente applicato nel suddetto processo.

La relazione [6] suggerisce una naturale formula di approssimazione. Ponendo $t' = t_n$ e assumendo $t > t'$ si ottiene:

$$q(x, t) = q(x, t') \cdot r_x^{t-t'} \quad [7]$$

dalla quale è possibile esprimere il fattore di riduzione (che si suppone sia inferiore a 1 a causa del prevalente trend al ribasso delle probabilità di morte) come:

$$R_x(t - t') = r_x^{t-t'} = \exp[-\delta_x(t - t')]$$

La formula di estrapolazione [7] è originata dall'analisi dei profili di mortalità.

È importante ricordare, però, come il metodo dei minimi quadrati non sia l'unica soluzione per calcolare r_x (o δ_x). Per esempio si può supporre che siano disponibili un numero pari a n di tavole di mortalità. Per ogni età x e per $h = 1,2,\dots,n-1$, è possibile calcolare le quantità $r_x^{(h)}$ come:

$$r_x^{(h)} = \left[\frac{q(x, t_{h+1})}{q(x, t_h)} \right]^{1/t_{h+1}-t_h}$$

da cui, per ogni x , è possibile ricavare r_x come media geometrica delle quantità $r_x^{(h)}$:

$$r_x = \prod_{h=1}^{n-1} (r_x^{(h)})^{w_h} \quad [8]$$

I pesi devono, ovviamente, soddisfare le seguenti condizioni:

- $w_h \geq 0$ per $h = 1, 2, \dots, n-1$
- $\sum_{h=1}^{n-1} w_h = 1$

Ogni peso, w_h , dovrebbe essere scelto in modo da rispecchiare sia la lunghezza dell'intervallo di tempo tra le osservazioni che l'affidabilità statistica a esse relativa. Banalmente, se si pone $w_h = (t_{h+1} - t_h)/(t_n - t_1)$ per ogni h , verrebbe considerata solo la lunghezza degli intervalli temporali e l'espressione [8] si ridurrebbe a:

$$r_x = \left[\frac{q(x, t_n)}{q(x, t_1)} \right]^{1/t_n - t_1}$$

così che r_x sia determinato solo dal primo e dall'ultimo valore di $q(x, t)$ relativamente ai dati storici.

Un esempio pratico è ben rappresentato dalla Figura 11, che riporta graficamente i risultati delle proiezioni effettuate utilizzando quattro tavole di mortalità (SIM 71, SIM 81, SIM 91, IPS 55) riferite alla popolazione maschile italiana.

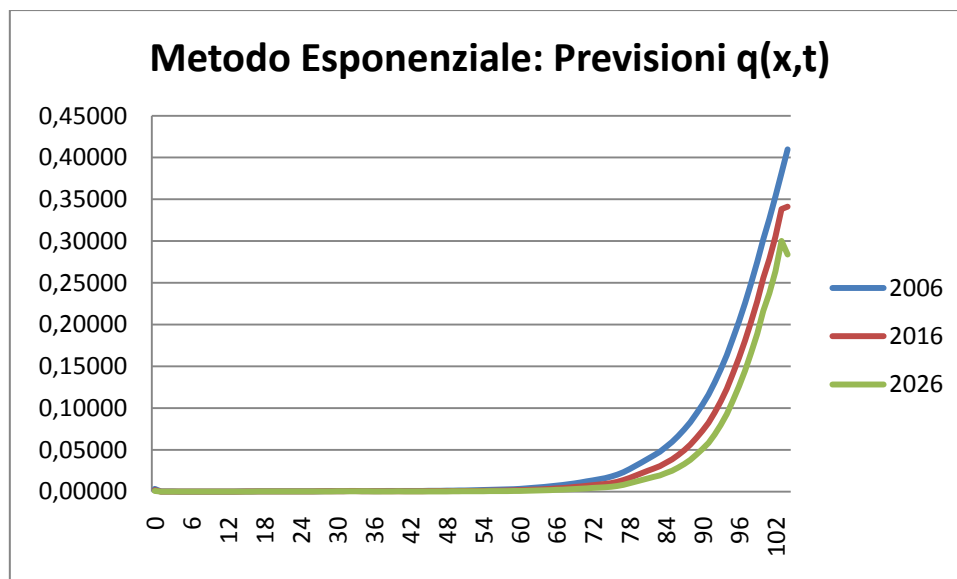


Figura 11

Ciò che viene raffigurato sono le probabilità di morte, $q(x, t)$, proiettate per il ventennio successivo al 2006. Gli r_x vengono calcolati con il metodo della media geometrica, utilizzando i pesi proposti da Colivicchi (2003); questi ultimi sono definiti in modo da dare maggior peso all'intervallo temporale più recente, rispetto a quelli passati, così da assegnare più importanza all'attuale evoluzione della mortalità.

Come ci si poteva aspettare, si nota un buon miglioramento delle probabilità di morte a tutte le età, senza però dimenticare che questo modello comporta una notevole semplificazione della realtà. Non considera dunque elementi di maggior complessità nello studio della mortalità.

Infine, è bene ricordare che è possibile generalizzare il modello esponenziale. Se si riprende la formula [7], si può notare che se $r_x < 1$, allora:

$$q(x, \infty) = 0$$

dove $q(x, \infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} q(x, t)$. Sebbene la validità delle previsioni di mortalità potrebbe essere ristretta ad un intervallo di tempo limitato, è più realistico assegnare un limite positivo alla mortalità a ogni età x . Per questo motivo, si può definire la *mortalità asintotica* attraverso la seguente formula:

$$q(x, t) = q(x, t') [\alpha_x + (1 - \alpha_x) r_x^{t-t'}] \quad [9]$$

dove $\alpha_x > 0$ per ogni x . Il fattore di riduzione è quindi dato da:

$$R_x(t - t') = \alpha_x + (1 - \alpha_x) r_x^{t-t'}$$

Chiaramente la [9] è una generalizzazione della [7]. Dalla [9] si ha inoltre che:

$$q(x, \infty) = \alpha_x \cdot q(x, t')$$

La formula esponenziale espressa dall'equazione [9] può essere semplificata assumendo che $r_x = r$ per ogni x , in modo tale da ottenere:

$$q(x, t) = q(x, t') [\alpha_x + (1 - \alpha_x) r^{t-t'}]$$

Sebbene il declino della mortalità non sia necessariamente uniforme nel corso di un dato range di età piuttosto ampio, questa assunzione potrebbe essere ragionevolmente corretta quando un limitato insieme di età viene coinvolto nelle previsioni sulla mortalità. Questo potrebbe essere il caso di proiezioni riguardanti i vitaliziati o i pensionati. In ogni caso, qualche sorta di flessibilità è fornita dai parametri α_x .

2.4.2 Il modello di Lee-Carter

La disponibilità di dati annuali divisi per età (esprese come numero intero) implica che sia relativamente semplice utilizzare rigorosi metodi statistici per adattare i modelli a tempo discreto al dataset studiato. In questa situazione si tende a implementare modelli facili da simulare nel tempo discreto, ma che non forniscono alcuna formula analitica come, ad esempio, le spot survival probabilities.

Il modello più recente, nonché il più popolare, è il seguente, elaborato da Lee e Carter (1992):

$$m(x, t) = \exp[\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} k_t^{(2)}]$$

dove $\beta_x^{(k)}$ sono gli effetti relativi all'età e $k_t^{(2)}$ è un effetto casuale di periodo. In questo modello $\beta_x^{(1)}$ rappresenta un tasso medio di log-mortalità nel tempo e all'età x , mentre $\beta_x^{(2)}$ rappresenta il tasso di miglioramento all'età x . L'effetto di periodo, $k_t^{(2)}$, è solitamente modellato come un processo casuale (v. per esempio Lee e Carter, 1992) o come un processo ARIMA⁵ (v. per esempio CMI, 2007).

Nel tempo, per stimare i suddetti parametri è stata utilizzata una varietà di approcci. Il primo modello di Lee e Carter è stato ampiamente sostituito da metodi statistici più formali, concentrati principalmente sul buon adattamento a tutti i dati analizzati. Un approccio piuttosto differente è stato proposto da Lee e Miller (2001), i quali si sono preoccupati di dare molta enfasi alla bontà dell'adattamento dei parametri riferiti agli anni finali del dataset. Lee e Miller hanno osservato che l'obiettivo della modellizzazione è normalmente quello di proiettare i tassi di mortalità.

Però, le solite procedure statistiche cercano di raggiungere un buon adattamento dei dati storici riferiti a tutti gli anni passati. Questo significa che gli anni finali del dataset storico possono comportare uno scarso adattamento (da notare che questo problema tende a essere più accentuato se vengono utilizzati più anni di calendario del dataset). Come esempio, nella Figura 12 si è riportato lo studio svolto da Cairns et al. (2008) sulle stime dei tassi sottostanti di mortalità nel 2004 in riferimento ai dati di Inghilterra e Galles (dal 1961 al 2004, per gli anni 60-89) utilizzando il modello Lee-Carter.

⁵ In statistica per modello ARIMA (acronimo di AutoRegressive Integrated Moving Average) si intende una particolare tipologia di modelli atti ad indagare serie storiche che presentano caratteristiche particolari. Nello specifico, i modelli ARIMA fanno parte della famiglia dei processi lineari non stazionari. Un modello ARIMA(p,d,q) deriva da un modello ARMA(p,q) a cui sono state applicate le differenze di ordine d per renderlo stazionario.

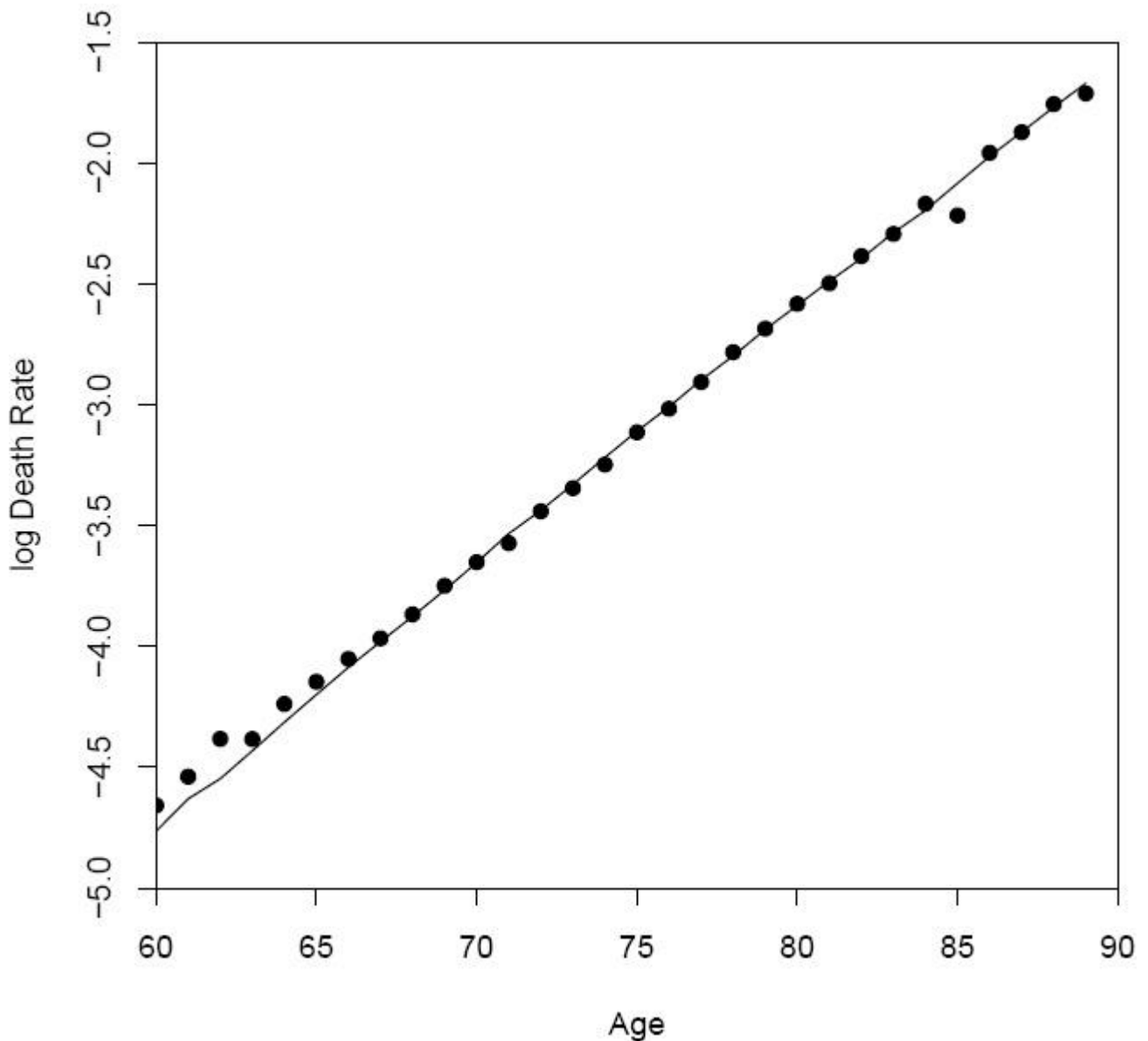


Figura 12

Si può notare come la curva di adattamento sottostimi sistematicamente i tassi di decesso a età più basse. Basandosi su un'analisi fuori dal campione appena descritto, Lee e Miller (2001) hanno osservato che l'errore sistematico nel passaggio da un anno all'altro persiste e si traduce in previsioni errate riguardo gli output più importanti, quali i tassi di mortalità a una specifica età o la speranza di vita. Per superare questo problema, Lee e Miller suggeriscono di calibrare $\beta_x^{(1)}$ ai tassi di log-mortalità nell'anno di base, t_0 (così che, $\beta_x^{(1)} = m_c(x, t_0)$), in combinazione con $k_{t_0}^{(2)} = 0$.

Altri autori hanno sviluppato la metodologia di Lee-Carter allo scopo di migliorare il parametro $k_t^{(2)}$. La motivazione (v. per esempio Booth et al., 2002) sta nel fatto che l'andamento dei cammini casuali sembra cambiare di volta in volta. De Jong e Tickle (2006) hanno affrontato questo problema modellando tale andamento come un processo casuale latente.

D'altra parte, Booth et al. (2002) hanno tentato di calcolare il periodo ottimale di stima per il modello a cammini casuali con andamento costante. Comunque, il metodo di Booth et al. (2002) potrebbe portare ad una sottostima sistematica del vero livello di volatilità per $k_t^{(2)}$.

Il modello di Lee-Carter ha un'utile funzione "pedagogica", ma presenta anche alcuni inconvenienti. Le principali problematiche sono:

- È un modello one-factor, che porta i miglioramenti della mortalità a tutte le età ad essere perfettamente correlati.
- L'effetto di $\beta_x^{(2)}$ è normalmente misurato come un tasso di miglioramento medio all'età x , ma $\beta_x^{(2)}$ ha un secondo scopo, cioè quello di determinare il livello di incertezza nei futuri dati di mortalità all'età x :

$$Var[\log m(x, T) | \mathcal{M}_t] = [\beta_x^{(2)}]^2 Var[k_T^{(2)} | k_t^{(2)}]$$

Questo significa che l'incertezza nei tassi di mortalità futuri non può essere slegata dai tassi di miglioramento. Storicamente, questi ultimi risultano minori a età avanzate. Dunque, l'incertezza prevista nei futuri tassi di decesso sarà significativamente minore alle età più elevate. Tuttavia, questa previsione non è conforme all'elevato livello di variabilità nel miglioramento della mortalità in età avanzate osservata nei dati storici. Tutto ciò può compromettere la validità del modello.

- L'utilizzo della versione base del modello Lee-Carter può comportare una mancanza di smoothness (cioè il fatto di "non essere liscio", che è il contrario rispetto alle funzioni lisce⁶) riguardo l'effetto dell'età stimato $\beta_x^{(2)}$. Supponendo che $\hat{\beta}_x^{(1)}$ e $\hat{\beta}_x^{(2)}$ siano stimati utilizzando un certo dataset, sarebbe possibile effettuare un esperimento fuori dal campione considerato prendendo $\hat{\beta}_x^{(1)}$ e $\hat{\beta}_x^{(2)}$ come dati e stimare $k_t^{(2)}$ per ogni anno futuro.

Si calcolano successivamente i residui standardizzati per il periodo fuori dal campione:

$$\varepsilon(x, t) = [D(x, t) - m(x, t)E(x, t)] / \sqrt{m(x, t)E(x, t)} \quad [10]$$

Se il modello e il metodo di stima sono corretti, allora gli $\varepsilon(x, t)$ potrebbero essere indipendenti, identicamente distribuiti (i.i.d.) e approssimabili a una normale standard (N(0,1)). Esperimenti preliminari indicano, però, che se vi è mancanza di smoothness in $\hat{\beta}_x^{(2)}$, allora vi è una chiara relazione inversa tra $\hat{\beta}_x^{(2)}$ (per ogni x) e la varianza degli $\varepsilon(x, t)$ osservata al di fuori del campione. Questa osservazione viola l'assunzione di i.i.d. e la conseguente approssimazione alla normale standard. Tale inconveniente può essere superato applicando il metodo P-splines all'effetto riferito all'età.

- Il problema dell'errore nelle previsioni richiamato da Lee e Miller (2001) e le loro proposte di soluzione sono fondamentali, perché il modello Lee-Carter spesso non si adatta perfettamente ai dati. A livello grafico, le problematiche sono sorte analizzando la rappresentazione dei residui standardizzati.

⁶ In matematica la funzione liscia è una funzione che ammette derivate parziali di qualsiasi ordine, cioè è infinitamente derivabile.

L'approccio statistico proposto da Brouhns et al. (2002) assume che i decessi, $D(x,t)$, siano variabili casuali di Poisson con media e varianza entrambe uguali a $m(x,t)E(x,t)$, dove $m(x,t) = \exp[\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)}k_t^{(2)}]$. In questo modo i residui standardizzati risultano ancora pari all'espressione [10].

La modifica di Lee e Miller è semplicemente un palliativo che migliora i problemi a breve termine in riferimento agli errori di previsione. Però, se il metodo di stima "consueto" (per esempio Brouhns et al., 2002) ha esigue proprietà statistico-campionarie, la calibrazione del modello proposta da Lee e Miller avrà gli stessi problemi di affidabilità nelle previsioni sui miglioramenti della mortalità a lungo termine.

2.4.3 Modelli multifactor age-period

Di recente è apparso un ridotto numero di modelli multifattoriali. Come primo esempio, Renshaw e Haberman (2003) hanno proposto il seguente modello:

$$\log m(x,t) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)}k_t^{(2)} + \beta_x^{(3)}k_t^{(3)}$$

dove $k_t^{(2)}$ e $k_t^{(3)}$ sono effetti di periodo dipendenti fra loro (per esempio un cammino casuale bivariato).

Cairns, Blake e Dowd (2006b) si sono concentrati sulle età più avanzate (da 60 a 80 anni) e hanno sfruttato il semplice andamento della mortalità in quegli anni per costruire un modello più parsimonioso basato sulla trasformazione logistica della probabilità di morte, invece che sul logaritmo dei tassi di decesso. Tale trasformazione viene definita dalla seguente equazione:

$$\text{logit } q(x,t) = \log \frac{q(x,t)}{1-q(x,t)} = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x})$$

dove $(k_t^{(1)}, k_t^{(2)})$ sono definiti come variabile casuale bivariata derivabile. L'analisi includeva anche un studio dettagliato su come l'incertezza dei parametri potesse essere inclusa nelle simulazioni usando un metodo bayesiano.

Entrambi i modelli offrono vantaggi qualitativi significativi rispetto al modello Lee-Carter; tuttavia, non riescono a considerare opportunamente il cohort effect. Quest'ultimo viene opportunamente introdotto dal modello di Renshaw-Haberman.

2.4.4 Il modello Renshaw-Haberman con effetto di coorte

Renshaw e Haberman (2006) hanno proposto uno dei primi modelli stocastici per la mortalità di una popolazione che incorpora il cohort effect:

$$\log m(x, t) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} k_t^{(2)} + \beta_x^{(3)} \gamma_{t-x}^{(3)}$$

dove $k_t^{(2)}$ è un effetto casuale di periodo, mentre $\gamma_{t-x}^{(3)}$ è un effetto casuale di coorte, a sua volta funzione dell'anno di nascita, $(t-x)$.

Nella loro analisi sui dati della popolazione maschile di Inghilterra e Galles, Renshaw e Haberman hanno trovato un significativo miglioramento rispetto al modello Lee-Carter (v. per esempio Cairns et al., 2007). Il più importante sviluppo è stato che l'analisi dei residui standardizzati abbia rilevato una dipendenza molto bassa rispetto all'anno di nascita, in contrasto con il modello Lee-Carter (Figura 13 e Figura 14).

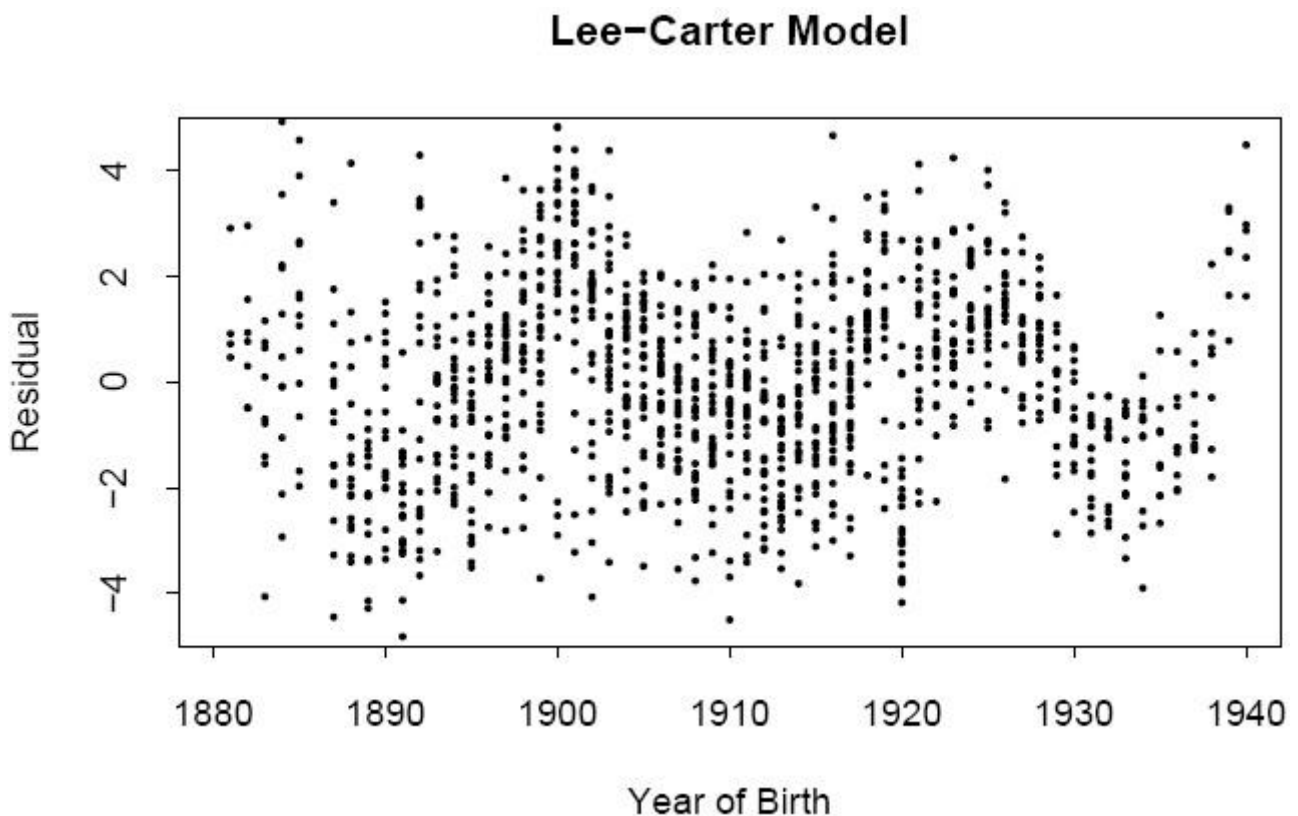


Figura 13

Renshaw-Haberman Cohort Model

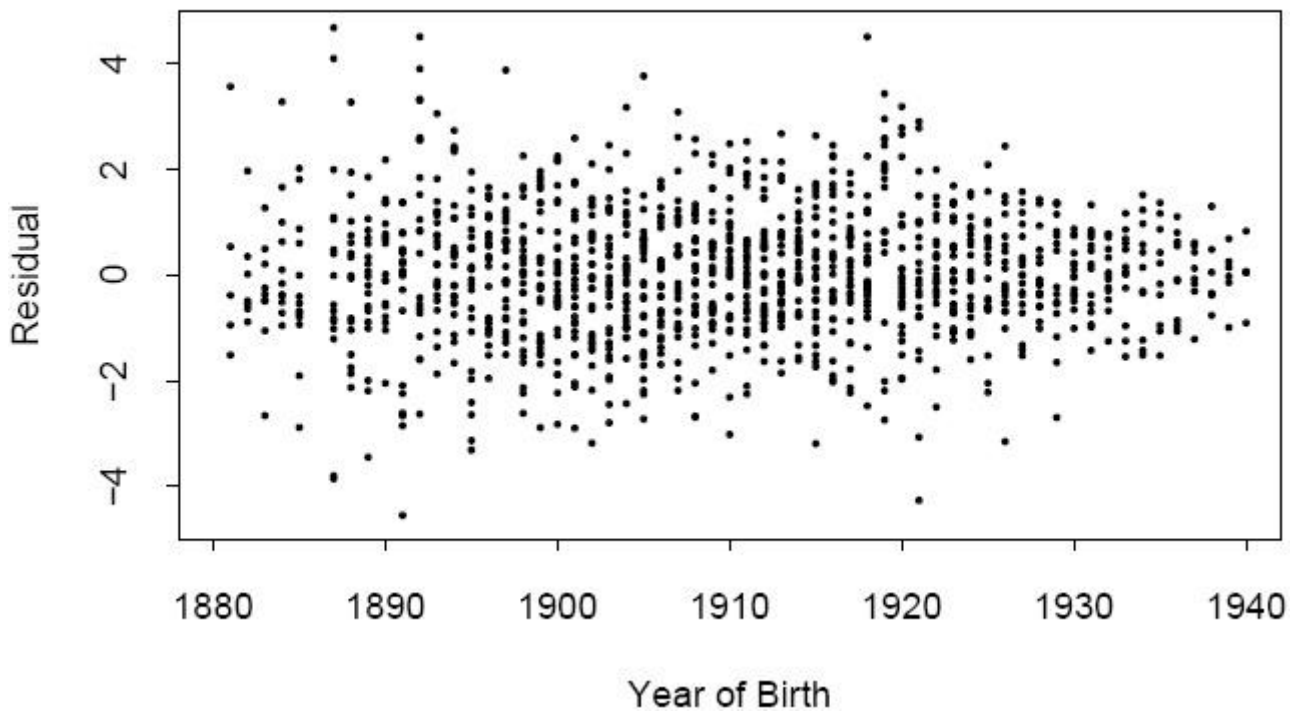


Figura 14

La Figura 13 (Lee-Carter) mostra dipendenza significativa rispetto all'anno di nascita, in particolare tra il 1925 e il 1935. La Figura 14 (Renshaw-Haberman), invece, non mostra tale dipendenza.

Sfortunatamente, però, il modello di Renshaw e Haberman si è rivelato soffrire di mancanza di robustezza. CMI (2007) ha notato che un cambiamento del range di anni utilizzato per adattare il modello potrebbe restituire stime di parametri qualitativamente diverse. Cairns et al. (2007, 2008) hanno riscontrato lo stesso problema cambiando anch'essi gli anni di riferimento. Questa mancanza di robustezza potrebbe essere collegata alla forma della funzione di verosimiglianza. Per modelli robusti, tale funzione presenta, con molta probabilità, un unico massimo che rimane invariato anche se si cambia il range di anni o di età. Per i modelli scarsamente robusti, invece, la funzione di verosimiglianza può avere più di un massimo. Di conseguenza, quando si cambiano i dati di riferimento, l'optimiser (ottimizzatore, in riferimento all'algoritmo per trovare il massimo della funzione di verosimiglianza) "salterà" periodicamente da un massimo locale a un altro con differenze qualitativamente rilevanti.

Cairns et al. (2008) hanno notato un ulteriore problema con il modello Renshaw-Haberman. L'effetto di coorte, $\gamma_{t-x}^{(3)}$, sembrerebbe avere un andamento lineare, o forse quadratico, rispetto all'anno di nascita. Tutto ciò suggerisce che l'effetto age-cohort venga utilizzato, inavvertitamente, per compensare la mancanza di un secondo effetto age-cohort, nonché per tentare di catturare l'effetto di coorte all'interno dei dati.

Un miglioramento del modello potrebbe dunque essere la combinazione del secondo effetto age-period definito da Renshaw e Haberman (2003) con un semplice effetto di coorte. Questo accorgimento potrebbe comportare un migliore adattamento, anche se potrebbe non risolvere il problema della robustezza.

2.4.5 Il modello Cairns-Blake-Dowd con effetto di coorte

Visti i problemi con i modelli precedenti, sono state proposte molte alternative allo scopo di trovare un modello che incorporasse una struttura parsimoniosa, con un age-period multifattoriale e con la possibilità di considerare il cohort effect. Tra tutte le possibili soluzioni, quella che ha dimostrato un buon adattamento ai dati è stata la generalizzazione del modello a due fattori di Cairns-Blake-Dowd (v. Cairns et al. 2006b), espressa dall'equazione:

$$\text{logit } q(x, t) = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}) + k_t^{(3)}[(x - \bar{x})^2 - \sigma_x^2] + \gamma_{t-x}^{(4)}$$

dove $\bar{x} = (x_u - x_l + 1)^{-1} \sum_{x=x_l}^{x_u} x$ è la media nel range degli anni da x_l a x_u da stimare, e $\sigma_x^2 = (x_u - x_l + 1)^{-1} \sum_{x=x_l}^{x_u} (x - \bar{x})^2$ è la varianza corrispondente.

Paragonando questo nuovo modello con quello originale di Cairns et al. (2006b) si può notare la presenza di due nuovi componenti. Uno è l'effetto age-period addizionale, $k_t^{(3)}[(x - \bar{x})^2 - \sigma_x^2]$, che ha un andamento quadratico rispetto all'età. Questo primo termine addizionale ha portato miglioramenti statisticamente significativi nell'analisi effettuata dallo studio riferito ai dati della popolazione maschile di Inghilterra, Galles e Stati Uniti, anche se è comunque meno importante rispetto ai primi due effetti di age-period. Il secondo termine aggiuntivo, è legato invece all'introduzione del cohort effect, $\gamma_{t-x}^{(4)}$, ed è funzione dell'anno di nascita $t-x$. È stato anche proposto un modello alternativo che pone $k_t^{(3)} = 0$ e sostituisce $\gamma_{t-x}^{(4)}$ con un fattore age-cohort più complesso, $(x_c - x)\gamma_{t-x}^{(4)}$, ottenendo risultati interessanti da analizzare (v. Cairns et al., 2007, 2008).

Le stime dei parametri per questo modello, in riferimento alla popolazione maschile di Inghilterra e Galles di età 60-89, sono riportate nella Figura 15.

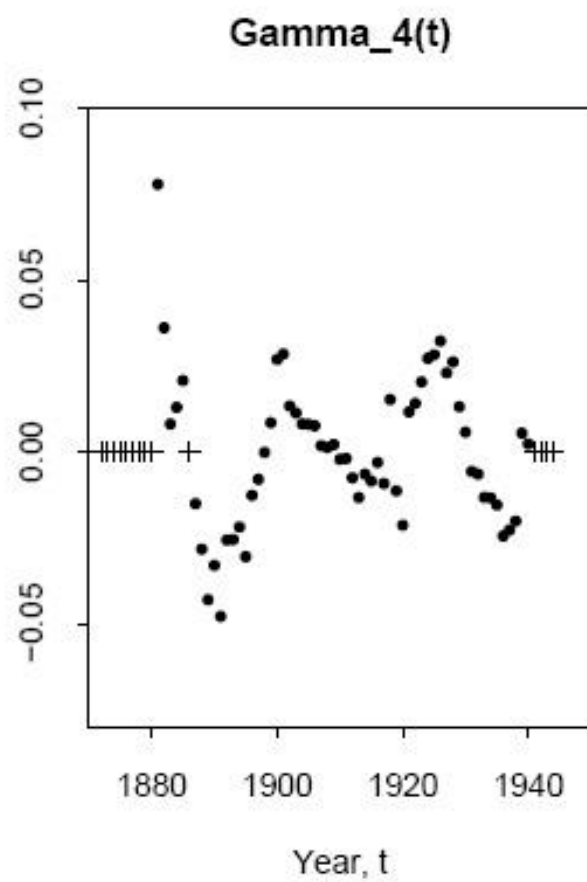
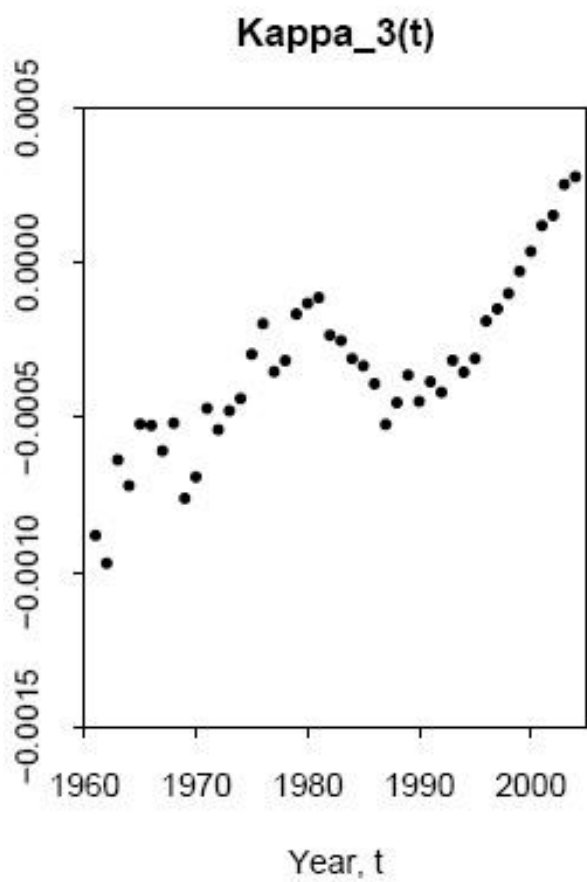
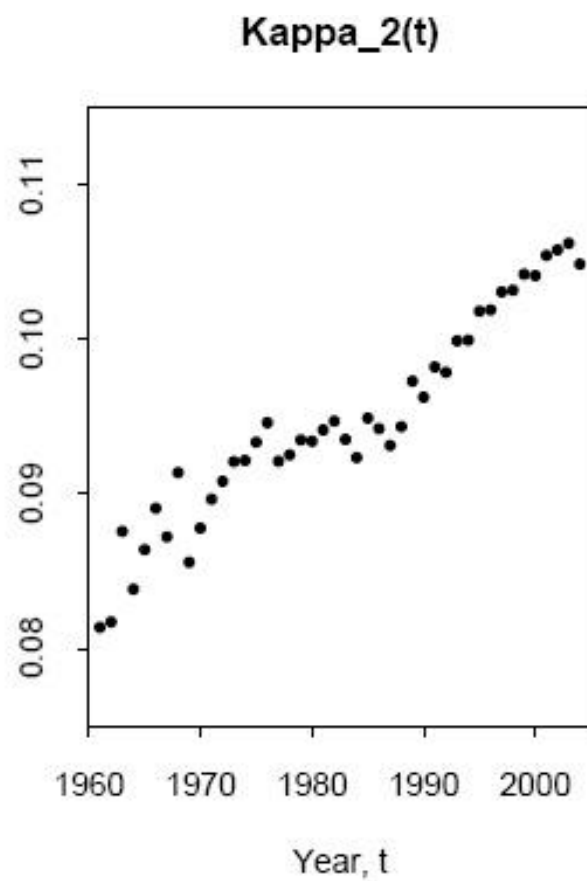
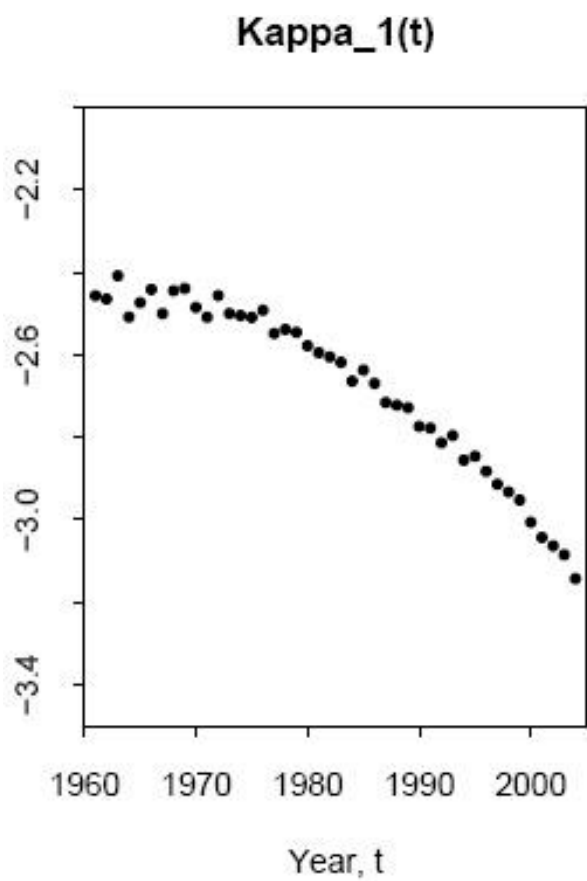


Figura 15

Nello studio da cui è tratta questa rappresentazione sono state fatte le seguenti osservazioni:

- $k_t^{(1)}$ (che può essere interpretato come il “livello” di mortalità) ha un andamento decrescente, che riflette il generale miglioramento dei tassi di mortalità nel tempo.
- $k_t^{(2)}$ (il coefficiente che indica l’ “inclinazione”) ha un andamento gradualmente crescente, dato dal fatto che, storicamente, la mortalità a età avanzate migliora a un tasso inferiore rispetto alle età giovani.
- $k_t^{(3)}$ (il coefficiente di “curvatura”) è molto irregolare, ma cresce tra il 1961 e il 2004.
- $\gamma_{t-x}^{(4)}$ fluttua attorno allo zero con un trend non sistematico e senza alcuna curvatura particolare.

Va sottolineato che per le previsioni, è necessario sviluppare modelli atti a rappresentare l’effetto di coorte e le future dinamiche della mortalità del periodo considerato. Un semplice punto di partenza è quello di utilizzare un modello stocastico tridimensionale per $k_t^{(1)}$, $k_t^{(2)}$ e $k_t^{(3)}$ (v. per esempio Cairns et al., 2008). Tuttavia, con questo approccio si potrebbero presentare i seguenti aspetti negativi:

- Ricordando la Figura 15, è probabile che il modello a cammini casuali per $k_t^{(3)}$ un andamento crescente. Dato che $k_t^{(3)}$ diventa sempre più positivo, la curvatura di *logit* $q(x,t)$ diverrebbe a sua volta sempre più positiva col passare del tempo. Ci si può chiedere se questo fenomeno potrebbe portare a una curva di mortalità *biologicamente irragionevole*. Possibili compromessi comprendono l’utilizzo di un processo casuale per $k_t^{(3)}$ con drift pari a zero, oppure considerano un processo autoregressivo che sia mean reverting a un livello diverso dallo zero (per esempio AR(1)).
- Il trend crescente di $k_t^{(2)}$ è molto più pronunciato rispetto a $k_t^{(3)}$. In particolare, questo andamento genera curve di mortalità a età elevate che diventano sempre più “ripide” col passare del tempo, e ci si può chiedere, a ragione, se tale conseguenza sia biologicamente plausibile. Quindi, ancora una volta, un modello senza drift o autoregressivo potrebbe essere considerato più ragionevole a livello biologico.

In altri modelli (v. Cairns et al., 2007) l’effetto di coorte sembra avere un andamento lineare. Ma questo andamento lineare può essere spesso trasformato in effetti addizionali di age-period. Questo fatto genera la possibilità che questi modelli possano essere ulteriormente migliorati incorporando addizionali effetti age-period e magari semplificando la forma del cohort effect.

2.4.6 P-splines

Un approccio divenuto popolare in Inghilterra è l'utilizzo delle *Penalized Splines* (P-splines) (Currie et al. 2004, CMI 2006). Un tipico modello di questo genere ha la forma seguente:

$$\log m(x, t) = \sum_{i,j} \theta_{i,j} B_{i,j}(x, t)$$

dove $B_{i,j}(x, t)$ è una funzione di base pre-specificata con punti regolarmente distanziati, e $\theta_{i,j}$ sono parametri da stimare. L'uso delle sole splines può portare a funzioni over-fitted, dando come risultato curve di mortalità troppo irregolari. Le P-splines superano questo problema penalizzando la smoothness dei $\theta_{i,j}$ (utilizzando per esempio relazioni lineari o quadratiche). Questo approccio è risultato molto buono nel produrre un adattamento globale ai dati (CMI, 2006). Tuttavia, un eccessivo appiattimento (smoothing) nella dimensione del periodo può portare a sovra- o sotto-stimare sistematicamente i tassi di mortalità, dato che il modello non riesce a rilevare correttamente di anno in anno le fluttuazioni a livello ambientale che caratterizzano tutte le età nella stessa misura (Cairns et al., 2007). Per evitare questo problema, Currie sta sviluppando una variante che comprenda shocks annuali all'interno di una curva di mortalità liscia (cioè che ammette derivate parziali di qualsiasi ordine) nelle due dimensioni di età e periodo.

2.4.7 Questioni "filosofiche"

Ciò che è stato esposto fin'ora ha fatto emergere alcune differenze di carattere metodologico tra i diversi approcci. In particolare, ci si può chiedere: in che misura la curva di mortalità deve essere *smooth*, cioè liscia (per il significato, v. nota 6)?

Una recente estensione dell'approccio P-splines sviluppato da Kirkby e Currie (2007) suggerisce che i sottostanti tassi di mortalità (il segnale) siano smooth (lisci), ma in realtà si osserva un segnale più un rumore (*noise*). Il rumore è un effetto sistematico di tutte le età, specifico per ogni anno di calendario e che rispecchia le condizioni "locali". Gli altri modelli esposti in precedenza assumono che ciò che si osserva sia solo il segnale, senza la presenza di alcun rumore sistematico (si ricordi, ad esempio, l'assunzione di indipendenza tra funzioni di Poisson con riferimento ai tassi di mortalità). Tra questi modelli, ci sono varie ipotesi riguardo la proprietà di smooth nelle dimensioni individuali. I modelli Lee-Carter e Renshaw-Haberman considerano tale proprietà riferendosi all'effetto di coorte. Di contro, il modello Cairns-Blake-Dowd con effetto di coorte assume la smooth nell'effetto riferito all'età, ma non nel cohort effect.

Con i limitati dati a disposizione, il dibattito sulla proprietà di smooth è ancora lontano da una soluzione oggettivamente riconosciuta.

2.4.8 Modelli di mercato a tempo discreto

Come descritto nei paragrafi 2.2.5 e 2.2.6, anche per analizzare la mortalità è importante considerare l'utilizzo delle probabilità di mercato Q nella determinazione del pricing. Tutto ciò si ripercuote sulla gestione delle imprese di assicurazione (nonché dei fondi pensione), che devono prestare molta attenzione alla prezzatura dei prodotti del ramo vita legati alla mortalità degli assicurati.

Nel campo della modellizzazione dei tassi di interesse, i modelli di mercato hanno il compito di rappresentare quei tassi che sono direttamente scambiati nei mercati, quali i tassi LIBOR (*London Interbank Offered Rate*, uno dei tassi di riferimento per i mercati finanziari) o i tassi swap. Esiste un gran numero di approcci differenti che si possono utilizzare per modellizzare a livello stocastico i tassi di interesse; tali approcci possono essere opportunamente sviluppati per analizzare le dinamiche probabilistiche della mortalità. In seguito si considererà un ipotetico mercato di zero-coupon longevity bonds con una completa gamma di età e scadenze. Il prezzo al tempo t , di un (x,T) -bond che paga $C(T)S(x,T)$ al tempo T è definito da $B_{CS}(x, t, T)$.

Per un mercato in assenza di arbitraggio, è necessaria la presenza di una misura risk-neutral, Q , nell'ambito della quale il prezzo scontato dell'asset, $\frac{B_{CS}(x,t,T)}{c(t)} = E_Q[S(x,T)|\mathcal{M}_t]$, sia una martingala. Utilizzando la terminologia delle forward survival probabilities (equazioni [2] e [4]), si ha:

$$p_Q(x, t, T_0, T_1) = \frac{B_{SC}(x, t, T_1)}{B_{SC}(x, t, T_0)}$$

La proprietà di martingalità nello scontare i prezzi degli asset implica che:

$$p_Q(x, t, t, T_1) = E_Q[p_Q(x, t + 1, t, T)|\mathcal{M}_t] \quad [11]$$

per ogni $t < T$ e per ogni x .

I modelli di mercato modellizzano simultaneamente i prezzi di tutti i (x,T) -longevity bond di Tipo B. Questo approccio è stato utilizzato per la prima volta nel modello Olivier-Smith (v. Olivier e Jeffery 2004 e Smith 2005), il quale assume che per ogni $t \leq T$ e per ogni x si possa avere:

$$p_Q(x, t + 1, T, T + 1) = p_Q(x, t, T, T + 1)^{b(x,t+1,T,T+1)G(t+1)}$$

dove $G(1), G(2), \dots$ è una sequenza di variabili casuali Gamma indipendenti e identicamente distribuite, con parametri di forma e di scala uguali a una costante α . La funzione $b(x, t + 1, T, T + 1)$ è misurabile al tempo t ed è una costante di normalizzazione che assicura che l'equazione [11] sia soddisfatta. Quest'impostazione presenta due principali svantaggi derivanti dal fatto di essere uni-fattoriale:

- Lo scarso controllo sulle varianze dei tassi di mortalità a età individuali.
- Una perfetta correlazione tra miglioramenti della mortalità a età differenti.

L'utilizzo della variabile casuale Gamma, invece, ha due vantaggi rispetto alle alternative possibili:

- Rende i calcoli analiticamente trattabili.
- Assicura che i valori delle forward survival probabilities rimangano tra 0 e 1.

Cairns (2007) ha proposto una generalizzazione del modello Olivier-Smith, discostandosi dalla dipendenza da una singola fonte di rischio e permettendo così un completo controllo sulle varianze e sulle correlazioni. Il risultato ottenuto è descritto da:

$$p_Q(x, t + 1, T, T) = p_Q(x, t, t, T) \cdot e^{g(x, t+1, T)G(x, t+1, T)}$$

In questo modello, le $g(x, t + 1, T)$ sono costanti di normalizzazione che assicurano che la proprietà di martingalità sia soddisfatta. Le $G(x, t + 1, T)$ sono variabili casuali Gamma dipendenti tra di loro, specifiche per ogni scadenza T e per ogni età x . Cairns (2007) lascia come problema da risolvere il modo di generare le variabili Gamma, considerandolo come un passaggio assai arduo. Tuttavia, se questo problema venisse superato, il modello generalizzato avrebbe un potenziale notevole.

2.5 Modelli a tempo continuo

Sebbene i dati riferiti alla mortalità siano riportati in intervalli aggregati e discreti (per esempio annualmente), è naturale considerare lo sviluppo dei tassi di mortalità nel tempo continuo. Cairns, Blake e Dowd (2006a) identificano quattro contesti che possono essere utilizzati per sviluppare modelli a tempo continuo⁷:

- Modelli short-rate, cioè modelli uni-dimensionali (in x) con tasso istantaneo di mortalità $\mu(x, t)$.
- Modelli forward-rate, cioè modelli bi-dimensionali (nell'età x e scadenza T) con curva di mortalità forward $\tilde{\mu}(x + T, t, T)$ (equazione [5]).
- Modelli di mercato, per le forward survival probabilities e per i prezzi delle rendite.
- Modelli di mortalità positivi, per le spot survival probabilities.

Non è ancora stato proposto alcun modello per il quarto e ultimo caso, quindi non verrà approfondito nella successiva trattazione.

2.5.1 Questioni "filosofiche": diffusione o salti?

Prima di passare all'analisi vera e propria dei modelli a tempo continuo, è bene chiarire quale sottostante processo stocastico sia possibile utilizzare.

⁷ I modelli descritti nella sezione 2.4 possono essere considerati del tipo short-rate, con l'eccezione del modello di mercato esposto nella sezione 2.4.8.

Molta della modellistica attuale si è concentrata sui processi di *diffusione*, nei quali le dinamiche della mortalità dipendono da uno o più moti browniani. Tuttavia, vi è la possibilità che questi moti possano essere sostituiti o supportati dall'uso dei processi a salto (*jump processes*). Nelle dinamiche della mortalità i salti possono verificarsi per una serie di ragioni: improvvisi cambiamenti delle condizioni ambientali o importanti sviluppi nell'ambito della medicina.

Quando vengono presi in considerazione, i salti possono comportare uno o due effetti importanti. Nel caso più comune, hanno un impatto diretto sul tasso istantaneo di mortalità, $\mu(x,t)$. Esempi di questo fenomeno possono essere improvvise pandemie o lo scoppio di una guerra. Comunque è plausibile che il repentino annuncio al tempo t riguardo, per esempio, la cura per il cancro, potrebbe non avere effetti immediati. Questo implicherebbe che non vi è alcun salto nell'istantaneo tasso di mortalità. Tuttavia, tale scoperta potrebbe causare un salto sul tasso di miglioramento di $\mu(x,t)$. Come conseguenza, i tassi di mortalità forward sarebbero anch'essi caratterizzati da un salto, probabilmente ancora maggiore in futuro.

Modelli con salti sono ancora in una fase iniziale di sviluppo (v., per esempio, Hainaut e Devolder 2007 o Chen e Cox 2007), e il loro utilizzo richiederà molta attenzione in termini di valutazione del modello (v. sezione 2.3.1). Così, per esempio, l'inclusione dei salti dovrà essere giustificata da solide motivazioni di carattere biologico.

Infine, è possibile notare come la natura discreta (a tempo discreto) della mortalità renda il contrasto tra modelli a diffusione e modelli con salti una sorta di speculazione: se osserviamo solamente il processo a livello annuale, allora non possiamo valutare direttamente i salti, ma solo analizzare il loro effetto congiunto. Questo comporta un certo grado di responsabilità per lo studioso, che deve fornire una corretta giustificazione di carattere biologico per l'inclusione dei salti.

2.5.2 Modelli short-rate

I modelli short-rate a tempo continuo sono stati, fino a oggi, la risorsa più produttiva di nuovi modelli. In generale sono così definiti:

$$d\mu(x, t) = a(x, t) + b(x, t)'d\tilde{W}(t)$$

dove $a(x,t)$ è il drift, $b(x,t)$ è un vettore $n \times 1$ delle volatilità e $\tilde{W}(t)$ è il moto browniano standard n -dimensionale con misura risk-neutral Q . Le risk-neutral spot survival probabilities (considerando un mercato privo di arbitraggio) sono date da (v., per esempio, Milevsky e Promislow 2001 o Dahl 2004):

$$p_Q(x, t, T) = E \left[\exp \left(\int_t^T \mu(x + u, u) du \right) | \mathcal{M}_t \right]$$

I processi del drift e della volatilità dipenderanno quasi certamente dalla struttura a termine della mortalità, assicurando che la curva di mortalità rimanga positiva e mantenga una forma biologicamente ragionevole (v. Cairns et al., 2006a).

Se $a(x,t)$ e $b(x,t)$ soddisfano certe condizioni (v. Dahl, 2004), è possibile ottenere una forma compatta per le spot survival probabilities:

$$p_Q(x, t, T) = \exp[A_0(x, t, T) - A_1(x, t, T)\mu(x + t, t)] \quad [12]$$

I modelli dove il logaritmo della spot survival probability è funzione lineare della forza di mortalità (o tasso istantaneo di mortalità) vengono detti modelli *affini* e sono diventati i più popolari per analizzare la mortalità stocastica grazie alla loro trattabilità analitica (v. Dahl 2004, Biffis 2005, Biffis e Millosovich 2006, Dahl e Møller 2006, Schrage 2006). Modelli non affini sono stati sviluppati da Milevsky e Promislow (2001) e Biffi et al. (2009).

Dahl e Møller (2006) hanno definito un modello di mortalità uni-fattoriale utilizzando il concetto di fattori di miglioramento della mortalità per mettere in relazione la futura forza di mortalità con la struttura a termine corrente della mortalità stessa, che viene così espressa:

$$\mu(x + t, t) = \mu(x + t, 0)\xi(x + t, t)$$

dove $\xi(x + t, t)$ è il fattore di miglioramento con dinamica:

$$d\xi(y, t) = [\gamma(y, t) - \delta(y, t)\xi(y, t)]dt + \sigma(y, t)\sqrt{\xi(y, t)}d\tilde{W}(t)$$

In questo modo $\xi(y, t)$ prende la forma di un modello Cox, Ingersoll e Ross (1985) a tempo non omogeneo (CIR). Questo modello soddisfa il criterio per un'affine struttura a termine della mortalità e, quindi, le spot survival probabilities prendono la forma [12]. Le funzioni deterministiche $\gamma(y, t)$ e $\delta(y, t)$ permettono una considerevole flessibilità in termini di tasso al quale si prevede che la mortalità migliorerà nel tempo. Questo richiede una mean reversion (ossia $\delta(y, t) > 0$; v. sezione 2.3.2), che potrebbe risultare relativamente debole e, pertanto, rappresenterebbe un piccolo svantaggio rispetto ai vantaggi della trattabilità. Dahl e Møller (2006) danno esempi per $\gamma(y, t)$, $\delta(y, t)$ e $\sigma(y, t)$ che prendono particolari forme parametriche calibrate approssimativamente sui dati danesi della mortalità. Un modello più generale a due fattori è stato proposto da Biffis e Millosovich (2006).

2.5.3 Modelli forward-rate

Questo tipo di approccio è stato sviluppato da un gran numero di autori (v., per esempio, Dahl 2004, Miltersen e Persson 2005, Bauer 2006, Bauer e Russ 2006, Cairns et al. 2006a), che hanno preso spunto dal lavoro originale di Heath, Jarrow e Morton (1992) per un'impostazione del tasso di interesse. La formula generale del modello ha la seguente dinamica:

$$\tilde{\mu}(x + T, t, T) = \alpha(x + T, t, T)dt + \beta(x + T, t, T)'d\tilde{W}(t)$$

dove $\alpha(y, t, T)$ è uno scalare, $\beta(y, t, T)$ è un vettore $n \times 1$ e $\tilde{W}(t)$ è un moto browniano standard n -dimensionale con una misura risk-neutral Q .

Per avere un mercato privo di arbitraggio è necessario che:

$$\alpha(x + t, t, T) = -V(x, t, T)' \beta(x + T, t, T)$$

dove $\beta(x + T, t, T) = \partial V(x, t, T) / \partial T$.

Miltersen e Persson (2005) considerano anche il caso in cui la mortalità e i tassi di interesse siano correlati, arricchendo così la modellizzazione in cui le dinamiche della mortalità coinvolgono i moti browniani riferiti ai tassi di interesse.

2.5.4 Modelli di mercato a tempo continuo e cambio di numéraire⁸

Nei mercati a reddito fisso, la moderna modellizzazione si è concentrata sull'uso del LIBOR e dei modelli di mercato per gli swaps (Brace, Gatarek e Musiela 1997, Miltersen, Sandmann e Sondermann 1997, Jamshidan 1997). A livello di mortalità, i modelli equivalenti sono gli SCOR market model e l'annuity market model proposto da Cairns et al. (2006a).

Lo sviluppo dei modelli di mercato è frutto della possibilità di cambiare tra differenti misure di prezzo (pricing measures). Fin'ora (v. modelli di mercato a tempo discreto), ci si è focalizzati sull'utilizzo della misura risk-neutral Q per calcolare i prezzi. Prendendo in considerazione Q , i prezzi degli asset negoziabili attualizzati attraverso il cash account, $C(t)$, sono martingale. Richiamando, inoltre, il prezzo del (x, T) -longevity bond di Tipo B (equazione [3]), il prezzo attualizzato dell'asset risulta:

$$\tilde{B}_{CS}(x, t, T) = \frac{B_{CS}(x, t, T)}{C(t)} = E_Q[S(x, T) | \mathcal{M}_t]$$

In un contesto di diffusione a tempo continuo, la dinamica del processo del prezzo scontato può essere definita come:

$$d\tilde{B}_{CS}(x, t, T) = \tilde{B}_{CS}(x, t, T) V(x, t, T)' d\tilde{W}(t)$$

dove $V(x, t, T)$ è un processo $n \times 1$ prevedibile e $\tilde{W}(t)$ è un moto browniano standard n -dimensionale riferito a Q . In queste espressioni si è utilizzato il cash account $C(t)$ come *numéraire*. Ma è possibile utilizzare i prezzi di altri asset negoziabili (a patto che questi prezzi rimangano positivi) come un numéraire alternativo.

⁸ Numéraire è un termine di origine francese che sta ad indicare uno standard di base attraverso il quale i valori sono misurati, come per esempio l'oro in un sistema monetario. Il denaro, infatti, ha la funzione di numéraire, dato che è utile per misurare il valore di beni e servizi diversi uno rispetto all'altro. I "numéraire goods" sono beni con un prezzo fisso pari a 1 utilizzati per facilitare i calcoli, quando solo i prezzi relativi sono rilevanti, come nella teoria dell'equilibrio economico generale.

Per esempio, se si prende $B_{CS}(x, t, \tau)$ come numéraire, e si definisce $Z(x, t, T) = B_{CS}(x, t, T) / B_{CS}(x, t, \tau)$ allora:

$$dZ(x, t, T) = Z(x, t, T)[V(x, t, T) - V(x, t, \tau)]'[d\tilde{W}(t) - V(x, t, \tau)dt]$$

Si può definire allora $dW^{\tau, x}(t) = d\tilde{W}(t) - V(x, t, \tau)dt$ e notare come dipenda solo dalla volatilità del numéraire e non da ogni caratteristica del (x, T) -longevity bond. A patto che $V(x, t, \tau)$ soddisfi alcune condizioni, esiste una misura $P_{x, \tau}$ equivalente a Q tale per cui il processo risultante, $W^{x, \tau}(t)$, sia un moto browniano standard. Attraverso $P_{x, \tau}$, le $Z(x, t, T)$ sono martingale per ogni $t < T$ e $t < \tau$, così che:

$$dZ(x, t, T) = Z(x, t, T)[V(x, t, T) - V(x, t, \tau)]'dW^{x, \tau}(t)$$

In questo modo è possibile capire il perché un cambiamento di numéraire è così importante.

In generale, ciò che si è riscontrato analizzando nel tempo i mercati dei tassi di interesse, può essere così riassunto:

- Nella modellizzazione del tasso di interesse, è stato scoperto che il pricing dei derivati riferiti a tale tasso a volte può essere semplificato attraverso un cambiamento di misure (v., per esempio, Cairns 2004).
- Entrambi i modelli di mercato riferiti ai tassi LIBOR e swap contano molto sul cambiamento delle misure di riferimento come un passo fondamentale per definire la dinamica del modello.
- Se si fanno certe assunzioni riguardo la volatilità, allora l'utilizzo dei modelli che sfruttano il cambio di numéraire semplifica la valutazione.

Tutte queste considerazioni possono essere opportunamente usate nell'ambito della modellizzazione di mercato a tempo continuo della mortalità.

2.5.5 Il modello di mercato SCOR

Il Survivor Credit Offered Rate (SCOR; proposto per la prima volta da Cairns, Blake e Dowd, 2006a) è simile al premio di una tradizionale polizza di assicurazione collegato unicamente allo sviluppo storico dei tassi di mortalità. Una minor differenza, comunque, è che lo SCOR rappresenta un tasso di premio definito un anno prima del suo pagamento. Per analogia con il tasso forward del LIBOR, il forward SCOR, $s(x, t, T, T+1)$, può essere collegato a derivati finanziari o derivati mortality-linked con i seguenti termini:

- Al tempo t , non vi è alcuno scambio di denaro, e il valore del derivato è zero.
- Al tempo T , il titolare del contratto pagherà alla controparte un ammontare fisso, K , che verrà investito nel risk-free cash account, $C(u)$.

- Al tempo $T+1$, il titolare del contratto riceverà:

$$K \cdot \frac{C(T+1)}{C(T)} \cdot [1 + s(x, t, T, T+1)] \cdot [1 - q(x+T, T)]$$

dove $q(x+T, T)$ è il tasso di mortalità realizzato tra T e $T+1$ riferito a un individuo di età $x+T$ al tempo T . Quindi:

$$1 - q(x+T, T) = \frac{S(x, T+1)}{S(x, T)}$$

Il tasso che assicura che questo contratto abbia valore pari a zero in t è (v. Cairns et al. 2006a):

$$s(x, t, T, T+1) = \frac{p_Q(x, t, T) - p_Q(x, t, T+1)}{p_Q(x, t, T+1)} = \frac{B_{CS}(x, t, T) - B_{CS}(x, t, T+1)}{B_{CS}(x, t, T+1)} \quad [13]$$

Possibili varianti possono essere legate all'iniziale pagamento nei mercati finanziari fino a T o, per esempio, all'indice di sopravvivenza (v. Cairns et al., 2006a).

Il forward SCOR (equazione [13]) è altresì il rapporto tra il valore del portafoglio (in posizione lunga per il (x, T) -longevity bond e corta per il $(x, T+1)$ -longevity bond) e il prezzo del $(x, T+1)$ -longevity bond. Ne consegue che il forward SCOR, $s(x, t, T, T+1)$, deve essere una martingala con una misura $(x, T+1)$ -forward $P_{x, t+1}$ (una distribuzione ritenuta ammissibile, dato che il forward SCOR può assumere valori tra 0 e ∞). Questa proprietà permette la semplice costruzione di derivati option-type su $s(x, t, T, T+1)$ con una formula di pricing del tipo Black-Scholes (v. Cairns et al. 2006a).

In un contesto assicurativo, il titolare del contratto è un soggetto di età $x+t$ al tempo t , con funzione di sopravvivenza $I_x(u) = 1$ se è ancora in vita al tempo u , e uguale a 0 altrimenti. I cashflows riferiti al contraente sono così sostituiti da $-KI(T)$ al tempo T e $K \frac{C(T+1)}{C(T)} [1 + s(x, t, T, T+1)]$. K potrebbe essere collegato a eventi finanziari (o ad altri eventi non prettamente finanziari) fino al tempo T . Lo SCOR, allora, rappresenta un tasso di premio pagabile ai sopravvissuti, mentre gli asset appartenenti al contraente che decede ritornano all'assicuratore. Un contratto tradizionale di rendita è, indirettamente, un esempio di tale accordo. Purché il prezzo di mercato di un rischio non sistematico di mortalità sia zero, questa variante dello SCOR è prezzata come visto in precedenza (v. Cairns et al., 2006a).

2.5.6 Modelli forward-rate e modelli di mercato: vantaggi e svantaggi

In alcuni casi, i modelli forward-rate e i modelli di mercato offrono la possibilità di essere facilmente trattabili a livello analitico. Ma il loro principale *vantaggio* è che, a ogni futura data t , forniscono automaticamente come output una tabella bidimensionale di mortalità forward ($p_Q(x, t, T)$ per ogni x e T). Questo significa che è semplice calcolare il payoff di un contratto legato alla tabella bidimensionale di mortalità in uso al tempo t (per esempio, un contratto di rendita garantito).

A parte alcune eccezioni (v., per esempio, Dahl 2004) non è così semplice calcolare una simile tabella utilizzando modelli short-rate. In alcuni casi (v., per esempio, Dowd et al. 2007) questo problema può essere mitigato attraverso l'utilizzo di buone approssimazioni analitiche per gli output principali, come funzioni del numero finito di variabili di stato sottostanti.

Però, i modelli forward-rate e i modelli di mercato hanno i loro *limiti*:

- Richiedono come input al tempo 0 un set completo e bidimensionale di market spot survival probabilities. Nella realtà queste variabili market-determined non esistono (i prezzi delle rendite sul mercato offrono una soluzione parziale, ma possono risultare pesantemente distorti dai caricamenti di sicurezza). In futuro potrà essere necessario disporre di tavole proiettate dei tassi di sopravvivenza utilizzando altri modelli.
- La più elevata scadenza inserita come input al tempo 0, pone un limite alla lunghezza di ogni percorso campionario; quindi si può solo seguire l'evolversi dei tassi SCOR, $s(x,t,T,T+1)$, inseriti al tempo 0 e ciascuno di questi tassi "scadrà" alla rispettiva data di pagamento $T+1$.

2.6 Osservazioni conclusive

Negli ultimi anni vi è stato un grande sviluppo dei modelli e degli strumenti in grado di considerare opportunamente il mortality risk. Questi progressi devono però essere supportati da modelli stocastici per la mortalità, al fine di introdurre sui mercati dei capitali strumenti di copertura adeguati. Prendendo in considerazione la storia degli altri mercati, per esempio quello dei derivati riferiti ai tassi di interesse, è possibile notare come inizialmente fossero caratterizzati da modelli *pricing-to-model*. Ma quando il mercato è divenuto sufficientemente grande e caratterizzato da una buona liquidità, i modelli sono cambiati in *pricing-to-market*. La stessa situazione potrebbe accadere anche per il life market. Bisogna però ricordare che lo sviluppo di un buon modello richiede molto tempo e pazienza considerevole: a un'analisi iniziale un modello potrebbe sembrare soddisfacente, ma ulteriori studi potrebbero rivelare alcuni aspetti negativi che necessitano di opportuni correttivi. Tuttavia, il tempo dedicato all'approfondita analisi del modello può ripagare ampiamente, permettendo di giungere a una buona, se non ottima, comprensione delle dinamiche della mortalità.

CAPITOLO 3

3.1 Assicurazione e mortalità: aspetti generali

Il Capitolo 1 ha evidenziato come l'evoluzione della mortalità in Italia e in molti paesi sviluppati abbia portato alla formazione di un fenomeno mai studiato o riscontrato in precedenza. Tale fenomeno prende il nome di *longevity risk*, cioè quel processo originato dall'incertezza dell'evoluzione della mortalità a età avanzate.

Nel Capitolo 2 si è potuto constatare come sia difficoltoso studiare a fondo il fenomeno della longevità per i modelli riferiti alla mortalità, poiché pochi studi si sono concentrati sull'analisi delle età più vicine alla cosiddetta durata massima di vita ω .

Nello specifico, il longevity risk può essere definito a due livelli differenti: individuale e aggregato (v. Stallard, 2006). A livello *individuale*, il longevity risk si riferisce all'eventualità che un assicurato sopravviva più di quanto pianificato dalla compagnia di assicurazione. A livello *aggregato*, invece, il rischio di longevità si ha quando in un portafoglio di polizze assicurative si riscontra una sopravvivenza media più alta rispetto a quella ipotizzata.

Richiamando ancora il Capitolo 1, si ricorda che i miglioramenti dei tassi di mortalità sono generalmente causati dall'effetto combinato dei fenomeni di rettangolarizzazione ed espansione. In tal senso si potrebbe dire che vi è presenza di longevity risk quando le aspettative teoriche riferite alla mortalità si discostano dall'evidenza empirica. L'ANIA (Associazione Nazionale fra le Imprese Assicuratrici) lo definisce come "il rischio di perdita o di variazione sfavorevole del valore delle passività assicurative, derivante da variazioni del livello, del trend o della volatilità dei tassi di mortalità, laddove un calo del tasso di mortalità dà luogo a un incremento del valore delle passività assicurative".

3.1.1 Il fenomeno della sopravvivenza in questioni di carattere attuariale

La particolarità delle imprese di assicurazione operanti nel ramo vita deriva dall'inscindibile legame delle attività aziendali con la durata della vita umana. Infatti, l'articolo 1882 del Codice Civile enuncia:

"L'assicurazione è il contratto col quale l'assicuratore, verso pagamento di un premio, si obbliga a rivalere l'assicurato, entro i limiti convenuti, del danno a esso prodotto da un sinistro, ovvero a pagare un capitale o una rendita al verificarsi di un evento attinente alla vita umana."

La seconda parte del suddetto articolo riguarda le assicurazioni sulla vita ed esprime il ruolo fondamentale dell' "evento attinente alla vita umana".

La presenza di questo forte legame con la vita umana può essere altresì esteso ai fondi pensione, dove l'andamento della mortalità in età avanzate assume ancora più importanza.

Le prestazioni dell'assicuratore dipendono dunque in gran parte (o totalmente) dalla durata aleatoria di vita dell'assicurato. In tale contesto, le valutazioni probabilistiche di questi fenomeni aleatori costituiscono uno strumento fondamentale ai fini di un sano e prudente impiego nel tempo dei mezzi raccolti dall'azienda. Al fine di preservare una sufficiente redditività e solidità patrimoniale, le compagnie di assicurazione sono costrette a selezionare accuratamente i modelli per rappresentare le dinamiche demografiche dei propri assicurati, poiché da esse dipende la stima delle future esposizioni. Oltre a questo obiettivo di natura meramente aziendale, le compagnie assicurative europee devono rispettare un vincolo altrettanto stringente per descrivere adeguatamente il fenomeno della mortalità. Infatti, in riferimento ai principi emanati dall'*International Accounting Standards Board (IASB)*, tutte le fonti di rischio a cui è esposto un portafoglio devono essere utilizzate per calcolare il fair value delle passività da iscrivere in bilancio. Inoltre, nell'ambito del sistema di vigilanza prudenziale, il nuovo regime di solvibilità *Solvency II*, si fonda su un approccio integrato al rischio (*Integrated Risk Analysis*), che richiede una valutazione delle passività a valori di mercato (*Market Consistent*).

Si possono identificare principalmente due fonti di rischio che incidono sul portafoglio di un assicuratore:

- Il rischio finanziario (*investment risk*).
- Il rischio demografico (*demographic risk*).

Il rischio finanziario è connesso alle fluttuazioni dei tassi di rendimento che si verificano sul mercato e che possono causare un deprezzamento del valore degli investimenti effettuati dalla compagnia di assicurazione. Come è ben noto, la sua natura è quella di componente sistematica del rischio. Il rischio demografico, invece, si distingue ulteriormente in due componenti: il rischio assicurativo (*insurance risk*) e il rischio longevità (*longevity risk*). Il primo è conseguenza di deviazioni accidentali del numero dei decessi dal valore atteso e i suoi effetti possono essere mitigati dall'incremento del numero delle polizze in portafoglio (*pooling risk*). Il secondo si verifica a fronte dei miglioramenti nel trend della mortalità, che possono causare una deviazione sistematica del numero dei decessi dal valore atteso. Nel paragrafo 3.2 i rischi di mortalità e longevità verranno analizzati in modo più specifico.

Prendendo ora in considerazione la dinamica demografica, il comune profilo temporale della mortalità osservato negli ultimi decenni evidenzia tre aspetti significativi (v. Capitolo 1):

- La rettangolarizzazione.
- L'espansione.
- Maggiori livelli e forte dispersione delle morti accidentali alle età giovani.

La rettangolarizzazione (particolarmente marcata dopo i 35 anni di età) consiste in una maggiore concentrazione della distribuzione di probabilità intorno al punto di Lexis (cioè alla moda della distribuzione), il quale a sua volta tende a coincidere con la durata massima di vita ω . L'espansione consiste invece nell'aleatorio spostamento in avanti del punto di Lexis, che determina l'incertezza dell'ampiezza della rettangolarizzazione (Figura 16). Queste marcate tendenze si traducono in un allungamento dell'aspettativa di vita, fatta salva una forte volatilità dei tassi di mortalità in età giovani per cause accidentali (v. Rosina, 2010a).

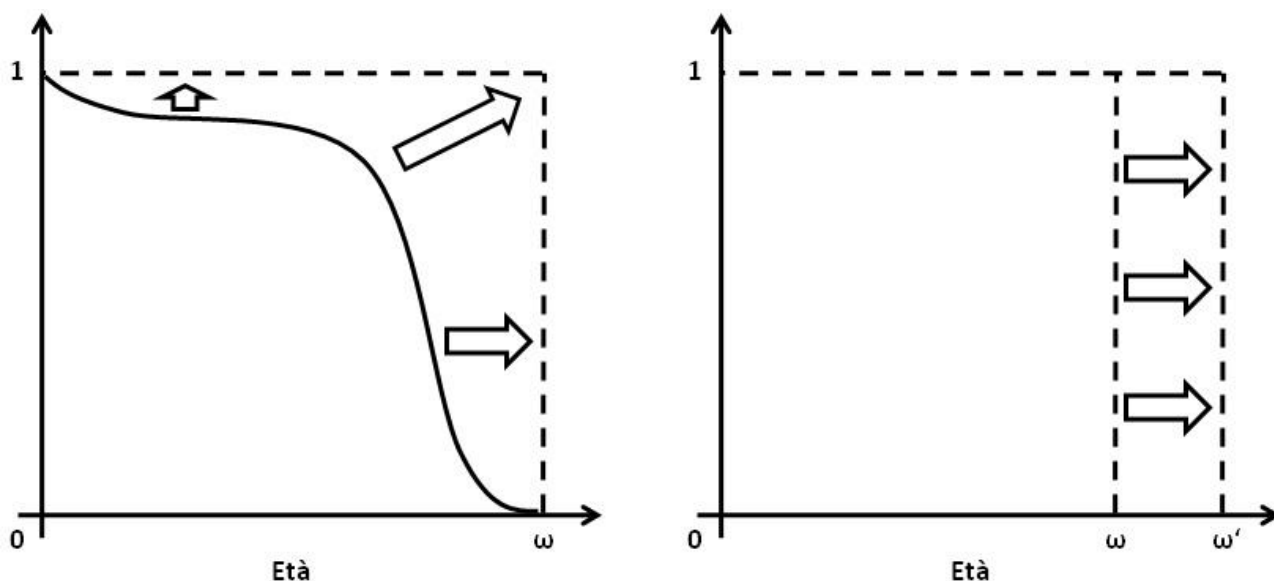


Figura 16

Il problema di possibili scostamenti sistematici tra frequenze di decesso osservate ex-post e ipotesi sulla sopravvivenza degli assicurati formulate ex-ante dalle compagnie assicurative (*longevity risk*), può seriamente compromettere una sana e prudente gestione aziendale. Emerge dunque il problema di affrontare e gestire tale rischio affinché esso non abbia un forte impatto negativo sull'equilibrio d'impresa e sulla sua sostenibilità prospettica. I principali strumenti di controllo che attualmente si rendono disponibili sono le tavole di mortalità proiettate e i *Longevity Bond*. Riguardo a questi ultimi, che verranno illustrati con maggior dettaglio nel prosieguo della trattazione, rimane un'incapacità descrittiva dell'evoluzione della mortalità a causa dell'incompletezza del mercato demografico: non esiste infatti un mercato secondario dal quale trarre indicazioni esaustive sulle misure di mortalità (Ballotta et al. 2006).

Il trend della mortalità può essere invece "anticipato" dall'assicuratore mediante l'impiego di tavole proiettate. In un approccio deterministico, l'effettuare valutazioni con una tavola proiettata può comportare una riduzione del rischio rispetto a valutazioni operate in ipotesi di mortalità statica. Ma tale analisi non tiene conto che la proiezione stessa è affetta da aleatorietà.

È pertanto opportuno valutare un portafoglio in ipotesi di aleatorietà della proiezione (approccio stocastico), sulla base del quale deve essere misurato il rischio insito in tale casualità (v. Capitolo 2): si tratta di un rischio di modello, detto rischio di proiezione (*projection risk*) o di tavola (*table risk*).

3.1.2 *L'impatto del longevity risk su differenti tipi di polizze assicurative*

Le compagnie di assicurazione sono obbligate a quantificare accuratamente l'impatto dell'aleatorietà nel trend della mortalità sulle differenti coperture offerte, allo scopo di gestire il rischio che ne deriva. Infatti, il longevity risk influisce sulle assicurazioni caso vita con tendenze di segno opposto rispetto alle assicurazioni caso morte. Con riguardo alle polizze che corrispondono prestazioni in caso vita, i miglioramenti della sopravvivenza causano l'aumento dei pagamenti che l'impresa si trova a dover regolare e, di conseguenza, la riserva risulta sottodimensionata ad ogni istante temporale. Se invece si considerano le assicurazioni che pagano somme ai beneficiari in caso di morte dell'assicurato, l'allungamento della vita implica un contenimento dei costi a favore della compagnia. Inoltre, la sovrastima dei costi pesa negativamente sull'attività di gestione aziendale. A causa di tale sovrastima, l'impresa accantona disponibilità a copertura di costi futuri che non sosterrà, immobilizzando attività che potrebbero essere impiegate diversamente. Tutto ciò comporta per l'impresa un costo-opportunità più o meno significativo.

3.2 Longevity risk: introduzione e rappresentazione

Per introdurre nello specifico il longevity risk è necessario analizzare il concetto più generale di rischio di mortalità.

3.2.1 *Rischio di mortalità*

Nella realtà, il rischio di mortalità può verificarsi in differenti modi; in generale si possono individuare diverse casistiche da prendere in opportuna considerazione a seconda delle differenti dinamiche demografiche analizzate in un determinato contesto.

Innanzitutto un individuo può vivere più o meno a lungo rispetto alla speranza di vita media della popolazione a cui appartiene, e i tassi di mortalità osservati possono risultare più o meno elevati rispetto a quelli attesi, senza seguire nessun trend apparente. In questo contesto si osserva la dispersione attorno ai tassi di mortalità attesi e il mortality risk viene considerato come il rischio di fluttuazioni casuali, particolarmente comune nei processi assicurativi in entrambe le aree life e non-life (in realtà, questo processo sta proprio alla base del business assicurativo). Il termine utilizzato è *process risk* (rischio di processo) o anche *insurance risk* (rischio di assicurazione).

Questo rischio riguarda la posizione individuale e, in quanto tale, è trascurabile se viene valutato nel contesto dell'intero portafoglio. Il process risk può essere gestito attraverso un appropriato effetto di *pooling*, cioè l'aumento del numero di polizze presenti in portafoglio al fine di ridurre il rischio, oppure utilizzando dei tradizionali strumenti per il trasferimento del rischio stesso.

Un secondo caso si può verificare qualora la durata di vita media di una popolazione risulti differente rispetto a quanto ci si poteva attendere. In tale contesto, i tassi di mortalità possono essere sistematicamente maggiori o minori rispetto a quelli calcolati dalla tavola di mortalità di riferimento. Ciò su cui si pone l'attenzione sono gli scostamenti rispetto ai valori attesi (piuttosto che attorno a essi, v. primo caso), che hanno natura sistematica. Le cause di questa particolare situazione possono essere molteplici, come per esempio l'errata costruzione del modello di mortalità (quando l'andamento della mortalità effettiva risulta differente da quello impiegato dalla tavola di mortalità adottata), oppure la scorretta stima dei parametri rilevanti (per la scarsità di dati a disposizione). Il primo aspetto viene definito come *model risk* (rischio di modello), mentre il secondo viene denominato *parameter risk* (rischio di parametro). Il termine *uncertainty risk* (rischio di incertezza) è solitamente utilizzato per riferirsi congiuntamente al rischio di modello e di parametro, al fine di indicare l'incertezza nella rappresentazione del fenomeno oggetto di studio, per esempio la mortalità futura. Quando vengono considerate le età adulte o anziane, l'*uncertainty risk* risulta particolarmente rilevante nel caso in cui si verifichi un'imprevista riduzione dei tassi di mortalità. In questo specifico caso, viene utilizzato il termine *longevity risk* al posto di *uncertainty risk*. È sempre necessario ricordare, però, che il rischio longevità riguarda la mortalità dal punto di vista aggregato, quindi non è possibile gestirlo in modo adeguato sfruttando effetti di *pooling*.

Infine, un terzo e ultimo caso riferito alle dinamiche della mortalità può verificarsi quando i tassi di decesso di una certa popolazione sono caratterizzati da improvvisi *jump* (salti, forti variazioni in aumento), a causa di condizioni di vita piuttosto critiche, come epidemie di influenza, severe condizioni climatiche (per esempio estati molto calde), disastri naturali e così via. Il rischio che emerge, quindi, è quello del *catastrophe risk* (rischio catastrofale), cioè il rischio di un improvviso aumento nel breve termine della frequenza di decesso. Come nel secondo caso, anche in questo contesto si ragiona in termini di mortalità aggregata. Invece, quando si effettua il confronto con il *longevity risk*, il periodo di tempo considerato è differente: il breve periodo caratterizza il terzo caso, mentre il lungo periodo si riferisce al secondo. Chiaramente, un'adeguata gestione del rischio catastrofale è importante quando si prendono in considerazione i *death benefits* (rendite, profitti derivanti da una più alta mortalità osservata, ecc.). Come per il *longevity risk*, anche in questo caso non sono applicabili i tradizionali strumenti utili per l'effetto *pooling*; per ovviare a questa mancanza potrebbe essere opportuno realizzare qualche forma di trasferimento del rischio.

Va infine notato come nell'ambito del Solvency II, i rischi di mortalità e longevità siano considerati il risultato dell'*uncertainty risk*. Il *mortality risk* si riferisce a una possibile situazione di *extra-mortalità*, importante dunque nell'ambito dei *death benefits*.

Al contrario, il longevity risk riguarda la possibile realizzazione di extra-sopravvivenza; in questo caso, l'interesse sarà riferito ai living benefits, in particolar modo alle rendite.

3.2.2 *Rappresentazione della mortalità: problemi di modellizzazione stocastica*

Quando si vuole analizzare un rischio è sempre opportuno fare affidamento a una valutazione di natura stocastica. Nell'ambito delle dinamiche demografiche è importante utilizzare un modello stocastico di mortalità che consenta il calcolo di vari tipi di possibili scostamenti della frequenza di decesso rispetto ai tassi di mortalità previsti. In particolare, dovrebbero essere presi in considerazione diversi aspetti fondamentali:

- Le fluttuazioni casuali, per gestire opportunamente il process risk.
- Le deviazioni dovute alla forma del modello di mortalità rispetto al tempo, in riferimento all'età e all'anno di calendario.
- Gli scostamenti dovuti al livello dei parametri del modello di mortalità, al fine di poter far fronte al parameter risk e intervenire in caso di errata stima dei parametri.
- Gli shock dovuti agli effetti di periodo, per tenere in giusta considerazione il catastrophe risk nel caso in cui si verificano eventi particolarmente estremi e difficilmente prevedibili.

Essere in grado di incorporare queste quattro fonti di incertezza nel modello di mortalità risulta alquanto complesso, però è possibile definire alcune linee guida per la modellizzazione stocastica. Di seguito verrà riportata una prima impostazione statistica per una corretta rappresentazione delle dinamiche demografiche⁹.

Innanzitutto si indichi con Y il numero casuale di decessi in una certa coorte a una determinata età. Si assuma che Y dipenda da due variabili di input, X_1 e X_2 ; di conseguenza si ha che: $Y = \varphi(X_1, X_2)$. La quantità X_1 può essere vista come la probabilità di morte o il tasso istantaneo di mortalità in una coorte in un dato anno e in assenza di particolari situazioni estreme. Eventuali shock, invece, possono essere rappresentati da X_2 . In questo contesto abbastanza semplificato, si possono prendere in considerazione vari approcci per analizzare Y al fine di rendere l'analisi sempre più precisa e complessa.

Un primo approccio può essere puramente deterministico. Assegnando specifici valori, x_1 e x_2 , alle due variabili di input, il corrispondente output y della variabile risultante è semplicemente calcolato come $y = \varphi(x_1, x_2)$. Per esempio, x_1 può essere una probabilità di morte (proiettata) o il tasso istantaneo di mortalità, mentre x_2 è un dato shock (magari posto uguale a zero). Solitamente nella realtà pratica i classici calcoli attuariali seguono questi criteri, sostituendo le variabili casuali con il loro valore atteso o il valore best-estimate. Attualmente questo approccio è utilizzato in contesti di stress testing o scenario testing.

⁹ Le notazioni utilizzate per le formule descritte dal paragrafo 3.2 al 3.7 seguono l'impostazione teorica definita da Pitacco E. , Denuit M. , Haberman S. e Olivieri A. (2009).

Per superare gli evidenti limiti del primo approccio si può introdurre nell'analisi la variabilità casuale delle variabili di input. Con questo secondo metodo, quindi, vengono scelti range ragionevoli di risultati per le variabili di input (per esempio l'intervallo di possibili valori di uno shock in un determinato anno) e di conseguenza si deriva l'intervallo per Y , definito come (y_{min}, y_{max}) . Riguardo alla variabile X_1 , il range di possibili valori può rappresentare la variabilità dovuta a fluttuazioni casuali, oppure il trend incognito della coorte. Va notato, però, che le valutazioni sono fondamentalmente deterministiche; la principale differenza tra il primo e il secondo approccio è il numero di possibili risultati che si possono ottenere; infatti, utilizzando dei range di valori per ogni variabile si può calcolare una sorta di intervallo di confidenza, superando la stima puntuale delle grandezze analizzate che il primo approccio propone.

Come descritto in precedenza, però, è importante analizzare la presenza di fluttuazioni casuali nelle dinamiche demografiche; per soddisfare tale proposito è possibile utilizzare la struttura probabilistica di X_1 per studiare la natura stocastica della mortalità. Assumendo come base di partenza una certa funzione di distribuzione di probabilità continua, si può ricavare la funzione di densità f_{X_1} , per esempio, assegnando a ogni individuo una distribuzione di probabilità riferita alla durata di vita (basandosi su un modello di mortalità proiettato con parametri prefissati) per poi aggregare i risultati. In questo caso è necessario notare che, fissando i parametri del modello, si assume implicitamente la presenza di un trend deterministico. Inoltre, la distribuzione di probabilità della Y (e quindi di X_1) può essere trovata solamente in circostanze molto semplificate. Grazie allo sviluppo dei mezzi informatici però, l'utilizzo di metodi numerici o delle simulazioni stocastiche può fornire un sostanziale aiuto per le applicazioni pratiche.

Introducendo il rischio di deviazioni sistematiche c'è la possibilità di applicare un quarto approccio ancora più complesso e completo. In particolare, si possono assumere differenti distribuzioni per X_1 , basandosi su diverse ipotesi di partenza. In pratica viene utilizzato lo stesso modello di mortalità, ma i valori dei parametri rilevanti vengono variati, al fine di rappresentare diversi trend di mortalità. Si tratta, dunque, di iterare la procedura descritta nel terzo approccio, in modo tale che ciascuna iterazione corrisponda a una specifica assunzione riguardo la distribuzione di probabilità di una variabile di input. Come risultato si otterrà un set di distribuzioni condizionate di Y . È importante notare che, essendo in un contesto di deviazioni sistematiche, si giungerà a una rappresentazione simile al secondo approccio; la differenza sta nel fatto che in questo quarto caso viene considerato anche il process risk.

Con un quinto metodo può essere introdotta e assegnata una distribuzione di probabilità che vada ad affiancarsi alle assunzioni riferite al trend della mortalità. Di conseguenza si riesce a calcolare la distribuzione non condizionata della variabile di output Y . In questo caso, vengono considerati sia il process risk che l'uncertainty risk.

Infine, per ottenere una rappresentazione il più completa possibile, si può prendere in considerazione come ultimo approccio un'analisi attraverso la quale si assegni una struttura probabilistica a tutte le variabili di input.

In questo caso, si possono determinare alcune componenti molto importanti, quali la distribuzione congiunta, le distribuzioni marginali delle variabili di input e le ipotesi di correlazione. Tutto ciò diventa applicabile nella realtà pratica mediante processi di simulazione, anche se si potrebbe incorrere in problemi di scelta delle varie distribuzioni di probabilità da utilizzare.

3.2.3 Rappresentazione del longevity risk

Gli approcci descritti nel paragrafo precedente fanno riferimento alla mortalità in generale, prendendo in considerazione l'andamento demografico nel suo insieme. Invece, quando si analizza nello specifico il *longevity risk*, è necessario applicare il quinto o il sesto approccio, anche se in alcuni casi potrebbe essere utile impiegare il quarto metodo. Di seguito verranno descritti differenti metodologie per rappresentare il rischio longevità, partendo dall'impostazione teorica esposta nel paragrafo precedente.

Si consideri $\Gamma(x,t)$ la mortalità proiettata, dove x è l'età raggiunta nell'anno di calendario t da una coorte nata nell'anno $\tau = t - x$. Le quantità proiettate possono essere: la probabilità di morte, $q(x,t)$, l'odds di mortalità, $q(x,t)/p(x,t)$, la forza di mortalità $\mu(x,t)$, e così via.

Al fine di analizzare nel dettaglio il quarto approccio descritto nel paragrafo 3.2.2, si devono scegliere ipotesi alternative riguardo la futura evoluzione della mortalità; tali assunzioni possono essere originate da differenti set di parametri del modello di proiezione. Ovviamente, tutto ciò può causare la presenza del parameter risk. In alternativa, le assunzioni possono essere originate da proiezioni sulla mortalità ottenute da differenti procedure; in questo caso si richiama invece il concetto di model risk.

A livello pratico risulta molto complesso eseguire una comparazione corretta tra modelli differenti; a causa delle diverse impostazioni teoriche è già difficile analizzare il solo rischio di parametro. Proprio per questo motivo, in seguito non verrà considerato il catastrophe risk, essendo un tipo di rischio molto particolare a cui la letteratura dedica trattazioni specifiche.

In questo contesto, si consideri $A(\tau)$ una data assunzione riguardo il trend di mortalità riferita a soggetti nati nell'anno τ , e $\mathcal{A}(\tau)$ il set di queste assunzioni. La notazione $\Gamma(x,\tau+x|A(\tau))$ si riferisce alla mortalità proiettata Γ condizionata alla specifica assunzione $A(\tau)$. Il set di tutte le proiezioni sulla mortalità è definito dalla famiglia $\{\Gamma(x,\tau+x|A(\tau)); A(\tau) \in \mathcal{A}(\tau)\}$. In linea di principio, $\mathcal{A}(\tau)$ può essere definito sia a tempo discreto che a tempo continuo.

Nel primo caso, si supponga che sia stato definito un set di assunzioni per $\mathcal{A}(\tau)$ in un contesto *discreto*; in tale ambito è possibile applicare un approccio per scenari oppure uno stress testing. In particolare si può analizzare la sensibilità di alcune quantità rilevanti, come riserve e profitti, in riferimento alla mortalità futura. Il rischio di processo può essere valutato esplicitamente attraverso la funzione di distribuzione di probabilità del corso di vita di tutti gli individui della generazione, condizionata a una data assunzione sul trend. Tuttavia, l'approccio rispetto al parameter risk risulta di natura deterministica.

Il passo successivo consiste nell'assegnare una struttura di pesi non-negativa e normalizzata ad $\mathcal{A}(\tau)$, come per esempio avviene nell'approccio in cui si considera la presenza di una distribuzione di probabilità che va ad affiancarsi alle assunzioni riferite al trend della mortalità. In questo caso, si possono effettuare valutazioni non condizionate, al fine di prendere in considerazione il rischio di parametro. Si definisca il set delle assunzioni alternative sulla mortalità come segue:

$$\mathcal{A}(\tau) = \{A_1(\tau), A_2(\tau), \dots, A_m(\tau)\}$$

Inoltre, si considerino i pesi ρ_h riferiti alla generica assunzione $A_h(\tau)$, tale per cui $0 \leq \rho_h \leq 1$ per $h=1,2,\dots,m$ e $\sum_{h=1}^m \rho_h = 1$. In tal modo il set:

$$\{\rho_h\} \text{ con } h = 1,2,\dots,m$$

può essere visto come la probabilità riferita alla distribuzione $\mathcal{A}(\tau)$. Purtroppo, però, nella realtà empirica i dati per stimare questi pesi sono raramente disponibili, e molto spesso ci si affida a giudizi personali per la loro determinazione.

Come esposto in precedenza, invece di considerare un'impostazione a tempo discreto, è possibile affrontare il problema nel suo insieme con un approccio a tempo continuo. Per definire $\mathcal{A}(\tau)$ come un set a tempo *continuo*, è necessario assegnare ai parametri del modello di mortalità una distribuzione di probabilità continua. In questo contesto le difficoltà riguardano le correlazioni tra i parametri e quindi la complessità del modello nel suo insieme è chiaramente più elevata rispetto al caso discreto. A causa della scarsità di dati che permettono di stimare queste correlazioni, è essenziale definire alcune ipotesi semplificatrici. Questo approccio, dunque, non è necessariamente migliore rispetto a quello sviluppato nel tempo discreto.

In ogni caso, qualunque approccio venga utilizzato (a tempo discreto o continuo), la metodologia descritta in precedenza può essere classificata come *statica*; infatti, la notazione indica che $\mathcal{A}(\tau)$ è fissa. L'incertezza risiede nella scelta della migliore assunzione $A(\tau) \in \mathcal{A}(\tau)$ per descrivere il comportamento della mortalità aggregata nella coorte, cioè essere in grado di identificare quale sia il trend che meglio si adatta alla realtà empirica. A prescindere dall'approccio, in una rappresentazione statica non è consentito alcuno scostamento da questo trend per la distribuzione di probabilità. Analizzando in modo critico questa impostazione si può notare come nell'analisi vengano implicitamente coinvolte le assunzioni riguardo la correlazione temporale dei cambiamenti nelle probabilità di morte. Inoltre, gli shock della mortalità non vengono inclusi, anche se non costituiscono un grosso problema quando si studia il longevity risk. Nonostante questi aspetti critici è però importante ricordare che in un approccio statico si possono aggiornare i pesi basandosi sull'esperienza.

Per superare gli svantaggi sopra descritti, è possibile far riferimento a un approccio probabilistico *dinamico*, in cui la probabilità di decesso o il tasso istantaneo di morte vengono modellati attraverso la traiettoria di un processo casuale. Il modello probabilistico permette di definire un insieme di assunzioni relative al processo casuale e ai parametri rilevanti. Attualmente molti studiosi si sono focalizzati su questo approccio.

Alcuni studi, nati principalmente per l'analisi delle problematiche riguardanti il pricing delle longevity securities, assumono la presenza di similitudini tra la forza di mortalità e i tassi di interesse, oppure considerano che il mercato delle longevity securities possa avere un comportamento simile al mercato dei capitali. In alcuni casi vengono applicati alla mortalità alcuni modelli stocastici sviluppati originariamente per scopi finanziari, come per esempio quelli per i tassi di interesse e per il rischio di credito. Non sempre, però, i modelli finanziari sono adatti a descrivere la mortalità e la forza di mortalità può non avere un andamento comune ai tassi di interesse. Per tutti questi motivi, tali teorie sono ancora agli inizi e richiedono ulteriore attenzione per verificare l'adattamento alla realtà empirica (v. Capitolo 4).

Nell'ambito della modellistica per la rappresentazione della mortalità è importante ricordare il famoso modello di Lee-Carter (v. Capitolo 2). Tale impostazione è un esempio recente di rappresentazione delle dinamiche demografiche attraverso un processo stocastico. Nella sua versione originale vengono prese in considerazione le deviazioni originate dagli errori campionari e, di conseguenza, viene posta l'attenzione sul rischio di processo. Ogni qual volta si ha a che fare con un processo stocastico, infatti, è importante analizzare l'intrinseca natura stocastica della mortalità e le relative fluttuazioni casuali.

Le maggiori difficoltà di rappresentazione si hanno quando si considera il rischio di mortalità a livello aggregato; in tal caso è necessario introdurre una seconda fonte di casualità. Nelle proposte più recenti, la mortalità è descritta come un processo stocastico bi-variato. In particolare, come nei modelli finanziari, quando vengono presi in considerazione i processi diffusivi dei tassi istantanei di mortalità, le variazioni inattese della curva di mortalità possono essere stimate attraverso salti stocastici (*jump*, v. Capitolo 2).

3.3 Misurazione del longevity risk

Oltre a definire il concetto di longevity risk e a cercare di darne una rappresentazione, è importante trovare una buona soluzione per poter misurare il suo impatto sulla gestione tecnico-assicurativa. Tale procedura di misurazione risulta sempre molto complessa, poiché sarebbe necessario analizzare l'intera attività di un'impresa di assicurazione vita o di un fondo pensione. Per semplificare l'analisi e dare una completa e snella impostazione teorica allo studio del rischio di longevità, si possono considerare alcune semplificazioni in un contesto statico.

Si consideri innanzitutto di avere a disposizione un portafoglio composto da una sola generazione di assicurati o, in alternativa, da una generazione di pensionati; in ogni caso si prenda in considerazione un gruppo omogeneo di soggetti. Inoltre, l'istituto di riferimento responsabile dell'erogazione delle prestazioni può essere un'impresa di assicurazione o un fondo pensione. In questo contesto, per cercare di dare una quantificazione al longevity risk è necessario analizzare la distribuzione del valore attuale dei futuri pagamenti e delle prestazioni relative all'anno di riferimento.

In generale, in una rappresentazione statica (v. paragrafo 3.2.3) è importante considerare l'evoluzione della mortalità e in particolare analizzare il rischio di parametro. Preventivamente è utile scegliere uno dei tanti modelli per proiettare nel futuro la mortalità in età anziane, cercando di capirne limiti e potenzialità. Nel Capitolo 4 verrà esposto un modello molto sofisticato creato proprio per il longevity risk, anche se, in ogni caso, è possibile utilizzare un qualsiasi approccio parametrico. Per esempio potrebbe essere utile sfruttare il terzo addendo del modello di Heligman-Pollard (1980), la cui equazione completa è rappresentata dalla seguente espressione:

$$\frac{q(x)}{p(x)} = A^{(x+B)C} + D \cdot e^{-E(\ln X - \ln F)^2} + GH^x$$

Dall'equazione si ottiene un modello a otto parametri in cui ogni addendo ha la funzione di rappresentare le tre peculiarità della curva di mortalità:

- Declino della mortalità a età infantili.
- "Gobba" in età giovanile-adulta, provocata dall'alta incidenza delle morti accidentali attorno ai vent'anni.
- Crescita della mortalità in età anziane.

Proprio il terzo addendo GH^x permette di concentrarsi sulle età in cui il longevity risk ha il suo impatto, cioè le età più estreme dell'intera curva di mortalità.

Dopo aver scelto la tipologia di modello da utilizzare per studiare la mortalità, il passo successivo è identificare una serie di ipotesi sulla sua evoluzione, cioè $\mathcal{A}(\tau) = \{A_1(\tau), A_2(\tau), \dots, A_m(\tau)\}$ descritto nel capitolo precedente. In questo modo si potranno definire differenti set di parametri per quanto riguarda la speranza di vita, $E[T_{65}|A_h(\tau)]$, e la deviazione standard, $\sqrt{Var[T_{65}|A_h(\tau)]}$, relative alla durata di vita residua dopo il raggiungimento dei 65 anni. Queste possibili evoluzioni alternative possono riguardare diversi aspetti di un eventuale scenario futuro; si può ipotizzare per esempio la presenza di:

- Un'espansione contenuta, cioè bassa aspettativa di vita, e una forte rettangolarizzazione, che comporta una bassa deviazione standard della durata di vita.
- Un'espansione e una rettangolarizzazione entrambe contenute.
- Una forte espansione e una forte rettangolarizzazione.
- Una forte espansione e una rettangolarizzazione più contenuta.

Ovviamente, tutte queste ipotesi si possono definire in base alle aspettative di colui che le formula, prendendo in considerazione quella più plausibile rispetto ai dati a disposizione al momento dell'analisi.

Dopo queste doverose premesse è necessario studiare le dinamiche del portafoglio preso in esame, composto da una sola generazione di assicurazioni vita di rendita immediata. Nello specifico si considera che gli assicurati abbiano età x_0 al tempo t_0 di emissione delle polizze; per snellire la notazione, t verrà successivamente definito come durata del contratto assicurativo, cioè il tempo intercorso dalla data di stipulazione.

Di conseguenza, l'anno di calendario sarà identificato come $t_0 + t$. Inoltre, le speranze di vita dei beneficiari si suppongono indipendenti e identicamente distribuite, sotto l'ipotesi di una determinata funzione di sopravvivenza. Dato che l'obiettivo principale è giungere alla misurazione del longevity risk, viene tralasciato il rischio legato all'incertezza dei mercati finanziari, con il conseguente riferimento a una curva costante dei rendimenti. Infine, l'analisi si concentrerà sulle prestazioni al netto delle spese e dei relativi caricamenti di sicurezza.

Per completare il quadro generale sono però necessarie ulteriori notazioni. Si definisca, dunque, N_t il numero casuale di assicurati al tempo $t = 0, 1, \dots$, con N_0 la dimensione iniziale del portafoglio. La quantità n_t sarà invece la dimensione corrente del portafoglio, che si suppone nota; quindi si otterrà che $N_0 = n_0$. Inoltre, le quantità con apice (j) , $j = 1, 2, \dots, n_0$, saranno relative a un generico assicurato.

Conclusa la notazione di partenza è possibile definire il portafoglio al tempo t attraverso la seguente uguaglianza:

$$\Pi_t = \{j | T_{x_0}^{(j)} > t\}$$

A questo punto le quantità relative al portafoglio avranno come apice il simbolo (Π) .

Le prestazioni annuali per il portafoglio saranno rappresentate dalla seguente equazione:

$$B_t^{(\Pi)} = \sum_{j: j \in \Pi_t} b^{(j)}$$

dove $b^{(j)}$ è l'ammontare annuale pagato al beneficiario j .

Sfruttando questo risultato si può scrivere il valore atteso dei futuri pagamenti al tempo t per un solo assicurato come:

$$Y_t^{(j)} = b^{(j)} a_{K_{x_0}^{(j)}}$$

con $K_{x_0}^{(j)}$ che rappresenta la speranza di vita (casuale) del j -esimo individuo e:

$$a_{K_{x_0}^{(j)}} = \sum_{t=1}^{\omega - K_{x_0}^{(j)}} {}_t p_{K_{x_0}^{(j)}} (1+i)^t$$

L'analisi relativa al singolo individuo è importante nel momento in cui si procede all'aggregazione degli assicurati, considerando l'intero portafoglio. In questo contesto il corrispondente valore atteso dei futuri pagamenti sarà pari a:

$$Y_t^{(\Pi)} = \sum_{j: j \in \Pi_t} Y_t^{(j)}$$

Ottenuti questi risultati è interessante analizzare i valori che possono assumere $B_t^{(\text{II})}$ e $Y_t^{(\text{II})}$; in particolare è utile calcolare il loro coefficiente di variazione, i rispettivi percentili e il conseguente impatto del rischio di longevità in relazione alla dimensione del portafoglio. Per soddisfare questi propositi, si consideri per semplicità un portafoglio omogeneo relativamente all'ammontare annuale pagato, tale per cui $b^{(j)} = b$ per ogni j . In questo caso particolare, $B_t^{(\text{II})}$ può essere riscritto come:

$$B_t^{(\text{II})} = bN_t$$

In corrispondenza, il valore attuale dei futuri pagamenti diventerà:

$$Y_t^{(\text{II})} = \sum_{h=t+1}^{\omega-x_0} bN_h(1+i)^{-(h-t)}$$

dove i è il tasso di interesse annuale e $Y_t^{(1)}$ sarà la notazione riferita al valore attuale dei futuri pagamenti per un generico beneficiario in un portafoglio omogeneo.

Dopo aver definito questa rigorosa impostazione teorica, per proseguire nell'analisi occorre considerare un approccio specifico per rappresentare la mortalità tra i sei esposti nel paragrafo 3.2.2. Il metodo maggiormente utile in questo contesto è il quarto; in tal modo tutte le valutazioni sono condizionate a una determinata assunzione sulla mortalità. Di conseguenza si ottiene che il valore atteso dei futuri pagamenti condizionato a una determinata assunzione è definito come:

$$E[Y_t^{(\text{II})} | A_h(\tau), n_t] = n_t E[Y_t^{(1)} | A_h(\tau)]$$

Inoltre, dato che si assume indipendenza tra le aspettative di vita degli assicurati, si potrà anche scrivere la varianza e il coefficiente di variazione condizionati nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_t^{(\text{II})} | A_h(\tau), n_t] &= n_t \text{Var}[Y_t^{(1)} | A_h(\tau)] \\ \text{CV}[Y_t^{(\text{II})} | A_h(\tau), n_t] &= 1/\sqrt{n_t} \left\{ \sqrt{\text{Var}[Y_t^{(1)} | A_h(\tau)]} / E[Y_t^{(1)} | A_h(\tau)] \right\} \end{aligned} \quad [14]$$

dove n_t è la dimensione del portafoglio osservata al tempo t .

Il coefficiente di variazione, in particolare, permette di analizzare in modo più approfondito la grandezza del portafoglio in relazione alla rischiosità totale della gestione. L'espressione [14] mostra, in termini relativi, che la rischiosità del portafoglio diminuisce al crescere di n_t . Di conseguenza si ha che:

$$\lim_{n_t \rightarrow +\infty} \text{CV}[Y_t^{(\text{II})} | A_h(\tau), n_t] = 0$$

Ciò che si ottiene rappresenta un risultato molto noto in ambito assicurativo, tale per cui all'aumentare del portafoglio il rischio diminuisce, dato che con elevata probabilità i risultati osservati saranno vicini a quelli attesi. La quantità $CV[Y_t^{(\Pi)}|A_h(\tau), n_t]$ viene a volte indicata con il termine *indice di rischio*.

Come accennato in precedenza, l'obiettivo è studiare i percentili di $Y_t^{(\Pi)}$. Date le ipotesi di omogeneità e di indipendenza tra le speranze di vita, tali percentili possono essere calcolati attraverso delle simulazioni stocastiche. L' ε -percentile della distribuzione di $Y_t^{(\Pi)}$ condizionato all'assunzione $A_h(\tau)$ e alla dimensione n_t al tempo t può essere definito come segue:

$$y_{t,\varepsilon}[A_h(\tau), n_t] = \inf \left\{ u \geq 0 \mid P[Y_t^{(\Pi)} \leq u | A_h(\tau), n_t] > \varepsilon \right\}$$

In particolare si è interessati a studiare la coda destra di $Y_t^{(\Pi)}$, quindi vengono considerati valori elevati di ε .

In parallelo, date le precedenti assunzioni, anche $B_t^{(\Pi)}$ può essere analizzato in modo del tutto analogo. Infatti, la variabile $B_t^{(\Pi)}$, condizionata alle informazioni disponibili al tempo 0, si distribuisce come una binomiale, con i parametri n_0 e probabilità di sopravvivenza calcolati in relazione all'assegnata assunzione di mortalità.

3.3.1 Assegnazione della distribuzione di probabilità

Un ulteriore passo per proseguire nella misurazione del longevity risk è assegnare una certa distribuzione di probabilità $\{\rho_h\}$, con $h = 1, 2, \dots, m$, al set di ipotesi $\mathcal{A}(\tau)$. Innanzitutto si identifichi con $\tilde{A}(\tau)$ l'incognito trend della mortalità. Il valore atteso non condizionato dei futuri pagamenti può essere dunque espresso come segue:

$$E[Y_t^{(\Pi)} | n_t] = n_t E[Y_t^{(1)}]$$

dove $E[Y_t^{(1)}] = \sum_{h=1}^m E[Y_t^{(1)} | A_h(\tau)] \rho_h$.

La varianza non condizionata diventa di conseguenza:

$$Var[Y_t^{(\Pi)} | n_t] = n_t \sum_{h=1}^m Var[Y_t^{(1)} | A_h(\tau)] \rho_h + n_t^2 \sum_{h=1}^m \left\{ E[Y_t^{(1)} | A_h(\tau)] - E[Y_t^{(1)}] \right\}^2 \rho_h$$

in cui il primo termine rappresenta la dispersione attorno al valore atteso, che può essere visto come una misura del process risk. Il secondo termine, invece, esprime lo scostamento rispetto al valore atteso, cioè la deviazione sistematica, e può essere considerato come una *misura del longevity risk* che in questa impostazione teorica viene visto come rischio di parametro.

In corrispondenza di queste valutazioni non condizionate, il coefficiente di variazione diventa:

$$CV[Y_t^{(\Pi)}|n_t] = \sqrt{\frac{1}{n_t} \frac{E_\rho\{Var[Y_t^{(1)}|\tilde{A}(\tau)]\}}{E^2(Y_t^{(1)})} + \frac{Var_\rho\{E[Y_t^{(1)}|\tilde{A}(\tau)]\}}{E^2(Y_t^{(1)})}}$$

dove il pedice ρ rappresenta il riferimento alla sottostante distribuzione di probabilità. Il primo termine sotto radice quadrata definisce che, in termini relativi, le fluttuazioni casuali rappresentano il *pooling risk*, dato che il loro effetto è assorbito e mitigato dalle dimensioni del portafoglio. Il secondo termine permette di considerare che le fluttuazioni sistematiche costituiscono il *non-pooling risk*, il quale non è influenzato dalla grandezza del portafoglio. In particolare, il valore asintotico dell'indice di rischio risulta:

$$\lim_{n_t \rightarrow +\infty} CV[Y_t^{(\Pi)}|n_t] = \sqrt{\frac{Var_\rho\{E[Y_t^{(1)}|\tilde{A}(\tau)]\}}{E^2(Y_t^{(1)})}}$$

che a sua volta può essere interpretato come la misura di quella parte del rischio di mortalità non influenzato da cambiamenti nelle dimensioni del portafoglio.

L' ε -percentile della distribuzione di probabilità non condizionata $Y_t^{(\Pi)}$, dato n_t , può essere scritto come:

$$y_{t,\varepsilon}[n_t] = \inf \left\{ u \geq 0 \mid P[Y_t^{(\Pi)} \leq u | n_t] > \varepsilon \right\}$$

Per valutare e stimare questa quantità è necessario l'utilizzo di metodi di simulazione in grado di analizzare i percentili della distribuzione.

3.3.2 Scelta e aggiornamento dei pesi

Un altro aspetto molto importante è la scelta dei pesi ρ_h . Come già accennato in precedenza, è molto raro avere un set di dati abbastanza completo per poterli stimare. Nella pratica alcuni test numerici hanno evidenziato come i pesi non influenzino in modo sostanziale la coda destra della distribuzione del valore atteso dei pagamenti futuri, ma la loro determinazione rimane comunque una sfida ardua per gli studiosi. In generale una buona e coerente analisi del longevity risk è molto più importante della scelta di tali pesi.

Un contributo di notevole interesse sulla problematica dei pesi è stato proposto da uno studio empirico effettuato da Pitacco, Denuit, Haberman e Olivieri (2009). In tale analisi è stata evidenziata l'importanza di rappresentare correttamente il rischio di parametro assegnando pesi positivi alle differenti assunzioni sulla mortalità, per poi aggiornarli di periodo in periodo.

Tutto ciò influenza le grandezze di interesse, così come la coda destra della distribuzione dei futuri pagamenti. In questo contesto, un modello inferenziale di tipo bayesiano potrebbe rappresentare un metodo appropriato di aggiornamento dei pesi.

Partendo dalle ipotesi utilizzate per le precedenti considerazioni di questo paragrafo (3.3), si assuma che il trend della mortalità sia incognito ma fisso, cioè non risenta di particolari shock. Dato il set di assunzioni $\mathcal{A}(\tau)$ i pesi possono essere definiti come:

$$\{\rho_h(A_h(\tau))\} \text{ con } h = 1, 2, \dots, m$$

Sia inoltre $f_0(t|A(\tau))$ la funzione di densità di probabilità (f.d.p.) della speranza di vita alla nascita di un individuo, condizionata a un'assunzione $A(\tau)$ sul trend della mortalità. Allora è possibile definire $S(t|A(\tau))$ come la funzione di sopravvivenza.

Nella procedura inferenziale, la f.d.p. campionaria può essere espressa come:

$$f_t(z|A(\tau)) = \begin{cases} 0 & \text{per } z \leq t \\ \frac{f_0(z|A(\tau))}{S(t|A(\tau))} & \text{per } z > t \end{cases}$$

Di conseguenza, la f.d.p. multivariata risulterà:

$$f_t(z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(n_t)}|A(\tau)) = \prod_{j=1}^{n_t} f_t(z^{(j)}|A(\tau))$$

dove $f_t(z) = \sum_{h=1}^m f_t(z|A(\tau)) \rho_h(A_h(\tau))$ è la f.d.p. predittiva, ristretta all'intervallo di età $[t, \omega - x_0]$.

Considerando ora un periodo di osservazione $[t, t']$, si può definire d come il numero di decessi avvenuti in questo periodo. Attraverso un opportuno ordinamento si può scrivere il vettore degli anni di decesso come:

$$\underline{x} = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}\}$$

In questo modo, utilizzando le informazioni provenienti dalla coppia (d, \underline{x}) , si può costruire la f.d.p. predittiva $f_t(z|d, \underline{x})$. La procedura da seguire è suddivisa in due passi. Innanzitutto è necessario aggiornare le opinioni iniziali riferite alla possibile evoluzione della mortalità e alla distribuzione di probabilità, calcolando la f.d.p. come:

$$\rho_h(A_h(\tau)|d, \underline{x}) \propto \rho_h(A_h(\tau))L(A_h(\tau|d, \underline{x}))$$

dove $L(A_h(\tau|d, \underline{x}))$ è la funzione di verosimiglianza e il simbolo \propto significa "proporzionale".

Successivamente bisogna calcolare la f.d.p. predittiva come:

$$f_t(z|d, \underline{x}) = \sum_{h=1}^m f_t(z|A(\tau)) \rho_h(A_h(\tau)|d, \underline{x})$$

Il primo passo richiede la costruzione della funzione di verosimiglianza, che si può scrivere nel seguente modo:

$$L(A_h(\tau|d, \underline{x})) \propto \left(\prod_{k=1}^d f_t(x^{(k)} - t | A_h(\tau)) \right) \left(\frac{S(t'|A_h(\tau))}{S(t|A_h(\tau))} \right)^{n_t-d}$$

La procedura inferenziale appena illustrata può essere adottata anche all'interno dei modelli di solvibilità, quando sono disponibili differenti tavole di mortalità proiettate.

3.4 Gestione del longevity risk

Oltre alla rappresentazione e alla misurazione del longevity risk, per le imprese di assicurazione vita e i fondi pensione il problema della gestione corretta di tale rischio non può essere sottovalutato. Una sua sottostima potrebbe generare una futura difficoltà o impossibilità a far fronte agli impegni verso gli assicurati, causando uno stato più o meno grave di insolvenza.

Le modalità di gestione e le diverse implicazioni sui mercati dei capitali sono argomento di così grande interesse che annualmente, a partire dal 2005, viene indetta una "*International Longevity Risk and Capital Market Solutions Conference*" che riunisce i più importanti studiosi del settore provenienti da tutto il mondo. Attualmente si è giunti alla quinta edizione, mentre la sesta (denominata "Longevity Six") si terrà nel settembre 2010 in Australia. Questa particolare conferenza ha lo scopo di aggiornare continuamente il settore assicurativo con i più avanzati metodi di riconoscimento, rappresentazione, quantificazione e soprattutto gestione del rischio di longevità, prendendo in esame gli impatti e le reazioni del mercato.

3.4.1 Prospettive di risk management

Nella realtà pratica, sono stati creati molti strumenti per gestire il rischio di longevità in un'ottica di Risk Management (RM).

In generale il processo di RM si articola in tre fasi fondamentali:

- Identificazione dei rischi.
- Valutazione (o misurazione) delle conseguenze rilevanti di tali rischi.
- Scelta delle tecniche di risk management.

Il primo passo, *l'identificazione dei rischi*, può seguire le linee guida fornite dallo IAA (International Actuarial Association, 2004) oppure quelle definite con il progetto Solvency II (v. CEIOPS 2007 e 2008). In particolare, i rischi di mortalità e longevità fanno parte del macrorischio di underwriting, che si ha quando il premio fatto pagare all'assicurato non è sufficiente per coprire i futuri esborsi, ovvero quando le riserve risultano inadeguate. Ovviamente per un assicuratore il longevity risk è tanto più importante quanto più elevato è il peso relativo del portafoglio delle assicurazioni vita di rendita rispetto al totale del business.

Altrettanto importante è la seconda fase, cioè la *valutazione del rischio*. Il longevity risk, in particolare, richiede l'uso di modelli stocastici. Esempi di misure di rischio possono essere: varianza, coefficiente di variazione, percentile della coda destra della distribuzione delle passività (tutte quantità definite nel dettaglio nel paragrafo 3.3). Un ulteriore esempio è rappresentato dalla *probabilità di rovina*, molto importante in ottica di valutazioni del rischio nell'ambito del Solvency II. È necessario notare, infine, che anche modelli deterministici possono portare a un'utile, seppur "grezza", misurazione dell'impatto del longevity risk su un portafoglio analizzato. Questi tipi di modelli permettono infatti di calcolare un intervallo di confidenza per le variabili incognite oggetto di studio.

Come ultima fase troviamo la *scelta delle tecniche di risk management*. Questo è un passo importante, poiché esistono molti tipi differenti di strategie per gestire il rischio longevità. In generale, si possono identificare diverse strategie di portafoglio volte a mitigare il rischio.

3.4.2 Strategie di portafoglio

Nella realtà pratica si possono verificare situazioni in cui le uscite annue superano una certa soglia (o barriera) che rappresenta il livello limite di sostenibilità dei pagamenti. In questo caso l'impresa di assicurazione si troverebbe in una situazione critica della sua gestione, che ovviamente deve essere evitata.

In questo contesto, attraverso la mitigazione del rischio si possono identificare un gran numero di strategie di portafoglio in grado di diminuire la probabilità che si verifichino tali inconvenienti. A livello pratico, una corretta strategia di portafoglio deve essere in grado di aumentare il livello sostenibile delle uscite annue alzandone la barriera, e di abbassare l'impatto negativo sulla gestione causato da miglioramenti inaspettati della mortalità. Per soddisfare questi requisiti si possono adottare tecniche di *loss control* e di *loss financing*. Le prime sono attuate attraverso l'attenta costruzione dei prodotti assicurativi, scegliendo in modo opportuno le componenti che li andranno a formare. Inoltre, nell'ambito del RM, il loss control si può a sua volta suddividere in tecniche di *loss prevention*, per mitigare la frequenza delle perdite, e metodologie di *loss reduction*, per ridurre la gravità delle possibili perdite future.

Gli studi nell'ambito del pricing dei prodotti assicurativi forniscono numerosi strumenti di loss prevention.

In riferimento a un prodotto assicurativo di rendita, è molto importante considerare una serie di problematiche. Innanzitutto, l'opportuna analisi dei miglioramenti riferiti alla mortalità richiede l'utilizzo di tavole proiettate al fine di prezzare le life annuities. In secondo luogo, l'incertezza sul futuro trend della mortalità necessita la definizione di una formula per il calcolo del premio basata sul principio di equivalenza, espresso dalla seguente uguaglianza:

$$S = b \cdot a_{x+n}$$

dove b rappresenta la prestazione annua, S il premio al netto del caricamento, n il momento in cui cessa il periodo di accumulazione e $x+n$ l'età all'inizio della fase di decumulazione. Adottando questo principio di equivalenza il longevity risk si può considerare attraverso un semplice caricamento di sicurezza, calcolato aumentando le probabilità di sopravvivenza delle tavole proiettate. Infine, la presenza di un'opzione di conversione in rendita a un tasso fisso richiede l'utilizzo di un accurato modello di pricing che prenda in giusta considerazione la possibilità di questa conversione.

Nell'ambito delle strategie di loss reduction, invece, è opportuno controllare l'ammontare annuo dei pagamenti. Perciò si ha la necessità di rendere maggiormente flessibili i prodotti di rendita. Un possibile intervento a tal fine potrebbe essere la riduzione delle prestazioni in conseguenza a miglioramenti non previsti della mortalità. In questo caso, però, il prodotto sarebbe sprovvisto di qualsiasi garanzia. Una soluzione maggiormente applicabile nella realtà consiste in una riduzione del livello di partecipazione degli assicurati ai rendimenti degli investimenti quando si riscontrano scostamenti avversi della mortalità. Infatti i profitti non distribuiti aumentano i mezzi propri della compagnia di assicurazione, innalzando così il livello sostenibile delle uscite annue.

Passando all'analisi delle tecniche di loss financing, bisogna premettere che tali strumenti richiedono strategie specifiche per l'intero portafoglio preso in esame e, in alcuni casi, anche per altri portafogli dell'assicuratore. In particolare, il trasferimento del rischio può essere realizzato attraverso i tradizionali contratti di riassicurazione o altri strumenti più sofisticati, come per esempio i longevity bond, la cui performance è legata ad alcune misure relative alla longevità di una determinata popolazione.

Nel contesto di questi strumenti di trasferimento del rischio tradizionali vanno fatte alcune importanti precisazioni. La riassicurazione classica (XL, per eccesso, e così via) permette di migliorare la diversificazione del rischio attraverso l'effetto di pooling; però, per migliorarne ulteriormente l'efficacia, le cessioni a un riassicuratore dovrebbero essere completate da un ulteriore trasferimento: quello al mercato dei capitali attraverso l'utilizzo di bond collegati a indici di mortalità o longevità. Questi prodotti sono ancora poco presenti sui mercati; nello specifico i mortality bond sono già stati creati da qualche anno, mentre i longevity bond sono ancora in una fase estremamente iniziale.

In ultima analisi, è importante per ogni assicuratore avere un buon grado di capitalizzazione, al fine di mantenersi solvibile con un certo margine prudenziale.

3.4.3 Strategie di natural hedging

Dopo aver discusso delle differenti strategie di portafoglio utili ad affrontare il rischio longevità, è importante anche definire come il longevity risk possa agire sulla gestione dell'impresa di assicurazione. A livello generale, infatti, le strategie di gestione possono riguardare diversi portafogli, diversi rami di business, oppure l'intera compagnia. In particolare, nell'ambito delle assicurazioni sulla vita, il *natural hedging* è una strategia di diversificazione che combina benefici opposti rispetto alla durata di vita. Infatti, se i tassi di mortalità decrescono, il costo delle polizze vita di rendita aumenta mentre il costo delle prestazioni in caso morte diminuisce e viceversa. Ne consegue che il rischio di mortalità nelle life annuities può essere parzialmente mitigato stipulando prodotti assicurativi che prevedono prestazioni in caso morte. In generale si possono presentare due diverse gestioni: una "gestione attraverso il tempo" o una "gestione attraverso le LOB", dove il termine "LOB" indica il ramo assicurativo.

Per quanto riguarda la *gestione attraverso il tempo*, è possibile definirne gli effetti attraverso un'impostazione teorica molto immediata. Si ipotizzi che al tempo 0 venga sottoscritta da un soggetto di età x_0 un'assicurazione vita di rendita, con la condizione che alla morte dell'assicurato la riserva sia erogata ai beneficiari. In questo caso, la riserva di base relativa al caso morte deve essere determinata al momento della sottoscrizione in modo tale che il death benefit sia garantito.

Al tempo 0 il casuale valore attuale delle future prestazioni, per il caso vita e il caso morte, per un individuo j -esimo è definito come segue:

$$Y_0^{(j)} = b^{(j)} a_{K_{x_0}^{(j)}} + (1+i)^{-(K_{x_0}^{(j)}+1)} C_{K_{x_0}^{(j)}+1}^{(j)}$$

dove il generico $C_t^{(j)}$ rappresenta la prestazione caso morte pagabile al tempo t se il decesso dell'assicurato avviene in $(t-1, t)$, a sua volta espressa in questo modo:

$$C_t^{(j)} = b^{(j)} a_{x_0}^{[A]} = b^{(j)} \sum_{h=1}^{\omega-x_0-t} (1+i)^{-h} {}_h p_{x_0+t}^{[A]}$$

Il benefit $C_t^{(j)}$ può essere anche visto come la riserva matematica definita al tempo t per soddisfare la prestazione in caso vita, calcolata in relazione a una certa ipotesi di mortalità $A(\tau)$ e al tasso di interesse i . Di conseguenza, la riserva individuale per entrambi i casi vita e morte al tempo t , richiamando il principio di equivalenza, può essere scritta come:

$$V_t^{(j)} = b^{(j)} a_{x_0+t} + \sum_{h=1}^{\omega-x_0-t} {}_h/1 q_{x_0+t} (1+i)^{-(h+1)} C_{t+h+1}^{(j)}$$

La somma a rischio, $C_t^{(j)} - V_t^{(j)}$, nel corso di ogni anno $(t-1, t)$ risulta molto vicina al valore zero.

Dopo questa premessa teorica si può notare come un assicuratore che svolga la sua attività nei rami vita e morte, benefici di una riduzione del rischio data dal fatto che più lungo è il periodo di pagamento della rendita, più si riduce l'ammontare delle prestazioni in caso morte. Tuttavia, la riduzione del rischio non può essere totale proprio a causa della presenza del death benefit.

Per quanto riguarda l'assicurato, invece, questa tipologia di polizza ha il vantaggio di ripagare ai beneficiari il patrimonio rimanente alla sua morte. È importante ricordare, però, che la prestazione in caso morte è alquanto dispendiosa per il sottoscrittore. Di recente sono state proposte diverse tipologie di prodotti alternativi, quali le money-back annuities o le reversionary annuities. Le prime sono espresse dalla seguente uguaglianza:

$$C_t^{(j)} = \max\{S - (t - 1); 0\}$$

dove S è il singolo premio pagato. Le seconde, invece, si basano sul concetto che, maggiore è il periodo di pagamento in favore dell'assicurato principale, minore sarà il numero di pagamenti corrisposti ai beneficiari in caso di reversibilità.

Come accennato in precedenza, oltre alla "gestione attraverso il tempo", è possibile anche una "gestione attraverso le LOB", ovvero attraverso i rami assicurativi. In questo secondo caso la riduzione del rischio può essere ottenuta eseguendo un corretto mix di contratti tra assicurazioni vita e assicurazioni di rendita. Alcuni studi (v. Cox e Lin, 2007) hanno evidenziato come si riesca a diminuire la rischiosità quando, al momento della sottoscrizione, l'ammontare dei costi relativi alle assicurazioni vita è simile a quello delle rendite vitalizie.

In conclusione, una corretta compensazione tra l'ammontare delle assicurazioni vita e delle rendite è molto difficile da perseguire; solo le compagnie di grandi dimensioni possono giungere a un risultato efficace usufruendo di un numero elevato di contratti. In questo contesto, i riassicuratori possono giocare un ruolo molto importante nel raggiungimento di tale obiettivo.

3.4.4 Strategie di riassicurazione

La riassicurazione è uno strumento molto importante per numerosi aspetti della gestione tecnico-assicurativa di un'impresa di assicurazione, e può essere anche utilizzata per trasferire il longevity risk, almeno in linea di principio, attraverso differenti tipologie di accordi. Attualmente, però, il trasferimento risulta possibile solo a livello teorico, in quanto le compagnie di riassicurazione sono molto riluttanti ad accettare un rischio che, per natura, è di tipo sistematico. Effettivamente solo poche tipologie di posizioni assicurative si possono gestire attraverso un rapporto con un'impresa di riassicurazione; lo sviluppo delle longevity-linked securities, che trasferiscono il rischio sul mercato dei capitali, potrebbe contribuire alla nascita di un vero e proprio mercato riassicurativo per il longevity risk, ma di questo si parlerà più nel dettaglio nei paragrafi successivi.

In generale, volendosi concentrare in un ambito prettamente riassicurativo, si può analizzare la gestione di un'impresa prendendo come riferimento, per semplicità, un insieme di contratti di rendita vitalizia immediata (che costituiscono, altresì, la tipologia di polizze più interessante per l'impatto e il trasferimento del longevity risk).

Il modo più semplice di trasferire il rischio di longevità è quello di "troncare" la durata di ogni rendita. Per fare ciò ci si può affidare a un contratto riassicurativo *Excess-of-Loss* (XL). In questo caso, il riassicuratore pagherà alla cedente la parte finale di rendita vitalizia che eccede una data età, denominata x_{max} . Questa età sarà determinata in modo tale da essere ragionevolmente elevata, ma non troppo vicina all'età massima ω , altrimenti il trasferimento risulterebbe pressoché inefficace. x_{max} potrebbe essere definita, per esempio, in corrispondenza del punto di Lexis.

Considerando il punto di vista della cedente, questa tipologia di riassicurazione permette di trasformare dei contratti di rendita vitalizia immediata, pagabili per tutta la vita residua degli assicurati, in contratti di rendita temporanea. Dal punto di vista del riassicuratore, invece, tutto ciò comporterebbe un pesante carico di nuovi rischi. La causa di questa situazione deriva proprio dal fatto che all'impresa di riassicurazione viene ceduta la parte peggiore di ogni rendita, cioè quella che riguarda le età più avanzate. Nella realtà, quindi, questo tipo di contratto è accettabile per il riassicuratore solo se tale accordo fosse obbligatorio per l'impresa di assicurazione che deve erogare la rendita. Può essere il caso, per esempio, dei fondi pensione, obbligati dall'autorità di vigilanza a sostenere le passività attraverso accordi di (ri-) assicurazione.

Un accordo di tipo XL è per sua stessa natura un contratto di lunga durata. Questo comporta un forte caricamento sul riassicuratore riguardo il longevity risk. Molto spesso nella pratica si preferiscono dei trattati di breve o media durata; in questo caso le strategie di tipo *Stop-Loss* potrebbero costituire delle interessanti soluzioni. Un contratto di questo genere prevede l'intervento del riassicuratore al fine di prevenire il default della cedente, in corrispondenza di deviazioni sistematiche della mortalità.

Lo *Stop-Loss* a sua volta può essere suddiviso in due diverse tipologie: *Stop-Loss on assets* e *Stop-Loss on annual outflows*. Nel primo caso gli effetti delle deviazioni della mortalità si possono analizzare comparando il totale delle attività del portafoglio in un dato tempo con la riserva necessaria per soddisfare gli obblighi dell'assicuratore. Definendo con z il tempo di sottoscrizione del contratto riassicurativo, l'intervento del riassicuratore può essere limitato attraverso la seguente disuguaglianza:

$$W_{z+k} < (1 - \pi)V_{z+k}^{(\Pi)}$$

dove $\pi V_{z+k}^{(\Pi)}$ rappresenta la "priorità" del contratto, k è un determinato numero di anni e $\pi > 0$ contiene le possibili fluttuazioni casuali che vengono trasferite.

Passando al secondo caso, in un accordo *Stop-Loss on annual outflows* il longevity risk, a una determinata data, viene trasferito se l'ammontare delle prestazioni da pagare agli assicurati è significativamente più elevato di quello che ci si poteva attendere.

In questo contesto il riassicuratore si farà carico dell'ammontare eccedente, definito "loss" (perdita). Tali perdite possono derivare da fluttuazioni casuali e, inoltre, vi è la possibilità di ridurre l'intervento del riassicuratore alzando il livello critico riferito al valore atteso dei benefit, oltre al quale si ottiene la prestazione riassicurativa.

In conclusione, la scelta di un particolare tipo di riassicurazione dipende innanzitutto da quali contratti sono disponibili sul mercato riassicurativo. Nel momento in cui vi sia più di una soluzione, è necessario prestare molta attenzione non solo al prezzo, ma anche all'effettivo contenimento del rischio di longevità e la sua efficacia sulla riduzione dei requisiti di capitale.

3.5 Trasferimento alternativo del rischio

Oltre alle normali soluzioni per trasferire il rischio esposte nei paragrafi precedenti, sono presenti sul mercato altre metodologie più o meno sviluppate e affermate. Tra queste troviamo la *life insurance securitization* e le *mortality-linked securities*. Di seguito verranno trattati con maggior dettaglio questi tipi di trasferimenti alternativi.

3.5.1 Life insurance securitization

Una prima tipologia di trasferimento alternativo del rischio è rappresentata dalla securitization; quest'ultima è caratterizzata dall'interazione con il mercato dei capitali ed è formata da un insieme di asset o da una sequenza di flussi di cassa riferiti a titoli presenti sul mercato stesso. I principali obiettivi dell'attività di securitization sono quelli di migliorare la liquidità dei mezzi a disposizione attraverso la vendita di flussi futuri, e di trasferire i rischi quando si ha a che fare con un insieme di pagamenti o di flussi di cassa.

Nella realtà pratica il trasferimento può essere caratterizzato da numerosi passaggi intermedi prima di giungere sul mercato dei capitali, ma solitamente i principali soggetti coinvolti sono tre: assicurato, impresa di assicurazione e istituzione finanziaria di supporto. La transazione inizia sul mercato assicurativo, dove le polizze vengono sottoscritte dai soggetti assicurati. Successivamente l'assicuratore vende il diritto relativo ad alcuni flussi di cassa a un *special purpose vehicle* (SPV), che è un istituto finanziario con il compito di collegare l'impresa di assicurazione al mercato dei capitali. Questo SPV, a sua volta, emette alcuni valori o titoli aventi come garanzia i cash-flow scelti in precedenza, allo scopo di raccogliere denaro ricevendo il pagamento di un prezzo da parte del mercato. I fondi che si genereranno saranno poi resi disponibili, almeno in parte, all'assicuratore.

In questo contesto non bisogna tralasciare la presenza di un possibile rischio di controparte. Può accadere, infatti, che l'impresa di assicurazione, dopo il trasferimento dei flussi di cassa, non sia in grado di onorare gli impegni assunti verso lo SPV o verso gli assicurati.

Per diminuire questo rischio di default potrebbe essere necessario l'utilizzo di alcuni strumenti di supporto del credito, come ad esempio un'assicurazione di credito¹⁰ o una lettera di credito¹¹. Inoltre, è bene ricordare che il rischio di controparte aumenta al crescere dei soggetti coinvolti nella transazione, proprio come accade in ambito finanziario.

3.5.2 *Mortality-linked securities*

Recentemente si sono sviluppati alcuni tipi di prodotti per la gestione dei rischi legati alla mortalità molto innovativi rispetto a quelli tradizionali. Tra i più studiati, sia a livello pratico che teorico, troviamo le mortality-linked securities, il cui pay-off è legato alla mortalità di una determinata popolazione. In particolare, questi strumenti sono ottenuti sfruttando una serie di derivati che hanno come sottostante alcuni indici di mortalità di una determinata popolazione. Tali securities hanno quindi lo scopo di gestire le problematiche derivanti da due eventi diametralmente opposti, quali:

- Il fenomeno di extra-mortalità, caratterizzato da tassi di decesso superiori a quelli attesi.
- Il fenomeno di extra-sopravvivenza, cioè la presenza di una longevità più accentuata rispetto a quella attesa.

Il termine utilizzato per questi prodotti è "bond" ed è possibile distinguere tra mortality bond e longevity bond. Entrambi si basano sull'analisi dei tassi di mortalità della popolazione scelta e sull'osservazione di tali tassi durante tutta la durata del bond. Per popolazione si può prendere come riferimento un mix di diverse popolazioni, oppure una singola generazione. L'indice di mortalità o di sopravvivenza viene scelto in base all'esperienza di mortalità osservata per quel determinato insieme di individui.

La tipologia di bond più diffusa e sviluppata è quella dei *mortality bond*, proprio perché la mortalità è più semplice da analizzare nella pratica rispetto alla più specifica longevità, e le dinamiche demografiche riferite all'intera curva dei decessi non hanno carattere prettamente sistematico. In particolare, i mortality bond vengono costruiti allo stesso modo dei catastrophe bond. L'obiettivo è quello di garantire liquidità nel caso in cui la mortalità effettiva risulti superiore a quella attesa, a causa, per esempio, di epidemie o disastri naturali. Tali strumenti sono solitamente a breve termine (3-5 anni) e sono legati a un indice di mortalità che esprime la frequenza di decesso osservata nella popolazione di riferimento in un dato periodo. Al momento della sottoscrizione potrebbero anche essere definite delle barriere che, qualora venissero superate dall'indice di mortalità, farebbero diminuire sia il valore nominale che la cedola.

¹⁰ Le assicurazioni di credito sono un servizio svolto da compagnie di assicurazione specializzate, generalmente *mono-ramo*, basato sulla valutazione preventiva degli acquirenti a cura dell'assicuratore. Riguarda la copertura del rischio di perdita definitiva, originato da insolvenza e/o da mancato pagamento di crediti a breve termine, sorti nei confronti di operatori economici, a seguito di contratto di fornitura o prestazione di servizi.

¹¹ La lettera di credito è un documento, emesso da un istituto di credito, che funge da garanzia affinché un soggetto possa ottenere un finanziamento da parte di altri soggetti, che possono essere a loro volta delle banche oppure dei fornitori.

Per avere un'idea di come funzionano i mortality bond, verranno presentate due possibili tipologie di questo particolare strumento.

Prima di iniziare è necessario definire la terminologia che si utilizzerà. Sia 0 la data di sottoscrizione del bond e T la scadenza. I_t rappresenta l'indice di mortalità dopo t anni dalla data iniziale ($t = 0, 1, \dots, T$), S_t è il valore nominale e C_t la cedola dovuta in t .

Innanzitutto, è possibile delineare uno strumento in grado di proteggere contro un eccesso di mortalità per tutta la durata del bond stesso; tale obiettivo si ottiene riducendo il valore nominale del titolo a scadenza. Questa prima tipologia di mortality bond è la più semplice e immediata, poiché permette di cautelarsi contro situazioni di extra-mortalità per tutto il periodo considerato.

La scelta dell'indice di riferimento non è fissa, ma è possibile optare per soluzioni alternative, come:

- $I_T = \max\{q(t)\}_{t=1,2,\dots,T}$
- $I_t = \frac{\sum_{t=1}^T q(t)}{T}$

dove $q(t)$ è la frequenza media di decesso annuale per una certa popolazione al tempo t . Di conseguenza si ottiene che $I_0 = q(0)$.

A scadenza, scegliendo come indice I_T , il valore nominale pagato all'investitore sarà definito come:

$$S_T = S_0 \cdot \begin{cases} 1 & \text{se } I_T \leq \lambda' I_0 \\ \Phi(I_T) & \text{se } \lambda' I_0 \leq I_T \leq \lambda'' I_0 \\ 0 & \text{se } I_T > \lambda'' I_0 \end{cases}$$

dove λ' e λ'' sono due parametri, tali per cui $1 \leq \lambda' \leq \lambda''$, e $\Phi(I_T)$ è una funzione decrescente, con $\Phi(\lambda' I_0) = 1$ e $\Phi(\lambda'' I_0) = 0$. Per esempio, $\Phi(I_T)$ può essere scritta attraverso il rapporto:

$$\Phi(I_T) = \frac{\lambda'' I_0 - I_T}{(\lambda'' - \lambda') I_0}$$

In questo caso $\lambda' I_0$ e $\lambda'' I_0$ rappresentano due soglie dell'indice di mortalità.

La cedola è invece indipendente dalla mortalità e può essere definita nel seguente modo:

$$C_t = S_0(i_t + r)$$

dove i_t è il tasso di interesse di mercato al tempo t e r l'extra-rendimento che compensa l'investitore per aver assunto il mortality risk.

Quindi, un assicuratore/riassicuratore potrà controbilanciare l'aumento delle prestazioni in caso morte causato da un'extra-mortalità attraverso la sottoscrizione di un mortality bond.

Facendo riferimento all'indice I_t , invece, è possibile definire uno strumento che permetta una copertura solo parziale e non sull'intero periodo di riferimento.

Sfruttando questo concetto si è in grado di costruire un bond simile a quello precedente che però cerca di compensare i flussi sfavorevoli di un portafoglio vita solamente alla fine di un certo numero di anni. Il risultato si ottiene facendo dipendere la cedola alla mortalità come segue:

$$C_T = S_0 \cdot \begin{cases} i_t + r & \text{se } I_t \leq \Lambda'_t \\ (i_t + r)\Phi(I_T) & \text{se } \Lambda'_t \leq I_t \leq \Lambda''_t \\ 0 & \text{se } I_t > \Lambda''_t \end{cases}$$

dove Λ'_t e Λ''_t sono due soglie riferite alla mortalità. Tali limitazioni possono essere per esempio definite come:

$$\Lambda'_t = \lambda' E[D_t | A(\tau)]$$

$$\Lambda''_t = \lambda'' E[D_t | A(\tau)]$$

con D_t il numero di decessi nell'anno $(t-1, t)$ in una data popolazione e $E[D_t | A]$ il suo valore atteso in accordo con una determinata assunzione di mortalità $A(\tau)$. La funzione $\Phi(I_t)$ sarà decrescente e, per esempio, potrà essere scritta attraverso il rapporto:

$$\Phi(I_t) = \frac{\Lambda''_t - I_t}{\Lambda''_t - \Lambda'_t}$$

Come definito in precedenza, le mortality-linked securities non fanno solo riferimento alla mortalità, ma anche al fenomeno della longevità. In quest'ultimo caso il longevity risk assume un ruolo fondamentale, comportando una serie di problematiche a causa della sua sistematicità; tali caratteristiche lo rendono difficilmente trasferibile attraverso strumenti adeguati. Comunque, sul mercato sono stati recentemente introdotti i *longevity bond*, utilizzati per proteggersi nel caso in cui la mortalità effettiva risulti inferiore a quella attesa, cioè quando i soggetti vivono più a lungo rispetto alla speranza di vita media. A differenza della situazione di extra-mortalità, il verificarsi di extra-sopravvivenza non è un fenomeno improvviso, ma più che altro una situazione persistente nel tempo. Di conseguenza i longevity bond sono, per natura, di lungo periodo. Questi strumenti possono aiutare un assicuratore/riassicuratore a gestire il longevity risk in un portafoglio di rendite vitalizie, sia se si assume una posizione corta (short, di vendita) o lunga (long, di acquisto). Nel primo caso, il pay-off del bond cresce al diminuire della mortalità, mentre nel caso avviene esattamente l'opposto. Si ricordi, inoltre, come nel Capitolo 2 tali strumenti di gestione siano stati utilizzati per definire l'impostazione teorica dei modelli di mercato della mortalità, che si affidano proprio ai longevity bond per la valutazione dei mortality-linked cash-flow.

Anche per i longevity bond verranno di seguito esposti tre possibili esempi, per meglio comprendere il loro funzionamento. Si prenda come riferimento una generazione (possibilmente vicina all'età di pensionamento) con età compresa tra i 60 e i 65 anni alla data di sottoscrizione del bond. L_t rappresenta il numero di soggetti della coorte dopo t anni dalla data iniziale, con $t = 0, 1, 2, \dots$; perciò $L_0 = l_0$ è un valore noto. La scadenza T viene scelta nel lungo periodo, ad esempio $T \geq 85$ – data iniziale.

Innanzitutto, è possibile definire una tipologia di longevity bond caratterizzata da una cedola proporzionale a un indice di sopravvivenza della popolazione di riferimento. Di conseguenza si ottiene che:

$$C_t = C \cdot \frac{L_t}{l_0}$$

dove C è un ammontare prefissato che collega la cedola al valore nominale. Nel caso in cui si verifichi un fenomeno di longevità inattesa, la cedola cresce più velocemente di quanto previsto; quindi, l'assicuratore/riassicuratore che ha un portafoglio di rendite vitalizie deve assumere una posizione lunga.

Attraverso l'impostazione teorica dei mortality bond esposti in precedenza, si può delineare una seconda tipologia di longevity bond. In questo caso, infatti, vengono definite due barriere per esprimere i livelli di sopravvivenza. Se il numero dei soggetti della generazione ancora in vita supera queste barriere, l'ammontare della cedola diminuisce fino a raggiungere lo zero. Viene quindi adottata la seguente definizione:

$$C_T = C \cdot \begin{cases} \frac{l''_t - l'_t}{l_0} & \text{se } L_T \leq l'_t \\ \frac{l''_t - L_T}{l_0} & \text{se } l'_t \leq L_T \leq l''_t \\ 0 & \text{se } L_T > l''_t \end{cases}$$

dove l'_t e l''_t sono le due barriere che indicano un dato numero di sopravvivenenti. Per esempio, tali limitazioni possono essere scritte come:

$$l'_t = \lambda' E[L_t | A(\tau)]$$

$$l''_t = \lambda'' E[L_t | A(\tau)]$$

con $1 \leq \lambda' \leq \lambda''$ e $A(\tau)$ una determinata ipotesi sulla mortalità della popolazione. In questo caso, minore è la mortalità, più alto è L_t , e minore sarà la cedola; quindi per gestire in modo corretto i flussi di un portafoglio di rendite vitalizie sarà necessario assumere una posizione corta.

Infine, un'ultima tipologia di strumento legata alla longevità è rappresentata da un longevity bond la cui cedola è proporzionale al numero di decessi osservati nella generazione di riferimento. In questo caso, al tempo T si avrà:

$$C_T = C \cdot \frac{l_0 - L_t}{l_0}$$

dove $l_0 - L_t$ è il numero di decessi avvenuti fino al tempo t . Anche in questo caso è necessaria una posizione corta per gestire opportunamente il longevity risk.

Nonostante tutti questi strumenti alternativi e innovativi siano molto interessanti, nella realtà ci sono molte difficoltà nello sviluppo di un mercato dei longevity bond.

Innanzitutto bisognerebbe identificare un soggetto o un'istituzione interessata a offrire o investire in questa tipologia di prodotti. Se da un lato tali bond offrono opportunità di diversificazione, in particolare grazie alla loro bassa correlazione con il mercato finanziario tradizionale, dall'altro creano investimenti a lungo termine, difficilmente strutturabili o gestibili. Un altro problema è la scelta del dataset a cui appoggiarsi per lo studio di una certa popolazione; l'analisi dovrebbe essere fatta in modo indipendente e richiederebbe dispendio di tempo e denaro. Inoltre vi è una grossa difficoltà nel definire un corretto pricing del longevity risk da trasferire al mercato dei capitali. Non è ancora stato trovato un modello stocastico universalmente accettato per analizzare la mortalità e per ora il mercato non è pronto per trattare in modo coerente il rischio di longevità. Di recente sono stati sviluppati alcuni approcci per ovviare a questi problemi e se ne parlerà più diffusamente nel paragrafo dedicato al pricing.

3.6 Impatto del longevity risk sui prodotti di rendita

Dopo aver esaminato le modalità con cui è possibile gestire il longevity risk, in questo contesto verrà approfondito il concetto accennato nel paragrafo 3.1.2, analizzando l'impatto reale che tale rischio può avere sulle tipologie di polizze che risentono maggiormente di questo problema, cioè le rendite (altri strumenti assicurativi tradizionali sono poco influenzati dal rischio di longevità, e per questo non necessitano di un'analisi così approfondita). Attualmente i prodotti assicurativi di rendita sono venduti in numerosi mercati mondiali e in molti casi l'effetto del longevity risk risulta tutt'altro che trascurabile. In Italia la "cultura" della rendita non è ancora così diffusa; in generale si preferisce avere tutto e subito, sottoforma di capitale, piuttosto che richiedere la conversione in rendita. Come già accennato nel Capitolo 1 però, l'evolversi della previdenza complementare nel nostro Paese darà una forte spinta al diffondersi dei contratti di rendita. In pratica si assisterà a un vero e proprio travaso (forzoso e volontario) dal risparmio finanziario classico al risparmio previdenziale, con la conseguenza che le disponibilità finanziarie dei lavoratori si indirizzeranno sempre di più a favore dei prodotti previdenziali, a scapito delle forme tradizionali finanziarie e assicurative.

È altresì importante ricordare come nei contratti tradizionali di rendita garantita le basi tecniche siano determinate al momento del calcolo del premio; questa peculiarità comporta tre conseguenze fondamentali. In primo luogo, una rendita vitalizia differita, caratterizzata da premi annui, implica una forte componente di longevity risk a carico dell'assicuratore, proprio perché le basi tecniche sono definite alla stipulazione del contratto e quindi in epoca molto lontana dal pensionamento. In secondo luogo, una rendita vitalizia immediata con premio unico comporta il più basso grado di rischio longevità, dato che le basi tecniche sono determinate solamente al momento del pensionamento. Infine, un contratto con premi ricorrenti rappresenta una soluzione intermedia, in quanto le basi tecniche possono essere definite in modo specifico per ogni premio.

Da queste considerazioni, ne consegue che la rendita vitalizia differita con premi annui richiede un maggiore caricamento di sicurezza rispetto alla rendita vitalizia immediata con premio unico, mentre il contratto a premi ricorrenti si trova in una situazione intermedia. Ovviamente è importante specificare che per calcolare un corretto caricamento è necessario l'utilizzo di un modello di pricing idoneo o, in alternativa, definire delle condizioni contrattuali che permettano la revisione periodica delle basi tecniche.

In particolare, nel caso di rendita vitalizia immediata con premio unico l'accumulo dell'ammontare necessario per il suo finanziamento può essere ottenuto attraverso, per esempio, la sottoscrizione di una polizza mista (che eroga prestazioni nel caso in cui l'assicurato sia ancora in vita alla scadenza, o al beneficiario in caso di decesso). Nello specifico potrebbe essere conveniente offrire alla clientela un pacchetto composto da una polizza mista nel periodo di accumulazione e da una rendita vitalizia immediata in quello di de-cumulazione.

Attraverso quest'opportuna combinazione il sottoscrittore otterrà alcuni vantaggi. Innanzitutto, avrà una copertura assicurativa contro il rischio di morte prematura durante il periodo lavorativo. Inoltre, avrà la possibilità di accumulare una certa somma alla data di pensionamento attraverso un apposito strumento di risparmio e tale somma potrà essere convertita (parzialmente) in rendita. Infine, per la durata di vita residua, il sottoscrittore beneficerà di una rendita vitalizia immediata.

Oltre a definire i vantaggi che questa tipologia di prodotto fornisce all'assicurato, risulta altrettanto importante constatare a quale tipo di rischio viene sottoposto l'assicuratore. A questo scopo si considerino solamente i flussi derivanti dai premi e dalle prestazioni, senza considerare per semplicità i rischi connessi alle spese e ad altri aspetti. Inoltre, si identifichi come data di sottoscrizione della polizza mista il tempo 0, n la sua scadenza nonché la data di pensionamento e x l'età del soggetto al tempo 0.

Definite queste notazioni è possibile analizzare due fasi ugualmente importanti per l'impresa di assicurazione: il periodo di accumulazione e il periodo di de-cumulazione. Nel primo caso l'impresa di assicurazione riesce a gestire contemporaneamente il rischio d'investimento relativo alla riserva matematica della polizza mista (nel momento in cui sia prevista qualche forma di garanzia finanziaria, come per esempio un tasso di interesse minimo garantito), il rischio di mortalità o di extra-mortalità relativo ai capitali sotto rischio e il rischio di riscatto relativo all'ammontare della riserva.

Nel periodo di de-cumulazione, invece, l'assicuratore può proteggersi dal rischio d'investimento relativo alla riserva matematica della rendita (se è previsto un tasso di interesse minimo garantito) e dal rischio di mortalità o sotto-mortalità, in particolare riguardo il longevity risk.

Inoltre, alla data di pensionamento, la compagnia potrà affrontare opportunamente il rischio connesso all'eventuale conversione in rendita del capitale accumulato.

Considerando in modo specifico il longevity risk, il lasso di tempo nel quale l'assicuratore è in grado di sostenere tale rischio coincide con l'intervallo temporale coperto dalla rendita vitalizia immediata se il tasso di rendita $1/a_{x+n}$ è determinato e garantito solamente al momento del pensionamento. In questo contesto è importante precisare che, in ipotesi di premio unico, il tasso di conversione del montante accumulato S in una rendita di importo b segue l'uguaglianza: $b = S/a_{x+n}$.

Infine, è necessario ricordare che la possibilità di conversione in rendita espone l'assicuratore al rischio di selezione avversa, dato che la maggior parte dei soggetti che optano per convertire a scadenza il capitale in rendita gode di buona salute.

3.7 Pricing del longevity risk

Come si è accennato più volte nei paragrafi precedenti, le problematiche legate al pricing del longevity risk sono molto lontane dal trovare soluzione. Negli ultimi anni si sono susseguiti molti studi per cercare di dare una risposta concreta, ma non vi è ancora un modello oggettivamente riconosciuto per prezzare il rischio di longevità.

Innanzitutto va precisato che esistono le opinioni più disparate su come possa evolvere la mortalità e sull'uso di un appropriato modello stocastico per lo studio dei trend; inoltre, i dati per stimare i principali parametri non sempre sono disponibili in modo corretto.

Nonostante queste problematiche, però, quando vi è la necessità di gestire un portafoglio di rendite vitalizie è quasi indispensabile avere modelli di pricing per misurare in qualche modo il longevity risk. Proprio per questa importanza, di seguito verranno riportate alcune proposte interessanti presenti in letteratura, e nel Capitolo 4 verrà analizzato in dettaglio l'utilizzo di un modello di previsione della mortalità anche ai fini del pricing.

Con riferimento al valore attuale delle rendite, Denuit e Dhaene (2007) e Denuit (2007) introducono il concetto di casualità delle probabilità di morte all'interno del modello di Lee-Carter. Si ricordi, innanzitutto, l'impostazione classica di tale modello (v. Capitolo 2) espressa dalla seguente equazione:

$$m(x, t) = \exp\left[\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} k_t^{(2)}\right]$$

Inoltre, si identifichi con il termine ${}_hP(x_0, t_0)$ la probabilità casuale di sopravvivenza per un individuo di età x_0 al tempo t_0 , cioè la probabilità condizionata che questo soggetto raggiunga in vita l'età $x_0 + h$ nell'anno $t_0 + h$, dato $k_t^{(2)}$. Tale quantità può essere definita come:

$${}_hP(x_0, t_0) = \exp\left\{-\sum_{s=0}^{h-1} m(x_0 + s, t_0 + s)\right\} = \exp\left\{-\sum_{s=0}^{h-1} \beta_{x_0+s}^{(1)} + \beta_{x_0+s}^{(2)} k_{t_0+s}^{(2)}\right\}$$

Determinata questa particolare probabilità, è possibile ricavare il valore attuale di una rendita che paga alla fine di ogni anno l'ammontare $b = 1$, attraverso l'espressione:

$$a_{x_0}(t_0) = \sum_{h=1}^{\omega-x_0} {}_hP(x_0, t_0)v(0, h) = \sum_{h=1}^{\omega-x_0} \exp\left\{-\sum_{s=0}^{h-1} \beta_{x_0+s}^{(1)} + \beta_{x_0+s}^{(2)}k_{t_0+s}^{(2)}\right\}$$

dove $v(0, h)$ è il fattore di sconto, cioè il valore attuale al tempo 0 dell'unità pagata al tempo h . È importante notare come $a_{x_0}(t_0)$ sia una variabile casuale, proprio perché dipende dalla traiettoria futura dell'indice riferito al tempo ($k_t^{(2)}$).

A livello pratico la distribuzione di $a_{x_0}(t_0)$ è molto difficile da ottenere. Sono state fatte alcune proposte dagli stessi autori Denuit e Dhaene (2007) e Denuit (2007) attraverso interessanti approssimazioni. In particolare, Denuit (2007) considera $a_{x_0}(t_0)$ come una somma ponderata dei vari ${}_hP(x_0, t_0)$ e cerca di investigarne le possibili implicazioni.

Un'altra proposta per il pricing del longevity risk è stata presentata da Biffis (2005), che calcola il premio unico di una rendita vitalizia adottando un processo di diffusione a salti (v. Capitolo 2), per modellizzare sia la forza di mortalità che l'andamento del tasso di interesse a breve. In questo modo riesce a valutare contemporaneamente sia il rischio finanziario che di mortalità, ottenendo i risultati in un contesto privo di arbitraggio.

Nel paragrafo 3.5.2 si era descritto il problema del pricing dei longevity bond e la difficoltà di definire strumenti in grado di fornire un corretto trasferimento del rischio di longevità al mercato. In questo contesto, Lin e Cox (2005) hanno cercato una soluzione coerente applicando la trasformata di Wang (v. per esempio Wang (2002) e Wang (2004)) in ipotesi di mercato incompleto. L'impostazione teorica definisce con il termine X un generico flusso futuro per una compagnia di assicurazione, avente come funzione di ripartizione (f.d.r.) $F(x)$; la trasformata di Wang a un fattore è la f.d.r. distorta tale per cui si ottiene la seguente uguaglianza:

$$F^*(x) = \Phi\{\Phi^{-1}[F(x)] + \lambda\}$$

dove $\Phi^{-1}(\cdot)$ è la f.d.r. di una normale standard e λ è il prezzo di mercato del rischio che include anche il longevity risk. Il prezzo equo di X è il valore attuale del valore atteso di X , calcolato attraverso il tasso risk-free e la f.d.r. distorta $F^*(x)$.

Wang, nei suoi studi, ha sviluppato anche la trasformata a due fattori, in cui la f.d.r. $F^{**}(x)$ è espressa come segue:

$$F^{**}(x) = Q\{\Phi^{-1}[F(x)] + \lambda\}$$

dove Q è una distribuzione T di Student con k gradi di libertà (in cui il valore di k viene determinato in base alla tipologia di analisi da effettuare).

Infine, come ultimo esempio rilevante, Cairns, Blake e Dowd (2006a) assumono come ipotesi per il pricing un'analogia tra la forza di mortalità e l'andamento dei tassi di interesse, adattando lo studio a un mercato privo di arbitraggio, composto da derivati e mortality-linked securities.

In conclusione, come si era già accennato all'inizio di questo paragrafo, non è ancora stata trovata una soluzione accettata da tutti gli studiosi, tanto che il pricing (in particolare per il longevity risk) è ancora un argomento molto attuale e in gran parte inesplorato.

3.8 Longevity risk e Solvency II: nuove prospettive

Il rischio di longevità non è importante solo per la corretta gestione tecnico-assicurativa di un'impresa di assicurazione, ma è anche contemplato nel progetto Solvency II.

Il Solvency II è un programma a livello europeo costituito in ambito assicurativo per una serie di importanti motivi:

- Necessità di un sistema di valutazione attivo/passivo più moderno.
- Fornire una visione più adeguata del livello di sicurezza di un'impresa di assicurazione (rispetto alle semplici formule del Solvency I) che consenta un confronto coerente tra le imprese.
- Rafforzare il sistema di solvibilità ritenuto inadeguato.

In breve il progetto si occupa di riformare le metodologie di valutazione dell'attività di una compagnia di assicurazione, fornendo strumenti più adeguati per determinare la rischiosità e la solvibilità generale. L'intero programma è suddiviso in tre pilastri.

Il primo pilastro tratta i "*Minimum Financial Requirements*" e si occupa dell'adeguatezza delle riserve, delle attività idonee a copertura degli impegni tecnici e della definizione di un ammontare minimo di capitale. Le macrocategorie di rischio comprese in questo pilastro, a loro volta suddivise in sottorischi, sono:

- Non-life underwriting risk: premium, reserve e CAT.
- Life underwriting risk: biometric (mortality, longevity, morbidity, disability), lapses e expenses, revision, CAT.
- Health underwriting risk: contratti long term (expenses, excessive loss/mortality/cancellation, epidemic/accumulation), contratti short term (premium, reserve e CAT).
- Market risk: interest rate, equity, property, concentration, spread e currency.
- Credit risk
- Operational risk

Per tutte queste valutazioni vengono proposte due misure di capitale: SCR (Solvency Capital Requirement) e MCR (Minimum Capital Requirement).

Il primo è l'ammontare sufficiente a coprire tutte le fonti di rischio che gravano sull'impresa su un orizzonte annuale e con un elevato livello di probabilità (per esempio 99,5%). Il secondo, invece, è un'ulteriore soglia d'attenzione calibrata a un livello di confidenza minore (per esempio all'85%), nei limiti inferiori e superiori del 25% e 45% rispettivamente del SCR.

Il secondo pilastro, invece, si occupa del "*Supervisory Review Process*", cioè fa riferimento alle tipologie di rischio che non possono essere adeguatamente stimate mediante misure puramente quantitative (per esempio il reputational risk, il legal risk, ecc.). L'obiettivo è quello di incoraggiare le compagnie a sviluppare e a utilizzare tecniche migliori di controllo interno e di risk management.

Il terzo e ultimo pilastro è il "*Market Disclosure*", che serve a rafforzare la market discipline introducendo requisiti di disclosure. In altre parole, tale pilastro dovrebbe giocare un ruolo fondamentale nello screening degli operatori da parte della clientela, mettendo in maggiore evidenza rispetto al Solvency I l'effettivo grado di sicurezza della compagnia. La clientela e il mercato, infatti, potranno individuare con precisione il trade-off tra pricing e solvency dei singoli assicuratori.

L'intero progetto si basa su molti aspetti differenti, ma come si può notare, il longevity risk è menzionato nel primo pilastro relativo ai requisiti di capitale dei rischi considerati "quantificabili". Il Solvency II propone due strade alternative per calcolare le misure di capitale: Standard Formula o Internal Model. Nel primo caso viene prevista una formula matematica adattabile a tutte le imprese; nel secondo caso ogni impresa utilizzerà il proprio modello interno approvato dall'autorità di vigilanza. Obiettivo del Solvency II è proprio quello di spronare le compagnie a elaborare modelli interni, in modo tale da avere un requisito di capitale più adeguato che rispecchi a pieno i rischi a cui sono esposte.

Dalla nascita del progetto sono stati pubblicati quattro studi di impatto quantitativo, i cosiddetti QIS (Quantitative Impact Studies), per determinare l'effetto sul mondo assicurativo dei nuovi requisiti e modificare eventuali aspetti della normativa. Una quinta analisi, il QIS5, verrà effettuata proprio nel 2010.

Secondo il più recente studio di impatto quantitativo finora completato, il QIS4 (aprile 2008), la struttura modulare del SCR globale può essere rappresentata dalla seguente Figura 17.

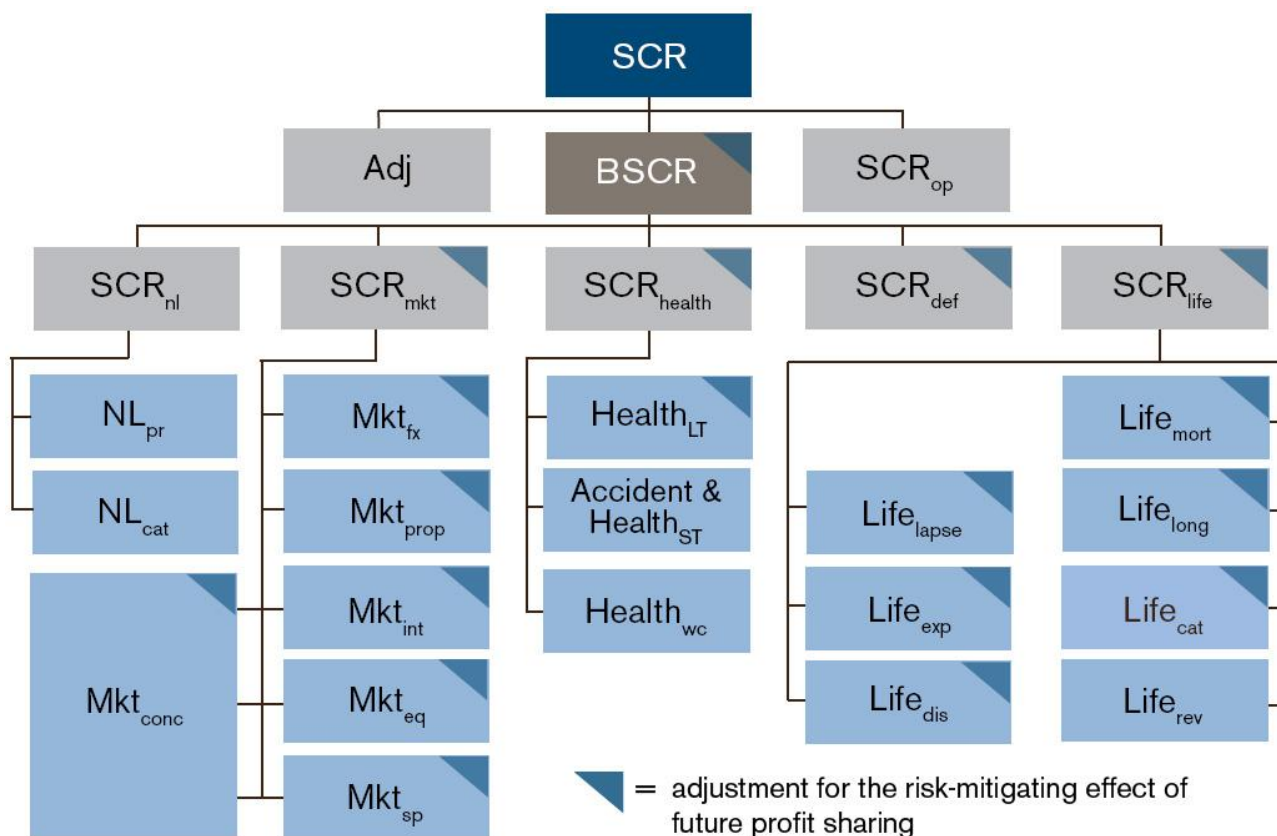


Figura 17

Come si può notare, per il calcolo del SCR globale sono presenti tutti i rischi esposti in precedenza per il primo pilastro. In particolare, la formula risulta la seguente:

$$SCR = BSCR - Adj + SCR_{op}$$

dove Adj è la quantità che tiene conto dei future discretionary benefits e della capacità di assorbimento delle imposte differite, mentre SCR_{op} è il requisito di capitale dell'operational risk supposto perfettamente correlato con gli altri rischi. Il BSCR, invece, è il Basic SCR calcolato come:

$$BSCR = \sqrt{\sum_{r,c} CorrSCR_{r,c} \cdot SCR_r \cdot SCR_c}$$

ottenuto aggregando le cinque sotto-componenti sulla base della matrice di correlazione fornita dal CEIOPS (Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors):

<i>CorrSCR</i>	<i>SCR_{mkt}</i>	<i>SCR_{def}</i>	<i>SCR_{life}</i>	<i>SCR_{health}</i>	<i>SCR_{nl}</i>
<i>SCR_{mkt}</i>	1				
<i>SCR_{def}</i>	0.25	1			
<i>SCR_{life}</i>	0.25	0.25	1		
<i>SCR_{health}</i>	0.25	0.25	0.25	1	
<i>SCR_{nl}</i>	0.25	0.5	0	0.25	1

Come già accennato in precedenza, il longevity risk è contenuto nel modulo del life underwriting risk, la cui formula di calcolo combina i requisiti di capitale dei vari sottomoduli con la matrice di correlazione relativa al settore vita. L'uguaglianza che fornisce il risultato è la seguente:

$$SCR_{life} = \sqrt{\sum_{r,c} CorrLife_{r,c} \cdot Life_r \cdot Life_c}$$

La matrice di correlazione specifica sarà:

<i>CorrLife</i>	<i>Life_{mort}</i>	<i>Life_{long}</i>	<i>Life_{dis}</i>	<i>Life_{lapse}</i>	<i>Life_{exp}</i>	<i>Life_{rev}</i>	<i>Life_{CAT}</i>
<i>Life_{mort}</i>	1						
<i>Life_{long}</i>	-0.25	1					
<i>Life_{dis}</i>	0.5	0	1				
<i>Life_{lapse}</i>	0	0.25	0	1			
<i>Life_{exp}</i>	0.25	0.25	0.5	0.5	1		
<i>Life_{rev}</i>	0	0.25	0	0	0.25	1	
<i>Life_{CAT}</i>	0	0	0	0	0	0	1

Si può notare come l'unico valore negativo sia proprio in corrispondenza della relazione tra mortality e longevity risk, proprio perché è naturale che se il primo aumenta il secondo diminuisce, e viceversa.

Nello specifico, la standard formula per il solo rischio longevità permette di giungere a due risultati di output:

- $Life_{long}$, cioè il requisito di capitale per il longevity risk.
- $nLife_{long}$, cioè il caricamento dovuto ai possibili effetti di assorbimento di futuri profit sharing.

Il primo valore, trattato in modo più dettagliato nel QIS4 e di maggiore interesse in questo contesto, viene definito come risultato di uno specifico scenario di longevità, descritto come:

$$Life_{long} = \sum_i (\Delta NAV | longevityshock)$$

dove la notazione “ i ” indica la polizza assicurativa i -esima che eroga prestazioni influenzate in qualche modo dal longevity risk, ΔNAV è la variazione del valore netto riferito alla differenza tra attività e passività, e *longevityshock* rappresenta una diminuzione permanente del 25% dei tassi di mortalità per ogni età.

Inoltre, il QIS4 propone alcune semplificazioni per il calcolo:

- Vi è la possibilità di considerare tutti gli assicurati presenti in portafoglio di età uguale o superiore a 60 anni.
- È possibile calcolare il requisito di capitale per il rischio longevità come segue:

$$Longevity\ Capital\ Requirement = 25\% \cdot q \cdot (1,1)^{(n-1)/2} \cdot n \cdot TP$$

Dove n è la durata modificata dei flussi di cassa relativi alle passività, q è il tasso medio di mortalità futuro e TP rappresenta le “technical provision for contracts subject to longevity risk”.

Dunque, nonostante la standard formula sia molto semplice da applicare e relativamente efficace, lo sviluppo di modelli interni, anche per gestire il longevity risk, rimane un obiettivo fondamentale. Modelli adeguati di pricing e di previsione della mortalità risultano indispensabili per una valutazione corretta del rischio insito nell’impresa in cui si svolge la valutazione interna. A tal proposito nel Capitolo 4 verrà esposto un modello di previsione utile anche nel pricing del longevity risk. Tale modello potrebbe essere sfruttato per ottenere risultati utili a un possibile calcolo della solvibilità e dei requisiti di capitale, grazie alla sua buona capacità di misurare gli effetti del rischio di longevità.

CAPITOLO 4

4.1 Demografia e finanza: un modello per il longevity risk

Nel Capitolo 2 sono stati analizzati in dettaglio i più importanti modelli per lo studio della mortalità, enunciando con precisione quali pregi e quali difetti può avere una certa impostazione rispetto alle altre. La conclusione a cui si era giunti è che il primo passo per comprendere l'evoluzione della mortalità è quello di capire a fondo le peculiarità del modello di previsione utilizzato, calibrandolo e applicandolo ai dati della realtà empirica.

Se la doverosa introduzione teorica viene contestualizzata in un ambito più pratico, è possibile notare come le imprese di assicurazioni vita e i fondi pensione utilizzino principalmente modelli deterministici basati sulle tavole di mortalità. Analizzando in modo critico questo tipo di impostazione, si può notare come tali tavole ipotizzino implicitamente che i futuri tassi di decesso siano conosciuti con certezza. Nel Capitolo 1 e in modo minore anche nei Capitoli 2 e 3, si è potuto constatare come i recenti sviluppi demografici avvenuti nel ventesimo secolo abbiano dimostrato come questo approccio sia inadeguato per gestire i fenomeni di mortality o longevity risk. La maggior parte dei più moderni studi empirici prospetta la necessità di una modellizzazione di tipo stocastico al fine di tenere in dovuta considerazione il rischio di longevità. In passato, infatti, i modelli deterministici non sono riusciti a prevedere con precisione il trend della mortalità.

Di recente, le imprese di assicurazione che operano nel ramo vita, i fondi pensione e, in generale, tutti i fornitori di prestazioni sottoforma di rendita sono sempre più preoccupati per la loro esposizione al rischio di mortalità e hanno bisogno di migliori strumenti di risk management per gestire l'incertezza del trend e della volatilità dei rischi che devono sopportare. La necessità più importante è rappresentata da una corretta integrazione tra modelli attuariali-demografici e modelli finanziari, al fine di migliorare il calcolo del capitale sotto rischio e il prezzo dei prodotti legati a fenomeni di mortalità.

Il modello che verrà di seguito esposto ha proprio l'obiettivo di soddisfare tali esigenze, utilizzando un'impostazione stocastica per l'analisi della mortalità. Inoltre, saranno descritte alcune proposte per un pricing e una valutazione delle riserve più adeguate, in riferimento ai prodotti strettamente influenzati dal longevity risk, cioè le rendite (in particolare quelle vitalizie).

4.1.1 Modello multivariato per la mortalità: impostazione teorica

In questo quarto capitolo verrà utilizzato un modello stocastico per il longevity risk calibrato sulla popolazione italiana di età compresa tra i 50 e i 99 anni riferita al periodo 1973-2006, costruito anche con finalità di pricing e di risk management. Tale impostazione permette di considerare opportunamente sia l'effetto età che l'effetto di coorte.

In particolare, le età al di sopra dei 55 anni sono estremamente importanti poiché rappresentano il periodo di vita in cui il longevity risk ha il maggior impatto demografico e finanziario. Le età oltre i 99 anni, invece, non vengono considerate proprio perché i dati a disposizione sono spesso molto scarsi e frammentati, tanto da poter influire negativamente sulla stabilità di una qualsiasi impostazione teorica. Praticamente nessun modello riesce a descrivere con approssimazione sufficiente una fascia d'età così estrema e dal basso peso relativo rispetto al totale della popolazione. A livello demografico, infatti, poco si conosce riguardo le dinamiche dei decessi oltre i 100 anni, a causa della forte instabilità degli andamenti della mortalità per gli ultracentenari. In accordo con gli autori del modello, quindi, si è deciso di mantenere come range di riferimento la fascia 50-99, così da ottenere un buon compromesso tra dati a disposizione e stabilità dell'applicazione empirica.

Entrando maggiormente nel dettaglio, il modello di riferimento è stato proposto da Wills S. e Sherris M. (2008) e presentato (nonché premiato) ufficialmente all'*AFIR 2008* (Actuarial Approach for Financial Risks). Si basa principalmente sull'impostazione già sviluppata da Dahl (2004) e Schrager (2006) e integra aspetti finanziari e demografici dei modelli per il longevity risk in un contesto di pricing e risk management. I trend demografici sono inseriti sfruttando le variazioni attese della mortalità, mentre tutte le età vengono rappresentate contemporaneamente attraverso molteplici fattori casuali. Il modello permette modifiche nella mortalità sia nel tempo che attraverso le diverse età. I fattori casuali, invece, hanno lo scopo di catturare la dipendenza tra le età. Infatti, dato che i miglioramenti della mortalità sono simili per individui con età simile e appartenenti alla stessa generazione, risulta importante studiare la cosiddetta "age dependence".

Il modello non è solamente ben descritto a livello teorico, ma è anche costruito in modo da poter essere immediatamente utilizzato per il pricing delle longevity-linked securities basate sui flussi di cassa di un portafoglio di rendite composto da soggetti di età differenti. In questo contesto, nella pratica, i cash-flow e i pagamenti vengono aggregati, risultando così influenzati dalla dipendenza fra le diverse età. A loro volta tali età vengono trattate singolarmente. Nel Capitolo 2 si era visto come molto spesso nell'ambito del pricing sia necessario l'utilizzo delle "real world probabilities"; di conseguenza, il modello deve poter permettere tale modifica per il calcolo del prezzo di rischio.

A livello generale, l'impostazione teorica¹² prende spunto dagli studi di Lee e Carter (1992), Dahl (2004) e Schrager (2006), definendo la forza di mortalità $\mu(x,t)$ per l'età x al tempo t con la seguente equazione:

$$\mu(x,t) = \mu(x,0)\exp[a + f(x) + g(t) + \sigma(x,t)W(x,t)] \quad [15]$$

¹² Le notazioni utilizzate per le formule descritte dal paragrafo 4.1.1 all'inizio del paragrafo 4.3 seguono l'impostazione teorica definita da Wills S. e Sherris M. (2008).

dove a è una costante, $f(x)$ una funzione deterministica delle età, $g(t)$ la funzione deterministica per il tempo, $\sigma(x,t)$ la funzione deterministica di volatilità riferita a tempo ed età e $W(x,t)$ un moto browniano (di dimensione infinita e per x continuo). Inoltre, per ogni specifico x_k è possibile scrivere:

$$\ln \left[\frac{\mu(x_k, t)}{\mu(x_k, 0)} \right] = [a + f(x_k) + g(t)]t + \sigma W(t)$$

Di conseguenza il tasso di cambiamento atteso riferito a $\mu(x,t)$, per ogni età, può essere espresso come la somma di: una costante a , una componente che varia con l'età, $f(x_k)$, e un fattore che varia con il tempo, $g(t)$. In particolare, $f(x_k)$ ha un significato simile al parametro di età del modello di Lee-Carter. Inoltre, la varianza al tempo t del tasso di cambiamento è rappresentata dalla quantità $\sigma^2 t$, indipendente dall'età e costante per singola unità di tempo.

Applicando in un ambito pratico questo modello, il primo ostacolo che si può incontrare deriva dal fatto che l'equazione [15] è di dimensione infinita. Il problema può essere ovviato considerando un vettore casuale multivariato di dimensione finita N riferito ai tassi di mortalità, per le età $x = x_1, \dots, x_N$, definito come:

$$\underline{\mu}(t) = \begin{bmatrix} \mu(x_1, t) \\ \vdots \\ \mu(x_N, t) \end{bmatrix}$$

Nello specifico, la dinamica di $\underline{d\mu}(t) = [d\mu(x_1, t), \dots, d\mu(x_N, t)]'$ è guidata dal processo di Wiener multivariato $\underline{dW}(t)$ con media 0 e matrice di varianza-covarianza istantanea Σ ; questo processo può essere rappresentato nel seguente modo:

$$\underline{dW}(t) = \begin{bmatrix} dW(x_1, t) \\ \vdots \\ dW(x_N, t) \end{bmatrix}$$

Inoltre, per impostare il modello in modo tale che ben si adatti alla simulazione e alla stima, il processo multivariato di Wiener $\underline{dW}(x, t)$ viene espresso con un vettore casuale N -dimensionale di processi di Wiener standard: $\underline{dZ}(t) = [dZ_1(t), \dots, dZ_N(t)]'$. Di conseguenza $dW(x, t)$ può essere definito come una combinazione lineare di $dZ(t)$ attraverso una matrice deterministica e costante tale per cui $\underline{dW}(x, t) = D \underline{dZ}(t)$, dove:

$$D = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{N1} & \cdots & \delta_{NN} \end{bmatrix}$$

e ogni elemento di $\underline{dW}(x, t)$ sarà dato da:

$$dW(x, t) = \sum_{i=1}^N \delta_{xi} dZ_i(t), \quad x = x_1, \dots, x_N$$

Per quanto riguarda la matrice D , invece, ciascuna riga avrà la seguente lunghezza:

$$\|\delta_x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N \delta_{xi}^2} = 1 \quad \forall x$$

mentre l'elemento di posto (n,m) della matrice di covarianza Σ viene definito come:

$$Cov[dW(x_n, t), dW(x_m, t)] = \left[\sum_{i=1}^N \delta_{ni} \delta_{im} \right] Var[dZ_i(t)] = \sum_{i=1}^N \delta_{ni} \delta_{im} dt$$

A sua volta Σ può essere scritta nel seguente modo:

$$\Sigma = (D\sqrt{dt})(D\sqrt{dt})' = R_{\Sigma} dt$$

dove R_{Σ} è la matrice di correlazione associata a Σ e D è la decomposizione di Cholesky¹³ di Σ .

4.1.2 Parametrizzazione del modello

Dopo la doverosa introduzione di carattere generale sul modello multivariato per la mortalità, è necessario entrare nell'analisi in modo più specifico.

Al fine di dare un'impostazione parametrica al modello, Wills S. e Sherris M. hanno fatto riferimento agli studi eseguiti da Cairns et. al. (2007), Renshaw e Haberman (2006) e JP Morgan (2007). In particolare, l'equazione [15] viene riscritta come segue:

$$d\mu(x, t) = [a(x + t) + b]\mu(x, t)dt + \sigma\mu(x, t)dW(x, t) \quad \forall x \quad [16]$$

Questa espressione permette di rappresentare un modello avente come parametro di drift una funzione che dipende dall'età corrente $(x+t)$. La percentuale di volatilità, invece, è una costante, σ , tale per cui la variabilità di $d\mu(x,t)$ aumenta al crescere di $\mu(x,t)$. Inoltre, il processo risulta maggiormente variabile per valori elevati di x e di t , in conseguenza del fatto che $\mu(x,t)$ è una funzione crescente rispetto all'età corrente $(x+t)$. In questo caso il fenomeno della mean reversion (v. Capitolo 2) non viene considerato, poiché i cambiamenti nella longevità non portano a un ritorno verso una media di lungo periodo. Quest'ultima scelta è coerente con il modello di longevità definito da Liao, Yang e Huang (2007) e i loro studi riguardo il longevity risk.

¹³ In algebra lineare la decomposizione di Cholesky è la fattorizzazione di una matrice hermitiana definita positiva in una matrice triangolare inferiore e nella sua trasposta coniugata. A livello teorico, sia A una matrice quadrata hermitiana definita positiva sul campo K . Tale matrice A può essere decomposta come: $A = LL^+$ ($A \in K^{m \times m}$), con L la matrice triangolare inferiore con elementi diagonali positivi e L^+ la matrice coniugata trasposta di L . Se la matrice A è reale e simmetrica, la coniugata trasposta di L coincide con la trasposta e la decomposizione si semplifica: $A = LL^T$ ($A \in R^{n \times n}$).

Il modello definito dall'espressione [16] può anche essere riscritto come un sistema di equazioni, attraverso la seguente relazione:

$$d\mu(x, t) = [a(x + t) + b]\mu(x, t)dt + \sigma\mu(x, t) \sum_{i=1}^N \delta_{x,i} dZ_i(t)$$

per $x = x_1, \dots, x_N < \omega$, dove la dipendenza tra le diverse età è espressa dai termini $\delta_{x,i}$.

4.1.3 Misura di prezzo risk adjusted

Il modello esposto nei paragrafi precedenti può essere utilizzato anche per prezzare i prodotti legati alla mortalità, detti anche mortality-linked securities. Quest'ulteriore applicazione è stata presa in considerazione da molti studi nell'ambito assicurativo-demografico, come per esempio nelle analisi di Dahl (2004), Dahl e Møller (2005) e Cairns et al. (2006a).

Per introdurre questa nuova e utile funzione del modello è necessario definire la dinamica della mortalità in relazione a un'equivalente misura di probabilità risk-adjusted (detta anche misura di mercato Q , v. Capitolo 2). Attraverso questa nuova assunzione, il processo di mortalità non può più essere considerato come una martingala, mentre è da notare come tale proprietà venga conservata dal processo riferito al prezzo di ogni security. Inoltre, è importante specificare che la scelta di una misura risk-adjusted per la mortalità può non essere unica, poiché il mercato del longevity risk è attualmente ancora incompleto (v. paragrafo 3.5.2).

Richiamando la precedente impostazione teorica, si ricorda che il tasso di mortalità per l'età x , $\mu(x, t)$, segue il processo di diffusione stocastica descritto nell'equazione [16]:

$$d\mu(x, t) = [a(x + t) + b]\mu(x, t)dt + \sigma\mu(x, t)dW(x, t)$$

$$dW(x, t) = \sum_{i=1}^N \delta_{x,i} dZ_i(t)$$

definito nello spazio probabilistico (Ω, \mathcal{F}, P) , dove P è la misura di probabilità "real world" (cioè riferita alla realtà empirica, v. Capitolo 2).

Considerando le implicazioni del teorema di Cameron-Martin-Girsanov¹⁴, il processo $dW(x, t)$ analizzato congiuntamente a una misura di probabilità risk-adjusted Q viene definito come:

$$dW^Q(x, t) = \sum_{i=1}^N \delta_{x,i} [dZ_i(t) + \lambda_i(t)dt] = dW(x, t) + \sum_{i=1}^N \delta_{x,i} \lambda_i(t)dt$$

¹⁴ Il teorema di Cameron-Martin-Girsanov si occupa di come un processo stocastico si modifichi in conseguenza a un cambio di misure di probabilità. Per ulteriori esempi si veda Cairns (2004).

Riscrivendo l'equazione in termini vettoriali, si ottiene:

$$dW^Q(t) = dW(t) + D\underline{\lambda}(t)dt$$

dove $\underline{\lambda}(t) = [\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t)]'$.

Di conseguenza, la dinamica della mortalità per una specifica età x e in riferimento alla misura risk-adjusted Q può essere espressa nel seguente modo:

$$\begin{aligned} d\mu^Q(x, t) &= [a(x + t) + b]\mu^Q(x, t)dt + \sigma\mu^Q(x, t)dW^Q(x, t) = \\ &= [a(x + t) + b]\mu^Q(x, t)dt + \sigma\mu^Q(x, t) \left(dW(x, t) + \sum_{i=1}^N \delta_{x,i}\lambda_i(t)dt \right) = \\ &= \left[a(x + t) + b + \sum_{i=1}^N \delta_{x,i}\lambda_i(t)dt \right] \mu^Q(x, t)dt + \sigma\mu^Q(x, t)dW(x, t) \end{aligned}$$

Quest'ultimo risultato è dunque molto simile al processo originale riferito alla misura P , con un aggiustamento per il drift pari a $\sum_{i=1}^N \delta_{x,i}\lambda_i(t)$ espresso in termini additivi.

È importante precisare come nella realtà la scelta di Q e quindi di $\underline{\lambda}$ non sia unica e può essere ricavata dalle funzioni di utilità di equilibrio del mercato, come per esempio viene fatto da Cox et al. (1985). In alternativa è possibile utilizzare i dati riferiti ai prezzi dei prodotti assicurativi per stimare il prezzo di rischio del mercato.

4.2 Applicazione pratica: dati di base e metodologia

In questo paragrafo il modello descritto teoricamente in precedenza viene applicato alla popolazione italiana, utilizzando i dati ottenuti dallo Human Mortality Database. Le età considerate per lo studio vanno dai 50 anni sino ai 99, in un orizzonte temporale di 33 anni dal 1973 al 2006. La scelta è dovuta al fatto che queste annualità permettono di rispecchiare al meglio la composizione media di un portafoglio di rendite.

Inizialmente vengono raccolti e ordinati i dati relativi al numero di decessi e agli esposti al rischio, permettendo un immediato calcolo dei tassi centrali di decesso riferiti all'anno t per i soggetti di età iniziale x , attraverso la seguente formula (v. Capitolo 2):

$$m_c(x, t) = \frac{D(x, t)}{E(x, t)} = \frac{\text{numero di decessi ad età } x \text{ nell'anno di calendario } t}{\text{esposti al rischio di età } x \text{ nell'annodi calendario } t}$$

Questi valori possono essere ricavati dalle tavole di mortalità di periodo (v. Capitolo 1 per la definizione di tavole di periodo), oppure calcolati direttamente dai dati grezzi eseguendo il rapporto tra il numero di decessi e gli esposti al rischio.

In questa applicazione si è preferita la seconda soluzione poiché bisogna sempre ricordare che le tavole di mortalità sono anch'esse un modello e, in quanto tali, sono una rappresentazione astratta e schematica della realtà empirica. Proprio per questo motivo è possibile riscontrare approssimazioni nei calcoli che, lavorando con probabilità comprese tra 0 e 1, potrebbero influire sulla successiva analisi. Dunque, in questo studio si è optato per il calcolo dei tassi centrali di decesso partendo dai dati grezzi, senza affidarsi ciecamente ai valori delle diverse tavole.

Il passo successivo è calibrare il modello, cioè calcolarne i parametri in modo tale da renderlo il più possibile adatto ai dati di partenza. Per fare ciò è necessario stimare la forza di mortalità $\hat{\mu}(x, t)$. Nell'ipotesi in cui tale forza di mortalità rimanga costante per valori interi di età e anni di calendario, si ottiene che:

$$\mu(x + u, t + s) = \mu(x, t)$$

Questa uguaglianza vale, quindi, per valori interi di x , t e per $0 \leq (s, u) \leq 1$. Ne consegue che la popolazione a tutte le età rimane costante per tutti gli anni di calendario, quindi si può definire la seguente identità:

$$\hat{\mu}(x, t) = m_c(x, t)$$

Al fine di fornire una prima evidenza grafica, nelle Figure 18 e 19 sono riportati i tassi di decesso centrali della popolazione italiana maschile e femminile. Le Figure 20 e 21, invece, contengono la rappresentazione dei logaritmi dei vari $m_c(x, t)$ per evidenziare l'andamento logaritmico.

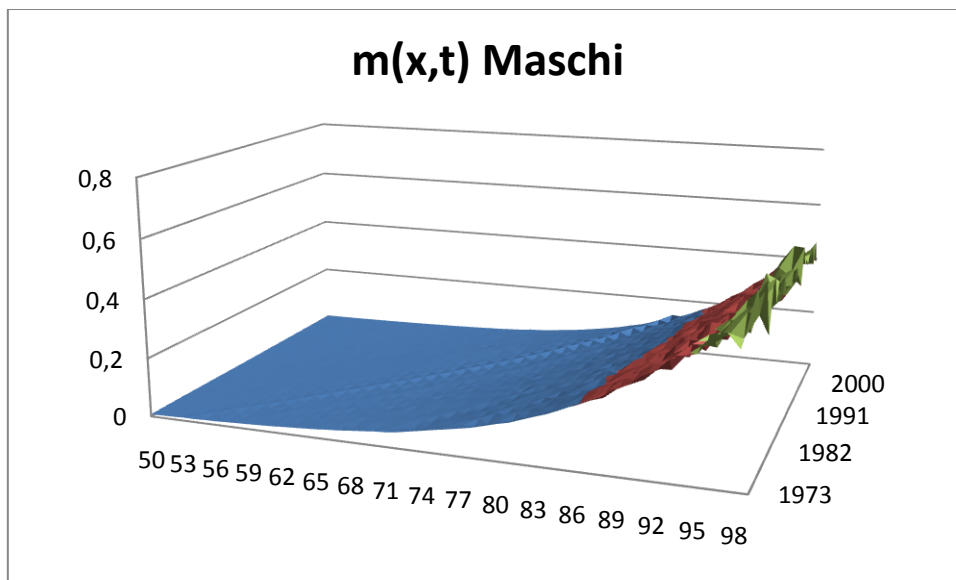


Figura 18

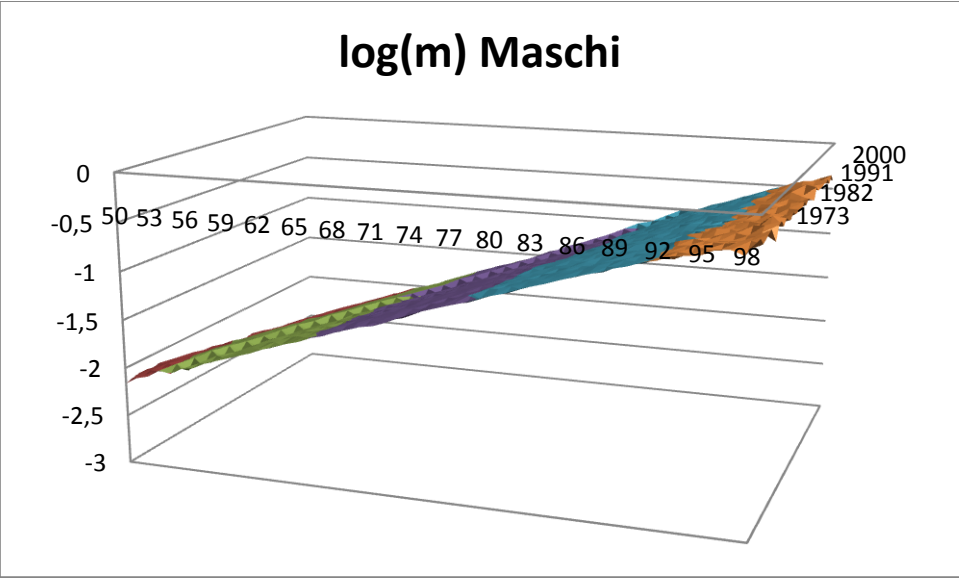


Figura 19

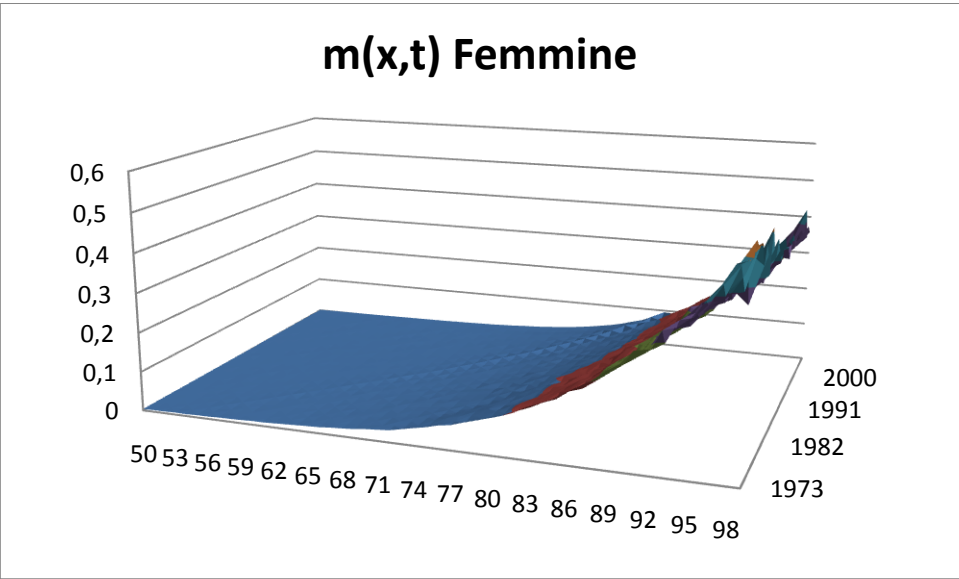


Figura 20

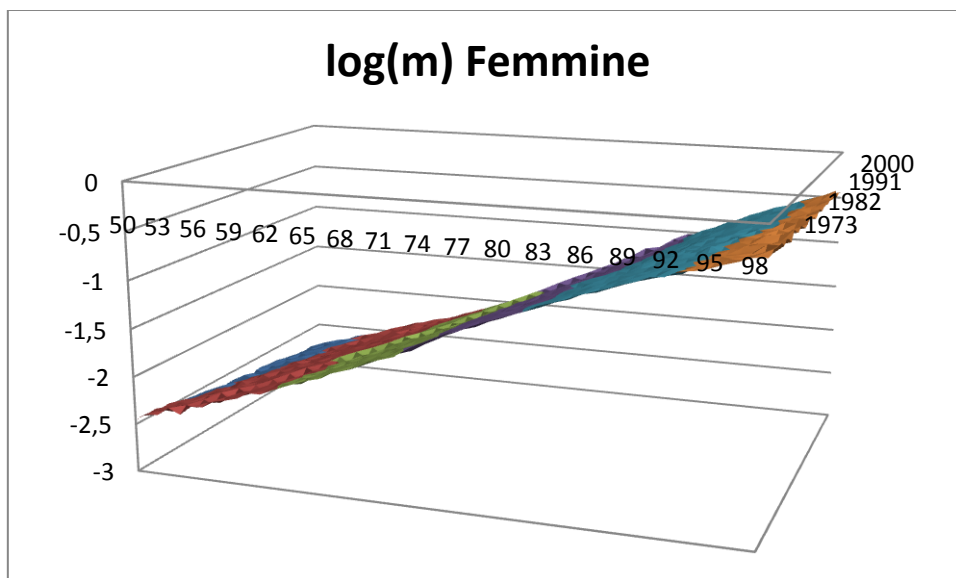


Figura 21

A livello tridimensionale è più complesso constatare a prima vista l'evoluzione della mortalità nel tempo, ma questi grafici non sono altro che l'evoluzione di quelli riportati nel Capitolo 1 (con riferimento agli anni 1973-2006). I commenti sono dunque gli stessi: si evidenzia un notevole abbattimento delle probabilità di decesso a tutte le età con una forte crescita del fenomeno della longevità.

Un'osservazione più tecnica riguarda invece l'andamento dei logaritmi dei tassi centrali di decesso. Si nota infatti un drift lineare nella loro evoluzione, e si confermano così in modo consistente le ipotesi che stanno alla base della parametrizzazione del modello.

Proseguendo nei calcoli, dalle stime di $\hat{\mu}(x, t)$ è possibile ricavare l'evolversi della forza di mortalità, $\Delta\hat{\mu}(x, t)$, in questo modo:

$$\Delta\hat{\mu}(x, t) = \hat{\mu}(x + 1, t + 1) - \hat{\mu}(x, t) \quad [17]$$

La matrice annuale è data dunque da:

$$\Delta\hat{\mu}(x, t) = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_{51,1974} & \cdots & \hat{\mu}_{51,2006} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mu}_{99,1974} & \cdots & \hat{\mu}_{99,2006} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\mu}_{50,1973} & \cdots & \hat{\mu}_{50,2005} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mu}_{98,1973} & \cdots & \hat{\mu}_{98,2005} \end{bmatrix}$$

I parametri del modello vengono stimati usando i dati della popolazione italiana a disposizione, permettendo di definire tutti gli elementi del vettore $\underline{\Delta\mu}(t)$.

4.2.1 Stima dei parametri e massima verosimiglianza

Una volta raccolti e organizzati i dati necessari all'analisi è possibile stimare i parametri del modello, così da ottenere i tre valori fondamentali su cui si fonderanno le successive considerazioni.

In questo contesto il metodo della massima verosimiglianza viene utilizzato per stimare i suddetti parametri del processo $d\mu(x, t)$. Quest'ultimo viene definito come:

$$d\mu(x, t) = [a(x + t) + b]\mu(x, t)dt + \sigma\mu(x, t)dW(t)$$

Dalle assunzioni del modello si ha che:

$$\Delta\mu \sim N\{[a(x + t) + b]\mu, \sigma\mu\}$$

Di conseguenza la funzione di log-verosimiglianza ha la seguente forma:

$$l(d\hat{\mu} | a, b, \sigma) = - \sum_{all\ x,t} \ln(\sigma\hat{\mu}\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2} \sum_{all\ x,t} \left\{ \frac{(\Delta\hat{\mu}/\hat{\mu}) - [a(x + t) + b]}{\sigma} \right\}^2$$

In questo caso si assume l'ipotesi di indipendenza e identica distribuzione (i.i.d.) del campione di dati, condizionatamente all'utilizzo di a , b e σ . La funzione di log-verosimiglianza deve essere successivamente derivata per ciascun parametro.

Rispetto ad a si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial a} &= \sum_{all\ x,t} \left\{ \frac{(\Delta\hat{\mu}/\hat{\mu}) - [a(x + t) + b]}{\sigma} \right\} \frac{(x + t)}{\sigma} \\ 0 &= \frac{1}{\sigma^2} \left[\sum_{all\ x,t} \frac{\Delta\hat{\mu}(x + t)}{\hat{\mu}} - \hat{a} \sum_{all\ x,t} (x + t)^2 - \hat{b} \sum_{all\ x,t} (x + t) \right] \end{aligned}$$

Derivando rispetto a b si ha invece che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial b} &= \sum_{all\ x,t} \left\{ \frac{(\Delta\hat{\mu}/\hat{\mu}) - [a(x + t) + b]}{\sigma} \right\} \frac{1}{\sigma} \\ 0 &= \frac{1}{\sigma^2} \left[\sum_{all\ x,t} \frac{\Delta\hat{\mu}}{\hat{\mu}} - \hat{a} \sum_{all\ x,t} (x + t) - \hat{b}(NxT) \right] \end{aligned}$$

dove $(N \times T)$ rappresenta il numero di osservazioni di $d\hat{\mu}$ riferito alle N età e ai T anni di calendario.

Infine, derivando rispetto a σ si ricava:

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma} = -\frac{(NxT)}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{all\ x,t} \{(\Delta\hat{\mu}/\hat{\mu}) - [a(x + t) + b]\}^2$$

$$\frac{(NxT)}{\hat{\sigma}} = \frac{1}{\hat{\sigma}^3} \sum_{all\ x,t} \{(\Delta\hat{\mu}/\hat{\mu}) - [\hat{a}(x+t) + \hat{b}]\}^2$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{all\ x,t} \{(\Delta\hat{\mu}/\hat{\mu}) - [\hat{a}(x+t) + \hat{b}]\}^2}{(NxT)}}$$

Ottenuto di conseguenza un sistema di tre equazioni in tre incognite, la soluzione sarà unica. Quindi, risolvendo simultaneamente tali equazioni finali rispetto a ogni parametro, si ottengono le stime di massima verosimiglianza per a , b e σ . Nella successiva tabella sono riassunti i risultati per maschi e femmine riferiti alla popolazione italiana descritta in precedenza (SMV = Stima di Massima Verosimiglianza).

Parametro	SMV: Maschi	SMV: Femmine
\hat{a}	-8,8E-05	0,000378
\hat{b}	0,260138	-0,69116
$\hat{\sigma}$	0,044266	0,048629

Una volta stimati i tre parametri del modello, è importante verificare se il livello di confidenza a essi associato è tale da considerare i risultati ottenuti coerenti con l'analisi. Per fare ciò è necessario costruire la matrice di varianza-covarianza asintotica di tali stime.

Innanzitutto si ricordi che la distribuzione campionaria delle stime di massima verosimiglianza \underline{p} è asintoticamente distribuita come una normale, con media pari a $\bar{\underline{p}}$ e varianza espressa come:

$$Var(\underline{p}) = 1/nI(\bar{\underline{p}}) \quad [18]$$

dove $\bar{\underline{p}}$ è il vettore dei veri parametri. Questa varianza è calcolata utilizzando l'approssimazione $I(\bar{\underline{p}}) = I(\underline{p})$. Il numero di osservazioni è indicato da $n = 1617$. In particolare $I(\underline{p})$ è ottenuta stressando (shocking) i parametri e valutando il cambiamento in $\frac{\partial}{\partial p_i} \log L(X|\underline{p})$ per ogni p_i . È importante notare come $\underline{p} = [p_1, \dots, p_n]'$ sia il vettore delle stime di massima verosimiglianza per il dataset X , con $I(\underline{p})$ la matrice in cui la ij -esima componente può essere scritta come:

$$I(\underline{p})_{ij} = -E \left[\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \log L(X|\underline{p}) \right] \quad [19]$$

dove $L(X|\underline{p})$ è la funzione di verosimiglianza di X condizionata ai parametri \underline{p} .

In pratica, per giungere alla costruzione della matrice di varianza-covarianza asintotica, è necessario innanzitutto ricavare tutte le derivate seconde della log-verosimiglianza.

Rispetto al parametro a si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 l}{\partial a^2} &= -\frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{all\ x,t} (x+t)^2 \\ \frac{\partial^2 l}{\partial a \partial b} &= -\frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{all\ x,t} (x+t) \\ \frac{\partial^2 l}{\partial a \partial \sigma} &= -\frac{2}{\hat{\sigma}^3} \left[\sum_{all\ x,t} \frac{\Delta \hat{\mu}(x+t)}{\hat{\mu}} - \hat{a} \sum_{all\ x,t} (x+t)^2 - \hat{b} \sum_{all\ x,t} (x+t) \right]\end{aligned}$$

Per il parametro b si hanno i seguenti risultati:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 l}{\partial b^2} &= -\frac{1}{\hat{\sigma}^2} (NxT) \\ \frac{\partial^2 l}{\partial b \partial a} &= -\frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{all\ x,t} (x+t) \\ \frac{\partial^2 l}{\partial b \partial \sigma} &= -\frac{2}{\hat{\sigma}^3} \left[\sum_{all\ x,t} \frac{\Delta \hat{\mu}}{\hat{\mu}} - \hat{a} \sum_{all\ x,t} (x+t) - \hat{b}(NxT) \right]\end{aligned}$$

Infine, per σ le derivate seconde risultano pari a:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 l}{\partial \sigma^2} &= \frac{(NxT)}{\hat{\sigma}^2} - \frac{3}{\hat{\sigma}^4} \sum_{all\ x,t} \left[\frac{\Delta \hat{\mu}}{\hat{\mu}} - \hat{a}(x+t) - \hat{b} \right]^2 \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \sigma \partial a} &= -\frac{2}{\hat{\sigma}^3} \left[\sum_{all\ x,t} \frac{\Delta \hat{\mu}(x+t)}{\hat{\mu}} - \hat{a} \sum_{all\ x,t} (x+t)^2 - \hat{b} \sum_{all\ x,t} (x+t) \right] \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \sigma \partial b} &= -\frac{2}{\hat{\sigma}^3} \left[\sum_{all\ x,t} \frac{\Delta \hat{\mu}}{\hat{\mu}} - \hat{a} \sum_{all\ x,t} (x+t) - \hat{b}(NxT) \right]\end{aligned}$$

Come controprova della correttezza dei calcoli è possibile notare come le derivate miste risultino uguali, rispecchiando le proprietà di una qualsiasi matrice di varianza-covarianza.

Il passo successivo è applicare la media a questi risultati, per poi calcolare la matrice $I(\underline{p})$ e giungere infine alla matrice asintotica desiderata.

Nello specifico, ricordando che:

$$\Delta \mu \sim N\{[a(x+t) + b]\mu, \sigma \mu\}$$

e richiamando l'espressione [19], $I(\underline{p})$ è costruita in questo modo:

$I(\underline{p})$	a	b	σ
a	$\frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{all\ x,t} (x+t)^2$	$\frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{all\ x,t} (x+t)$	-
b	$\frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{all\ x,t} (x+t)$	$\frac{1}{\hat{\sigma}^2} (NxT)$	-
σ	-	-	$-\frac{(NxT)}{\hat{\sigma}^2} + \frac{3}{\hat{\sigma}^4} [(NxT)\hat{\sigma}^2]$

Da cui, tramite l'uguaglianza [18], è possibile giungere alla matrice di varianza-covarianza asintotica espressa come:

Matr. var-cov	a	b	σ
a	$\frac{1}{n \left[\frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{all\ x,t} (x+t)^2 \right]}$	$\frac{1}{n \left[\frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{all\ x,t} (x+t) \right]}$	-
b	$\frac{1}{n \left[\frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{all\ x,t} (x+t) \right]}$	$\frac{1}{n \left[\frac{1}{\hat{\sigma}^2} (NxT) \right]}$	-
σ	-	-	$\frac{1}{n \left[\frac{2(NxT)}{\hat{\sigma}^2} \right]}$

A questo punto non resta che applicare tali formule ai dati della popolazione italiana analizzata e constatare se i valori risultano prossimi a 0. L'evidenza empirica restituisce i seguenti risultati:

Maschi	a	b	σ
a	1,76077E-16	3,63271E-13	-
b	3,63271E-13	7,49428E-10	-
σ	-	-	3,74714E-10

Femmine	a	b	σ
a	2,12493E-16	4,38403E-13	-
b	4,38403E-13	9,04426E-10	-
σ	-	-	4,52213E-10

Per entrambi i sessi i valori sono molto piccoli, a prova del fatto che si riscontra un alto livello di confidenza nelle stime dei parametri. Questo dimostra che i calcoli effettuati sono molto veritieri e rispecchiano (secondo il modello) la realtà empirica analizzata.

4.2.2 Struttura di dipendenza e analisi delle componenti principali

Dopo aver ottenuto i tre parametri di riferimento, è importante studiare la struttura di dipendenza del modello ed effettuare l'analisi delle componenti principali al fine di verificare quali sono le età con maggior peso statistico. Tutto ciò sarà importante nella trattazione teorica della simulazione proposta dagli autori (v. paragrafo 4.3).

In particolare, la dipendenza riferita al processo di mortalità $\underline{d\mu}(t)$ deriva dalla dipendenza che caratterizza il processo multivariato di Wiener:

$$\underline{dW}(t) = \begin{bmatrix} dW(x_1, t) \\ \vdots \\ dW(x_N, t) \end{bmatrix}$$

Come ipotesi di base il modello assume che i $\underline{dW}(t)$ siano indipendenti nei diversi istanti temporali, ma all'interno di uno stesso lasso di tempo, $\underline{dW}(t)$ incorpora la dipendenza tra ogni età $x = x_1, \dots, x_N$. Per stimare tale dipendenza, vengono calcolati dal modello i residui standardizzati attraverso le stime di massima verosimiglianza dei tre parametri. Questi residui possono essere scritti come:

$$r(x, t) = \{[\Delta\hat{\mu}(x, t)/\hat{\mu}(x, t)] - [\hat{a}(x + t) + \hat{b}]\}/\hat{\sigma} \quad [20]$$

I valori dei residui standardizzati ottenuti per ogni anno sono realizzazioni del vettore casuale $\underline{dW}(t)$. A loro volta, gli $r(x, t)$ sono utilizzati per stimare la matrice di covarianza campionaria $\hat{\Sigma}$ di $\underline{dW}(t)$. Inoltre, i residui sono congiuntamente distribuiti come una normale multivariata del tipo:

$$\underline{dW}(t) \sim M.V.N. (0, \Sigma)$$

dove *M.V.N.* significa "multivariate normal", cioè "distribuzione normale multivariata", mentre Σ è l'associata matrice di covarianza $N \times N$ semi-definita positiva.

Dopo queste premesse e dopo aver calcolato i residui, viene eseguita l'analisi delle componenti principali (PCA, principal component analysis) proprio su questi residui standardizzati.

In generale, l'analisi delle componenti principali (detta anche *PCA* oppure *CPA*) è una tecnica utilizzata nell'ambito della statistica multivariata per la semplificazione dei dati d'origine. Lo scopo primario di questa tecnica è la riduzione di un numero più o meno elevato di variabili (che rappresentano altrettante caratteristiche del fenomeno analizzato) in alcune variabili latenti. Ciò avviene tramite una trasformazione lineare delle variabili che proietta quelle originarie in un nuovo sistema cartesiano nel quale vengono ordinate in ordine decrescente di varianza: pertanto, la variabile con maggiore varianza viene proiettata sul primo asse, la seconda sul secondo asse e così via. La riduzione della complessità avviene limitandosi ad analizzare le principali (per varianza) tra le nuove variabili. Diversamente da altre trasformazioni (lineari) di variabili praticate nell'ambito della statistica, in questa tecnica sono gli stessi dati che determinano i vettori di trasformazione.

La PCA è una tecnica statistica usata in molti ambiti: nell'astronomia, nella medicina, in campo agro-alimentare, ecc., fin anche alla compressione di immagini; questo perché quando ci si trova a semplificare un problema, riducendo la dimensione dello spazio di rappresentazione, si ha allo stesso tempo una perdita dell'informazione contenuta nei dati originali. La PCA consente di controllare egregiamente il "trade-off" tra la perdita di informazioni e la semplificazione del problema; basterà scegliere il numero appropriato di autovettori.

Nello specifico caso del modello analizzato, la PCA fornisce un metodo per creare campioni casuali formati da vettori casuali correlati. Tali campioni sono definiti in modo tale da avere le stesse proprietà di covarianza del dataset osservato.

Innanzitutto si definisca $\underline{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_N]'$ come il vettore degli autovalori di Σ ordinati dal più grande al più piccolo: $\theta_1 \geq \dots \geq \theta_N$. Di conseguenza, i corrispondenti autovettori sono dati dalla matrice $V = [V_1, \dots, V_N]$, tale per cui:

$$\Sigma V = VT \Rightarrow \Sigma = VTV'$$

dove T è la matrice diagonale $N \times N$ con la diagonale formata da $\underline{\theta}$. Il termine $(V\sqrt{T})$ è la decomposizione di Cholesky relativa alla matrice Σ , che permette di ottenere la seguente uguaglianza:

$$V\sqrt{T} = D\sqrt{dt}$$

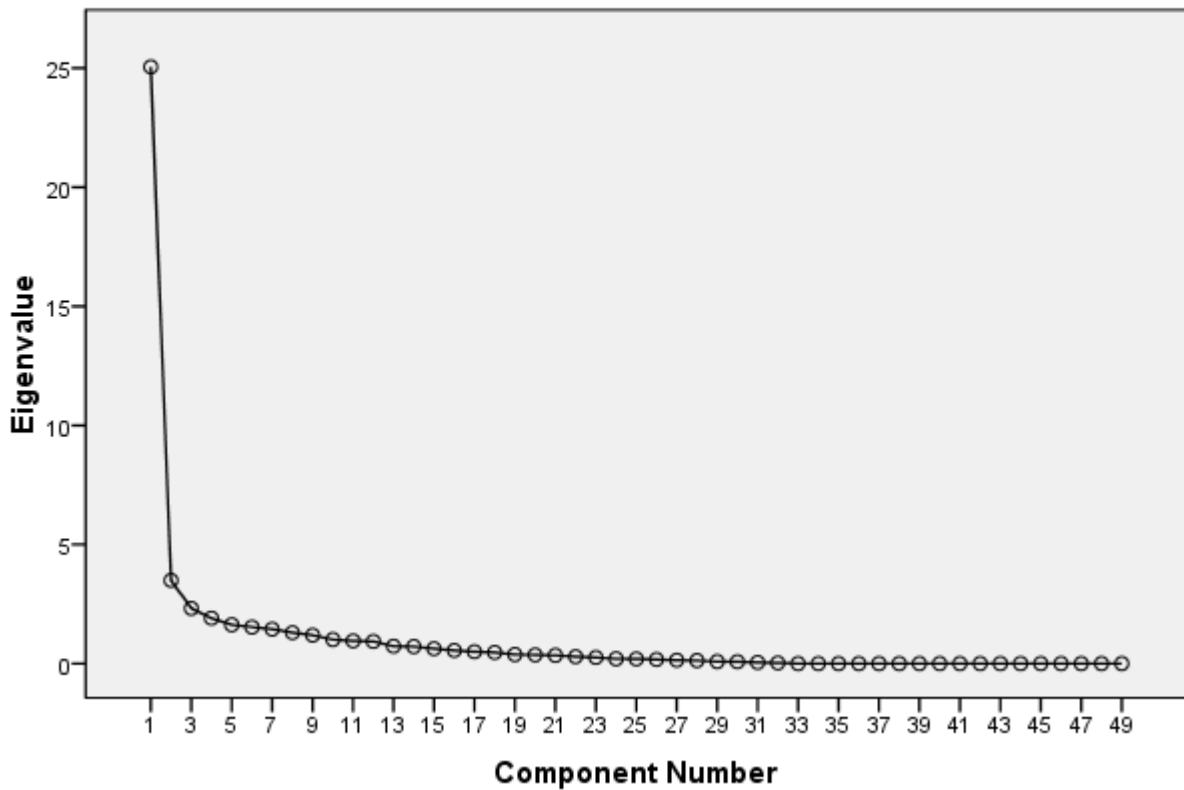
Tutti questi risultati saranno importanti nella definizione dell'impostazione teorica riferita alla simulazione e alla proiezione proposta dagli autori del modello (v. paragrafo 4.3).

Giunti a questo punto, è possibile trattare la realtà empirica. La matrice di correlazione osservata $\hat{\Sigma}$ presenta un totale di 49 autovettori. Utilizzando un qualsiasi software statistico che preveda l'analisi delle componenti principali, è possibile giungere ai risultati desiderati. In questo caso il supporto è rappresentato dal programma *SPSS*, che grazie alla sua specifica funzione per l'applicazione della PCA restituisce le seguenti tabelle e i grafici scree-plot.

Total Variance Explained (Maschi)

Component	Initial Eigenvalues		
	Total	% of Variance	Cumulative %
1	25,054	51,131	51,131
5	1,626	3,319	70,186
10	1,007	2,054	83,382
15	0,621	1,268	91,425
20	0,364	0,743	96,017
25	0,192	0,393	98,633
30	0,075	0,154	99,844
31	0,049	0,1	99,944
32	0,028	0,056	100

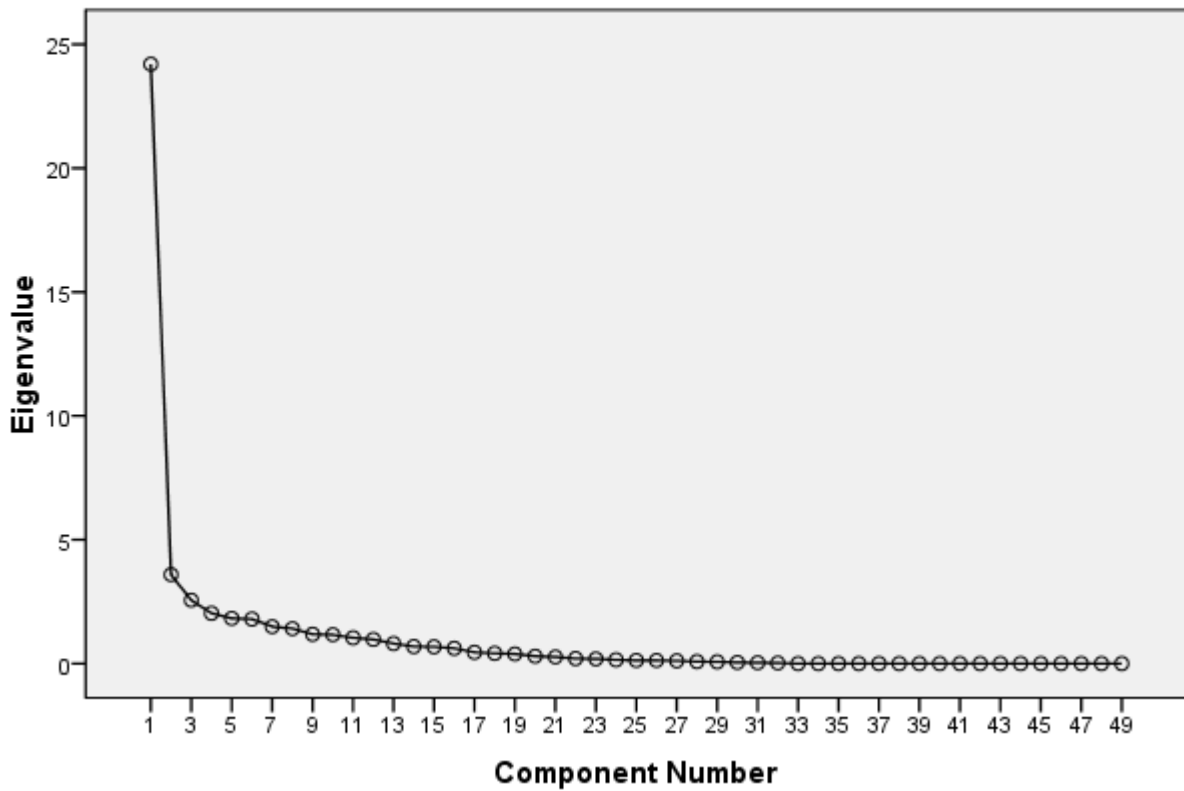
Scree Plot



Total Variance Explained (Femmine)

Component	Initial Eigenvalues		
	Total	% of Variance	Cumulative %
1	24,201	49,39	49,39
5	1,823	3,72	69,793
10	1,163	2,373	84,162
15	0,677	1,381	92,693
20	0,297	0,607	97,113
25	0,126	0,258	99,014
30	0,045	0,091	99,884
31	0,033	0,068	99,952
32	0,024	0,048	100

Scree Plot



A livello teorico è importante richiamare i tre Criteri Euristici per la determinazione del numero di componenti principali in grado di rappresentare in modo esaustivo i dati nell'ambito della PCA. Tali criteri sono:

- *Primo*: si sceglie un numero di componenti principali pari al numero di autovalori che riescono a ricoprire l'80-90% della variabilità totale.
- *Secondo*: si considerano gli autovalori con valore maggiore di 1 secondo la regola di Kaiser (v. colonna "Total" della tabella "Total Variance Explained").
- *Terzo*: si utilizzano gli autovalori in corrispondenza dei quali si ha un brusco cambiamento di pendenza.

Come si può notare dai risultati, nonostante le componenti totali siano 49, già in corrispondenza della componente numero 32 la percentuale cumulativa di varianza raggiunge il 100%. Analizzando invece lo scree-plot, è evidente come il brusco cambiamento della curva si abbia praticamente dopo la prima componente; tutto ciò conferisce a quest'ultima un'enorme importanza nella spiegazione del processo di mortalità. L'evidenza empirica porta alla conclusione che, in entrambi i casi, gli autovettori (ordinati) riferiti alle 32 età riassumono l'intera varianza. Inoltre, il 90% della varianza è già ottenibile prima della quindicesima componente, mentre gli autovalori con valore maggiore di uno sono i primi 10.

È possibile altresì confrontare i risultati sopra citati con quelli ottenuti applicando la PCA a un modello molto usato negli studi empirici. Infatti, l'analisi delle componenti principali viene anche utilizzata per determinare i coefficienti β_x e k_t del modello Lee-Carter (v. Capitolo 2). In quest'ultimo contesto si riscontra solitamente che i primi 6 fattori risultano sufficienti per spiegare la variabilità del processo di mortalità, con il 90% di essa ricompresa dal primo fattore. Tale esito deriva dal fatto che non viene considerato alcun trend e non vengono esaminati i cambiamenti riferiti ai residui standardizzati. Il modello di Wills S. e Sherris M. utilizzato in questa applicazione empirica, invece, è fortemente basato sui residui standardizzati, includendo un trend legato al tempo e utilizzando la stima di massima verosimiglianza dei parametri per standardizzare tali residui. Proprio per questi motivi, i fattori significativi sono in numero maggiore e l'effetto totale risulta più complesso.

4.2.3 Analisi dell'adattamento

Uno dei principali pregi di un modello è proprio quello di fornire un buon adattamento ai dati osservati.

L'analisi empirica effettuata mostra ottimi risultati rispetto alla popolazione italiana ricompresa nel range di età $x = 50, \dots, 99$ e negli anni di calendario $t = 1973, \dots, 2006$. Lo studio riguardo l'adattamento è basato sui residui standardizzati del modello, definiti dall'equazione [20].

Come assunto di base, l'analisi considera tali residui normalmente distribuiti con media pari a 0 e varianza pari a 1. Le Figure 22 e 23 riportano graficamente l'andamento complessivo dei residui standardizzati.

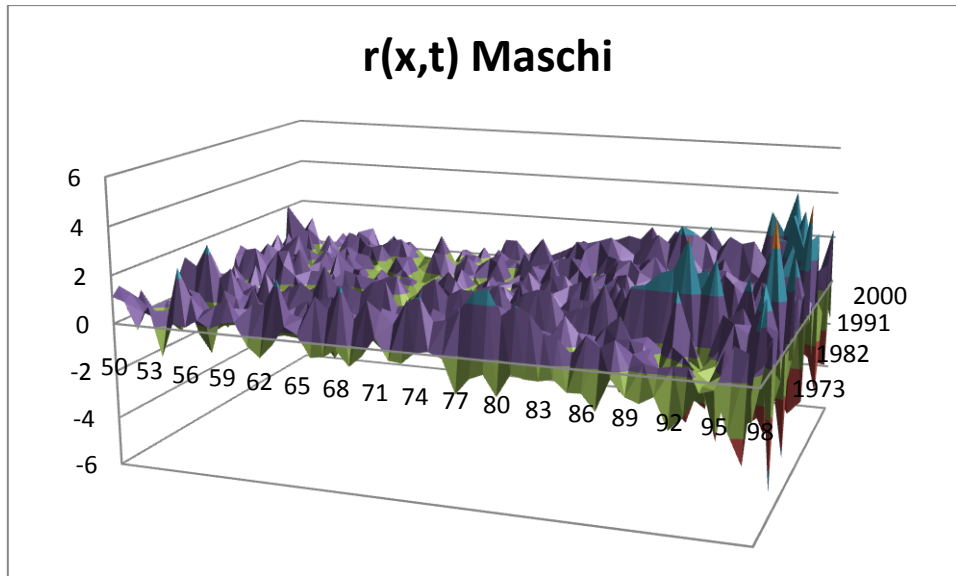


Figura 22

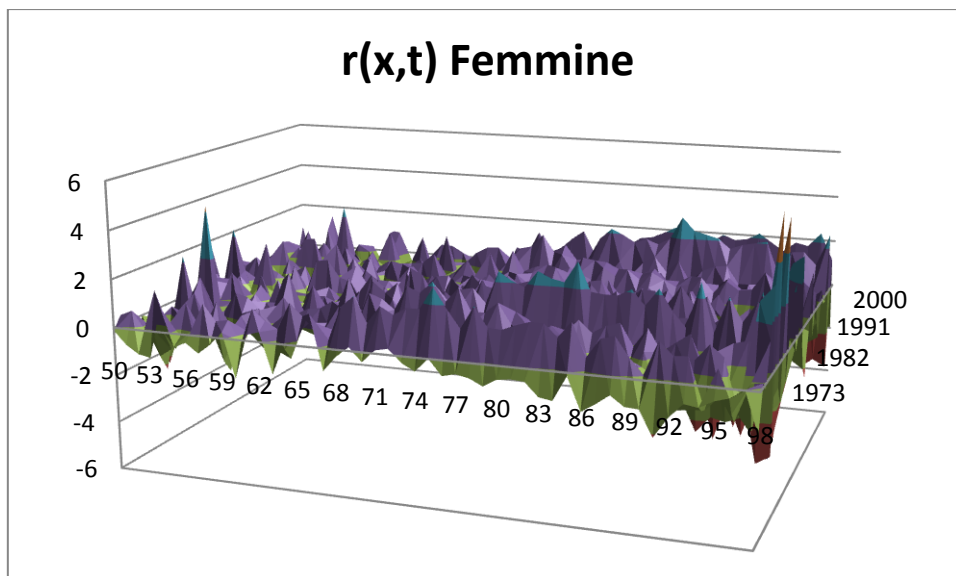


Figura 23

Come si può notare, non vi è la presenza di alcun evidente trend e la distribuzione nello spazio è casuale, con media che oscilla attorno allo 0.

Per confermare tali conclusioni a livello grafico, sono state calcolate le principali statistiche descrittive dei residui, riassunte nella seguente tabella:

	Maschi	Femmine
Media	1,51E-15	3,34E-15
Errore Standard	0,024876	0,024876
Deviazione Standard	1,000309	1,000309
Minimo	-4,91895	-4,40928
Massimo	5,184947	5,880674
Livello di Confidenza (95%)	0,048756	0,048756

Analizzando la tabella è possibile constatare come anche l'evidenza numerica confermi l'ottimo adattamento e la validità del modello nel rappresentare i dati. Infatti, sia per i maschi che per le femmine, la media è molto prossima allo zero, la varianza praticamente pari a 1 e l'errore standard risulta molto contenuto.

Oltre a queste prime statistiche descrittive viene anche calcolato il Chi-Quadro di Pearson, al fine di quantificare la differenza tra valori osservati (O , observed) e valori attesi (E , expected). La formula applicata è la seguente:

$$X^2 = \sum_{all\ obs.} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Tale equazione ha approssimativamente distribuzione Chi-Quadrato con gradi di libertà (gdl) pari a:

$$gdl = \text{numero di osservazioni} - \text{numero di parametri indipendenti} - 1$$

Nel nostro caso siamo in presenza di un numero di osservazioni per $\mu(x,t)$ pari a: 50 età x 34 anni. Il corrispondente numero di osservazioni per $d\mu(x,t)$ è: 49 x 33 = 1617. Inoltre, con la stima di massima verosimiglianza si sono in precedenza stimati un numero pari a 3 di parametri ($\hat{a}, \hat{b}, \hat{\sigma}$) e 1225 parametri indipendenti per la matrice di correlazione 49x49 riferita a $dW(t)$. Questi ultimi sono calcolati con la nota formula riferita alle matrici quadrate, tale per cui:

$$\frac{49 \cdot 50}{2} = 1225$$

Quindi, i gradi di libertà da prendere in considerazione nel nostro caso sono:

$$gdl = 1617 - (3 + 1225) - 1 = 388$$

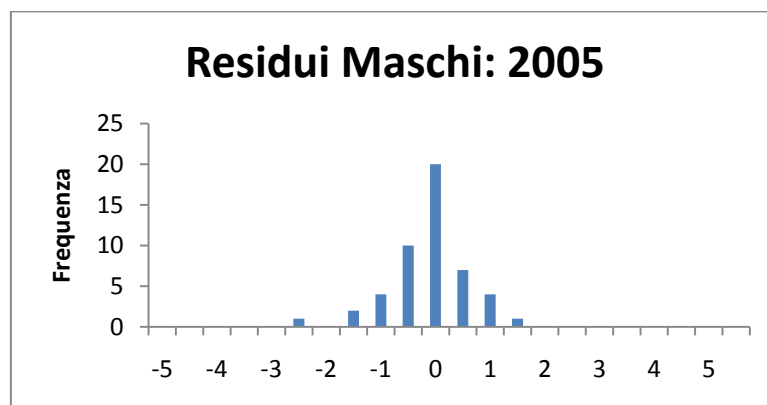
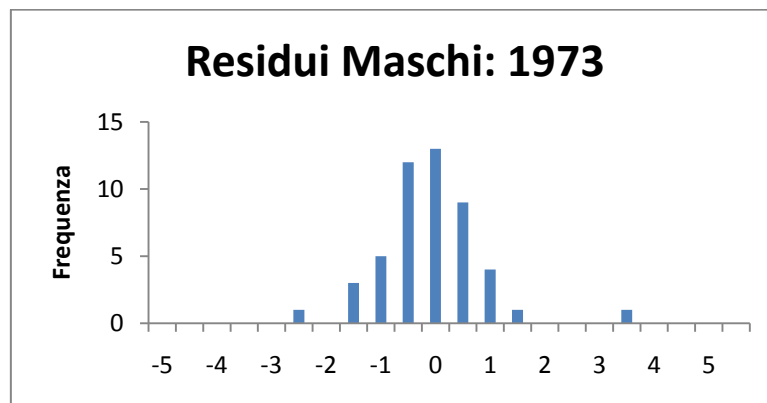
In generale, valori elevati della statistica X^2 indicano uno scarso adattamento e una sostanziale differenza tra i valori osservati e quelli attesi. Una volta calcolato, il Chi-Quadro di Pearson va poi confrontato con il valore della distribuzione Chi-Quadrato con 388 gradi di libertà.

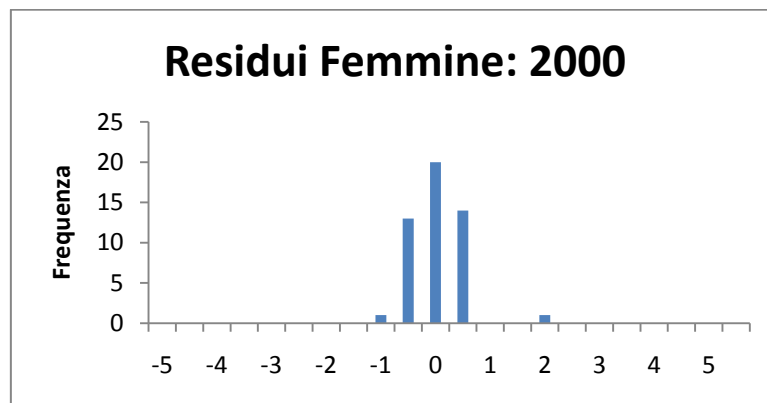
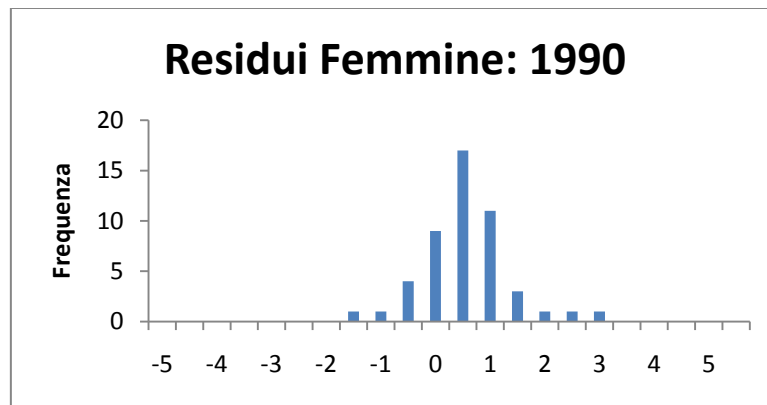
Nello specifico caso dell'analisi effettuata sulla popolazione italiana, anche questa statistica conferma il buon adattamento del modello ai dati. La successiva tabella fornisce l'evidenza empirica dei risultati:

χ^2 Maschi	χ^2 Femmine	χ^2_{388} al 99%
9,602082	6,333182	326,15

Si nota, dunque, come la statistica sia contenuta e sia molto lontana dal valore della distribuzione associata con 388 gdl.

Come conclusione è possibile riportare alcuni grafici bidimensionali relativi alle distribuzioni dei residui. Si può vedere come l'ipotesi di normalità sia pressoché rispettata; la media è quasi sempre prossima allo zero e le distribuzioni non sono eccessivamente asimmetriche o a code spesse.





Considerando in modo più critico questo particolare aspetto, sarebbe possibile creare un'estensione al modello sopra applicato ipotizzando che i residui non si distribuiscano propriamente in modo normale, dando più peso all'asimmetria e alla curtosi. Si potrebbe definire una struttura di correlazione anch'essa derivante dai residui, come nell'esempio riportato, ma con ipotesi più sofisticate (utilizzando per esempio il metodo delle copule).

Nello specifico caso dell'applicazione descritta in questo capitolo, l'ipotesi di normalità è ben visibile dai dati aggregati. Inoltre, avendo come obiettivo la creazione di un buon modello che sia anche sufficientemente immediato da utilizzare, la soluzione adottata risulta un ottimo compromesso.

4.3 Simulazione del modello

Dopo aver constatato il buon adattamento del modello ai dati, è importante passare alla simulazione vera e propria. Essendo un'impostazione definita nel tempo continuo è necessario fare affidamento a tecniche di simulazione per giungere ai risultati finali e alle proiezioni per gli anni futuri. Tali peculiarità rendono il modello molto utile non solo per ottenere una stima puntuale dei futuri tassi di mortalità, ma anche per analizzarne la variabilità.

Gli autori Wills S. e Sherris M. optano per una particolare tecnica di simulazione che si basa sull'utilizzo del numero di autovettori (quelli calcolati nel paragrafo 4.2.2) che spiegano la totalità della varianza, cioè 32 su 49. Viene altresì specificato che potrebbero essere presi in considerazione anche solo 10 autovettori per calcolare proiezioni coerenti. In questo contesto, la simulazione viene effettuata per il vettore casuale \underline{v} e la sua trasformazione lineare descritta come:

$$\underline{v} = V\sqrt{T}\underline{\eta}$$

dove \sqrt{T} è una matrice diagonale $N \times N$ con la diagonale composta da $\sqrt{\theta} = [\sqrt{\theta_1}, \dots, \sqrt{\theta_N}]'$ e $\underline{\eta} \sim N(0, I)$ è il vettore N -dimensionale con I una matrice $N \times N$ diagonale e unitaria. Il vettore \underline{v} risulterà dunque normalmente distribuito con matrice di covarianza pari a:

$$\Sigma_v = (V\sqrt{T})I(V\sqrt{T})' = VTV' = \Sigma$$

con Σ che rappresenta la matrice di covarianza del vettore originale dei residui $dW(t)$.

Ottenuti i risultati preliminari, gli autori descrivono la formula per la procedura da loro utilizzata. In particolare, per ogni simulazione di $\mu(x, t)$ il numero dei sopravvissuti in ogni anno e per una data generazione, x , è dato dalla seguente uguaglianza:

$$l(x, t) = l(x, 0) \exp \left\{ - \int_0^t \mu(x, s) ds \right\}$$

Nel procedere con la simulazione riferita alla popolazione italiana, però, si è notato come il fatto di affidarsi a tale impostazione porta a un'inevitabile perdita di informazioni. Infatti, utilizzando i risultati ottenuti attraverso l'analisi delle componenti principali si ha il pregio di snellire il procedimento, ma si avrebbe in ogni caso una perdita di informazioni (proprio per le assunzioni stesse della PCA, v. paragrafo 4.2.2). Per ovviare a tale problema e sfruttare nella sua interezza il dataset utilizzato, si è deciso di affidarsi a una diversa tecnica di simulazione e mantenere i risultati della PCA solo a fini descrittivi e di confronto.

Il software utilizzato è Matlab, che grazie alla sua impostazione algoritmica permette grande flessibilità nel determinare i passi della procedura. Innanzitutto si crea un file Excel di appoggio, contenente i valori di input dell'analisi; tali dati di partenza per ogni sesso sono:

- $l(x, 2006)$ riferito all'ultimo anno disponibile del dataset.
- Il calcolo riferito a $(x+t)$ per ogni età e per $x = 2006$, necessario nella formula di base del modello (v. equazione [16]).
- I valori dei tre parametri stimati a , b e σ .
- La matrice di varianza-covarianza ricavata dai residui standardizzati.

Successivamente, attraverso l'utilizzo delle equazioni [16] e [17] nell'algoritmo di riferimento si calcolano a livello ricorsivo tutti i $\mu(x,t)$ per le età 50-99 e per un numero di anni di proiezione pari alla grandezza della matrice di covarianza, cioè: $2006 + 49 = 2055$.

A questo punto, attraverso l'uguaglianza:

$$p(x,t) = \exp\{-\mu(x,t)\}$$

è possibile calcolare direttamente anche le probabilità di sopravvivenza associate. Una volta ottenuti tali risultati e avendo a disposizione un cospicuo numero di simulazioni, si è in grado di ricavare media, deviazione standard, asimmetria e curtosi di $\mu(x,t)$ e $p(x,t)$. Le tabelle riportate di seguito vogliono delineare una breve rappresentazione di alcuni risultati ottenuti per il primo anno di proiezione.

$\mu(x,2007)$ Maschi	Media Simulata	St. Dev. Simulata	Asimm. Simulata	Curtosi Simulata
55	0,004792217	0,000135595	-0,01728	2,906
65	0,012705822	0,0003242	-0,00914	2,931363
75	0,034971223	0,00105547	0,04003	2,901382
85	0,111249345	0,003811176	-0,03143	3,027243

$p(x,2007)$ Maschi	Media Simulata	St. Dev. Simulata	Asimm. Simulata	Curtosi Simulata
55	0,995219	0,000135	0,017668	2,906024
65	0,987375	0,00032	0,010076	2,931434
75	0,965634	0,001019	-0,03702	2,901387
85	0,894722	0,00341	0,043017	3,030219

$\mu(x,2007)$ Femmine	Media Simulata	St. Dev. Simulata	Asimm. Simulata	Curtosi Simulata
55	0,002727	0,000117	-0,0105	3,020169
65	0,006059	0,000148	-0,034	2,921569
75	0,018314	0,000594	0,010695	3,032651
85	0,073129	0,002891	0,002117	3,047653

$p(x,2007)$ Femmine	Media Simulata	St. Dev. Simulata	Asimm. Simulata	Curtosi Simulata
55	0,997277	0,000117	0,010854	3,020172
65	0,993959	0,000147	0,034426	2,921575
75	0,981853	0,000583	-0,00889	3,032412
85	0,929485	0,002687	0,006763	3,048404

Come si può ben notare, sia i $\mu(x,t)$ che i $p(x,t)$ rispettano le dinamiche demografiche (cioè le probabilità di morte decrescono con l'età e sono più elevate per i maschi rispetto alle femmine fino ai 99 anni), presentando un'asimmetria prossima allo 0 e una curtosi vicina al valore 3.

Si ricordi che una distribuzione normale presenta proprio queste due caratteristiche fondamentali: asimmetria pari a 0 e curtosi pari a 3. In questo caso i risultati si avvicinano molto all'ipotesi di normalità, ma le leggere differenze che si possono notare saranno in qualche modo utili nel paragrafo successivo in ottica di pricing, attraverso l'utilizzo dei percentili di $p(x,t)$.

Un ulteriore contributo all'analisi dell'andamento dei $p(x,t)$ è rappresentato dagli istogrammi raffiguranti la distribuzione di tali probabilità per maschi e femmine alle età 50 e 65. Le Figure 24-25-26-27 sono state ricavate attraverso un apposito comando di Matlab per la creazione di grafici.

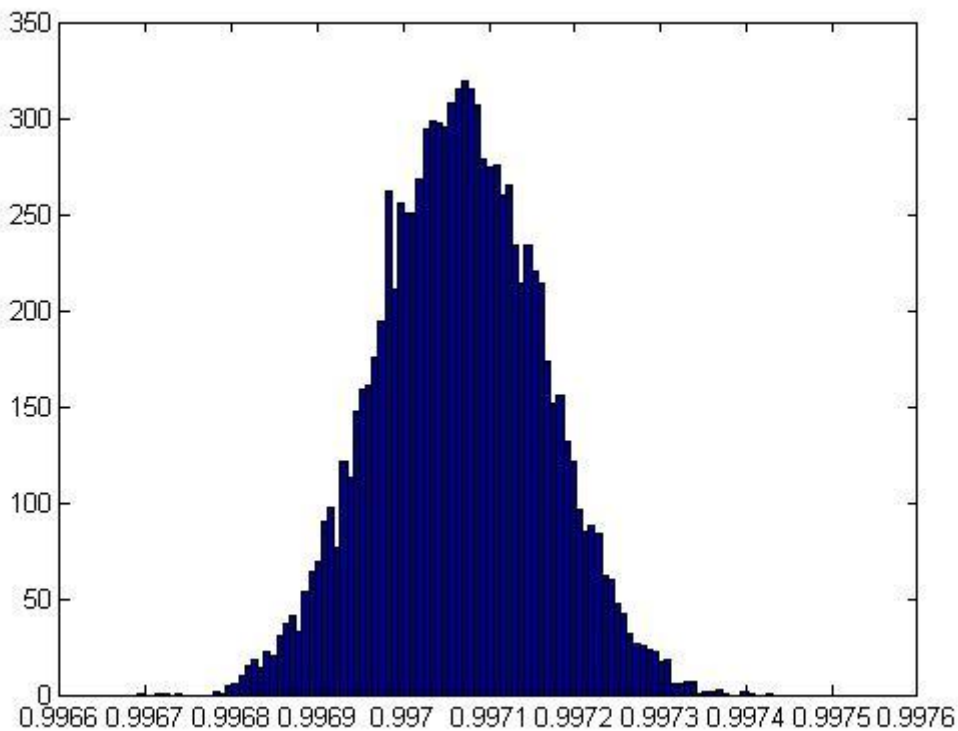


Figura 24: $p(50,2007)$ Maschi

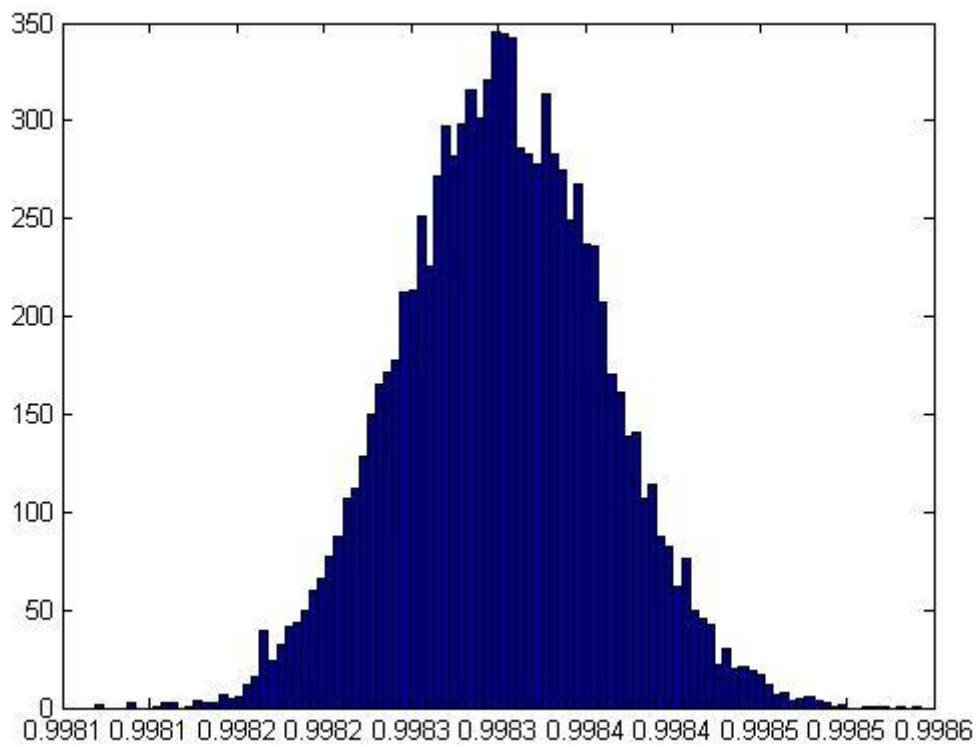


Figura 25: $p(50,2007)$ Femmine

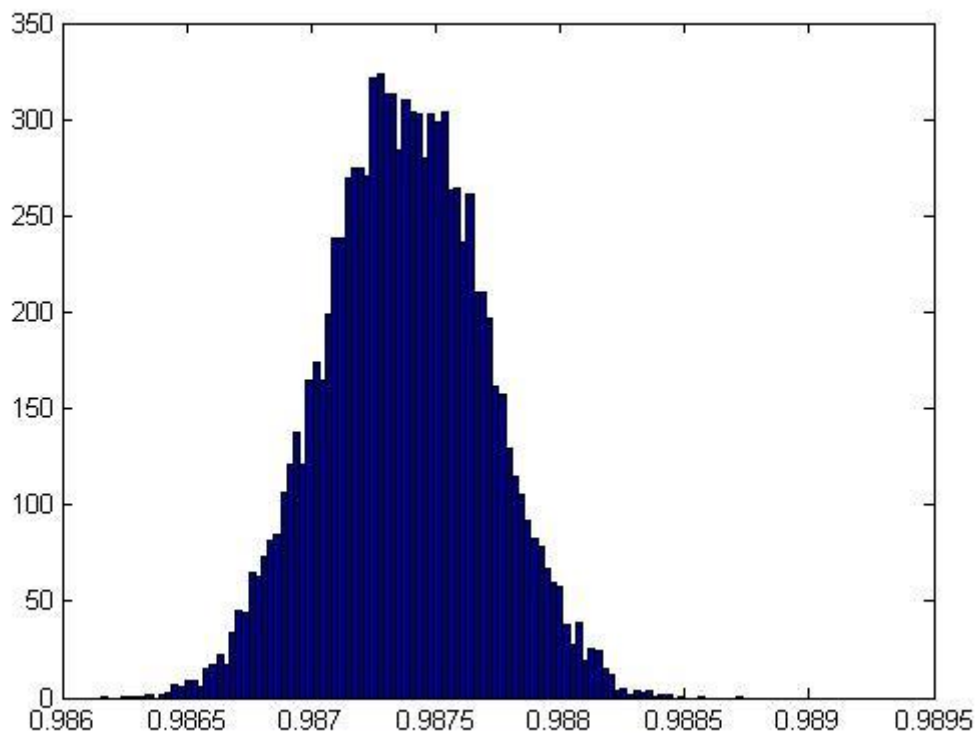


Figura 26: $p(65,2007)$ Maschi

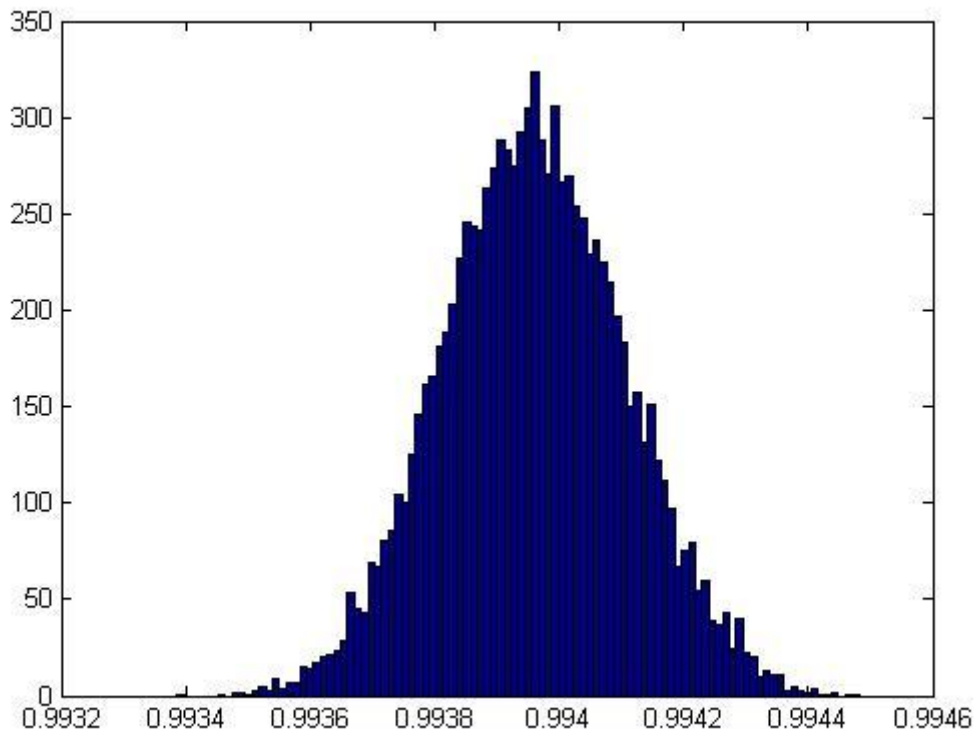


Figura 27: $p(65,2007)$ Femmine

È importante notare come le simulazioni effettuate siano 10.000, poiché la grande quantità di dati e la creazione di tabelle tridimensionali (con le tre dimensioni definite da età, tempo e numero di simulazioni) non permette al processore di elaborare una quantità maggiore di informazioni.

Nonostante il numero di simulazioni non sia particolarmente elevato (in alcuni casi pratici si arriva a simulare anche un milione di volte), si può notare come i primi due e più importanti momenti teorici di $\mu(x,t)$, che rappresenta la grandezza di base da cui discende tutto il resto, siano molto prossimi a quelli simulati. Le seguenti tabelle permettono tale confronto.

$\mu(x,2007)$ Maschi	Media Teorica	Media Simulata	St. Dev. Teorica	St. Dev. Simulata
55	0,004791981	0,004792217	0,000135451	0,000135595
65	0,0127088	0,012705822	0,000324618	0,0003242
75	0,034984652	0,034971223	0,001062884	0,00105547
85	0,111283439	0,111249345	0,003866078	0,003811176

$\mu(x,2010)$ <i>Maschi</i>	Media Teorica	Media Simulata	St. Dev. Teorica	St. Dev. Simulata
55	0,004477078	0,004478132	0,000244486	0,000275563
65	0,012207841	0,012212597	0,000584979	0,000640687
75	0,031433738	0,031458399	0,001577344	0,001751472
85	0,09786466	0,097873325	0,005976549	0,006567154

$\mu(x,2007)$ <i>Femmine</i>	Media Teorica	Media Simulata	St. Dev. Teorica	St. Dev. Simulata
55	0,002727237	0,002727078	0,000117642	0,000117495
65	0,006060028	0,006059256	0,000148532	0,000147751
75	0,018321712	0,018313849	0,000587687	0,000593676
85	0,073150085	0,073128833	0,002891669	0,002890807

$\mu(x,2010)$ <i>Femmine</i>	Media Teorica	Media Simulata	St. Dev. Teorica	St. Dev. Simulata
55	0,002670551	0,002666269	0,00021782	0,000243919
65	0,006379882	0,006360626	0,000344702	0,000397516
75	0,016746772	0,016701207	0,000946931	0,001086637
85	0,062764118	0,062621027	0,004417972	0,005027474

Nello specifico, media e deviazione standard teorici sono stati calcolati partendo dalle ipotesi del modello; le equazioni utilizzate sono:

$$E[\mu(x + 1, t + 1)] = \mu(x, t) + [\hat{a}(x + t) + \hat{b}]\mu(x, t) \quad [21]$$

$$Var[\mu(x + 1, t + 1)] = \sqrt{Var[\mu(x, t)] + Var[\Delta\mu(x, t)]}$$

È naturale constatare come al crescere dell'età e dell'anno di calendario la precisione diminuisce leggermente, ma rimane comunque un'ottima approssimazione ai dati.

Verificata la veridicità dei risultati, è possibile rappresentare a livello grafico le grandezze analizzate. Le Figure 28-29-30-31 rispecchiano le proiezioni effettuate.

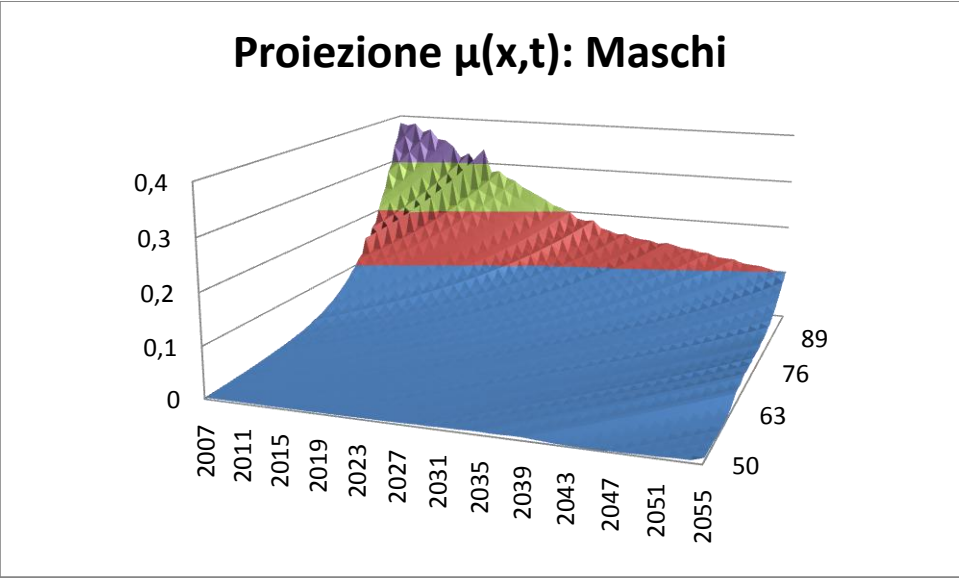


Figura 28

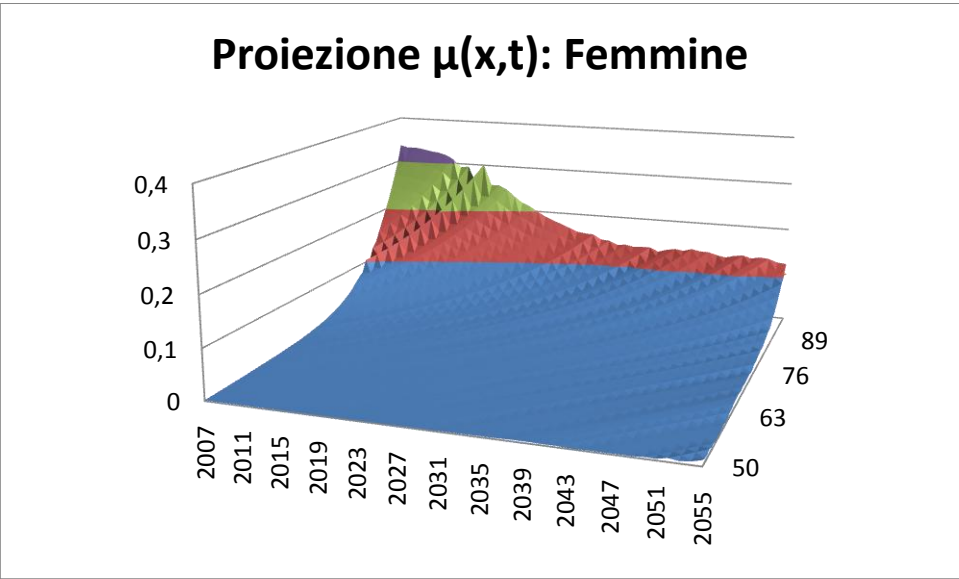


Figura 29

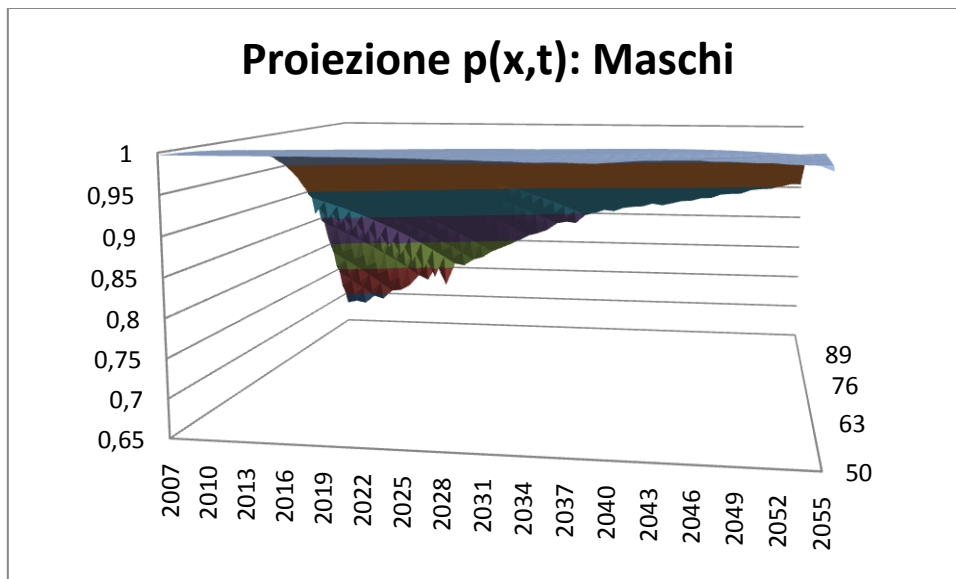


Figura 30

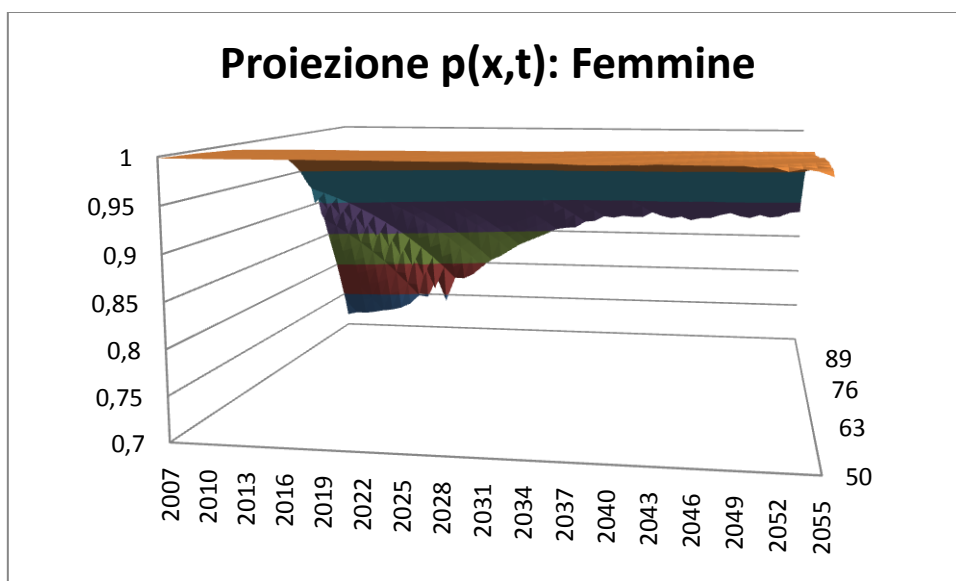


Figura 31

Come si può notare, i tassi centrali di decesso aumentano con l'età, ma diminuiscono nel tempo. Le probabilità di sopravvivenza, invece, decrescono con l'età e aumentano in modo sostanziale nel tempo.

Una volta ottenuti i risultati completi della simulazione è possibile introdurre un'estensione al modello presentato da Wills S. e Sherris M.. Nei paragrafi successivi, infatti, saranno trattate in dettaglio alcune proposte interessanti per il pricing delle rendite e la valutazione delle riserve, in grado di sfruttare anche la natura a tempo continuo di questo modello.

4.4 Pricing delle rendite: una proposta

Dopo aver simulato il modello per ottenere i dati proiettati nel futuro, si è passati ad analizzare le possibili implicazioni fornite da tale impostazione. La prima peculiarità che si è resa evidente è stata la possibilità di creare delle tavole di mortalità ai fini del pricing sulla base delle probabilità di sopravvivenza calcolate. Un altro aspetto molto interessante del modello è il fatto di essere stocastico e a tempo continuo; di conseguenza non si ferma solamente alla definizione dei valori puntuali delle quantità prese in esame, ma consente anche di sfruttarne la distribuzione di probabilità.

Tutte queste implicazioni innovative saranno di seguito applicate per prezzare i prodotti di rendita, in modo da fornire una serie di strumenti in grado di tenere in adeguata considerazione gli effetti del longevity risk.

4.4.1 Costruzione delle tavole di mortalità e utilizzo delle medie simulate

Avendo a disposizione la media teorica dei tassi di decesso centrali calcolati con l'equazione [21] e le rispettive simulazioni, è possibile costruire le tavole di mortalità di maschi e femmine da 50 a 99 anni. Attraverso i valori di $p(x,t)$ si procede al calcolo del numero di sopravvissuti $l(x,t)$ ipotizzando che la popolazione parta da 100.000 all'età 50. Ricordando l'impostazione di base del modello e in particolare l'espressione [17], gli $l(x,t)$ vengono ricavati in modo ricorsivo come segue:

$$l(x + 1, t + 1) = l(x, t)p(x, t)$$

I calcoli, quindi, sono effettuati in modo diagonale, permettendo di seguire i 100.000 individui della generazione di età 50 nel corso del tempo, al fine di creare la tavola completa da 50 a 99 anni.

Giunti a questo punto è interessante completare la tavola sino a estinzione. Come già accennato in precedenza, le età oltre i 100 anni sono molto instabili e per questo motivo non sono state considerate nell'analisi iniziale della popolazione italiana. Però, dato che si è in grado di ricavare per qualsiasi età i momenti teorici tramite l'equazione [21], attraverso un opportuno stratagemma è possibile proseguire nei calcoli e mantenere un certo grado di stabilità. Innanzitutto si definiscano le quantità teoriche con l'apice (T), mentre quelle simulate con l'apice (S). Allora è possibile ipotizzare che il seguente rapporto:

$$\frac{p^{(S)}(99, t)}{p^{(T)}(99, t)} = k$$

rimanga costante anche per le altre età sino a estinzione, con k che rappresenta un numero deterministico e reale. È ovviamente una forzatura, ma fornisce un compromesso per mantenere un andamento coerente negli anni successivi all'ultima simulazione.

Di conseguenza, i calcoli al di fuori dei dati simulati saranno ottenuti come:

$$p(x > 99, t) = \exp\{-\mu^{(T)}(x > 99, t)\} \cdot k$$

In questo modo è possibile ricavare l'intera tavola di mortalità fino al momento in cui tutti i soggetti sono deceduti. Le Figure 32 e 33 confrontano i risultati ottenuti per la generazione dei cinquantenni (maschi e femmine) con l'IPS55.

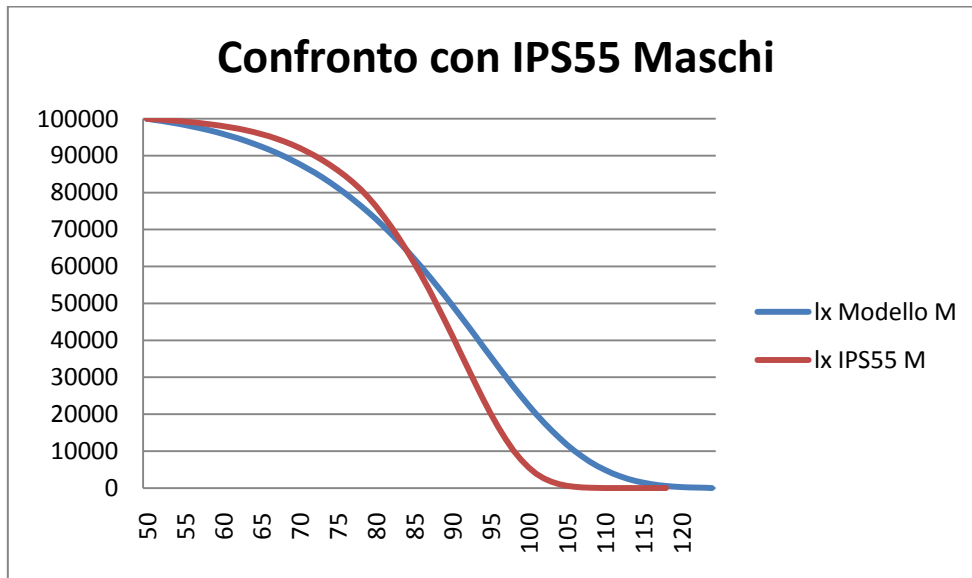


Figura 32

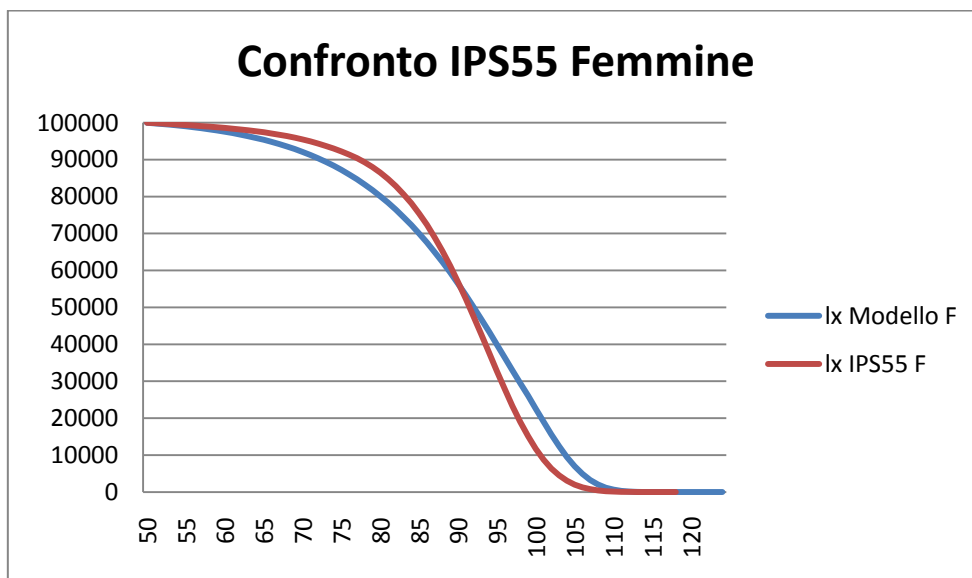


Figura 33

Innanzitutto si può notare una longevità maschile che, dopo i 100 anni, diventa molto marcata. Questo andamento è perfettamente in linea con i dati reali, dove per quelle età si nota una mortalità femminile perennemente superiore rispetto a quella maschile. Dal 1973 al 2006, gli ultracentenari maschi hanno sempre tassi centrali di decesso più bassi praticamente a ogni età superiore ai 100 anni. Nello specifico, le donne sperimentano un maggior numero di decessi alle età avanzate perché arrivano in molte alle età estreme. I maschi, invece, difficilmente diventano ultracentenari, ma i pochi sopravvissuti risultano più resistenti della media; quindi la probabilità di morte è più bassa anche perché il loro numero è davvero esiguo (v. Capitolo 1). Di conseguenza il modello interpreta questo andamento e, per anni di proiezione oltre il 2055, mantiene il trend generando una forte longevità maschile. Ovviamente man mano che ci si sposta avanti nel tempo le previsioni tendono a perdere precisione, ma se le dinamiche demografiche rimarranno inalterate nel futuro, anche nella realtà si potrebbe giungere al completo recupero e al conseguente sorpasso dei maschi sulle femmine per quanto riguarda la sopravvivenza media.

Le Figure 34-35-36-37 rappresentano graficamente alcuni tassi di decesso centrali calcolati partendo dai dati reali della popolazione italiana; sono stati riportati gli esempi più evidenti che mostrano come per le età oltre i 100 anni la mortalità femminile è spesso maggiore rispetto a quella maschile. Nel 2002, addirittura, i tassi di decesso tendono a diminuire nel corso del tempo; questa è la prova che ancora poco si conosce su ciò che realmente accade ai soggetti ultracentenari, anche a causa della scarsità di informazioni disponibili.

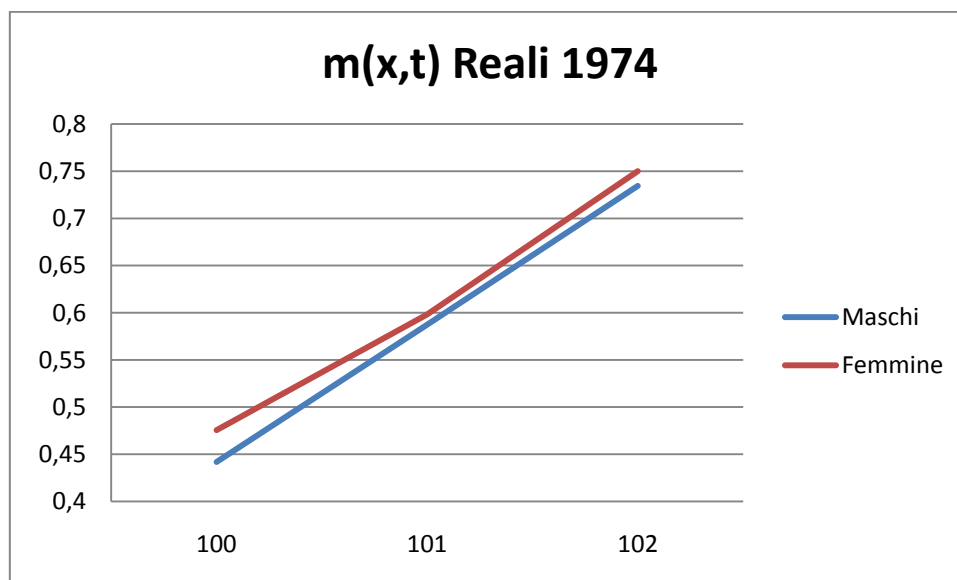


Figura 34

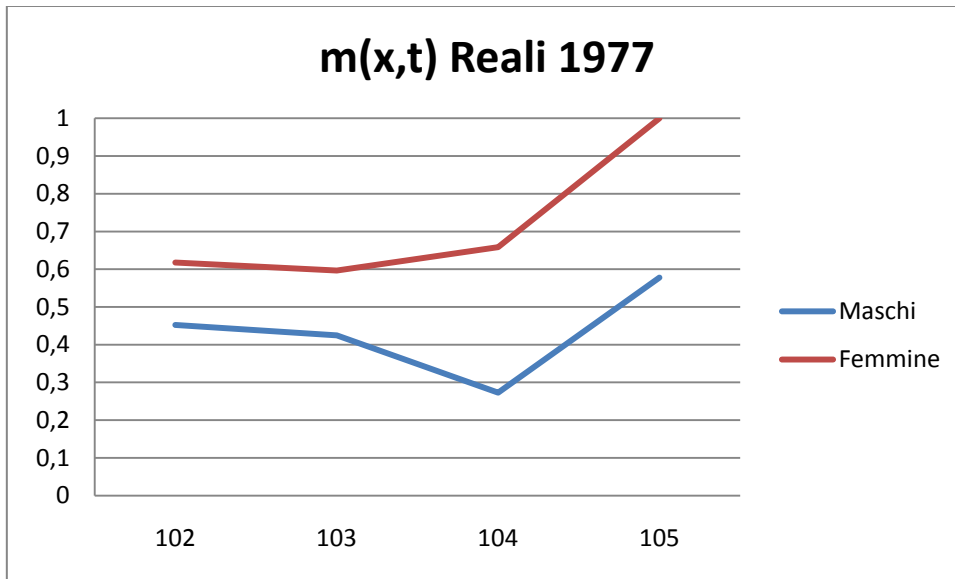


Figura 35

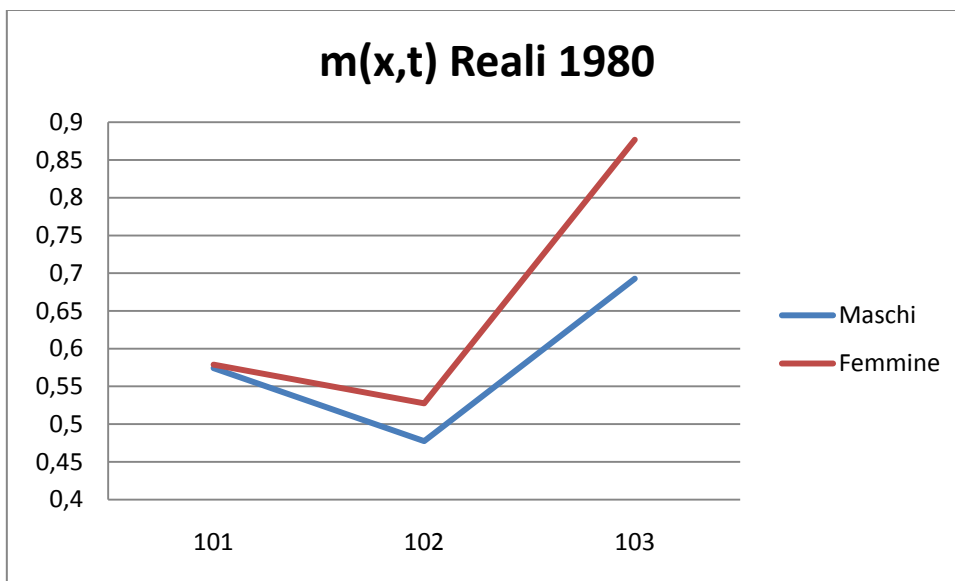


Figura 36

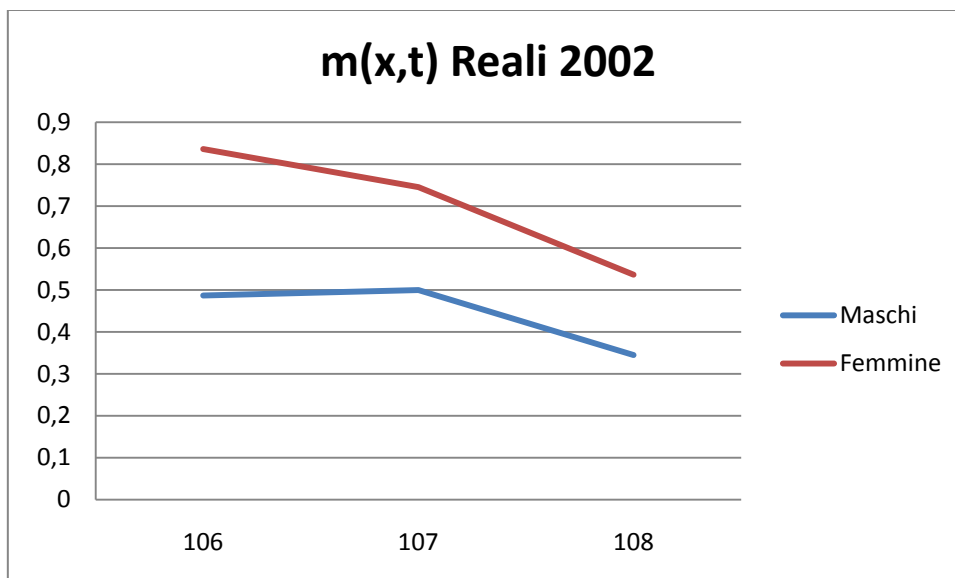


Figura 37

È importante inoltre considerare che le IPS55 sono tavole costruite in modo molto particolare per cercare di analizzare i vitalizzati nel settore assicurativo, i quali, come noto, hanno in media una speranza di vita maggiore rispetto alla normale popolazione. Inoltre, per le età estreme tali tavole calcolano la decrescenza dalla curva dei sopravvissuti attraverso l'interpolazione delle ultime età, creando "ad hoc" l'andamento sulle età più avanzate. Nonostante queste differenze, però, si può notare come dopo gli 85-90 anni entrambi i sessi superino in longevità l'IPS55 e che l'età massima ω si sposti verso destra.

L'effetto è meglio descritto dal calcolo del premio (al netto dei caricamenti e delle spese) per tre diverse tipologie di rendite vitalizie:

- Rendita vitalizia anticipata, differita 10 anni con premi annui pagati durante il differimento.
- Rendita vitalizia anticipata, differita 15 anni con premi annui pagati durante il differimento.
- Rendita vitalizia anticipata, immediata con premio unico.

In particolare, le età di partenza considerate sono 50 e 65 anni, il tasso tecnico $i = 2\%$ e la rata $R = 1.000$. Attraverso le formule di commutazione per il calcolo dei premi, i risultati ottenuti per maschi e femmine sono riportati nelle seguenti tabelle.

Età 50 Maschi 2%	PA 10	PA 15	PU
Modello	1919,003	1064,727	26328,97
IPS55 Maschi	1841,25	998,4878	25845,15
Differenza	77,75296	66,23883	483,8207

Età 65 Maschi 2%	PA 10	PA 15	PU
Modello	778,2747	637,516	19764,41
IPS55 Maschi	654,7194	482,928	18131,54
Differenza	123,5552	154,5881	1632,87

Età 50 Femmine 2%	PA 10	PA 15	PU
Modello	2011,885	1120,478	27348,31
IPS55 Femmine	2032,403	1128,116	27632,45
Differenza	-20,5177	-7,6383	-284,142

Età 65 Femmine 2%	PA 10	PA 15	PU
Modello	807,7667	648,0093	20390,65
IPS55 Femmine	784,2189	600,1197	20235,66
Differenza	23,54775	47,88958	154,9908

Si può notare come la longevità maschile porti a premi sistematicamente maggiori rispetto all'IPS55, mentre per le femmine l'effetto è maggiore nelle età più avanzate. In questo ultimo caso, infatti, la rendita vitalizia per un soggetto femminile di età 50 presenta valori minori del IPS55, mentre se si considerano i 65 anni la differenza è positiva. Inoltre, i premi delle femmine sono sempre maggiori rispetto a quelli dei maschi, come accade nella normale prassi attuariale delle assicurazioni private.

Come possibile analisi di sensitività si noti il modo in cui aumentano i premi riferiti al sessantacinquesimo anno di età al variare del tasso i , se questo si abbassa all'1%.

Età 65 Maschi 1%	PA 10	PA 15	PU
Modello	939,3952	759,2067	22625,83
IPS55 Maschi	769,985	559,407	20322,69
Differenza	169,4102	199,7997	2303,139

Età 65 Femmine 1%	PA 10	PA 15	PU
Modello	968,4856	764,8157	23285,82
IPS55 Femmine	930,0559	699,6671	22937,64
Differenza	38,42965	65,1486	348,1837

Una volta calcolate le tavole di mortalità sfruttando le medie simulate dei $p(x,t)$ è interessante vedere quali ulteriori tecniche di pricing possono essere applicate per aggravare la longevità e considerare un maggiore caricamento di sicurezza implicito nel calcolo dei premi (in un'ottica molto simile alle tecniche attuariali utilizzate nelle assicurazioni danni).

Tale caricamento può essere espresso, per semplicità, come differenza tra il premio di una rendita calcolato con le ipotesi del modello di base e quello ricavato da ulteriori assunzioni di aumento della longevità.

4.4.2 PH-Transform

Un primo modo per ottenere un caricamento di sicurezza implicito per il longevity risk è affidarsi al concetto finanziario di Proportional Hazard analizzato da Wang (1996). Questa impostazione, detta PH-transform, si fonda su una base teorica alquanto intuitiva.

Innanzitutto è necessario introdurre la definizione di valore atteso distorto. Se F_X è la funzione di distribuzione cumulata di X , variabile aleatoria non negativa, e $S_X = 1 - F_X = P(X > x)$ è la funzione di distribuzione de-cumulata, allora il valore atteso distorto può essere scritto come:

$$E_g(X) = \int_0^{+\infty} g[P(X > x)]dx = \int_0^{+\infty} g[S_X(x)]dx$$

Si dimostra che tale quantità è una misura coerente rispetto al rischio e le funzioni di distorsione utilizzate, g , sono crescenti e concave.

In questo contesto, Wang propone come misura coerente di distorsione la PH-transform di parametro γ , descritta nel seguente modo:

$$g[S_X(x)] = S_X(x)^{1/\gamma} \quad \text{per } \gamma \geq 1$$

dove γ misura l'avversione al rischio. Valori più elevati di questo parametro pesano di più la coda destra della distribuzione analizzata; ciò è dovuto a una pendenza maggiore del gradiente di g per valori bassi di $S_X(x)$.

Spostandoci dall'ambito finanziario a quello demografico è importante ricordare come la funzione dei sopravvivenenti sia descritta nel tempo continuo proprio come:

$$l_x = P(X > x)$$

che rappresenta la probabilità di sopravvivere in tutto il percorso di vita che va dalla nascita al compimento dell'età x .

Di conseguenza, partendo dagli l_x della tavola costruita al paragrafo precedente ed elevandoli per reciproco di γ , si avrà:

$$l_x^{(PH)} = (l_x)^{1/\gamma}$$

con (PH) che indica gli l_x calcolati con la PH-transform.

Utilizzando, per esempio, un $\gamma = 1,1$ (per non eccedere troppo nel caricamento) le Figure 38 e 39 mostrano come le curve dei sopravvivenuti si spostino ulteriormente a destra, con la coda estrema ancora più pesante rispetto ai precedenti grafici.

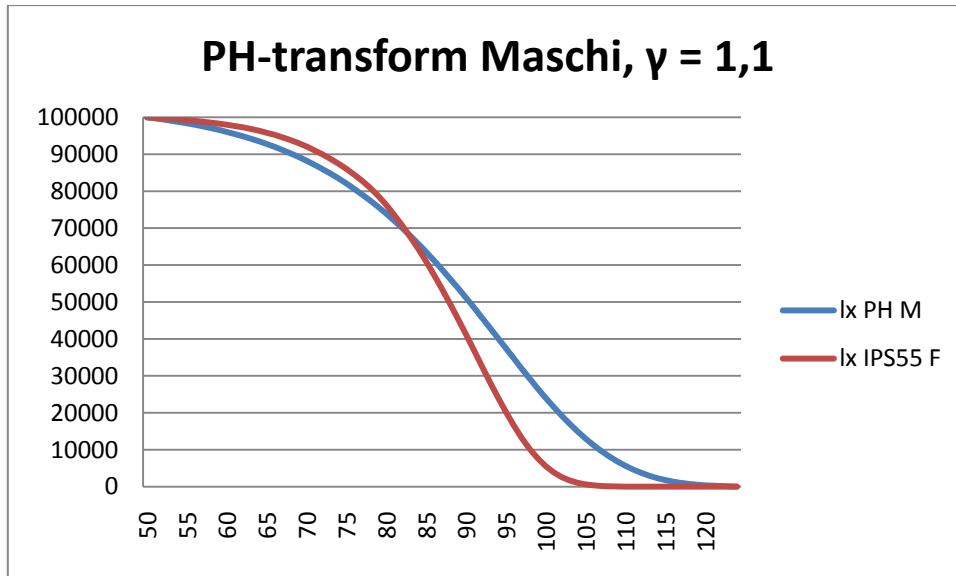


Figura 38

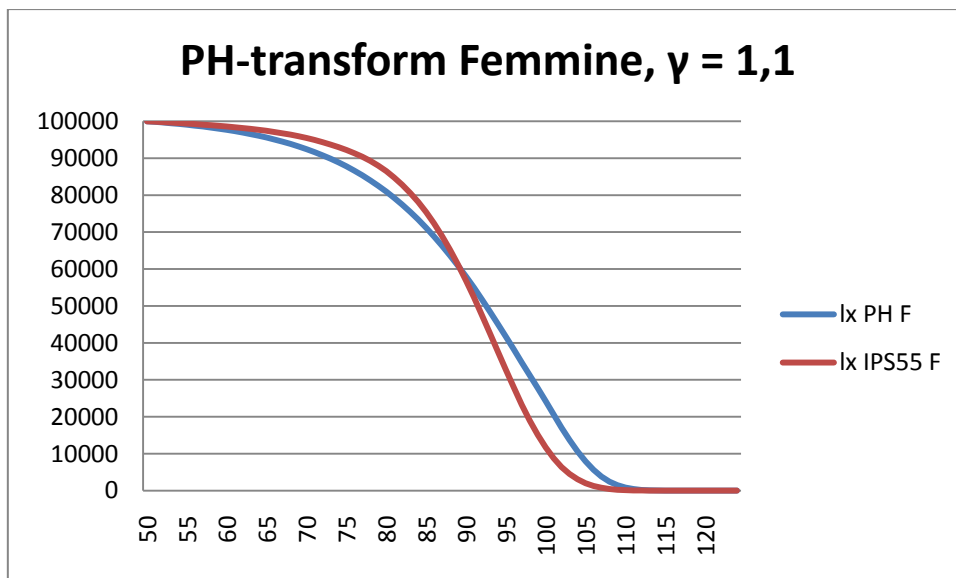


Figura 39

I premi calcolati in corrispondenza di tali valori sono:

<i>Età 50 Maschi $\gamma=1,1$</i>	PA 10	PA 15	PU
PH	1974,834	1101,998	26870,64
IPS55 Maschi	1841,25	998,4878	25845,15
Differenza	133,584	103,5104	1025,494

<i>Età 65 Maschi $\gamma=1,1$</i>	PA 10	PA 15	PU
PH	816,2596	674,6589	20361,21
IPS55 Maschi	654,7194	482,928	18131,54
Differenza	161,5402	191,731	2229,671

<i>Età 50 Femmine $\gamma=1,1$</i>	PA 10	PA 15	PU
PH	2056,293	1150,37	27774,21
IPS55 Femmine	2032,403	1128,116	27632,45
Differenza	23,89039	22,2535	141,7572

<i>Età 65 Femmine $\gamma=1,1$</i>	PA 10	PA 15	PU
PH	838,8535	678,5116	20875,2
IPS55 Femmine	784,2189	600,1197	20235,66
Differenza	54,63453	78,39183	639,5492

Considerando, invece, un γ ancora più contenuto, per esempio pari a 1,05, si ottengono i seguenti premi per soggetti con età di partenza $x = 65$:

<i>Età 65 Maschi $\gamma=1,05$</i>	PA 10	PA 15	PU
PH	797,6956	656,4754	20069,97
IPS55 Maschi	654,7194	482,928	18131,54
Differenza	142,9762	173,5474	1938,425

<i>Età 65 Femmine $\gamma=1,05$</i>	PA 10	PA 15	PU
PH	823,7124	663,6325	20639,47
IPS55 Femmine	784,2189	600,1197	20235,66
Differenza	39,49344	63,5128	403,8145

Tutti i risultati evidenziano un valore dei premi maggiore rispetto al paragrafo 4.4.1; la differenza positiva che si ottiene può essere definita come un caricamento di sicurezza implicito per il longevity risk.

Confrontando i premi di base (definiti tramite il modello di partenza) con i valori ricavati attraverso la PH-transform si può riassumere nelle seguenti tabelle il caricamento implicito per i sessantacinquenni:

Confronto Maschi 65	PA 10	PA 15	PU
PH $\gamma=1,1$	816,2596	674,6589	20361,21
Modello Base	778,2747	637,516	19764,41
Caricamento	37,9849	37,1429	596,8

Confronto Femmine 65	PA 10	PA 15	PU
PH $\gamma=1,1$	838,8535	678,5116	20875,2
Modello Base	807,7667	648,0093	20390,65
Caricamento	31,0868	30,5023	484,55

Questa metodologia di calcolo può essere definita “deterministica”, proprio perché si limita a elevare la funzione dei sopravvivenenti per una certa quantità nota. Invece, facendo riferimento ai risultati ottenuti dalla simulazione è possibile introdurre un altro metodo più di carattere statistico e probabilistico per la valutazione del premio di una rendita.

4.4.3 Percentili

Nel paragrafo 4.3 si è visto come, tramite la tecnica di simulazione, sia possibile calcolare molti aspetti importanti delle quantità $p(x,t)$. In particolare, grazie alle 10.000 simulazioni, il software informatico consente di ricavare i percentili delle probabilità di sopravvivenza.

A livello preliminare è bene ricordare che il quantile di ordine α è un valore q_α che divide la popolazione in due parti proporzionali ad α e $(1-\alpha)$ e caratterizzate da valori rispettivamente minori e maggiori di q_α . In particolare, invece, i quantili di ordine $1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n$ dividono la popolazione in n parti ugualmente popolate; il quantile di ordine $\alpha = m/n$ è detto m -esimo n -ile. In statistica i percentili sono definiti come i quantili di ordine $m/100$ che dividono l'intera distribuzione di probabilità in 100 parti uguali.

In questo contesto, per dare ulteriore importanza al fenomeno del longevity risk, è possibile sfruttare i percentili oltre il 50° (che rappresenta la mediana della distribuzione). Sfruttando dunque le caratteristiche dei $p(x,t)$ definite nel paragrafo 4.3, si possono calcolare le tavole di mortalità attraverso percentili più elevati rispetto ai valori mediani. In sintesi si avrà che:

$$p(x, t) < p^{perc}(x, t)$$

dove $p^{perc}(x, t)$ è la probabilità di sopravvivenza definita come percentile superiore al 50°.

È possibile, per esempio, utilizzare il 75° percentile (tipo di percentile usato anche nelle assicurazioni danni per il calcolo del risk margin), ottenendo le seguenti tavole per maschi e femmine:

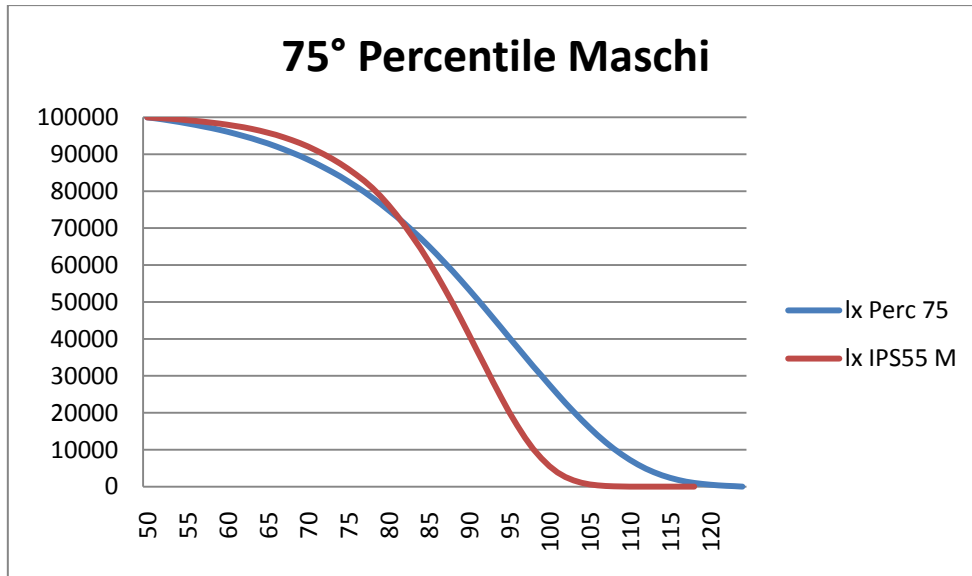


Figura 40

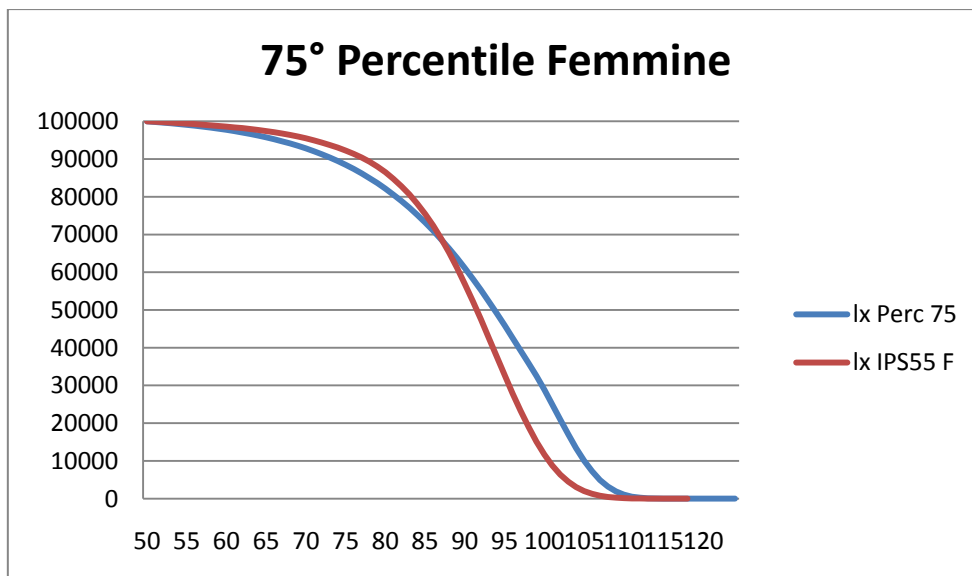


Figura 41

I premi calcolati in corrispondenza di questi dati sono riassunti nelle seguenti tabelle.

Età 50 Maschi 75°	PA 10	PA 15	PU
75° Percentile	1987,691	1111,759	26966,15
IPS55 Maschi	1841,25	998,4878	25845,15
Differenza	146,4407	113,271	1120,995

Età 65 Maschi 75°	PA 10	PA 15	PU
75° Percentile	830,5947	691,184	20564,07
IPS55 Maschi	654,7194	482,928	18131,54
Differenza	175,8753	208,2561	2432,529

Età 50 Femmine 75°	PA 10	PA 15	PU
75° Percentile	2078,954	1166,469	27970,46
IPS55 Femmine	2032,403	1128,116	27632,45
Differenza	46,55075	38,35304	338,0064

Età 65 Femmine 75°	PA 10	PA 15	PU
75° Percentile	858,7621	699,8532	21168,67
IPS55 Femmine	784,2189	600,1197	20235,66
Differenza	74,54319	99,73341	933,0177

Mentre, se si vuole avere un caricamento più contenuto è possibile considerare un percentile più basso, come per esempio il 60°. Di conseguenza i premi per un sessantacinquenne si modificheranno nel seguente modo:

Età 65 Maschi 60°	PA 10	PA 15	PU
60° Percentile	801,834	661,791	20123,47
IPS55 Maschi	654,7194	482,928	18131,54
Differenza	147,1146	178,863	1991,922

Età 65 Femmine 60°	PA 10	PA 15	PU
60° Percentile	831,2397	671,9603	20748,45
IPS55 Femmine	784,2189	600,1197	20235,66
Differenza	47,02073	71,84056	512,79

Infine, è possibile evidenziare il caricamento di sicurezza implicito come differenza tra premio del modello di base e quello calcolato tramite i percentili. Utilizzando il 75° percentile per l'età di partenza $x = 65$, i caricamenti sono definiti come:

Confronto Maschi 65	PA 10	PA 15	PU
75° Percentile	830,5947	691,184	20564,07
Modello Base	778,2747	637,516	19764,41
Caricamento	52,32	53,668	799,66

Confronto Femmine 65	PA 10	PA 15	PU
75° Percentile	858,7621	699,8532	21168,67
Modello Base	807,7667	648,0093	20390,65
Caricamento	50,9954	51,8439	778,02

Il caricamento calcolato è superiore rispetto a quello definito con la PH-transform, ma i risultati possono facilmente variare se si alza il livello dei percentili o di γ .

Questi strumenti utili a considerare opportunamente il longevity risk per le rendite risultano molto flessibili, permettendo all'assicuratore di decidere quale sarà l'ipotesi più plausibile sull'evoluzione della mortalità futura. Inoltre, nel caso in cui il premio calcolato risultasse troppo elevato, basterebbe diminuire opportunamente il percentile analizzato o il valore di γ .

Sono metodi attuariali molto duttili, che possono essere impiegati non solo in ottica di pricing, ma anche di solvibilità.

4.5 Valutazione delle riserve: best estimate e risk margin

Il longevity risk può essere analizzato non solo in riferimento al pricing, ma anche riguardo alla valutazione delle riserve tecniche. Il calcolo e l'importo di queste ultime hanno assunto grande rilevanza con le nuove disposizioni definite dal Solvency II in ambito assicurativo. In questo paragrafo si cercherà di dare una valutazione delle riserve attraverso i dati ottenuti dal modello, analizzando come cambia il loro ammontare al variare delle basi tecniche.

In particolare, infatti, tale programma europeo evidenzia la necessità di determinare le riserve in funzione delle informazioni a disposizione dell'impresa, rispettando i criteri di prudenzialità e oggettività. Tali riserve sono definite come la somma di due grandezze: best estimate e risk margin.

Viene previsto che, se i futuri cash-flow associati ai contratti assicurativi (o riassicurativi) possono essere replicati da uno strumento finanziario per il quale è osservabile un valore di mercato realistico, il valore complessivo della riserva (*best estimate* + *risk margin*) sarà determinato sulla base del valore di mercato. In caso contrario, ovvero per la maggioranza dei contratti assicurativi vita e danni, occorrerà determinare separatamente le due grandezze.

In particolare, la *best estimate* dovrà corrispondere alla media ponderata dei futuri cash-flow tenendo conto del time value del denaro, ovvero sarà pari a un valore attuale atteso calcolato in base alla curva dei tassi free-risk.

Il *risk margin*, invece, dovrà rappresentare il costo sopportato per detenere il capitale necessario fino all'estinzione completa degli impegni (sfruttando sempre la curva dei tassi free-risk). Nel QIS2 il metodo utilizzato per il calcolo di tale quantità è quello del 75° percentile, mentre successivamente si è preferita la procedura del Cost of Capital¹⁵. Questo cambiamento è stato dettato dalla difficoltà nella determinazione precisa del 75° percentile, poiché nella realtà ci sono numerosi fattori (tra cui quelli finanziari) che influenzano i calcoli. Studi quantitativi hanno rivelato, però, come i due metodi conducano a risultati molto simili.

In questo contesto, quindi, il fatto di non valutare elementi di variabilità ulteriore oltre alla mortalità, permette di calcolare la riserva con il metodo “*best estimate* + *risk margin*” in modo alquanto coerente.

Per fare ciò si ipotizzi, per semplicità, di considerare un soggetto di 50 anni che stipula un contratto di rendita vitalizia anticipata, immediata a premio unico e con rata $R = 1.000$. Alla data di stipulazione la valutazione della riserva viene effettuata con le basi del primo ordine, cioè:

- Tavole: IPS55
- Tasso tecnico: 4%

Il 4% è stato scelto perché, come si vedrà in seguito, rappresenta all'incirca il valore asintotico e la media della curva dei tassi free-risk. In questo modo il confronto tra le diverse riserve risentirà maggiormente dell'effetto longevità piuttosto che delle dinamiche di tasso, permettendo così una migliore analisi della componente demografica.

Successivamente, ricordando la metodologia introdotta dal Solvency II, è interessante confrontare le riserve di questo tipo di polizza con quella calcolata con i nuovi criteri di valutazione. In particolare, la *best estimate* sarà definita utilizzando le seguenti basi di secondo ordine:

- Tavole ricavate dal modello attraverso il valore medio dei $p(x,t)$ simulati
- Curva dei tassi free-risk

¹⁵ La metodologia del Cost of Capital (CoC) prevede la determinazione del requisito di capitale associato a una passività per tutti gli anni successivi fino alla completa estinzione dell'impegno. Il costo del capitale sarà ottenuto applicando ai requisiti un tasso, fissato dal CEIOPS, identico per tutti e rivedibile periodicamente, che rappresenta il tasso addizionale, rispetto al free-risk, a cui incorre l'assicuratore detenendo fondi propri a copertura. Il valore attuale atteso di tali costi rappresenta il *risk margin* associato alla passività.

Se si vuole invece avere la valutazione completa della nuova riserva, cioè “best estimate + risk margin”, i dati da utilizzare sono i seguenti:

- Tavole ricavate dal modello attraverso il 75° percentile dei $p(x,t)$ simulati
- Curva dei tassi free-risk

In questo modo, confrontando le tre riserve a istanti temporali diversi, è possibile avere un’idea generale su come si possa calcolare la riserva in un’ottica di Solvency II e quale sia la differenza con quella determinata con le basi tecniche di primo ordine.

Innanzitutto, la Figura 42 permette di visualizzare graficamente l’andamento della curva dei tassi free-risk (ultima versione: dicembre 2009); questi vengono definiti periodicamente dal CEIOPS e sono calcolati con tecniche di estrapolazione.

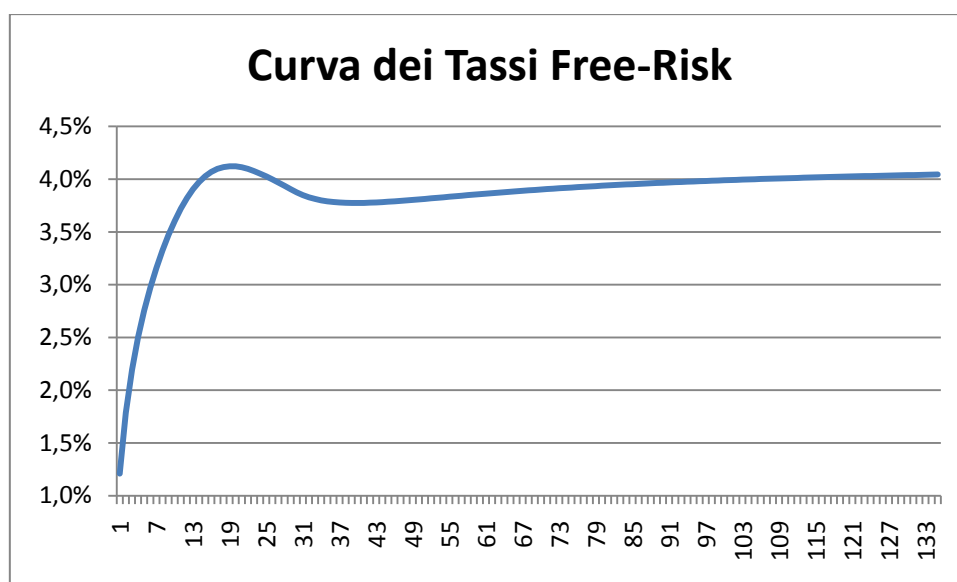


Figura 42

Come si può notare, nei primi anni di maturazione i tassi sono relativamente bassi e appena superiori all’1%, poi aumentano fino a toccare il picco di 4,123% al 19° anno e infine tendono a un valore asintotico appena superiore al 4%.

In questo contesto è ora possibile confrontare la riserva prospettiva calcolata con le basi del primo ordine con quella best estimate e la più prudentiale riserva “best estimate + risk margin”. Le tabelle che seguono permetteranno il confronto tra diversi anni di maturazione.

<i>Età 50 Maschi</i>	5	10	15	20	25
BE Maschi	17571,39	16585,05	15905,41	14913,24	13408,62
IPS55 Maschi	17974,27	16464,02	14763,41	12911,27	10924,8
Differenza	-402,889	121,0294	1142	2001,97	2483,817

<i>Età 50 Maschi</i>	5	10	15	20	25
BE+RM Maschi	17925,26	17006,81	16409,76	15492,66	14038,31
IPS55 Maschi	17974,27	16464,02	14763,41	12911,27	10924,8
Differenza	-49,0121	542,7952	1646,352	2581,392	3113,506

<i>Età 50 Femmine</i>	5	10	15	20	25
BE Femmine	18200,1	17190,06	16446,76	15310,38	13574,59
IPS55 Femmine	19075,66	17736,62	16160,5	14353,16	12313,98
Differenza	-875,559	-546,559	286,2594	957,2241	1260,607

<i>Età 50 Femmine</i>	5	10	15	20	25
BE+RM Femmine	18551,08	17610,11	16950,66	15890,68	14202,55
IPS55 Femmine	19075,66	17736,62	16160,5	14353,16	12313,98
Differenza	-524,579	-126,509	790,1537	1537,52	1888,566

A questo punto è possibile notare come i primi anni la riserva calcolata con l'IPS55 sia leggermente superiore. Tale andamento è dato dal fatto che si usa un tasso costante per tutto il periodo (4%), mentre nella valutazione del best estimate e del risk margin si fa riferimento alla curva dei tassi free-risk. Quest'ultima è caratterizzata da un tasso iniziale basso che poi cresce nel tempo. Inoltre, nei primi anni le tavole ufficiali presentano probabilità di sopravvivenza leggermente più elevata rispetto al modello, per poi essere superate in longevità nelle età più avanzate.

Se si aumenta l'orizzonte di analisi, si può notare come nel tempo la riserva definita dall'IPS55 risulti sempre più inadeguata. La causa principale è la longevità calcolata dal modello per la popolazione studiata, che supera sempre più quella dei vitalizzati man mano che passano gli anni. Questa componente, insieme all'andamento della curva dei tassi, porta a una riserva calcolata con il solo best estimate maggiore dopo il quinto o decimo anno di maturazione. Le iniziali differenze negative si affievoliscono se invece si considera la riserva calcolata con il metodo "best estimate + risk margin". In quest'ultimo caso, infatti, viene sfruttato il 75° percentile, ottenendo una valutazione ancora più prudente rispetto al calcolo con l'ausilio dell'IPS55.

In particolare, i maschi presentano riserve molto più consistenti rispetto a quelle calcolate con l'IPS55, proprio perché il modello definisce una longevità maschile futura più marcata rispetto ai vitalizzati. L'unica differenza negativa si può notare infatti nel primo quinquennio, mentre lo scarto positivo aumenta sempre più man mano che ci si sposta su età interessate dal fenomeno del longevity risk. Per le femmine, invece, il confronto con l'IPS55 rispecchia il diverso andamento della mortalità. Anche le tavole, infatti, differivano in longevità solo alle età più anziane.

Tutto ciò comporta un'inadeguatezza della riserva all'incirca dopo il decimo anno, con differenze positive sempre più sostanziali.

In conclusione, è possibile notare come il problema del longevity risk sia importante non solo in ambito di pricing, ma anche per la valutazione degli impegni futuri della compagnia. Un'impresa di assicurazione deve essere sempre in grado di far fronte agli obblighi verso gli assicurati, calcolando le riserve in modo adeguato. Le nuove tecniche proposte dal Solvency II possono rappresentare un ottimo strumento di valutazione, in grado di spronare gli assicuratori a fornire adeguata attenzione ai rischi ai quali sono esposti.

4.6 Problematiche e conclusioni

In questo ultimo capitolo si è cercato di dare una risposta alle problematiche che possono insorgere a causa del longevity risk per quei prodotti particolarmente sensibili a tale rischio. È stato possibile calcolare premi che contengono un caricamento di sicurezza implicito, in modo da proteggere l'impresa di assicurazione o il fondo pensione da futuri fenomeni di extrasopravvivenza. Inoltre, è stata proposta una metodologia per la valutazione delle riserve tecniche. Sono tutti aspetti molto importanti, ma che non devono far distogliere l'attenzione da alcune problematiche altrettanto rilevanti.

Infatti, il premio calcolato con questi metodi prudenziali potrebbe risultare troppo elevato e non permettere la vendita dei prodotti assicurativi sul mercato. In questo contesto, le tecniche puramente attuariali devono confrontarsi con le problematiche di marketing. Nel caso in cui il caricamento implicito risulti troppo elevato, potrebbe essere necessario definire un tetto massimo che il premio non dovrebbe superare per mantenere caratteristiche di competitività. In tal modo si avrebbe la possibilità di conciliare sicurezza e attrattività del prodotto.

In aggiunta, oltre alle problematiche relative al calcolo dei premi, non bisogna trascurare l'importanza della corretta valutazione delle riserve. L'impresa di assicurazione deve essere sempre in grado di far fronte agli impegni verso gli assicurati, e per fare ciò deve necessariamente determinare in modo corretto le risorse da accantonare. Tale correttezza deve essere a sua volta accompagnata dalla prudenzialità, senza però sfociare in eccessi. Infatti, ciò che viene posto a riserva è di proprietà dell'assicurato e causa una sorta di immobilizzazione dei capitali effettivamente disponibili. Riserve troppo prudenziali, quindi, avrebbero effetti negativi sulla gestione della compagnia, privata di mezzi sufficientemente liquidi da poter investire in modo adeguato.

Infine, potrebbe verificarsi un ulteriore problema qualora le previsioni sulla mortalità si discostassero dall'effettivo andamento futuro. Bisogna sempre ricordare che i modelli sono una rappresentazione semplificata e schematica della realtà e, in quanto tali, non potranno mai determinare con assoluta certezza le grandezze analizzate.

Quindi, se le basi tecniche prudenziali vengono usate per il calcolo del premio nel momento della stipulazione del contratto (e poi non vengono più modificate), l'eventuale rischio di una longevità futura minore di quella attesa ricadrà sull'assicurato, che pagherà un premio maggiore. Se invece i premi sono, per esempio, ricorrenti, allora le basi tecniche possono variare di volta in volta e il rischio di un'accentuata longevità ricadrà sull'impresa di assicurazione.

Nonostante la presenza di queste problematiche da non trascurare, però, il longevity risk è molto importante nelle assicurazioni e nei fondi pensione. Il continuo e strutturale aumento della longevità delle popolazioni che vivono nei paesi sviluppati genera forti preoccupazioni in ambito attuariale. Dotarsi di strumenti di valutazione, gestione e pricing del longevity risk è ormai fondamentale per ogni istituto che eroga prestazioni sottoforma di rendita.

Si tratta di una sfida in continua evoluzione, che pone gli attuari di fronte a numerosi problemi da dover conciliare con una soluzione pratica, efficace e competitiva sul mercato assicurativo.

Il modello esposto in questo capitolo e le sue applicazioni rappresentano uno strumento molto utile per gestire ogni aspetto del longevity risk. La flessibilità da cui è caratterizzata l'impostazione rende il rischio di longevità affrontabile sotto tutti i punti di vista. È un'ottima soluzione, anche se ovviamente non l'unica possibile, che consente di far fronte alle nuove problematiche che si prospettano in ambito attuariale a causa dei cambiamenti nelle dinamiche demografiche.

Bibliografia:

- Ballotta L. , Esposito G. , Haberman S. (2006) *“The IASB Insurance Project for life insurance contracts; impact on reserving methods and solvency requirements”*, Insurance: Mathematics and Economics, 39, 356-375
- Ballotta L. , Haberman S. (2006) *“The fair valuation problem of guaranteed annuity options: The stochastic mortality environment case”*, Insurance: Mathematics and Economics, 38(1), 195-214
- Bauer D. (2006) *“An arbitrage-free family of longevity bonds”*, Working paper, University of Ulm
- Bauer D. , Russ J. (2006) *“Pricing longevity bonds using implied survival probabilities”*, Working paper, University of Ulm
- Biffs E. (2005) *“Affine processes for dynamic mortality and actuarial valuations”*, Insurance: Mathematics and Economics, 37(3), 443-468
- Biffis E. , Denuit M. , Devolder P. (2009) *“Stochastic Mortality Under Measure Changes”*
- Biffs E. , Millossovich P. (2006) *“The fair value of guaranteed annuity options”*, Scandinavian Actuarial Journal, 1, 23-41
- Booth H. , Maindonald J. , Smith L. (2002) *“Applying Lee-Carter under conditions of variable mortality decline”*, Population Studies, 56(3)
- Brace A. , Gatarek D. , Musiela M. (1997) *“The Market model of interest-rate dynamics”*, Mathematical Finance, 7(2), 325-336
- Brambilla A. (2007) *“Capire i fondi pensione”*, Il Sole 24 Ore Pirola
- Brigo D. , Mercurio F. (2001) *“Interest rate models: theory and practice”*, Springer Finance, Berlin
- Brouhns N. , Denuit M. , Vermunt J.K. (2002) *“A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected life tables”*, Insurance: Mathematics and Economics, 31(3), 373-393
- Cairns A.J.G. (2004) *“Interest rate models: an introduction”*, Princeton University Press, Princeton
- Cairns A.J.G. (2007) *“A multifactor generalisation of the Olivier-Smith model for stochastic mortality”*, In Proceedings of the 1st IAA Life Colloquium, Stockholm
- Cairns A.J.G. , Blake D. , Dowd K. (2006a) *“Pricing death: frameworks for the valuation an securitization of mortality risk”*, ASTIN Bulletin, 36(1), 79-120
- Cairns A.J.G. , Blake D. , Dowd K. (2006b) *“A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: Theory and calibration”*, Journal of Risk and insurance, 73(4), 687-718
- Cairns A.J.G. , Blake D. , Dowd K. (2008) *“Modelling and management of mortality risk: a review”*, Scandinavian Actuarial Journal, Vol. 2008, 79-113

- Cairns A.J.G. , Blake D. , Dowd K., Coughlan G. , Epstein D. , Ong A. , Balevich I. (2007) *“A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England & Wales and the United States”*, Pension Institute Discussion Paper PI-0701, Cass Business School, City University
- Cairns A.J.G. , Blake D. , Dowd K., Coughlan G. , Epstein D. , Khallaf-Allah M. (2008) *“The plausibility of mortality density forecasts: an analysis of six stochastic mortality models”*, Pensions Institute, Discussion Paper PI-0801
- CEIOPS (2007) *“QIS3. Technical Specifications. Part I: instructions”*
- CEIOPS (2008) *“QIS4. Technical Specifications”*
- CEIOPS (2009) *“Rate Term Structures”*
- Chen H. , Cox S.H. (2007) *“Modeling mortality with jumps: Transitory effects and pricing implication to mortality securitization”*, Working paper, Georgia State University
- Colivicchi I. (2003) *“Le tavole di mortalità proiettate applicate alle polizze with profit”*, Quaderno n. 28
- Continuous Mortality Investigation (CMI) (2006) *“Stochastic projection methodologies: Further progress and P-splines model features, example results and implications”*, Working paper 20
- Continuous Mortality Investigation (CMI) (2007) *“Stochastic projection methodologies: Lee-Carter model features, example results and implications”*, Working paper 25
- Cox J. , Ingersoll J. , Ross S. (1985) *“A theory of the term-structure of interest rates”*, *Econometrica*, 53(2), 385-408
- Cox S. , Lin Y. (2007) *“Natural hedging of life and annuity mortality risk”*, *North American Actuarial Journal*, 11, 1-15
- Currie I.D. , Durban M. , Eilers P.H.C. (2004) *“Smoothing and forecasting mortality rates”*, *Statistical Modelling*, 4(4), 279-298
- Dahl M. (2004) *“Stochastic mortality in life insurance: market reserves and mortality-linked insurance contracts”*, *Insurance: Mathematics and Economics*, 35(1), 113-136
- Dahl M. , Møller T. (2006) *“Valuation and hedging of life insurance risks with systematic mortality risk”*, *Insurance: Mathematics and Economics*, 39(2), 193-217
- D’Amato V. (2007) *“Il fenomeno della longevità ed il rischio di modello: analisi e misura”*, Università degli Studi di Napoli, 4-6
- De Jong P. , Tickle L. (2006) *“Extending the Lee-Carter model of mortality projection”*, *Mathematical Population Studies*, 13, 1-18

- Denuit M. (2007) *“Comonotonic approximations to quantiles of life annuity conditional expected present value”*, Insurance: Mathematics and Economics, 42, 831-838
- Denuit M. , Dhaene J. (2007) *“Comonotonic bounds on the survival probabilities in the Lee-Carter model for mortality projections”*, Computational and Applied Mathematics, 203, 169-176
- Di Nardo E. (2006) *“Analisi delle componenti principali”*, Università degli Studi della Basilicata, 3-4
- Dowd K. , Blake D. , Cairns A.J.G. (2007) *“Facing up to uncertain life expectancy: the longevity fan charts”*, Pensions Institute, Discussion Paper PI-0703
- Hainaut D. , Devolder P. (2007) *“Mortality modelling with Lévy processes”*, Working paper, Université Catholique de Louvain, 42(1), 409-418
- IAA (2004) *“A global framework for insurer solvency assessment. Research Report of the Insurer Solvency Assessment Working Party, International Actuarial Association”*
- ISTAT (1997) *“L’evoluzione della mortalità in Italia”*
- ISTAT (2000) *“Tavole di mortalità della popolazione italiana – Regioni, province e grandi comuni”*
- ISTAT (2002) *“Cause di morte”*
- Jamshidian F. (1997) *“LIBOR and swap market models and measures”*, Finance and Stochastic, 1(4), 293-330
- JP Morgan Pension Advisory Group (2007) *“LifeMetrics: A tool for measuring and managing longevity and mortality risks”*, Technical Document Version 1.0
- Kirkby J. G. , Currie I. D. (2007) *“Smooth models of mortality with period shocks”*, In Proceedings of 22nd International Workshop on Statistical Modelling, Barcelona
- Lee R.D. , Carter L.R. (1992) *“Modeling and forecasting U.S. mortality”*, Journal of the American Statistical Association, 87(14), 659-675
- Lee R.D. , Miller T. (2001) *“Evaluating the performance of the Lee-Carter model for forecasting mortality”*, Demography, 38, 537-549
- Liao H. H. , Yang S. S. , Huang I. H. (2007) *“The design of securitization for longevity risk: pricing under stochastic mortality model with tranche technique”*, Paper Presented to the 11th APRIA Conference, Taipei
- Lin Y. , Cox S. (2005) *“Securitization of mortality risks in life annuities”*, The Journal of Risk and Insurance, 72(2), 227-252
- Mazzoleni P. (2009) *“Tecnica attuariale delle assicurazioni sulla vita”*, Università Cattolica del Sacro Cuore

- Mazzoleni P. (2010) *“Modelli matematici per i mercati finanziari”*, Università Cattolica del Sacro Cuore
- Milevsky M.A. , Promislow S.D. (2001) *“Mortality derivatives and the option to annuitise”*, Insurance: Mathematics and Economics, 29(3), 299-318
- Miltersen K.R. , Sandmann K. , Sondermann D. (1997) *“Closed-form solutions for term structure derivatives with log-normal interest rates”*, Journal of Finance, 52(1), 409-430
- Miltersen K.R. , Persson S.A. (2005) *“Is mortality dead? Stochastic forward force of mortality determined by no arbitrage”*, Working paper, University of Bergen
- Olivier P. , Jeffery T. (2004) *“Stochastic mortality models”*, Presentation to the Society of Actuaries of Ireland
- Pitacco E. , Denuit M. , Haberman S. e Olivieri A. (2009) *“Modelling longevity dynamics for pensions and annuity business”*, Oxford University Press
- Renshaw A.E. , Haberman S. (2003) *“Lee-Carter mortality forecasting with age-specific enhancement”*, Insurance: Mathematics and Economics, 33(2), 255-272
- Renshaw A.E. , Haberman S. (2006) *“A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors”*, Insurance: Mathematics and Economics, 38(3), 556-570
- Rosina A. (2010a) *“Modelli di mortalità”*, Università Cattolica del Sacro Cuore
- Rosina A. (2010b) *“Modelli di mortalità con frailty”*, Università Cattolica del Sacro Cuore
- Savelli N. (2009) *“Lezioni di Teoria del Rischio II: Solvency II e Quantitative Impact Studies”*, Università Cattolica del Sacro Cuore
- Savelli N. (2009) *“Modelli di Teoria del Rischio per il Life Underwriting Risk”*, Università Cattolica del Sacro Cuore
- Savelli N. , Clemente G.P. (2009) *“Il progetto Solvency II”*, Università Cattolica del Sacro Cuore
- Schrager D.F. (2006) *“Affine stochastic mortality”*, Insurance: Mathematics and Economics, 38(1), 81-97
- Smith A.D. (2005) *“Stochastic mortality modeling”*, Workshop on the Interface between Quantitative Finance and Insurance, International Centre for the Mathematical Sciences, Edinburgh
- Stallard E. (2006) *“Demographic issues in Longevity Risk Analysis”*, Journal of Risk and Insurance, 73(4), 575-609
- Wang S. H. (1996) *“Premium calculation by transforming the layer premium density”*, ASTIN Bulletin, Working Papers, 30

Wang S. H. (2002) *"A universal framework for pricing financial and insurance risk"*, ASTIN Bulletin, 32(2), 213-234

Wang S. H. (2004) *"Cat bond pricing using probability transform"*, The Geneva Papers on Risk and Insurance: Issues and Practice, 278, 19-29

Wills S. , Sherris M. (2008) *"Integrating Financial and Demographic Longevity Risk Models: An Australian Model for Financial Applications"*, AFIR 2008

Sitografia:

<http://demo.istat.it/index.html>

<http://ec.europa.eu/>

<https://web.actuaries.ie/>

<http://www.ania.it/>

<http://www.ceiops.org/>

<http://www.istat.it/>

<http://www.longevity-risk.org/>

<http://www.mortality.org/>

<http://www.mortalityrisk.org/>

<http://www.wikipedia.org/>

Appendice 1: tavole di mortalità simulate (maschi)

Età	l_x Medio	l_x 75° Percentile	Età	l_x Medio	l_x 75° Percentile
50	100000	100000	88	54730,74	58298,62
51	99706,60	99713,08	89	52125,31	55878,09
52	99391,28	99407,32	90	49466,62	53403,67
53	99052,56	99081,25	91	46758,74	50874,28
54	98688,62	98733,20	92	44016,47	48302,46
55	98297,80	98361,55	93	41245,66	45704,14
56	97878,22	97964,06	94	38460,88	43076,78
57	97427,98	97540,16	95	35678,94	40436,38
58	96945,16	97087,49	96	32913,19	37798,02
59	96427,36	96602,67	97	30179,77	35182,22
60	95872,39	96084,26	98	27497,86	32604,47
61	95277,89	95530,87	99	24883,94	30071,98
62	94641,49	94939,13	100	22375,25	27559,77
63	93960,58	94307,24	101	19982,93	25086,02
64	93232,43	93631,89	102	17717,19	22668,99
65	92454,50	92913,45	103	15587,05	20326,66
66	91624,24	92146,84	104	13600,10	18076,28
67	90738,07	91329,95	105	11762,27	15933,93
68	89793,18	90460,53	106	10077,59	13914,04
69	88786,33	89535,74	107	8548,10	12029,03
70	87714,99	88553,72	108	7173,68	10288,89
71	86575,58	87508,37	109	5952,10	8700,84
72	85364,72	86399,64	110	4878,98	7269,18
73	84080,42	85223,19	111	3947,98	5995,09
74	82719,84	83978,22	112	3150,96	4876,72
75	81279,83	82661,66	113	2478,23	3909,24
76	79757,59	81269,58	114	1918,94	3085,16
77	78151,91	79800,42	115	1461,38	2394,66
78	76460,53	78251,02	116	1093,41	1826,11
79	74680,75	76623,67	117	802,83	1366,57
80	72811,07	74911,79	118	577,78	1002,40
81	70851,13	73119,15	119	407,05	719,76
82	68802,49	71244,20	120	280,34	505,23
83	66665,14	69288,79	121	188,48	346,20
84	64441,09	67251,75	122	123,51	231,22
85	62131,42	65129,95	123	78,76	150,27
86	59739,73	62930,53	124	0,00	0,00
87	57271,10	60653,13			

Appendice 2: tavole di mortalità simulate (femmine)

Età	l_x Medio	l_x 75° Percentile	Età	l_x Medio	l_x 75° Percentile
50	100000	100000	88	62269,23	66321,23
51	99835,22	99839,18	89	59416,37	63766,90
52	99656,65	99666,72	90	56431,36	61075,14
53	99463,10	99481,72	91	53323,04	58262,14
54	99253,46	99283,66	92	50100,56	55323,80
55	99026,36	99071,50	93	46780,24	52271,96
56	98780,30	98843,02	94	43380,22	49126,14
57	98513,43	98596,13	95	39920,44	45892,62
58	98224,02	98329,65	96	36426,88	42597,86
59	97910,16	98041,22	97	32929,75	39251,30
60	97569,60	97729,17	98	29467,00	35888,76
61	97200,12	97392,00	99	26073,90	32545,14
62	96799,67	97027,33	100	22561,25	28860,31
63	96365,40	96634,03	101	19035,21	24954,75
64	95894,16	96208,51	102	15608,85	20971,23
65	95383,14	95747,91	103	12393,43	17064,85
66	94828,94	95248,89	104	9488,32	13389,30
67	94228,24	94708,66	105	6970,80	10081,11
68	93577,24	94123,38	106	4887,68	7244,13
69	92871,86	93490,41	107	3250,52	4937,36
70	92107,45	92806,40	108	2035,94	3169,30
71	91279,75	92067,47	109	1191,33	1900,60
72	90383,83	91268,93	110	645,31	1055,08
73	89414,60	90405,75	111	320,20	536,52
74	88366,16	89472,96	112	143,80	246,94
75	87234,23	88466,57	113	57,66	101,48
76	86012,23	87379,29	114	20,32	36,65
77	84694,12	86209,87	115	6,18	11,43
78	83273,84	84951,18	116	1,59	3,01
79	81745,95	83598,55	117	0,34	0,66
80	80103,81	82143,32	118	0,06	0,12
81	78342,11	80583,40	119	0,01	0,02
82	76454,74	78912,01	120	0,00	0,00
83	74436,33	77124,10	121	0,00	0,00
84	72282,84	75215,60	122	0,00	0,00
85	69991,29	73186,97	123	0,00	0,00
86	67558,46	71025,86	124	0,00	0,00
87	64985,16	68738,66			