

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI  
FIRENZE**

FACOLTÀ DI ECONOMIA

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE STATISTICHE ED  
ATTUARIALI

TESI DI LAUREA IN TEORIA DEL RISCHIO

TITOLO DELLA TESI

Il criterio della probabilità di rovina come strumento di gestione  
del rischio: modelli classici e nuove tecniche finanziarie.

Relatore: Chiar.mo Prof.  
Marcello Galeotti

Tesi di laurea di:  
Chiara Parrini

# INDICE

<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
<b>1. Il modello di Lundberg-Cramer</b>	<b>10</b>
1.1 Descrizione del modello ed aderenza con la realtà . . .	10
1.2 Espressione della probabilità di rovina . . . . .	14
1.3 Esponente di Lundberg e sue limitazioni . . . . .	18
1.4 Disuguaglianza di Lundberg . . . . .	20
1.5 Approssimazione di Lundberg-Cramer . . . . .	21
1.6 Riassicurazione e probabilità di rovina . . . . .	23
1.7 La gravità della rovina . . . . .	28
1.8 La trasformazione di Laplace . . . . .	30
1.9 Approssimazioni per $\Psi$ . . . . .	32
1.10 Il tempo di rovina . . . . .	39
<b>2. Il processo di rinnovamento</b>	<b>44</b>
2.1 Concetti generali . . . . .	44
2.2 Il modello di rinnovamento . . . . .	49
2.3 Esponente di Lundberg . . . . .	50
2.4 Disuguaglianza di Lundberg . . . . .	55
2.5 Approssimazione di Lundberg –Cramer . . . . .	57
2.6 Approssimazione di propagazione . . . . .	60
<b>3. Alcune osservazioni sulle distribuzioni</b>	
<b>heavy-tail</b>	<b>62</b>
3.1 Perché le distribuzioni heavy-tail sono pericolose? . . . .	62
3.2 Come scoprire se una distribuzione è heavy-tail . . . . .	66
3.2.1 La vita media residua . . . . .	66
3.2.2 Come stimare la funzione che individua la vita media residua . . . . .	68
3.3 Stima dei parametri . . . . .	72
3.3.1 La distribuzione Esponenziale . . . . .	72
3.3.2 La distribuzione Gamma . . . . .	72
3.3.3 La distribuzione di Weibull . . . . .	73
3.3.4 La distribuzione Log-Normale . . . . .	74
3.3.5 La distribuzione di Pareto . . . . .	74
3.3.6 Stime dei parametri basandosi sui dati delle assicurazioni contro gli incendi . . . . .	77

3.4	Verifica del modello prescelto . . . . .	80
3.4.1	Q-Q-Plots . . . . .	80
3.4.2	L'esempio dell'assicurazione contro gli incendi . . . . .	85
<b>4.</b>	<b>Il modello di rischio Markoviano</b>	<b>88</b>
4.1	Concetti generali ed alcune definizioni . . . . .	88
4.2	Classificazione dei rischi . . . . .	91
4.3	Modello di rischio Markoviano . . . . .	92
4.4	L'esponente e la disuguaglianza di Lundberg . . . . .	95
4.5	L'approssimazione di Lundberg-Cramer . . . . .	96
<b>5.</b>	<b>La securitizzazione</b>	<b>97</b>
5.1	La rovina nel caso di rischi proporzionali alle riserve libere . . . . .	99
5.1.1	Introduzione . . . . .	99
5.1.2	Modello con barriera . . . . .	100
5.1.3	Un modello con orizzonte di tempo aleatorio . . . . .	102
5.1.4	Esempi numerici . . . . .	103
5.2	Investimenti ottimali per gli assicuratori . . . . .	105
5.2.1	Introduzione . . . . .	105
5.2.2	Equazione di Bellman . . . . .	108
5.2.3	Esistenza di una soluzione nell'equazione di Bellman . . . . .	109
5.2.4	Illimitatezza di $A(s)$ . . . . .	110
5.2.5	Alcuni casi particolari . . . . .	111
5.2.6	Esempi numerici . . . . .	113
<b>6.</b>	<b>Rischi catastrofici e prodotti finanziari</b>	<b>115</b>
6.1	Introduzione . . . . .	115
6.2	I CAT-futures . . . . .	116
6.3	Le opzioni PCS . . . . .	117
6.4	CAT-futures e opzioni PCS . . . . .	118
6.5	Strumenti finanziari e riassicurazione . . . . .	120
<b>7.</b>	<b>Valutazione dei prodotti finanziari</b>	<b>122</b>
7.1	Un metodo basato su sinistri realmente dichiarati . . . . .	122
7.1.1	Il modello e le ipotesi . . . . .	123
7.1.2	Prezzo del CAT-future . . . . .	126
7.1.3	L'errore di approssimazione . . . . .	130
7.2	Valutazione delle opzioni PCS . . . . .	135
7.2.1	Il modello . . . . .	135
7.2.2	Calcolo di una misura neutrale al rischio . . . . .	137

7.2.3	La misura neutrale al rischio di Esscher per il periodo delle perdite . . . . .	139
7.2.4	La misura neutrale al rischio di Esscher per il periodo di sviluppo . . . . .	141
7.2.5	Prezzo dell'opzione PCS . . . . .	142
7.3	Valutazione di contratti futures mediante l'utilizzo di opzioni asiatiche . . . . .	144
7.3.1	Il modello . . . . .	144
7.3.2	Ipotesi generali . . . . .	145
7.3.3	Contratti futures basati su perdite dovute a rischi non catastrofici . . . . .	146
7.3.4	Contratti futures basati su perdite dovute a rischi catastrofici . . . . .	149
<b>8.</b>	<b>Specificazione di contratti finanziari ad uso assicurativo</b>	<b>153</b>
8.1	Premesse . . . . .	153
8.2	Prezzo di equilibrio di mercato . . . . .	155
8.3	Contratti futures per fare fronte ad eventi catastrofici	156
8.4	Il premio . . . . .	158
8.5	Particolari contratti futures per usi assicurativi . . . . .	158
8.6	Prezzo dei futures convenzionali e puri . . . . .	160
8.7	Contratti futures limitati . . . . .	161
8.8	Opzioni call futures . . . . .	163
8.9	L'oscillazione della call . . . . .	164
8.10	Conclusioni . . . . .	166
<b>9.</b>	<b>La riassicurazione</b>	<b>167</b>
9.1	Premesse . . . . .	167
9.2	Alcuni contratti di riassicurazione . . . . .	169
9.3	Strategie ottimali di riassicurazione . . . . .	174
9.4	Gli indici estremi . . . . .	175
9.5	Indice dei risarcimenti elevati . . . . .	177
	<b>Conclusioni</b>	<b>178</b>
	<b>Appendice</b>	<b>182</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>185</b>

## INTRODUZIONE

Lo scopo del lavoro è quello di analizzare la possibilità che una compagnia di assicurazione ha di durare nel tempo e di ottenere buoni risultati. In altre parole vengono ricercati dei criteri di stabilità. Adottando un linguaggio formale, consideriamo un processo stocastico la cui variabile aleatoria è quella delle riserve tecniche,  $C_t$ .  $C_t$  è individuata dal capitale iniziale,  $u$ , dall'ammontare dei premi incassati fino alla data  $t$ ,  $\pi_t$ , e dall'ammontare dei risarcimenti pagati fino a quella data,  $S_t$ . Quindi:

$$C_t = u + \pi_t - S_t.$$

Tale variabile aleatoria dipende, inoltre, da alcune scelte che la compagnia effettua a priori: in particolare, il tasso di caricamento sui premi,  $\alpha$ , il capitale iniziale,  $u$ , ed il livello assoluto di riassicurazione,  $C$ , dette variabili decisionali. Se definiamo un insieme di realizzazioni del processo  $A$  come non ammissibile, l'obiettivo è quello di trovare valori delle variabili decisionali che rendono la probabilità di  $A$  inferiore ad una certa soglia,  $p_0$ , tollerata dalla compagnia e detta probabilità di rovina [9].

Ovvero:

$$P(C_t \in A) \leq p_0.$$

Chiaramente, la probabilità che si verifichino realizzazioni non ammissibili è funzione delle variabili decisionali. In particolare, se il capitale iniziale o il tasso di caricamento sui premi aumenta, anche il valore delle riserve cresce; cosa, invece, che non è possibile affermare con certezza se aumenta il livello assoluto di riassicurazione. Infatti quest'ultimo evento comporta, da una parte, il trattenimento di un maggior volume di premi, ma dall'altra l'obbligo di risarcire una maggior quantità di danni. Il più comune tipo di insieme di realizzazioni considerato come non ammissibile è quello per cui il valore delle riserve in qualche determinato istante divenga negativo. Denotando un tale insieme come rovina, possiamo, ulteriormente, distinguerne 4 tipi, a seconda

che siano effettuate valutazioni su orizzonti limitati o illimitati e mediante osservazioni discrete o continue. Ecco allora che è possibile individuare una probabilità minima di rovina, quella con orizzonti limitati ed osservazioni discrete ed una massima, quella con orizzonti illimitati ed osservazioni continue, detta anche probabilità di rovina asintotica.

Per cominciare tratteremo il problema analizzando il modello classico o di Lundberg-Cramer.

In questo caso:

$$C_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

dove  $u$  è il capitale iniziale,  $c$  è il premio annuo,  $N_t$  è un processo di Poisson di parametro  $\lambda$  che rappresenta il numero di sinistri nell'intervallo di tempo  $(0, t]$ , indipendente dall'ammontare dei singoli risarcimenti,  $Y_i$ , variabili aleatorie positive ed i.i.d.

L'ideale sarebbe riuscire a determinare una formula esplicita per la probabilità di rovina,  $\Psi(u)$ . Questo è possibile nel caso in cui i risarcimenti abbiano una distribuzione esponenziale di parametro  $\alpha$ .

In tal caso:

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-\left(\alpha - \frac{\lambda}{c}\right)u}.$$

Qualora, però, non vi sia la possibilità di ottenere un'espressione precisa per la probabilità in questione, si ricorre a metodi ausiliari.

Ad esempio, la trasformazione di Laplace della  $\Psi(u)$  è più facilmente calcolabile, e, mediante la sua espressione, è possibile risalire a quella della probabilità di rovina ricercata. Un'alternativa può essere quella di utilizzare equazioni integro-differenziali. L'idea consiste nell'esprimere  $\Psi(u)$  come soluzione di tali equazioni e trovare, poi, la soluzione mediante metodi numerici.

I principali risultati ottenuti nel primo capitolo sono:

- la disuguaglianza di Lundberg:

$$\Psi(u) < e^{-Ru}, \quad (1)$$

dove  $R$  è il cosiddetto esponente di Lundberg dato dalla soluzione dell'equazione

$$\lambda(M_Y(r) - 1) - cr = 0;$$

- l'approssimazione di Lundberg-Cramer:

$$\Psi(u) \sim Ce^{-Ru}, \quad (2)$$

dove  $C = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda M'_Y(R) - c}$ .

Tale approssimazione è importante non solo per la sua semplicità, ma anche per il fatto che risulta essere abbastanza precisa non solo per valori grandi di  $u$ , ma, spesso, per ogni  $u \geq 0$ .

La disuguaglianza (1), invece, rispetto all'approssimazione (2), ha il vantaggio di non coinvolgere approssimazioni, individuando una limitazione superiore per la probabilità di rovina. Vengono fornite altre approssimazioni per la  $\Psi$ : quella di De Vylder, quella di Beekman-Bowers e quella di propagazione. Queste ultime, però, risultano meno importanti, anche perché meno precise di quella di Lundberg-Cramer. Infine, viene analizzata la rovina in presenza della riassicurazione. Il risultato importante consiste nel fatto che è possibile determinare la parte di rischio da cedere per ottenere livelli di  $\Psi(u)$  tollerati.

Il secondo capitolo affronta le stesse problematiche mediante la teoria del rinnovamento. Dopo avere introdotto alcune grandezze fondamentali ed avere enunciato i risultati basilari di tale teoria, dimostriamo che, ipotizzando un modello di rinnovamento, la disuguaglianza di Lundberg continua a valere, mentre per l'approssimazione di Lundberg-Cramer si hanno delle leggere modifiche.

Anche in questo caso, inoltre, viene fornita l'approssimazione di propagazione oltre ad alcuni esempi relativi al calcolo di  $R$  nel caso di particolari distribuzioni adottate per l'ammontare dei risarcimenti.

Il capitolo 3 è dedicato all'analisi dei dati. È importante, infatti, osservare come i dati si presentano nella realtà per rispondere ad alcune domande fondamentali, del tipo:

- Qual è la probabilità che il massimo danno del prossimo anno non ecceda un certo livello  $x$ ?
- Qual è la probabilità che il massimo danno del prossimo anno ecceda tutti i livelli raggiunti negli anni precedenti?

Ciò è indispensabile per poter calcolare un premio sufficiente a fare fronte alle perdite previste, e, se necessario, decidere di stipulare una qualche forma di riassicurazione. Occorre, dunque, essere in grado di individuare il modello che meglio rappresenta i dati a disposizione.

Per prima cosa è necessario capire se i valori sono generati da una distribuzione heavy-tail o light-tail, cosa che è possibile fare, ad esempio, analizzando la quantità

$$E[Y_i - M / Y_i > M],$$

detta vita media residua, dove  $M$  è un valore opportunamente prefissato.

Può anche essere utile, come analisi preliminare, disegnare un'istogramma, in modo da avere un'idea sull'andamento dei dati. Una volta scelta la distribuzione ritenuta più opportuna, occorre individuarne i parametri più appropriati e, per questo, sono stati presentati alcuni possibili metodi.

Per concludere, è necessario verificare la bontà del modello prescelto. Ciò può essere effettuato mediante l'utilizzo dei cosiddetti grafici Q-Q-Plots. Questi presentano un andamento lineare qualora il modello adottato sia coerente con la realtà, ed inoltre sono in grado di ben evidenziare eventuali valori erratici, distanti, cioè, dall'andamento generale; oppure errori di forma, come, ad esempio, una maggiore o minore asimmetria o l'appartenenza ad una classe di distribuzioni con una coda più o meno pesante.



Tutti questi aspetti sono analizzati nel terzo capitolo dove vengono riportati due esempi di dati reali di assicurazioni in Svezia e Danimarca.

Nel quarto capitolo sono analizzati i processi markoviani, considerando la possibilità di diverse intensità di frequenza dei sinistri in un determinato intervallo di tempo. Dopo avere presentato alcuni aspetti fondamentali ed una possibile classificazione dei rischi, sono trattate le stesse problematiche esaminate in precedenza, ipotizzando un processo di rischio markoviano. Ancora una volta è possibile ottenere una disuguaglianza di Lundberg ed una approssimazione di Lundberg-Cramer, anche se con risultati leggermente diversi.

Dal capitolo 5 al capitolo 9 l'attenzione è invece rivolta alle modalità con cui gli assicuratori possono agire, in pratica, per tutelarsi dai rischi assunti.

Il capitolo 5 introduce la possibilità di investire parte delle riserve in prodotti finanziari, considerando, in particolare, il caso di rischi proporzionali alle riserve libere. Dimostriamo che è possibile giungere ad un risultato esplicito solo nel caso particolare in cui i risarcimenti abbiano una distribuzione esponenziale. Vengono poi presi in esame gli investimenti ottimali che un assicuratore può attuare. Per analizzare tale aspetto si fa riferimento all'equazione di Bellman, un'equazione integro-differenziale non lineare del secondo ordine. Anche in questo caso sono presentati dei risultati ottenuti con particolari condizioni.

Il capitolo 6 introduce due prodotti finanziari offerti dal mercato per fronteggiare i rischi catastrofici, quelli, cioè, che possono generare danni elevati. Oltre a descrivere le loro caratteristiche, sono illustrate le loro differenze ed i vantaggi che entrambi offrono. Infine, viene fatto un confronto fra questi prodotti e la riassicurazione, altro strumento destinato a tutelarsi dai rischi.

Il capitolo 7 illustra alcuni metodi di valutazione dei prodotti finanziari precedentemente introdotti. Tali metodi si differenziano per le ipotesi adottate e per gli strumenti utilizzati nei calcoli.

La prima procedura di valutazione è importante perché consente di ottenere un'approssimazione che risulta essere abbastanza buona e permette di semplificare l'espressione che rappresenta il prezzo del prodotto finanziario.

La seconda procedura, che si basa sulla trasformata di Esscher, permette di tenere di conto delle difficoltà di calcolo riscontrate qualora si utilizzino distribuzioni heavy-tail, maggiormente aderenti alla realtà.

Infine, la terza procedura si basa su metodi di calcolo utilizzati per le opzioni asiatiche, poiché queste ultime risultano simili, per certi aspetti, ai prodotti esaminati.

Il capitolo 8 è dedicato alla presentazione di alcuni contratti specifici ad uso assicurativo. Di questi è riportata la valutazione effettuata mediante l'uso dei metodi proposti nel capitolo 7.

Per concludere, il capitolo 9 analizza la riassicurazione. Qui, viene introdotto un metodo utilizzato dall'assicuratore per valutare la necessità o meno di ricorrere ad un tale strumento e ne sono presentate le principali forme presenti sul mercato.

Successivamente si cerca di individuare i livelli ottimali di riassicurazione.

A questo scopo vengono definite due grandezze che consentono di capire in che misura i singoli risarcimenti contribuiscono all'ammontare complessivo. Infatti, talvolta, eventi rari possono apportare contributi talmente notevoli al risarcimento complessivo da non potere essere trascurati. È quindi necessario potere avere un'idea del comportamento dei valori estremi, come le due grandezze introdotte consentono di fare.

# CAPITOLO 1

## IL MODELLO DI LUNDBERG – CRAMER

### 1.1 Descrizione del modello ed aderenza alla realtà

Per cominciare consideriamo, in dettaglio, il modello di Lundberg – Cramer o di rischio classico [21],[41]. Lundberg ipotizzò un modello in cui i singoli risarcimenti fossero distribuiti come una Poisson composta ed indipendenti. Da un'importante proprietà di tale distribuzione si ricava che anche il risarcimento complessivo, somma dei singoli risarcimenti, ha la stessa distribuzione ed è, inoltre, possibile calcolare l'esatto valore del premio, perché conosciamo valore atteso e varianza, insieme ai principi più comunemente adottati, di un tale tipo di distribuzione, che descrive il risarcimento cumulato. Lundberg suppose, inoltre, che il premio fosse pagato in modo continuo nel corso dell'anno e che fosse proporzionale all'intervallo di tempo considerato, come risulta essere, ad esempio, adottando principi di calcolo del valore medio o della varianza. Con queste ipotesi, le riserve sono pari a:

$$C_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

dove  $u$  è il capitale iniziale,  $c$  è il premio annuo,  $N_t$  è un processo di Poisson di parametro  $\lambda$  che rappresenta il numero di sinistri nell'intervallo di tempo  $(0, t]$ , indipendente dall'ammontare dei singoli risarcimenti  $Y_i$ , variabili aleatorie positive ed i.i.d. Sia  $G$  la funzione di distribuzione della variabile aleatoria  $Y$ , risarcimento per un singolo danno,  $\mu_n = E[Y^n]$ ,  $M_Y(r) = E[\exp(rY)]$ , la funzione generatrice dei momenti, e supponiamo che  $\mu = \mu_1$  sia minore di infinito e che  $G(x) = 0$  per  $x \leq 0$  (cioè che non vi siano danni negativi).

Il tempo di rovina,  $\tau$ , è definito come:

$$\tau = \text{Inf}\{t > 0 : C_t < 0\},$$

mentre la probabilità di rovina nell'intervallo  $(0, t]$  con capitale iniziale  $u$  è data da:

$$\Psi(u, t) = P[\tau \leq t / C_0 = u] = P[\text{Inf}_{0 < s \leq t} C_s < 0].$$

Estendendo l'ampiezza dell'intervallo all'infinito abbiamo:

$$\Psi(u) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \Psi(u, t) = P[\text{Inf}_{t > 0} C_t < 0].$$

Chiaramente  $\Psi(u, t)$  decresce al crescere di  $u$  e cresce al crescere di  $t$ . Considerando gli istanti in cui si verificano i vari sinistri,  $T_1, T_2, T_3, \dots$ , con la convenzione  $T_0 = 0$ , e definendo  $X_i = c(T_i - T_{i-1}) - Y_i$ , è possibile esprimere il processo delle riserve come una passeggiata aleatoria del tipo :

$$C_{T_n} = u + \sum_{i=1}^n X_i,$$

dove  $\sum_{i=1}^n X_i$  indica l'ammontare degli utili fino all'istante dell'ennesimo sinistro.

Ora:

$$\Psi(u) = P[\text{Inf}_{n \in N} C_{T_n} < 0]$$

e si può dimostrare che  $\Psi(u) = 1$  se  $E(X_i) \leq 0$ . Assumeremo pertanto  $E(X_i) > 0$ , il che implica  $c/\lambda - \mu > 0$ , cioè  $c > \lambda\mu$ , cioè  $E[C_t - u] > 0$ .

Ricordando che:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N_t} Y_i\right] = t\lambda\mu,$$

la condizione precedente comporta che ciò che entra sia maggiore, in media, di ciò che esce, ed è detta condizione di utile netto. Se tale condizione è soddisfatta,  $E[C_{T_n}]$  tende all'infinito per  $n$  che tende all'infinito.

Poiché  $\text{Inf}[C_t - u : t > 0] = \text{Inf}[C_{T_n} - u : n \geq 1]$ , si dimostra che il limite di  $\Psi(u)$  è 0 per  $u$  che tende all'infinito. Una possibile approssimazione per  $\Psi(u)$ , infatti, è:

$$\Psi(u) \approx \frac{1 - H(\infty)}{\alpha\beta} e^{-\alpha u},$$

dove

$$H(\infty) = \frac{\mu}{c} \int_0^{+\infty} (1 - G(y)) dy = \frac{\mu}{c} E(X),$$

che, dalla condizione di utile netto, assumerà un valore minore di 1.

$\alpha$  è invece quel valore che permette di verificare la seguente uguaglianza:

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha y} dH(y) = 1.$$

Mentre  $\beta$  è la derivata dell'espressione precedente, ossia:

$$\beta = \int_0^{+\infty} y e^{\alpha y} dH(y).$$

Sarebbe inoltre possibile verificare, semplicemente svolgendo i calcoli, che  $\alpha$  non è altro che l'esponente di Lundberg,  $R$ . Poiché:

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1 - H(\infty)}{\alpha\beta} e^{-\alpha u} = 0,$$

e, sempre nel caso in cui  $u$  tenda all'infinito, il limite del rapporto tra  $\Psi(u)$  e la suddetta approssimazione è 1, segue che:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(u) = 0,$$

come volevasi dimostrare.

Tale modello, però, non rispecchia pienamente la realtà. Ad esempio, la distribuzione del numero di sinistri in intervalli della stessa ampiezza non è sempre la stessa nel corso del tempo. Per tenerne conto potremmo assumere che  $N_t$  sia un processo di Poisson, anziché di parametro  $\lambda$ , di parametro  $\lambda(t)$ , dipendente dal tempo. Inoltre, anche il numero di contratti nel portafoglio,  $a(t)$ , varia nel tempo. Possiamo supporre che  $N_t$  sia un processo di Poisson disomogeneo di parametro  $a(t)\lambda(t)$  [43].

Sia

$$\Delta(t) = \int_0^t a(s)\lambda(s)ds.$$

Denotata con  $\Delta^{-1}(t)$  l'inversa di tale funzione, è definito un nuovo processo stocastico  $M_t = N_{\Delta^{-1}(t)}$  [55]. Si può pensare che anche il premio vari nel tempo, cioè  $c_t = ca(t)\lambda(t)$ , in base, ad esempio, al diverso numero di contratti presenti nel portafoglio. Allora il premio richiesto in  $(0, t]$  sarà pari a  $c\Delta(t)$ . Se definiamo  $\tilde{C}_t = C_{\Delta^{-1}(t)}$ , si ottiene:

$$\tilde{C}_t = u + c\Delta(\Delta^{-1}(t)) - \sum_{i=1}^{N_{\Delta^{-1}(t)}} Y_i = u + ct - \sum_{i=1}^{M_t} Y_i.$$

Anche questo è un processo di Lundberg- Cramer, dove, al posto del tempo di “calendario”, si è utilizzato il cosiddetto tempo operativo, ovvero una funzione non decrescente del tempo che in 0 vale 0, all'infinito vale infinito e che è uguale al valore atteso del numero di sinistri che avvengono fino ad un certo istante. In pratica, poi, la rovina non dovrebbe mai verificarsi. Infatti, qualora una compagnia di assicurazione si accorga che il valore delle sue riserve decresce, provvederà ad innalzare il livello dei premi. Inoltre, disponendo di più portafogli, anche se vi fosse rovina in uno di questi, ciò non implicherebbe il fallimento. In realtà, quindi, la rovina non serve ad indicare la bancarotta, ma è utile ad individuare i livelli ottimali di premio o di riassicurazione ed è quindi strumento per ottenere una gestione ottimale. Anche il termine riserva non è molto appropriato. Infatti, qualora una compagnia detenga più del dovuto, destinerà tale parte a chi possiede delle sue quote mediante l'assegnazione dei dividendi. Per individuare il modo ottimale di distribuire tali dividendi, si suppone che il premio dipenda dalle riserve, ma, nonostante ciò, ottenere buoni risultati è molto difficile.

## 1.2 Espressione della probabilità di rovina.

Osserviamo che, se non vi è stata rovina nell'intervallo  $[0, h]$ , in  $h$  inizia un nuovo processo di Lundberg-Cramer con capitale iniziale pari a  $C_h$ . Consideriamo adesso la probabilità di non rovina  $\delta(u) = 1 - \Psi(u)$ , cominciando dal caso di osservazioni discrete ed orizzonti limitati. Dato un intervallo  $[0, n]$ , avremo non rovina qualora i danni che si verificano in questo periodo siano tutti inferiori al capitale iniziale più i premi incassati nei vari anni, cioè:

$$A_n^c = \{S_1 \leq u + \pi_1, S_2 \leq u + \pi_2, \dots, S_n \leq u + \pi_n\}.$$

Questo evento, che rappresenta la non rovina, può anche essere espresso come:

$$A_n^c = \{S_1 \leq u + \pi_1, S_2 - S_1 \leq u + \pi_2 - S_1, \dots, S_n - S_{n-1} \leq u + \pi_n - S_{n-1}\}.$$

Poichè il processo  $S_t$  è stato ipotizzato Poisson - Composto, si ha che gli incrementi sono indipendenti e quindi, detta  $F(x) = P[S_k - S_{k-1} \leq x]$ , è possibile esprimere la probabilità di non rovina mediante la "convoluzione incompleta"

$$P(A_n^c) = \int_{X_1=-\infty}^{u+\pi_1} \int_{X_2=-\infty}^{u+\pi_2-X_1} \dots \int_{X_{n-1}=-\infty}^{u+\pi_{n-1}-(X_1+X_2+\dots+X_{n-2})} F[u + \pi_n - (X_1 + \dots + X_{n-1})] dF(X_{n-1}) \dots dF(X_1).$$

La formula precedente sarebbe, infatti, quella di una convoluzione del tipo  $F^{*n}(u + \pi_n)$ , qualora gli estremi superiori degli integrali fossero uguali a  $+\infty$ , mentre invece ci fermiamo prima proprio per non rovinarci. Chiaramente la probabilità di rovina è:

$$P(A_n) = 1 - P(A_n^c).$$

Questa formula, che individua il metodo di calcolo della probabilità di rovina, ha, però, l'inconveniente di risultare di difficile valutazione. Di tale probabilità è stata fornita una stima teorica, che risulta tutt'oggi importante per avere

introdotto il cosiddetto esponente o costante di Lundberg. Tale stima ha la forma:

$$P(A_n) \leq e^{-Ru}$$

dove  $R > 0$  è appunto la costante di Lundberg. Come si vede la probabilità di rovina “stimata” decresce al crescere delle riserve iniziali, come è facilmente intuibile. Le ipotesi che rendono valida tale stima sono:

- 1) Il premio è proporzionale al tempo
- 2) Esiste un valore  $r > 0$  per cui la funzione generatrice dei momenti è convergente, cioè:

$$M_Y(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ur) dG(x) < \infty$$

- 3) Per un  $r$  per cui vale la seconda ipotesi vale la disuguaglianza:

$$1 + \frac{c}{\lambda} r - M_Y(r) \geq 0$$

Si dimostra che, data la condizione 1 e per un  $r$  che soddisfa 2 e 3

$$P(A_n) \leq e^{-ru}.$$

L'esponente di Lundberg è definito da:

$$R = \text{Sup} \{ r \text{ tali che soddisfano 2 e 3 } \}.$$

Questo è, infatti, il valore che dà la stima migliore, perché permette di ottenere l'approssimazione per eccesso più piccola. Infatti:

$$P(A_n) \leq e^{-Ru} \leq e^{-ru}.$$

Interpretiamo adesso le ipotesi. La seconda esprime il fatto che la distribuzione dei singoli risarcimenti non sia di tipo heavy-tail. Infatti la funzione generatrice dei momenti è finita per almeno un valore, mentre le distribuzioni heavy-tail hanno funzioni generatrici dei momenti pari ad infinito per ogni valore  $r > 0$ .

La terza ipotesi equivale ad affermare l'esistenza di un caricamento positivo. Se consideriamo, infatti, la funzione

$$\theta(r) = 1 + \frac{c}{\lambda} r - M_Y(r)$$



e supponiamo risarcimenti finiti, cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dG(x) < \infty,$$

ciò, insieme alla seconda ipotesi, implica che  $M_Y(x)$  esista finito in  $[0, r]$  e che  $M'_Y(0) = E(Y) = \mu < +\infty$ .

Ora  $\theta(0) = 0$  e  $\theta'(0) = c/\lambda - M'_Y(0) = (c/\lambda) - \mu$ . Se tale derivata fosse non positiva, la funzione  $\theta(r)$ , partendo da 0 ed essendo strettamente concava, decrescerebbe e in  $r > 0$  sarebbe inferiore a 0 contraddicendo l'ipotesi:

$$\theta(r) = 1 + (c/\lambda)r - M_Y(r) \geq 0.$$

Dunque  $\theta'(0) = (c/\lambda) - \mu > 0$ , cioè  $c > \lambda\mu$ , implica che il premio annuo  $c$  sia maggiore del premio equo pagato in quell'anno e quindi vi sia la presenza di un caricamento positivo. Questa condizione, che precedentemente avevamo chiamato utile netto, deriva dall'aver assunto una probabilità positiva di non rovina. Da quanto visto, inoltre, deriva che  $R$  è soluzione di  $\theta(R) = 0$ .

Consideriamo adesso il caso continuo. Esprimiamo la probabilità di non rovina in un intervallo  $[0, h]$  basandoci sulla possibilità che vi siano o meno sinistri in tale periodo:

$$\begin{aligned} \delta(u) &= (1 - \lambda h + o(h))\delta(u + ch) + (\lambda h + o(h))(E[\delta((u - Y_1)^+)] + o(1) + o(h)) = \\ &= (1 - \lambda h)\delta(u + ch) + \lambda h \int_0^u \delta((u - y)^+) dG(y) + o(h), \end{aligned}$$

dove  $E[\delta(u - Y_1)^+]$  esiste perché  $\delta(u)$  è crescente. Si nota che :

$$\int_0^u \delta((u - y)^+) dG(y) = \int_0^u \delta(u - y) dG(y).$$

Riordinando i termini otteniamo:

$$c \frac{\delta(u + ch) - \delta(u)}{ch} = \lambda [\delta(u + ch) - \int_0^u \delta(u - y) dG(y)] + o(1).$$

Se facciamo tendere  $h$  a 0 notiamo che  $\delta(u)$  è differenziabile. Dunque  $\delta(u)$  non è solo continua, ma anche differenziabile in ogni punto dove  $G(u)$  è continua.

La derivata è:

$$c\delta'(u) = \lambda[\delta(u) - \int_0^u \delta(u-y)dG(y)]. \quad (1.1)$$

La (1.1) è un'equazione integro-differenziale che consente, almeno teoricamente, di ricavare  $\delta(u)$ .

D'altra parte, considerando la non rovina al primo sinistro, possiamo scrivere  $\delta(u)$  come:

$$\delta(u) = \int_0^{u+ct} \int_0^{+\infty} \delta(u+ct-x)\lambda t \exp(-\lambda t)dG(x),$$

dove il processo di conta di sinistri ha una distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda$  ed il primo sinistro, accorso all'istante  $t$ , è di ammontare  $x$ . Confrontando tale integrale con la precedente equazione differenziale, si ricava:

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(u-y)(1-G(y))dy.$$

Notiamo che:

$$\int_0^{+\infty} (1-G(y))dy = E(Y) = \mu.$$

Se facendo tendere  $u$  all'infinito assumiamo che  $\delta(u)$  tenda ad 1, abbiamo:

$$(1-\delta(0))c = \lambda \int_0^{+\infty} (1-G(y))dy = \lambda\mu \text{ cioè } \delta(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}.$$

Mediante questi valori e la formula che esprime  $\delta(u)$ , otteniamo per la probabilità di rovina  $\Psi(u)$  la formula:

$$\Psi(u) = 1 - \delta(u) = \frac{\lambda\mu}{c} - \frac{\lambda}{c} \int_0^u (1-\Psi(u-y))(1-G(y))dy,$$

ovvero [22]

$$\begin{aligned} c\Psi(u) &= \lambda[\mu - \int_0^u (1-\Psi(u-y))(1-G(y))]dy = \\ &= \lambda(\int_u^{+\infty} (1-G(y))dy + \int_0^u \Psi(u-y)(1-G(y))dy) \end{aligned} \quad (1.2)$$

che, in pratica, esprime  $\Psi(u)$  mediante la distribuzione dei cosiddetti “salti record”. Dall'espressione trovata notiamo che la non rovina assume valore positivo qualora  $\delta(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} > 0$ , che implica  $c > \lambda\mu$ ; e cioè qualora si

abbia un caricamento positivo, un premio cioè superiore a quello equo, che ancora equivale alla condizione di utile netto.

Ipotizzando, a questo punto, che i risarcimenti abbiano una distribuzione esponenziale di parametro  $\alpha$ , l'equazione (1.1) diviene:

$$c\delta'(u) = \lambda[\delta(u) - \exp(-\alpha u) \int_0^u \delta(y) \alpha \exp(\alpha y) dy].$$

Differenziando di nuovo otteniamo:

$$\begin{aligned} c\delta''(u) &= \lambda[\delta'(u) + \alpha \exp(-\alpha u) \int_0^u \delta(y) \alpha \exp(\alpha y) dy - \alpha\delta(u)] = \\ &= \lambda\delta'(u) - \alpha c\delta'(u). \end{aligned}$$

La soluzione di quest'ultima equazione differenziale è data da:

$$\delta(u) = A + Be^{-\left(\alpha - \frac{\lambda}{c}\right)u}.$$

Poiché abbiamo imposto che  $\delta(u)$  tenda a 1 per  $u$  tendente all'infinito, segue  $A=1$ . Dunque, nel caso particolare in cui i danni siano distribuiti esponenzialmente, ( $\mu=1/\alpha$ ), si ha:

$$\delta(0) = 1 - \frac{\lambda}{\alpha c}, \quad \delta(u) = 1 - \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-\left(\alpha - \frac{\lambda}{c}\right)u} \quad \text{e} \quad \Psi(u) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-\left(\alpha - \frac{\lambda}{c}\right)u}.$$

### 1.3 Esponente di Lundberg e sue limitazioni

Adesso cerchiamo, come nel caso discreto, una stima della probabilità di rovina [36]. Consideriamo la funzione:

$$\theta(r) = \lambda(M_Y(r) - 1) - cr \quad (1.3)$$

dove  $M_Y(r)$  è la funzione generatrice dei momenti, se esiste finita.

Come già sappiamo, da questa espressione possiamo ricavare l'esponente di Lundberg. Cerchiamo, cioè, quel valore di  $r$  per cui  $\theta(r) = 0$ .

Un'ovvia soluzione è  $r = 0$ . Derivando  $\theta(r)$  abbiamo:

$$\theta'(r) = \lambda M_Y'(r) - c; \quad \theta''(r) = \lambda M_Y''(r) = \lambda E[Y^2 e^{ry}] > 0$$

il che implica che  $\theta(r)$  è strettamente convessa.

Inoltre per  $r = 0$ ,  $\theta'(r) = \lambda M'_Y(0) - c = \lambda\mu - c$ , che risulta essere minore di 0 per la condizione di utile netto. Allora tale equazione ha al più un'ulteriore soluzione  $R > 0$ , che è l'esponente di Lundberg. Nel caso che i risarcimenti abbiano una distribuzione esponenziale di parametro  $\alpha$ , la soluzione è data da:

$$\lambda \left( \frac{\alpha}{\alpha - r} - 1 \right) - cr = \frac{\lambda r}{\alpha - r} - cr = 0$$

e si trova  $R = \alpha - \frac{\lambda}{c}$ .

Ricordando, poi, che

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-\left(\alpha - \frac{\lambda}{c}\right)u},$$

si ottiene

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-Ru}.$$

In genere, però, è difficile calcolare l'esponente di Lundberg. Ecco allora che si cercano dei limiti inferiori e superiori. Osserviamo che:

$$1) \theta''(r) = \lambda E[Y^2 e^{rY}] > \lambda E[Y^2] = \lambda\mu_2,$$

$$2) \theta'(r) = \theta'(0) + \int_0^r \theta''(s) ds > -(c - \lambda\mu) + \lambda\mu_2 r$$

$$3) \theta(r) = \theta(0) + \int_0^r \theta'(s) ds > \lambda\mu_2 \frac{r^2}{2} - (c - \lambda\mu)r$$

Dall'ultima disuguaglianza, ponendo  $r = R$ , otteniamo:

$$0 = \theta(R) > R \left( \lambda\mu_2 \frac{R}{2} - (c - \lambda\mu) \right),$$

da cui ricaviamo il seguente limite superiore per  $R$

$$R < \frac{2(c - \lambda\mu)}{\lambda\mu_2}.$$

Risulta impossibile, invece, trovare una limitazione inferiore, se non in casi particolari, come in quello, ad esempio, dei risarcimenti limitati.

Sia  $Y \leq M$  e consideriamo la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{M}(e^{RM} - 1) - (e^{Rx} - 1).$$

Quindi  $f(0) = f(M) = 0$  e  $f''(x) = -R^2 e^{Rx} < 0$ , il che implica che  $f(x)$  è concava. Segue che  $f(x) > 0$  per  $0 < x < M$ .

Inoltre la funzione  $h(x) = xe^x - e^x + 1$  ha derivata strettamente positiva per  $x > 0$  e dunque  $h(x) > h(0) = 0$  per  $x > 0$ .

In particolare, ponendo  $x = RM$ , otteniamo:

$$\frac{1}{RM}(e^{RM} - 1) < e^{RM}.$$

Calcoliamo ora:

$$M_Y(R) - 1 = \int_0^M (e^{Rx} - 1)dG(x) \leq \int_0^M \frac{x}{M}(e^{RM} - 1)dG(x) = \frac{\mu}{M}(e^{RM} - 1).$$

Pertanto  $R$  soddisfa:

$$0 = \lambda(M_Y(R) - 1) - cR \leq \lambda \frac{\mu}{M}(e^{RM} - 1) - cR < \lambda \mu R e^{RM} - cR,$$

da cui si ricava

$$R > \frac{1}{M} \log \frac{c}{\lambda \mu}.$$

## 1.4 Disuguaglianza di Lundberg

Abbiamo già visto come l'esponente di Lundberg sia cruciale nell'ottenere una stima della probabilità di rovina. Qualora  $R$  esista, risulta

$$\Psi(u) < e^{-Ru} \quad [52].$$

Se così non fosse, infatti, consideriamo

$$u_0 = \text{Inf}[u \geq 0 : \Psi(u) \geq e^{-Ru}].$$

Per la continuità di  $\Psi(u)$ ,  $\Psi(u_0) = e^{-Ru_0}$  e, poiché  $\Psi(0) < 1$ ,  $u_0 > 0$ .

Dalle espressioni precedenti segue:

$$\begin{aligned} c\Psi(u_0) &= \lambda \left[ \int_{u_0}^{+\infty} (1-G(x))dx + \int_0^{u_0} \Psi(u_0-x)(1-G(x))dx \right] < \\ &< \lambda \left[ \int_{u_0}^{+\infty} (1-G(x))dx + \int_0^{u_0} e^{-R(u_0-x)}(1-G(x))dx \right] \leq \lambda \int_0^{+\infty} e^{-R(u_0-x)}(1-G(x))dx = \\ &= \lambda e^{-Ru_0} \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} e^{Rx} dG(y) dx = \lambda e^{-Ru_0} \int_0^{+\infty} \int_0^y e^{Rx} dx dG(y) = \\ &= \lambda e^{-Ru_0} \int_0^{+\infty} \frac{1}{R} (e^{Ry} - 1) dG(y) = \frac{\lambda}{R} e^{-Ru_0} (M_Y(R) - 1) = ce^{-Ru_0}. \end{aligned}$$

Si ottiene così una disuguaglianza che contraddice l'ipotesi  $\Psi(u_0) = e^{-Ru_0}$ .

Dunque la limitazione  $\Psi(u) < e^{-Ru}$  vale per ogni  $u \geq 0$ .

## 1.5 Approssimazione di Lundberg- Cramer

Ci domandiamo, ora, se  $R$  sia l'esponente migliore possibile per fornire una limitazione superiore alla rovina [22]. Si può dimostrare che:

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \Psi(u) e^{Ru} = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda M'_Y(R) - c},$$

da cui

$$\Psi(u) \approx \frac{c - \lambda\mu}{\lambda M'_Y(R) - c} e^{-Ru}$$

detta approssimazione di Lundberg-Cramer della probabilità di rovina qualora il capitale iniziale  $u$  assuma valori elevati. Chiaramente  $\Psi(u)$  decresce al crescere di  $u$ . Questo risultato mostra che per  $\Psi(u)$  non è possibile ottenere un limite superiore mediante un esponenziale con un esponente maggiore di  $R$  [58]. Tornando all'esempio in cui i risarcimenti abbiano una distribuzione esponenziale, si ha

$$M'_Y(R) = \frac{\alpha}{(\alpha - R)^2} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{1}{\alpha}.$$

Allora

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(u) e^{Ru} = \frac{c - \frac{\lambda}{\alpha}}{\frac{\lambda \alpha}{(\alpha - R)^2 - c}}$$

e ricordando che, in questo caso,  $R = \alpha - \frac{\lambda}{c}$ , otteniamo

$$\frac{c - \frac{\lambda}{\alpha}}{\frac{\lambda \alpha}{\left(\frac{\lambda}{c}\right)^2 - c}} = \frac{\lambda}{\alpha c} \frac{\alpha c - \lambda}{\alpha c - \lambda} = \frac{\lambda}{\alpha c}.$$

Quindi l'approssimazione di Lundberg- Cramer diviene:

$$\Psi(u) \approx \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-\left(\alpha - \frac{\lambda}{c}\right)u}.$$

Volendo dare un esempio numerico, possiamo assumere  $c = \lambda = 1$ ;

$G(x) = 1 - \frac{1}{3}(e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x})$ ; da cui il risarcimento medio viene pari a

$\mu = 0.611111$  e quindi la condizione di utile netto è soddisfatta, cioè  $c - \lambda\mu > 0$ . Abbiamo poi:

$$\Psi(u) = 0.550790e^{-0.485131u} + 0.0436979e^{-1.72235u} + 0.0166231e^{-2.79252u}.$$

Mentre l'approssimazione di Lundberg-Cramer è:

$$app(u) = 0.550790e^{-0.485131u}.$$

Vengono qui di sotto riportate la probabilità di rovina, l'approssimazione di Lundberg-Cramer e l'errore relativo,  $(app(u) - \Psi(u)) / \Psi(u)$ , moltiplicato per 100, per vari valori del capitale iniziale  $u$ .

$u$	0	0.25	0.5	0.75	1
$\Psi(u)$	0.6111	0.5246	0.4547	0.3969	0.3479
$app(u)$	0.5508	0.4879	0.4322	0.3828	0.3391
$Er$	-9.87	-6.99	-4.97	-3.54	-2.54

$u$	1.25	1.5	1.75	2	2.25
$\Psi(u)$	0.3059	0.2696	0.2379	0.2102	0.1858
$app(u)$	0.3003	0.2660	0.2357	0.2087	0.1849
$Er$	-1.82	-1.32	-0.95	-0.69	-0.50

Tabella 1.1: Approssimazione di Lundberg-Cramer per la probabilità di rovina.

Come si può notare l'errore relativo è sotto l' 1% solo per  $u \geq 1.71358 = 2.8\mu$ , quindi quando il capitale iniziale è oltre due volte e mezzo il risarcimento medio.

## 1.6 Riassicurazione e probabilità di rovina

Se viene considerata anche la riassicurazione, si può cercare la ritenzione ottimale che massimizzi  $R$  e minimizzi, quindi, la probabilità di rovina [70]. Cominciamo dalla riassicurazione proporzionale. Ricordiamo che l'assicuratore diretto copre per ogni rischio una quantità pari a  $Y_i^I = \alpha Y_i$ , per cui il riassicuratore dovrà far fronte a  $Y_i^R = (1 - \alpha)Y_i$ . Se indichiamo con  $c^I$  il premio richiesto dall'assicuratore diretto, ne deriva che l'esponente di Lundberg è soluzione dell'equazione:

$$\lambda(M_{\alpha Y}(r) - 1) - c^I r = 0$$

dove, oltre al premio, anche la funzione generatrice dei momenti è cambiata, perché non viene più coperto l'intero rischio ma solo una parte. Cioè,

$$M_{\alpha Y}(r) = E[e^{r\alpha Y_i}] = M_Y(\alpha r).$$

Se si assume, poi, che sia l'assicuratore diretto che il riassicuratore utilizzino lo stesso principio di calcolo del premio, ad esempio quello del valor medio, ed uno stesso caricamento di sicurezza, allora  $c^I = \alpha c$  e l'equazione diventa:

$$\lambda(M_Y(\alpha r) - 1) - c \alpha r = 0.$$



Segue che  $R = \alpha R^I$ , dove  $R^I$  è l'esponente di Lundberg qualora vi sia riassicurazione, e visto che  $\alpha$ , coefficiente di ritenzione, è compreso tra  $[0,1]$ ,  $R^I$  è un valore più piccolo di  $R$ , come era intuibile, dal momento che il rischio che la compagnia deve coprire dopo la riassicurazione è più piccolo.

Abbiamo individuato  $R^I$  nel caso in cui i caricamenti di sicurezza per assicuratore e riassicuratore siano gli stessi. Vediamo cosa accade se ciò non avviene. Supponiamo che:  $Y_i \sim \text{Exp}(\beta)$ , il premio complessivo annuo sia pari

a  $(1 + \xi)\lambda E(Y) = (1 + \xi)\frac{\lambda}{\beta}$ , e la riassicurazione sia proporzionale con livello

di ritenzione  $\alpha$ . Il riassicuratore chiede un premio pari a  $(1 + \vartheta)(1 - \alpha)\frac{\lambda}{\beta}$ ,

dove chiaramente  $\vartheta \geq \xi$ , altrimenti l'assicuratore diretto potrebbe cedere

l'intero rischio, ( $\alpha = 0$ ), ed ottenere profitto senza rischiosità. Cerchiamo ora

il valore di  $\alpha$  che massimizza  $R$  nel caso  $\vartheta > \xi$ . Dalla condizione di utile

netto deriva:

$$c^I = (1 + \xi)\frac{\lambda}{\beta} - (1 + \vartheta)(1 - \alpha)\frac{\lambda}{\beta} = (\alpha(1 + \vartheta) - (\vartheta - \xi))\frac{\lambda}{\beta} > \alpha\frac{\lambda}{\beta},$$

da cui:

$$\alpha > \frac{\vartheta - \xi}{\vartheta} = 1 - \frac{\xi}{\vartheta} \quad (1.4)$$

La funzione generatrice dei momenti è data da:

$$M_{\alpha Y}(r) = M_Y(\alpha r) = \frac{\beta}{\beta - \alpha r} = \frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\beta}{\alpha} - r}.$$

I risarcimenti a seguito della riassicurazione hanno distribuzione del tipo  $\text{Exp}(\beta/\alpha)$  e l'esponente di Lundberg è soluzione di:

$$\lambda(M_Y(\alpha r) - 1) - c^I r = 0$$

Attraverso semplici calcoli si ricava:

$$R^I(\alpha) = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\lambda}{(\alpha(1+\vartheta) - (\vartheta - \xi)) \frac{\lambda}{\beta}} = \beta \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha(1+\vartheta) - (\vartheta - \xi)} \right).$$

Derivando rispetto ad  $\alpha$  e ponendo la derivata uguale a 0, otteniamo

$$\alpha^2 = \frac{(\alpha(1+\vartheta) - (\vartheta - \xi))^2}{1+\vartheta}$$

Le soluzioni di questa equazione sono:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\vartheta} \left( \vartheta - \xi \pm \sqrt{(\vartheta - \xi)^2 - \frac{\vartheta}{1+\vartheta} (\vartheta - \xi)^2} \right) = \left( 1 - \frac{\xi}{\vartheta} \right) \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\vartheta}{1+\vartheta}} \right) = \\ &= \left( 1 - \frac{\xi}{\vartheta} \right) \left( 1 + \sqrt{\frac{1}{1+\vartheta}} \right). \end{aligned}$$

Nel caso che una soluzione sia maggiore di 1, la poniamo pari ad 1. Per cui:  
[17]

$$\alpha_{\max} = \min \left\{ \left( 1 - \frac{\xi}{\vartheta} \right) \left( 1 + \sqrt{\frac{1}{1+\vartheta}} \right), 1 \right\}.$$

Questa è la ritenzione ottimale, cioè quella che permette di massimizzare  $R^I$ . Vediamo adesso come è possibile legare il livello assoluto di riassicurazione  $C$  all'esponente di Lundberg e quindi alla probabilità di rovina. In questo modo, poiché  $C$  è una delle variabili decisionali, cioè una scelta che la compagnia effettua a priori, si può vedere in che modo scegliere tale livello in base al criterio di stabilità adottato. Ricordiamo che il criterio della probabilità di rovina consiste nel porre  $\Psi(u) \leq p_0$ , dove  $p_0$  rappresenta la soglia tollerata dalla compagnia. In generale si pone  $p_0 = e^{-Ru}$ , per cui  $\Psi(u) \leq e^{-Ru} = p_0$ . Da tale posizione si ricava:

$$R = \frac{|\log p_0|}{u}.$$

Ora vogliamo esprimere  $R$  in funzione del livello assoluto di riassicurazione  $C$ . In seguito alla riassicurazione proporzionale, alla compagnia diretta rimane a carico una frazione del rischio, determinata da un'aliquota di ritenzione del

danno pari ad  $\alpha_i$ . La funzione caratteristica con capitale iniziale  $u$  e livello assoluto di riassicurazione  $C$  è data da:

$$\chi_i(u/c) = \int_0^\infty e^{iux} dG_i\left(\frac{x}{\alpha_i}\right) = \int_0^\infty e^{iu\alpha_i y} dG_i(y) = \chi_i(\alpha_i, u).$$

Se consideriamo lo sviluppo in Taylor

$$e^{Ru} = 1 + Ru + \frac{R^2 u^2}{2!} + \dots,$$

otteniamo che:

$$R = 2 \frac{c - \sum_i \lambda_i E[g(X_i)]}{C \sum_i \lambda_i \gamma_i E[g(X_i)]}.$$

Indichiamo con  $1/\rho$  il rapporto tra la somma dei carichi dei premi applicati dalla compagnia diretta e la somma di quelli che applicherebbe la compagnia di riassicurazione se assicurasse la stessa porzione dei rischi cioè:

$$\frac{\sum_i \lambda_i \delta_i E[g(X_i)]}{\sum_i \lambda_i \gamma_i E[g(X_i)]} = \frac{1}{\rho}.$$

Segue che

$$R = \frac{2}{C\rho}.$$

Ricordando

$$R = \frac{|\log p_0|}{u},$$

si ottiene

$$\frac{2}{C\rho} = \frac{|\log p_0|}{u}, \quad \text{cioè} \quad C = \frac{2u}{\rho |\log p_0|}.$$

Quindi, più alto scelto è  $C$ , minore diventa il  $|\log p_0|$  e quindi  $p_0$ , la probabilità di rovina, aumenta [16].

Passiamo a trattare il caso della riassicurazione excess of loss con un livello di ritenzione  $M$ . Ciò che resta a carico dell'assicuratore è, per ogni sinistro,

$Y_i^I = \min\{Y_i, M_i\}$ , mentre l'esponente di Lundberg è la soluzione dell'equazione:

$$\lambda \left( \int_0^M e^{rx} dG(x) + e^{rM} (1 - G(M)) - 1 \right) - c^I r = 0.$$

Questa riassicurazione è utile se si ha a che fare con distribuzioni heavy-tail che possono generare anche danni infiniti. In questo modo, infatti, il rischio che l'assicuratore copre è al massimo  $M$  e le ipotesi di Lundberg-Cramer sono soddisfatte. In effetti si può mostrare che, per un assicuratore, tale tipo di riassicurazione è ottimale. Supponiamo che sia l'assicuratore che il riassicuratore utilizzino il principio del valor medio per il calcolo del premio. Allora, fra tutti i tipi di riassicurazione possibili, una volta stabilito il certo premio richiesto dall'assicuratore,  $c^I$ , e quello richiesto dal riassicuratore,  $c$ , l'excess of loss è quella che massimizza l'esponente di Lundberg per l'assicuratore diretto [37].

Sia  $h(x)$  una funzione crescente tale che  $0 \leq h(x) \leq x$  per  $x \geq 0$ .

L'assicuratore copre  $Y_i^I = h_i(Y_i)$ . Poniamo  $h^*(x) = \min\{x, u\}$ . Dunque  $h^*(x)$  corrisponde alla riassicurazione excess of loss. Poiché  $c^I$  è fissato, possiamo ricavare  $U$  da:

$$\int_0^U y dG(y) + U(1 - G(U)) = E[h^*(Y_i)] = E[h(Y_i)] = \int_0^\infty h(y) dG(y).$$

Dalla disuguaglianza  $e^z \geq 1 + z$  si ottiene  $e^{r(h(y) - h^*(y))} \geq 1 + r(h(y) - h^*(y))$ ,

da cui  $e^{rh(y)} \geq e^{rh^*(y)} (1 + r(h(y) - h^*(y)))$ .

Inoltre

$$\begin{aligned} M_{h(y)}(r) &= \int_0^\infty e^{rh(y)} dG(y) \geq \int_0^\infty e^{rh^*(y)} (1 + r(h(y) - h^*(y))) dG(y) = \\ &= M_{h^*(y)}(r) + r \int_0^\infty (h(y) - h^*(y)) e^{rh^*(y)} dG(y). \end{aligned}$$

Se  $Y \leq U$  abbiamo che  $h(y) \leq y = h^*(y)$  e per  $r > 0$ :

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty (h(y) - h^*(y))e^{rh^*(y)} dG(y) = \\
& = \int_0^U (h(y) - h^*(y))e^{rh^*(y)} dG(y) + \int_U^\infty (h(y) - h^*(y))e^{rh^*(y)} dG(y) \geq \\
& \geq \int_0^U (h(y) - h^*(y))e^{rU} dG(y) + \int_U^\infty (h(y) - h^*(y))e^{rU} dG(y) = \\
& = e^{rU} \int_0^\infty (h(y) - h^*(y)) dG(y) = \\
& = e^{rU} (E[h(Y)] - E[h^*(Y)]) = 0.
\end{aligned}$$

Pertanto  $M_{h(Y)}(r) \geq M_{h^*(Y)}(r)$  per  $r > 0$  e quindi :

$$0 = \theta(R^I) = \lambda[M_{h(Y)}(R^I) - 1] - c^I R^I \geq \lambda[M_{h^*(Y)}(R^I) - 1] - c^I R^I = \theta^*(R^I)$$

e dalla convessità di  $\theta^*(r)$  segue che  $R^I$  in excess of loss è il più alto possibile. Vediamo ora la composizione del portafoglio dal punto di vista del riassicuratore. Poiché l'ammontare dei sinistri è indipendente dal numero e dal momento in cui questi avvengono, possiamo eliminare dal processo di conta di sinistri di Poisson alcuni eventi con probabilità  $G(M)$  e lasciarne altri con probabilità  $1 - G(M)$ . Poiché l'ammontare dei sinistri sono anche i.i.d. la loro distribuzione è data da:

$$\Gamma(x) = P(Y_i - M \leq x / Y_i > M) = \frac{G(M+x) - G(M)}{1 - G(M)}$$

## 1.7 La severità della rovina

Supponiamo che si abbia rovina ed esprimiamo la variabile aleatoria  $-C_\tau$ , detta severità della rovina [38]. Una compagnia di assicurazione, infatti, può tollerare valori bassi di  $-C_\tau$ , mentre valori elevati possono causare perdite incolmabili. Consideriamo la distribuzione di  $-C_\tau$  quando vi è rovina [63].  
Poniamo

$$\Psi_x(u) = P(\tau < \infty, C_\tau < -x).$$

Dato un intervallo di ampiezza  $h$  piccola, esprimiamo tale probabilità considerando le alternative che vi siano o meno sinistri.

$$\Psi_x(u) = (1 - \lambda h)\Psi_x(u + ch) + \lambda h \left[ \int_0^u \Psi_x(u - y) dG(y) + \int_{u+x}^{\infty} dG(y) \right] + o(h).$$

Riordinando i termini, seguendo lo stesso procedimento utilizzato per il calcolo di  $\delta(u)$ , si ricava:

$$c \frac{\Psi_x(u + ch) - \Psi_x(u)}{ch} = \lambda \left[ \Psi_x(u + ch) - \int_0^u \Psi_x(u - y) dG(y) - \int_{u+x}^{\infty} dG(y) \right] + o(1).$$

Facendo tendere  $h$  a 0 otteniamo:

$$c\Psi'_x(u) = \lambda \left[ \Psi_x(u) - \int_0^u \Psi_x(u - y) dG(y) - (1 - G(u + x)) \right].$$

Si tratta pertanto di un'equazione integro-differenziale di cui vogliamo ricavare la soluzione  $\Psi_x(u)$ .

Integrando si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{c}{\lambda} (\Psi_x(u) - \Psi_x(0)) &= \int_0^u \Psi_x(u - y) (1 - G(y)) dy - \int_0^u (1 - G(y + x)) dy = \\ &= \int_0^u \Psi_x(u - y) (1 - G(y)) dy - \int_x^{x+u} (1 - G(y)) dy. \end{aligned}$$

Poiché  $\Psi_x(u) \leq \Psi(u)$  e per  $u$  che tende all'infinito  $\Psi(u)$  tende a 0, segue che anche  $\Psi_x(u)$  tende a 0, e quindi

$$-\frac{c}{\lambda} \Psi_x(0) = -\int_x^{\infty} (1 - G(y)) dy,$$

che è in pratica la distribuzione del salto record.

Inoltre (vedi [30]):

$$P[C_\tau < -x/\tau < \infty, C_0 = 0] = \frac{\frac{\lambda}{c} \int_x^{\infty} (1 - G(y)) dy}{\frac{\lambda \mu}{c}} = \frac{1}{\mu} \int_x^{\infty} (1 - G(y)) dy. \quad (1.5)$$

Indichiamo con  $\tau_1$  l'istante in cui le riserve assumono un valore inferiore al capitale iniziale. Da tale istante inizia un nuovo processo di Lundberg-Cramer. Gli scenari che si possono presentare sono 3:

- 1) Il processo non andrà mai sotto il capitale iniziale, cioè  $\tau_1 = \infty$ .
- 2)  $\tau_1 < \infty$  ma  $C_{\tau_1} \geq 0$ .
- 3) In  $\tau_1$  si ha rovina.

Ora è possibile ricavare la probabilità di rovina considerando questi tre scenari ed utilizzando la teoria del rinnovamento [29].

Il risultato finale è:

$$\Psi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right)0 + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \Psi(u-y)(1-G(y))dy + \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty 1(1-G(y))dy.$$

## 1.8 La trasformazione di Laplace

Trovate le varie espressioni con cui è possibile esprimere  $\Psi$  e  $\delta$  vediamo adesso un modo in cui  $\Psi$  può essere trasformata. Intanto, se  $f$  è una funzione reale in  $[0, \infty]$ , la trasformazione

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx,$$

con  $s$  numero reale è detta di Laplace.

Vogliamo utilizzare tale tipo di trasformazione per la  $\Psi$  [22]. Chiaramente, se  $X$  è una variabile assolutamente continua, positiva e con densità  $f$ ,  $F(s)$  corrisponde alla funzione generatrice dei momenti calcolata in  $-s$ . Vediamo di seguito le sue proprietà:

1) Se  $f(x) \geq 0$ , allora  $F(s_1) \leq F(s_2) \Leftrightarrow s_1 \geq s_2$ .

2)  $|F(s_1)| < \infty \Rightarrow |F(s)| < \infty$  per ogni  $s_1 \geq s_2$ .

3)  $F'(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f'(x) dx = sF(s) - f(0)$

ammesso che  $f'(x)$  esista e  $|F(s)| < \infty$ .

4)  $\lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ammesso che  $f'(x)$  e il limite per  $x$  che tende a

0 di  $f(x)$  esistano e che  $|F(s)| < \infty$  per un  $s$  abbastanza grande.

5)  $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ammesso che  $f'(x)$  e il limite per  $x$  che tende a 0

di  $f(x)$  esistano e che  $|F(s)| < \infty$  per ogni  $s > 0$ .

6)  $F(s) = G(s)$  su  $(s_0, s_1) \Rightarrow f(x) = g(x)$  quasi ovunque in  $[0, \infty]$ .

Vogliamo trovare la trasformazione di Laplace della probabilità di non rovina  $\delta(u)$ , che indicheremo con  $\Delta$ . Ricordando l'espressione (1.1), moltiplicando per  $e^{-su}$  ed integrando rispetto ad  $u$ , otteniamo:

$$c \int_0^{\infty} \delta'(u) e^{-su} du = \lambda \int_0^{\infty} \delta(u) e^{-su} du - \int_0^{\infty} \int_0^u \delta(u-y) dG(y) e^{-su} du.$$

Calcoliamo l'ultimo di tali integrali

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_0^u \delta(u-y) dG(y) e^{-su} du &= \int_0^{\infty} \int_y^{\infty} \delta(u-y) e^{-su} du dG(y) = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \delta(u) e^{-s(u+y)} du dG(y) = \Delta(s) M_Y(-s). \end{aligned}$$

Per le proprietà della trasformazione di Laplace, segue:

$$\begin{aligned} c \int_0^{\infty} \delta'(u) e^{-su} du &= c \Delta'(s) = c[s\Delta(s) - \delta(0)] = \\ &= \lambda \Delta(s) - \lambda \Delta(s) M_Y(-s) = \lambda \Delta(s) (1 - M_Y(-s)), \end{aligned}$$

ed in particolare

$$c[s\Delta(s) - \delta(0)] = \lambda \Delta(s) (1 - M_Y(-s)),$$

la cui soluzione è data da

$$\Delta(s) = \frac{c\delta(0)}{cs - \lambda[1 - M_Y(-s)]}.$$

Ricordando che

$$\delta(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c},$$

otteniamo

$$\Delta(s) = \frac{c - \lambda\mu}{cs - \lambda[1 - M_Y(-s)]}.$$

Chiaramente la trasformazione di Laplace per la probabilità di rovina, che indicheremo con  $\bar{\Psi}$ , è data da:

$$\bar{\Psi}(s) = \int_0^{\infty} (1 - \delta(u)) e^{-su} du = \frac{1}{s} - \Delta(s).$$



Nel caso, ad esempio, in cui i sinistri abbiano una distribuzione esponenziale di parametro  $\alpha$ , per cui  $\mu = \frac{1}{\alpha}$  e  $M_Y(-s) = \frac{\alpha}{\alpha + s}$ , le trasformazioni di Laplace per le probabilità di non rovina e rovina divengono rispettivamente:

$$\Delta(s) = \frac{c - \frac{\lambda}{\alpha}}{cs - \lambda \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + s}\right)} = \frac{c - \frac{\lambda}{\alpha}}{s \left(c - \frac{\lambda}{\alpha + s}\right)} = \frac{\left(c - \frac{\lambda}{\alpha}\right)(\alpha + s)}{s(c(\alpha + s) - \lambda)}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(s) &= \frac{1}{s} - \frac{\left(c - \frac{\lambda}{\alpha}\right)(\alpha + s)}{s(c(\alpha + s) - \lambda)} = \frac{c(\alpha + s) - \lambda - \left(c - \frac{\lambda}{\alpha}\right)(\alpha + s)}{s(c(\alpha + s) - \lambda)} = \\ &= \frac{\lambda}{\alpha} \frac{1}{c(\alpha + s) - \lambda} = \frac{\lambda}{\alpha c} \frac{1}{\alpha - \frac{\lambda}{c} + s}. \end{aligned}$$

## 1.9 APPROSSIMAZIONI PER $\Psi$

Per quanto riguarda le approssimazioni della  $\Psi$ , cominciamo col considerare quella di De Vylder [28]. Poiché nel caso in cui i risarcimenti siano distribuiti esponenzialmente è possibile calcolare esplicitamente la probabilità di rovina, l'approssimazione di De Vylder si basa sulla sostituzione di  $C_t$  con una nuova variabile,  $\tilde{C}_t$ , in cui l'ammontare dei danni ha distribuzione esponenziale. Per quanto riguarda i primi tre momenti, vale

$$E[(C_t - u)^k] = E[(\tilde{C}_t - u)^k] \quad (\text{per } k = 1, 2, 3)$$

Di conseguenza, poiché nel caso di danni esponenziali  $\mu = 1/\alpha$ ,

$$E[C_t - u] = (c - \lambda\mu)t = \left(\tilde{c} - \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}}\right)t;$$

$$Var[C_t] = Var[u + ct - C_t] = \lambda\mu_2 t = \frac{2\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}^2} t;$$

$$E[(C_t - E[C_t])^3] = -E[(u + ct - C_t - E[u + ct - C_t])^3] = -\lambda\mu_3 t = -\frac{6\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}^3} t.$$

Da queste espressioni è possibile ricavare i parametri necessari per l'approssimazione, cioè:

$$\tilde{\alpha} = \frac{3\mu_2}{\mu_3}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda\mu_2\tilde{\alpha}^2}{2} = \frac{9}{2} \frac{\mu_2^3}{\mu_3^2} \lambda, \quad \tilde{c} = c - \lambda\mu + \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}} = c - \lambda\mu + \frac{3\mu_2^2}{2\mu_3} \lambda.$$

Ricordando che nel caso di danni esponenziali:

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-\left(\alpha - \frac{\lambda}{c}\right)u},$$

si ricava l'approssimazione [7]

$$\Psi(u) \approx \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}\tilde{c}} e^{-\left(\tilde{\alpha} - \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}}\right)u}.$$

Vediamo attraverso un esempio come il precedente metodo possa dare dei buoni risultati. Poniamo  $c = \lambda = 1$ ;  $G(x) = 1 - \frac{1}{3}(e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x})$ , da cui è possibile ricavare che  $c - \lambda\mu = 7/18$ , perché  $\mu = 0.611111$ . Inoltre,  $\lambda\mu_2 = 49/54$  e  $\mu_3 = 251/108$ . I parametri dell'approssimazione risultano:  $\tilde{\alpha} = 1.17131$ ;  $\tilde{\lambda} = 0.622472$ ;  $\tilde{c} = 0.920319$ .

Quindi

$$\Psi(u) \approx 0.577441e^{-0.494949u}.$$

La tabella seguente mostra il valore esatto della probabilità di rovina,  $\Psi(u)$ , l'approssimazione di De Vylder, ( $DV$ ), e l'errore relativo ( $Er$ ), dato da  $(DV - \Psi(u))/\Psi(u)$  moltiplicato per 100.

$u$	0	0.25	0.5	0.75	1
$\Psi(u)$	0.6111	0.5246	0.4547	0.3969	0.3479
$DV$	0.5774	0.5102	0.4509	0.3984	0.3520
$Er$	-5.51	-2.73	-0.86	0.38	1.18

$u$	1.25	1.5	1.75	2	2.25
$\Psi(u)$	0.3059	0.2696	0.2379	0.2102	0.1858
$DV$	0.3110	0.2748	0.2429	0.2146	0.1896
$Er$	1.67	1.95	2.07	209	2.03

**Tabella 1.2: L'approssimazione di De Vylder per la probabilità di rovina.**

Come si vede l'approssimazione è abbastanza buona: rispecchia, cioè, abbastanza bene il vero valore  $\Psi(u)$ .

Un'altra approssimazione per la  $\Psi$ , che può essere utilizzata, è quella di Beekman-Bowers [15]. Questa approssimazione si basa sulla funzione

$$F(u) = 1 - \frac{c}{\lambda\mu} \Psi(u).$$

Si può dimostrare che il primo momento risulta essere

$$\int_0^{\infty} z dF(z) = \frac{c\mu_2}{2\mu(c - \lambda\mu)}$$

ed il secondo

$$\int_0^{\infty} z^2 dF(z) = \frac{c}{\mu} \left( \frac{\mu_3}{3(c - \lambda\mu)} + \frac{\lambda\mu_2^2}{2(c - \lambda\mu)^2} \right).$$

L'idea è di approssimare la distribuzione  $F(u)$  con un'altra,  $G(u)$ , che sia una Gamma,  $(\gamma, \alpha)$ , con i primi due momenti uguali.

Ciò che si deve verificare è

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{c\mu_2}{2\mu(c - \lambda\mu)} \quad \text{e} \quad \frac{\gamma(\gamma + 1)}{\alpha^2} = \frac{c}{\mu} \left( \frac{\mu_3}{3(c - \lambda\mu)} + \frac{\lambda\mu_2^2}{2(c - \lambda\mu)^2} \right).$$

L'approssimazione di Beekman-Bowers risulta:

$$\Psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c} (1 - F(u)) \approx \frac{\lambda\mu}{c} (1 - G(u)).$$

Un fatto importante è che qualora  $2\gamma$  appartenga ai numeri naturali, allora la variabile aleatoria  $2\alpha Z$  ha distribuzione chi-quadro con parametro  $2\gamma$ .

Ricordiamo l'esempio proposto precedentemente.

I valori mancanti sono  $\gamma$  e  $\alpha$ , che si ricavano dalle equazioni

$$\frac{\gamma}{\alpha} = 1.90909, \quad \frac{\gamma(\gamma+1)}{\alpha^2} = 7.71429.$$

Il risultato è  $\gamma = 0.895561$ ,  $\alpha = 0.469104$ .

Ora possiamo approssimare:

$$\Psi(u) \approx \frac{\lambda\mu}{c}(1-G(u)),$$

dove  $G(u)$  è una Gamma di parametri  $(0.895561, 0.469104)$ .

Notiamo, inoltre, che  $2\gamma = 1.79112$  non è un intero. Tuttavia possiamo ottenere  $G(u)$  come interpolazione di una distribuzione  $\chi_1^2$  ed un  $\chi_2^2$  nel seguente modo

$$0.20888\chi_1^2(2cu) + 0.79112\chi_2^2(2cu),$$

ed approssimare di nuovo:

$$\Psi(u) \approx \frac{\lambda\mu}{c}(1-G(u)).$$

Nella tabella seguente sono riportati: i valori esatti della probabilità di rovina,  $\Psi(u)$ ; l'approssimazione di Beekman-Bowers, dove  $G(u)$  è una Gamma con i parametri  $(\gamma, \alpha)$  trovati sopra, indicata con  $(BB1)$ ; e la stessa approssimazione dove, però,  $G(u)$  è l'interpolazione dei due  $\chi^2$  sopra citata, indicata con  $(BB2)$ .

Inoltre, sono espressi i rispettivi errori relativi,  $(Er)$ , dati, come al solito, da  $((BB1) - \Psi(u))/\Psi(u)$  e  $((BB2) - \Psi(u))/\Psi(u)$  moltiplicati per 100.

$u$	0	0.25	0.5	0.75	1
$\Psi(u)$	0.6111	0.5246	0.4547	0.3969	0.3479
$BB1$	0.6111	0.5227	0.4553	0.3985	0.3498
$Er$	0.00	-0.35	0.12	0.42	0.54
$BB2$	0.6111	0.5105	0.4456	0.3914	0.3450
$Er$	0.00	-2.68	-2.02	-1.38	-0.83

$u$	1.25	1.5	1.75	2	2.25
$\Psi(u)$	0.3059	0.2696	0.2379	0.2102	0.1858
$BB1$	0.3076	0.2709	0.2387	0.2106	0.1859
$Er$	0.54	0.47	0.34	0.19	0.04
$BB2$	0.3046	0.2693	0.2383	0.2110	0.1869
$Er$	-0.42	-0.11	0.18	0.40	0.59

**Tabella 1.3: L'approssimazione di Beekman-Bowers per la probabilità di rovina.**

Anche in questo caso le approssimazioni che, in entrambi i modi, si ottengono sono abbastanza buone e con errori relativi piuttosto bassi, soprattutto nel caso di BB1, dove assumono valori inferiori all' 1%.

Per concludere, consideriamo la cosiddetta approssimazione di propagazione [49].

Siano  $C_t^{(n)}$  una successione di processi di Lundberg-Cramer con capitale iniziale pari ad  $u$ , intensità del numero di sinistri  $\lambda^{(n)} = \lambda n$ , ammontare dei danni con distribuzione

$$G^{(n)}(x) = G(x\sqrt{n}),$$

e premio annuo del tipo

$$c^{(n)} = \left(1 + \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu\sqrt{n}}\right) \lambda^{(n)} \mu^{(n)} = c + (\sqrt{n} - 1)\lambda\mu.$$

Posto

$$\mu = \int_0^\infty y dG(y),$$

ed assumendo

$$\int_0^\infty y^2 dG(y) < \infty,$$

la successione  $C_t^{(n)}$  converge in distribuzione:

$$C_t^{(n)} \rightarrow (u + W_t),$$

dove  $W_t$  è un moto Browniano  $(c - \lambda\mu, \lambda\mu_2)$ , cioè un processo stocastico  $W_t$  tale che:

- 1)  $W_0 = 0$
- 2)  $W_t$  è ad incrementi indipendenti
- 3)  $W_t \sim N(mt, \eta^2 t)$ .

Si può dimostrare che  $W_t$  è anche ad incrementi stazionari.

Intuitivamente, facendo tendere il numero dei sinistri all'infinito in un intervallo unitario di tempo, ed a 0 l'ammontare medio dei risarcimenti, si cerca di rendere l'ammontare dei danni talmente piccolo da far sì che la distribuzione di  $C_1^{(n)} - u$  tenda ad una Normale di media  $c - \lambda\mu$  [40]. Se  $\tau^{(n)}$  è il tempo di rovina di  $C_t^{(n)}$  e  $\tau = \text{Inf}\{t \geq 0 : u + W_t < 0\}$  rappresenta la rovina del moto Browniano, si ha che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\tau^{(n)} \leq t) = P(\tau < t) \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\tau^{(n)} < \infty) = P(\tau < \infty).$$

Si può dimostrare, quindi, che ciò che accade in un orizzonte illimitato è paragonabile a quello che accade in uno limitato [61].

L'idea dell'approssimazione di propagazione è pertanto quella di approssimare  $P(\tau^{(1)} \leq t)$  con  $P(\tau \leq t)$  e  $P(\tau^{(1)} < \infty)$  con  $P(\tau < \infty)$ . Per i calcoli è sufficiente conoscere la probabilità di rovina del moto Browniano. Se  $W_t$  è un moto Browniano  $(m, \eta^2)$  e  $\tau = \text{Inf}\{t \geq 0 : u + W_t < 0\}$ ,  $P(\tau < \infty)$  è pari a

$$e^{-2um/\eta^2}$$

con cui approssimiamo  $P(\tau^{(1)} < \infty)$ , mentre

$$P(\tau \leq t) = 1 - \Phi\left(\frac{mt + u}{\eta\sqrt{t}}\right) + e^{-2mu/\eta^2} \Phi\left(\frac{mt - u}{\eta\sqrt{t}}\right),$$

con cui approssimiamo  $P(\tau^{(1)} \leq t)$  [7].

Occorre sottolineare che tale tipo di approssimazione dà buoni risultati solo se  $c/(\lambda\mu)$  è vicino ad 1 cioè se il premio è vicino a quello equo.

Riprendendo ancora l'esempio già visto, poiché  $W_t$  è un moto Browniano  $(c - \lambda\mu, \lambda\mu_2) = (7/18, 49/54)$  e ricordando che:

$$\Psi(u) \approx e^{-2mu/\eta^2},$$

dove  $m = c - \lambda\mu$  e  $\eta^2 = \lambda\mu_2$ , l'approssimazione che ne deriva è

$$\Psi(u) \approx e^{-\frac{6}{7}u}.$$

Nella tabella seguente sono nuovamente riportati i valori esatti della probabilità di rovina,  $\Psi(u)$ , quelli dell'approssimazione,  $(DA)$ , e quelli dell'errore relativo,  $(DA - \Psi(u))/\Psi(u)$ , moltiplicato per 100.

$u$	0	0.25	0.5	0.75	1
$\Psi(u)$	0.6111	0.5246	0.4547	0.3969	0.3479
$DA$	1.0000	0.8071	0.6514	0.5258	0.4244
$Er$	63.64	53.87	43.26	32.49	21.98

$u$	1.25	1.5	1.75	2	2.25
$\Psi(u)$	0.3059	0.2696	0.2379	0.2102	0.1858
$DA$	0.3425	0.2765	0.2231	0.1801	0.1454
$Er$	11.96	2.54	-6.22	-14.32	-21.78

**Tabella 14: L'approssimazione di propagazione per la probabilità di rovina.**

Come si vede, in questo caso l'approssimazione non è molto buona ed in particolare gli errori relativi sono elevati. Questo deriva dal fatto che  $c/(\lambda\mu) = 1.63636$  non è molto vicino ad 1.

## 1.10 Il tempo di rovina

Proviamo ora ad analizzare in maniera dettagliata il tempo di rovina [60].

Consideriamo la funzione:

$$f_\alpha(u) = E[e^{-\alpha\tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} / C_0 = u].$$

Tale funzione è definita per  $\alpha \geq 0$  e rappresenta la funzione generatrice dei momenti del tempo di rovina.

Per  $h$  piccolo scriviamo  $f_\alpha(u)$  considerando la possibilità o meno che in  $[0, h]$  vi siano sinistri:

$$\begin{aligned} f_\alpha(u) &= (1 - \lambda h + o(h))e^{-\alpha h} f_\alpha(u + ch) + \\ &+ (\lambda h + o(h)) \left[ \int_0^u f_\alpha(u - y) dG(y) + 1 - G(u) + o(1) \right] + o(h). \end{aligned}$$

Riordinando i termini:

$$\begin{aligned} c \frac{f_\alpha(u + ch) - f_\alpha(u)}{ch} - \frac{1 - e^{-\alpha h}}{h} f_\alpha(u + ch) + \\ + \lambda \left[ \int_0^u f_\alpha(u - y) dG(y) + 1 - G(u) - e^{-\alpha h} f_\alpha(u + ch) \right] + o(1) = 0. \end{aligned}$$

Facendo tendere  $h$  a 0 vediamo che  $f_\alpha(u)$  è differenziabile, e dà luogo all'equazione differenziale:

$$c f'_\alpha(u) + \lambda \left[ \int_0^u f_\alpha(u - y) dG(y) + 1 - G(u) - f_\alpha(u) \right] - \alpha f_\alpha(u) = 0. \quad (1.6)$$

Tale equazione è difficile da risolvere. Possiamo allora introdurre la trasformazione di Laplace con riferimento al capitale iniziale:

$$F_\alpha(s) = \int_0^\infty e^{-su} f_\alpha(u) du.$$

Assumendo  $s > 0$  e ricordando le proprietà della trasformazione di Laplace, otteniamo:

- 1)  $F'_\alpha(s) = \int_0^\infty f'_\alpha(u) e^{-su} du = s F_\alpha(s) - f_\alpha(0)$
- 2)  $\int_0^\infty \int_0^u f_\alpha(u - y) dG(y) e^{-su} du = F_\alpha(s) M_Y(-s)$
- 3)  $\int_0^\infty \int_u^\infty dG(y) e^{-su} du = \int_0^\infty \int_0^y e^{-su} du dG(y) = \frac{1 - M_Y(-s)}{s}$



Moltiplicando la (1.6) per  $e^{-su}$  ed integrando, otteniamo:

$$c(sF_\alpha(s) - f_\alpha(0)) + \lambda[F_\alpha(s)M_Y(-s) + \frac{1 - M_Y(-s)}{s} - F_\alpha(s)] - \alpha F_\alpha(s) = 0,$$

e risolvendo rispetto a  $F_\alpha(s)$  [14],[22]

$$F_\alpha(s) = \frac{cf_\alpha(0) - \lambda s^{-1}(1 - M_Y(-s))}{cs - \lambda(1 - M_Y(-s)) - \alpha}. \quad (1.7)$$

Sappiamo che  $F_\alpha(s)$  esiste per  $\alpha > 0$  e  $s > 0$  ed assume un valore positivo.

Il denominatore del secondo membro di (1.7),

$$cs - \lambda(1 - M_Y(-s)) - \alpha,$$

è una funzione continua che vale  $-\alpha < 0$  in 0, e tende all'infinito per  $s$  che tende all'infinito. Quindi ammette una radice positiva  $s(\alpha)$ . Poiché  $F_\alpha(s)$  esiste per  $s = s(\alpha)$ ,  $s(\alpha)$  deve essere una radice anche del numeratore:

$$cf_\alpha(0) = \lambda s(\alpha)^{-1}(1 - M_Y(-s(\alpha))).$$

Inoltre, essendo  $s(\alpha)$  differenziabile e  $s(0) = 0$ , si ha:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} s(\alpha) = 0.$$

Considerando il solito esempio di sinistri distribuiti  $Exp(\beta)$ , poiché

$M_Y(-s) = \frac{\beta}{\beta + s}$ , dobbiamo risolvere l'equazione:

$$cs - \frac{\lambda s}{\beta + s} - \alpha = 0.$$

Le soluzioni sono

$$s_\pm(\alpha) = \frac{-(\beta c - \lambda - \alpha) \pm \sqrt{(\beta c - \lambda - \alpha)^2 + 4\alpha\beta c}}{2c}$$

dove  $s_-(\alpha) < 0 \leq s_+(\alpha)$ .

Allora

$$F_\alpha(s) = \frac{\frac{\lambda}{\beta + s_+(\alpha)} - \frac{\lambda}{\beta + s}}{cs - \frac{\lambda s}{\beta + s} - \alpha} = \frac{\lambda}{c(\beta + s_+(\alpha))(s - s_-(\alpha))}$$

e [37]

$$f_\alpha(u) = \frac{\lambda}{c(\beta + s_+(\alpha))} e^{s_-(\alpha)u}.$$

Notiamo che

$$E[\tau \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} E[\tau e^{-\alpha \tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} -\frac{d}{d\alpha} E[e^{-\alpha \tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}]$$

e

$$\int_0^\infty E[\tau \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} / C_0 = u] e^{-su} du = \lim_{\alpha \rightarrow 0} -\frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty f_\alpha(u) e^{-su} du = \lim_{\alpha \rightarrow 0} -\frac{d}{d\alpha} F_\alpha(s).$$

Assumendo  $\mu_2 < \infty$ , si ha che il valore atteso del tempo di rovina, qualora questo non sia infinito è dato da:

$$E[\tau \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}] = \frac{1}{c - \lambda\mu} \left[ \frac{\lambda\mu_2}{2(c - \lambda\mu)} \delta(u) - \int_0^u \Psi(u - y) \delta(y) dy \right]. \quad (1.8)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\alpha} F_\alpha(s) &= \frac{\lambda s'(\alpha)}{cs - \lambda(1 - M_Y(-s)) - \alpha} \frac{1 - M_Y(-s(\alpha)) - M_Y'(-s(\alpha))s(\alpha)}{s(\alpha)^2} - \\ &= \frac{\lambda((1 - M_Y(-s(\alpha)))s(\alpha)^{-1} - (1 - M_Y(-s))s^{-1})}{(cs - \lambda(1 - M_Y(-s)) - \alpha)^2}. \end{aligned}$$

Ricordando che:

- 1)  $s'(0) = \frac{1}{c - \lambda\mu}$
- 2)  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - M_Y(-s(\alpha))}{s(\alpha)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - M_Y(-s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} M_Y'(-s) = \mu$
- 3)  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1 - M_Y(-s(\alpha))) - M_Y'(-s(\alpha))s(\alpha)}{s(\alpha)^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1 - M_Y(-s)) - M_Y'(-s)s}{s^2} =$   
 $= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sM_Y''(-s)}{2s} = \frac{\mu_2}{2},$

e passando al limite per  $\alpha$  che tende a 0,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty E[\tau \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} / C_0 = u] e^{-su} du &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} -\frac{d}{d\alpha} F_\alpha(s) = \\ &= \frac{\lambda\mu_2}{2(c-\lambda\mu)^2} \frac{c-\lambda\mu}{cs-\lambda(1-M_Y(-s))} - \\ &= \frac{1}{c-\lambda\mu} \frac{c-\lambda\mu}{cs-\lambda(1-M_Y(-s))} \left( \frac{1}{s} - \frac{c-\lambda\mu}{cs-\lambda(1-M_Y(-s))} \right) = \\ &= \frac{1}{c-\lambda\mu} \left[ \frac{\lambda\mu_2}{2(c-\lambda\mu)} \Delta(s) - \Delta(s) \bar{\Psi}(s) \right]. \end{aligned}$$

Quest'ultima è la trasformazione di Laplace di  $E[\tau \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}]$  nel caso in cui valga la (1.8) [61].

Da ciò segue:

$$P(t < \tau < \infty) < \frac{\lambda\mu_2}{2(c-\lambda\mu)^2 t}.$$

Infatti, poiché  $\Psi(u)$  e  $\delta(u)$  assumono valori in  $[0,1]$ , dall'espressione precedente si ottiene:

$$E[\tau \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}] < \frac{\lambda\mu_2}{2(c-\lambda\mu)^2}.$$

D'altra parte

$$P(t < \tau < \infty) = P(\tau \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} > t),$$

mentre la disuguaglianza di Markov implica  $P(Y \geq cE(Y)) \leq \frac{1}{c}$  [54].

Segue

$$P(\tau \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} > t) < \frac{1}{t} E[\tau \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}] < \frac{\lambda\mu_2}{2(c-\lambda\mu)^2 t}.$$

Inoltre è possibile ottenere una formula esplicita nel caso di  $u=0$ .

$$E[\tau \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} / C_0 = 0] = \frac{\lambda\mu_2}{2(c-\lambda\mu)^2} \left( 1 - \frac{\lambda\mu}{c} \right) = \frac{\lambda\mu_2}{2c(c-\lambda\mu)}$$

e

$$E[\tau / \tau < \infty, C_0 = 0] = \frac{\mu_2}{2\mu(c - \lambda\mu)},$$

che è la speranza matematica del tempo di rovina,  $\tau$ , condizionata al fatto che  $\tau$  sia minore di infinito con capitale iniziale pari a 0, ed è quindi ottenuta dividendo  $E[\tau \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} / C_0 = 0]$  per la probabilità di rovina con capitale iniziale pari a 0 [64].

Proponendo, di nuovo, l'esempio di sinistri esponenziali di parametro  $\beta$ , si

ha  $R = \beta - \frac{\lambda}{c}$ ,  $\mu = \frac{1}{\beta}$  e  $\mu_2 = \frac{2}{\beta^2}$ . Dunque

$$\begin{aligned} E[\tau \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}] &= \frac{\beta}{c\beta - \lambda} \left[ \frac{2\lambda}{2\beta(c\beta - \lambda)} \left( 1 - \frac{\lambda}{\beta c} e^{-Ru} \right) - \int_0^u \frac{\lambda}{\beta c} e^{-R(u-y)} \left( 1 - \frac{\lambda}{\beta c} e^{-Ry} \right) dy \right] = \\ &= \frac{\beta}{c\beta - \lambda} \left[ \frac{\lambda}{\beta(c\beta - \lambda)} \left( 1 - \frac{\lambda}{\beta c} e^{-Ru} \right) - \frac{\lambda}{\beta c} e^{-Ru} \left( \frac{c}{\beta c - \lambda} (e^{Ru} - 1) - \frac{\lambda}{\beta c} u \right) \right] = \\ &= \frac{\lambda}{\beta c^2 (c\beta - \lambda)} e^{-Ru} (\lambda u + c) = \frac{1}{c(c\beta - \lambda)} \Psi(u)(\lambda u + c), \end{aligned}$$

mentre la media condizionata del tempo di rovina è lineare in  $u$

$$E[\tau / \tau < \infty] = \frac{\lambda u + c}{c(\beta c - \lambda)}.$$

# CAPITOLO 2

## IL PROCESSO DI RINNOVAMENTO

### 2.1 Concetti generali.

Analizziamo ora la probabilità di rovina del rischio classico o di Lundberg-Cramer mediante la teoria del rinnovamento [4],[5].

Valgono le ipotesi:

- 1) Il premio è proporzionale al tempo, cioè  $\pi_t = ct$ .
- 2) Ogni rischio ha una distribuzione di Poisson-Composta, il che implica che anche l'intero portafoglio abbia una distribuzione dello stesso tipo:

$$P(S_t \leq x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} G^{*k}(x).$$

La probabilità di rovina è data da:

$$\Psi(u) = \{S_t > u + ct \text{ per un } t > 0\} = \{S_{\sigma_n} > u + c\sigma_n \text{ per almeno un } n \geq 1\},$$

dove  $\sigma_n$  rappresenta l'istante dell'n-simo sinistro.

Indichiamo con  $T_n$  il tempo di intercorrenza tra l'(n-1)-esimo e l'n-esimo sinistro, cioè  $T_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$ . Pertanto

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n T_k, \quad S_{\sigma_n} = \sum_{k=1}^n Y_k$$

e

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= \text{Pr ob} \left\{ \sum_{k=1}^n X_k > u + \sum_{k=1}^n cT_k \text{ per almeno un } n \geq 1 \right\} = \\ &= \text{Pr ob} \left\{ \sum_{k=1}^n (X_k - cT_k) > u \text{ per almeno un } n \geq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Poniamo  $X_k - cT_k = Z_k$ . La nuova variabile introdotta rappresenta il guadagno tra il (k-1)-esimo ed il k-esimo sinistro.

Indichiamo con

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^n Z_k,$$

l'ammontare delle perdite all'istante dell' $n$ -esimo sinistro.

Chiaramente  $\Sigma_0 = 0$  e  $\Sigma_n$  è una passeggiata aleatoria, in quanto somma di variabili aleatorie i.i.d., mediante la quale è possibile esprimere  $\Psi(u)$ .

Infatti

$$\Psi(u) = \text{Pr ob}\{\Sigma_n > u \text{ per almeno un } n \geq 1\}.$$

Associamo adesso a  $\Sigma_n$  un altro processo: quello dei record.

La coppia  $(n, \Sigma_n) = M_n$  è un record se:

$$\Sigma_j < \Sigma_n \quad \forall j < n;$$

cioè se la perdita dell' $n$ -esimo sinistro supera tutte le perdite precedenti.

Per convenzione  $(0, \Sigma_0) = M_0$  è il primo record. Inoltre il processo dei record sarà crescente:  $M_0 < M_1 < M_2 < \dots < M_n$ .

La teoria del rinnovamento consiste proprio nell'esprimere la probabilità di rovina mediante il processo dei record:

$$\Psi(u) = \text{Pr ob}\{M_n > u \text{ per almeno un } n \geq 1\} = \text{Pr ob}\{\text{Sup}M_n > u\}.$$

Consideriamo la funzione di distribuzione dei record.

Indichiamo  $M_k - M_{k-1}$ , il salto tra due record, con  $W_k$ . Dunque  $W_k > 0$  e

$$M_n = \sum_{k=1}^n W_k.$$

Inoltre, i  $W_k$  sono identicamente distribuiti. Poniamo:

$$P(W_k \leq x) = H(x).$$

I salti tra record sono anche indipendenti, ma con la restrizione che, in assenza di un salto, non vi può essere neppure il successivo.

Infine:

- $H(0) = 0$ ; mentre, per quanto riguarda  $H(\infty)$ , occorre distinguere due casi.

1) Se  $H(\infty)$  assume valore pari ad 1, questo implica che la probabilità che il processo si interrompa, dopo aver osservato un record, è 0.

2) Se  $H(\infty)$  assume valore minore di 1, vi è, invece, probabilità positiva che, dopo aver osservato un record, il processo si interrompa e tale probabilità è pari a  $1 - H(\infty)$ .

In questo caso la distribuzione  $H(x)$  è detta difettiva.

Ricordiamo la formula della probabilità di non rovina

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(u-y)(1-G(y))dy.$$

Sapendo che  $\delta(0) = 1 - H(\infty)$ , cioè che la probabilità di non rovina con capitale iniziale pari a 0 è uguale alla probabilità che il processo si interrompa, è possibile ricavare che:

$$H(x) = \frac{\lambda}{c} \int_0^x (1-G(y))dy \quad (2.1),$$

da cui

$$H(\infty) = \frac{\lambda}{c} \int_0^{+\infty} (1-G(y))dy = \frac{\lambda}{c} \mu \quad (2.2),$$

nell'ipotesi che  $G(0) = 0$ , cioè che il danno non assuma valori negativi.

Discende da (2.2) che  $H(\infty) < 1$  equivale all'ipotizzare un caricamento positivo [33].

Infatti:

$$H(\infty) = \frac{\lambda\mu}{c} < 1 \Rightarrow c > \lambda\mu,$$

cioè premio annuo maggiore del premio equo.

Introduciamo adesso la cosiddetta misura di rinnovamento:

$$U(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} H^{*k}(x) \quad (2.3),$$

dove  $H^{*k}$  è la convoluzione k-esima di  $H$ .

Poiché  $M_n$  è dato dalla sommatoria dei  $W_k$  ed i  $W_k$  sono i.i.d., tale convoluzione rappresenta la probabilità che il k-esimo record sia minore di  $x$ , cioè  $H^{*k}(x) = P(M_n \leq x)$ .

Dal fatto che  $H^{*0}(x) = 1$  e  $H(0) = 0$  segue, inoltre, che  $U(0) = 1$ .

Vogliamo descrivere il significato di  $U(x)$ . Supponiamo che  $U(x)$  converga per un certo  $x > 0$ ; ciò significa che esiste una sottosuccessione  $H^{*n_s}(x)$  tale che  $n_s H^{*n_s}(x) \rightarrow 0$ . Scriviamo:

$$\sum_{k=0}^{n_s} H^{*k}(x) - \sum_{k=0}^{n_s} (k+1)(H^{*k}(x) - H^{*(k+1)}(x)) = n_s H^{*n_s}(x).$$

Poiché  $n_s H^{*n_s}(x) \rightarrow 0$ , facendo tendere la sommatoria del primo membro all'infinito otteniamo:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} H^{*k}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(H^{*k}(x) - H^{*(k+1)}(x)).$$

Allora:

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} H^{*k}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(H^{*k}(x) - H^{*(k+1)}(x)) = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(P(M_k \leq x) - P(M_{k+1} \leq x)). \end{aligned}$$

Quindi, se  $U(x)$  converge, esso rappresenta il valore atteso del numero dei record minori o uguali di  $x$ .

Ricordiamo, ora, il teorema di rinnovamento di Feller [62], che afferma:

### TEOREMA DI RINNOVAMENTO

- 1)  $U(x) < +\infty \quad \forall x \geq 0$ .
- 2) Se  $z(x)$  è una funzione limitata in ogni intervallo limitato, allora:

$$Z(x) = z(x) + \int_0^x Z(x-y) dH(y),$$

“l'equazione di rinnovamento”, ammette un'unica soluzione limitata in intervalli limitati, data da



$$Z(x) = \int_0^x z(x-y)dU(y).$$

In questo modo, è possibile mettere in relazione la distribuzione del salto dei record,  $H(x)$ , con la misura di rinnovamento,  $U(x)$ .

Un esempio di funzione che soddisfa l'equazione di rinnovamento è la  $U(x)$  stessa. Infatti:

$$\begin{aligned} U(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} H^{*k}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^x H^{*(k-1)}(x-y)dH(y) = \\ &= 1 + \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} H^{*k}(x-y)dH(y) = 1 + \int_0^x U(x-y)dH(y). \end{aligned}$$

Enunciamo, adesso, il teorema che permette di esprimere la probabilità di non rovina in funzione della distribuzione dei salti record e della misura di rinnovamento.

### TEOREMA

Se  $H(\infty) < 1$ , allora

- 1)  $P(\text{Processi con } \infty \text{ record}) = 0$
- 2)  $\delta(u) = (1 - H(\infty))U(u)$

Dim: Se  $H(\infty) < 1$ :

$$U(\infty) = \sum_{k=0}^{+\infty} H^{*k}(\infty) = \sum_{k=0}^{+\infty} (H(\infty))^k = \frac{1}{1 - H(\infty)}$$

e quindi il valor atteso del numero dei record minori o uguali a infinito è positivo, il che implica che l'insieme dei processi con infiniti record ha probabilità 0.

Inoltre:

$$\delta(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(M_n \leq u \text{ ed } \exists n+1 \text{ record}).$$

Quindi:

$$\delta(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} H^{*n}(u)(1 - H(\infty)) = U(u)(1 - H(\infty)).$$

Quindi si ha probabilità di non rovina positiva pari a  $\delta(u) = (1 - H(\infty))U(u)$  se  $H(\infty) < 1$ , cioè se l'evento che, il processo si interrompa, dopo aver osservato un record, ha probabilità positiva. Questo, come abbiamo mostrato, equivale ad assumere un caricamento positivo.

Per concludere, proviamo che, in casi di caricamento 0, cioè  $\lambda\mu = c$  ovvero  $H(\infty) = 1$ ,  $\delta(u) = 0$ , cioè la probabilità di non rovina è 0. Infatti, se  $H(\infty) = 1$ ,  $\text{Prob}(\infty \text{ record}) = 1$ . Tuttavia  $\delta(u) = \text{Prob}\{M_n \leq u \ \forall n\}$  e  $U(u)$ , che rappresenta il valore atteso del numero di record minori o uguali di  $u$ , è finito. Quindi  $\text{Prob}(\infty \text{ record} \leq u) = 0$ , il che implica  $\delta(u) = \text{Prob}\{M_n \leq u \ \forall n\} = 0$ .

## 2.2 Il modello di rinnovamento

Analizziamo più dettagliatamente il processo di rinnovamento, cercando, come nel caso del modello di Lundberg-Cramer, di trovare un esponente di Lundberg, una disuguaglianza ed una approssimazione per  $\Psi(u)$  [36],[42]. Consideriamo di nuovo:

$$C_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

dove

A)  $N_t$  è un processo di rinnovamento con  $T_0 = 0, T_1, T_2, \dots$ , tempi di intercorrenza dei sinistri, la cui distribuzione indicata con  $F$  ha media  $\lambda^{-1}$  e funzione generatrice dei momenti  $M_T(r)$ . Con  $T$  viene, invece, individuata una qualunque variabile aleatoria che abbia distribuzione  $F$ .

B) L'ammontare dei risarcimenti,  $Y_i$ , sono i.i.d. con distribuzione  $G$ , momenti  $\mu_k = E[Y_i^k]$  e funzione generatrice dei momenti  $M_Y(r)$ . Per il primo momento poniamo  $\mu_1 = \mu$ .

C)  $N_t$  e  $Y_i$  sono indipendenti.

Il modello descritto è detto di rinnovamento o di Sparre Andersen [3].

Siano  $\tau = \text{Inf}\{t > 0 : C_t < 0\}$  il tempo di rovina,  $\Psi(u, t) = P(\tau \leq t)$  e

$\Psi(u) = P(\tau > \infty)$ .

Consideriamo la passeggiata aleatoria:

$$C_{T_i} = u + \sum_{j=1}^i X_j$$

dove  $X_j = c(T_j - T_{j-1}) - Y_j$ .

Chiaramente risulta:

$$\Psi(u) = 1 \Leftrightarrow E[C_{T_2} - C_{T_1}] = \frac{c}{\lambda} - \mu \leq 0.$$

Per evitare la rovina quasi certa chiediamo che sia soddisfatta la condizione di utile netto, cioè  $c > \lambda\mu$ , che poi equivale ad imporre un caricamento positivo.

Notiamo che:

$E[C_t - u] \neq (c - \lambda\mu)t$  per alcuni  $t \in \mathfrak{R}$ , eccetto nel caso che  $T$  abbia una distribuzione esponenziale.

Dalla legge forte dei grandi numeri, [25], segue, tuttavia:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t}(C_t - u) = c - \lambda\mu,$$

per cui  $\Psi(u)$  tende a 0 per  $u$  che tende all'infinito.

### 2.3 Esponente di Lundberg

Assumiamo adesso che  $C_t$  sia un modello di rinnovamento e consideriamo,

per ogni  $r \geq 0$  tale che  $M_Y(r) < \infty$ , l'unica soluzione  $\theta(r)$  di:

$$M_Y(r)M_T(-\theta(r) - cr) = 1. \quad (2.4)$$

Notiamo che, posto  $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ , la (2.4) è equivalente a:

$$M_Y(r) \frac{\lambda}{\lambda + \theta(r) + cr} = 1,$$

cioè all'equazione da cui, nel modello classico, si ricavava l'esponente di Lundberg. Ancora una volta siamo interessati al caso  $\theta(r) = 0$ . Oltre alla soluzione banale  $r = 0$ , vi è al più un'ulteriore soluzione, a causa della convessità di  $\theta(r)$ . Infatti, posti  $m_Y(r) = \log M_Y(r)$  e  $m_T(r) = \log M_T(r)$ ,  $\theta(r)$  risulta la soluzione di:

$$m_Y(r) + m_T(-\theta(r) - cr) = 0,$$

la cui derivata è

$$m'_Y(r) - (\theta'(r) + c)m'_T(-\theta(r) - cr) = 0, \quad (2.5)$$

mentre la derivata seconda è data da

$$m''_Y(r) - \theta''(r)m'_T(-\theta(r) - cr) + (\theta'(r) + c)^2 m''_T(-\theta(r) - cr) = 0.$$

Poiché  $M_T(r)$  è strettamente crescente, anche  $m_T(r)$  lo è e  $m'_T(-\theta(r) - cr) > 0$ . Inoltre, poiché né Y né T sono deterministiche,  $m''_Y(r)$  e  $m''_T(r)$  sono positive.

Segue, allora, da  $m'_Y(r) - (\theta'(r) + c)m'_T(-\theta(r) - cr) = 0$  che  $\theta'(r) + c > 0$  e che  $\theta''(r) > 0$ . Quindi  $\theta(r)$  è convessa. D'altra parte  $\theta(0) = 0$  e

$$\theta'(0) = \frac{M'_Y(0)M_T(0)}{M_Y(0)M'_T(0)} - c = \lambda\mu - c < 0 \quad (2.6)$$

dalla condizione di utile netto.

In conclusione, anche in questo caso, esiste al più un'ulteriore soluzione  $\theta(R) = 0$  con  $R > 0$  e, di nuovo, tale valore è detto esponente di Lundberg.

Notiamo che tale  $R$  è la soluzione dell'equazione:  $M_Y(r)M_T(-cr) = 1$ .

Consideriamo per esempio il caso in cui  $C_t$  sia un processo di rinnovamento con ammontare dei sinistri distribuiti  $Exp(1)$ , premio annuo  $c = 5$  e tempi di intercorrenza dei sinistri distribuiti come:

$$F(t) = 1 - \frac{1}{2}(e^{-3t} + e^{-7t}).$$

Segue che  $M_Y(r)$  esiste per  $r < 1$ ;  $M_T(r)$  per  $r < 3$  e  $\lambda = 4.2$ .

La condizione di utile netto, ( $5 > 4.2$ ), è soddisfatta e l'equazione da risolvere è:

$$\frac{1}{1-r} \frac{1}{2} \left( \frac{3}{3+5r} + \frac{7}{7+5r} \right) = 1,$$

da cui, svolgendo i calcoli, otteniamo

$$3(7+5r) + 7(3+5r) = 2(1-r)(3+5r)(7+5r), \text{ cioè } 25r^3 + 25r^2 - 4r = 0.$$

Oltre alla soluzione banale  $r = 0$ , troviamo due ulteriori soluzioni del tipo

$$r_{1/2} = \frac{-25 \pm \sqrt{1025}}{50} = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{10} = \begin{cases} 0.140312, \\ -1.14031. \end{cases}$$

Dunque  $R = 0.140312$ . In questo esempio sembra esservi, paradossalmente, anche una soluzione negativa  $r_2 < 0$ . Tuttavia, mentre  $M_Y(r_2) < 1 < \infty$ , si ha  $-cr_2 = 5.70156 > 3$  e quindi  $M_T(r_2) = \infty$ : pertanto  $r_2$  non può essere soluzione dell'equazione  $M_Y(r)M_T(-cr) = 1$ .

Consideriamo un altro esempio, in cui  $T \sim \Gamma(\gamma, \alpha)$ , e supponiamo che esista  $r_\infty$  tale che  $M_Y(r) < \infty \Leftrightarrow r < r_\infty$  [41]. Allora:

$$\lim_{r \rightarrow r_\infty} M_Y(r) = \infty.$$

Indichiamo con  $R(\gamma, \alpha)$  l'esponente di Lundberg che, in questo caso, esiste.

Ricordando che la funzione generatrice dei momenti per una  $\Gamma(\gamma, \alpha)$  è:

$$M_Y(r) = \left( \frac{\alpha}{\alpha - r} \right)^\gamma,$$

per  $h > 0$  abbiamo

$$\left( \frac{\alpha}{\alpha + cR(\gamma, \alpha)} \right)^{\gamma+h} M_Y(R(\gamma, \alpha)) = \left( \frac{\alpha}{\alpha + cR(\gamma, \alpha)} \right)^h < 1,$$

per cui  $R(\gamma + h, \alpha) > R(\gamma, \alpha)$ . All'aumentare di  $\gamma$ , cioè  $R$  cresce.

Viceversa, poiché:

$$\left(\frac{\alpha+h}{\alpha+h+cR(\gamma,\alpha)}\right)^\gamma M_Y(R(\gamma,\alpha)) > \left(\frac{\alpha}{\alpha+cR(\gamma,\alpha)}\right)^\gamma M_Y(R(\gamma,\alpha)) = 1,$$

abbiamo che  $R(\gamma, \alpha+h) < R(\gamma, \alpha)$ .

Pertanto, all'aumentare di  $\alpha$ ,  $R$  diminuisce.

Appare interessante esaminare cosa accade al tendere di  $\alpha$  e  $\gamma$  a 0 in modo tale che il valore della media resti costante. Assumendo  $\alpha = k\gamma$  e ricordando  $m_Y(r) = \log M_Y(r)$ , notiamo che:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \gamma \log\left(\frac{k\gamma}{k\gamma + cr}\right) + m_Y(r) = m_Y(r).$$

Dunque  $R(\gamma, k\gamma)$  tende a 0 per  $\gamma$  che tende a 0, poiché la convergenza di una funzione continua su un intervallo compatto è uniforme.

Poniamo ora  $r(\gamma) = \gamma^{-1}R(\gamma)$ . Allora  $r(\gamma)$  risolve l'equazione:

$$\log\left(\frac{k}{k+cr}\right) + \frac{m_Y(r\gamma)}{\gamma} = 0. \quad (2.7)$$

Facendo tendere  $\gamma$  a 0, troviamo

$$\log\left(\frac{k}{k+cr}\right) + rm'_Y(0) = \log\left(\frac{k}{k+cr}\right) + r\mu = 0. \quad (2.8)$$

La funzione al primo membro della (2.8) è convessa, con radice  $r=0$  e derivata in 0 uguale a:

$$-c/k + \mu < 0.$$

Inoltre tale funzione tende all'infinito quando  $r$  tende all'infinito.

Segue che (2.8) ammette un'ulteriore soluzione  $r_0$  e  $r(\gamma)$  tende a  $r_0$  per  $\gamma$  che tende a 0.

Sostituendo in (2.7) a  $r$   $r(\gamma)$  e derivando, otteniamo:

$$-\frac{cr'(\gamma)}{k+cr(\gamma)} + \frac{(\gamma r'(\gamma) + r(\gamma))m'_Y(\gamma r(\gamma))}{\gamma} - \frac{m_Y(\gamma r(\gamma))}{\gamma^2} = 0,$$

da cui

$$r'(\gamma) = \frac{\frac{\gamma r(\gamma) m'_Y(\gamma r(\gamma)) - m_Y(\gamma r(\gamma))}{\gamma^2}}{\frac{c}{k + cr(\gamma)} - m'_Y(\gamma r(\gamma))}.$$

Usando un'espansione di Taylor ed il fatto che esiste il  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} r'(\gamma) = r_0 > 0$ ,

otteniamo:

$$\gamma r(\gamma) m'_Y(\gamma r(\gamma)) - m_Y(\gamma r(\gamma)) = \frac{\sigma^2}{2} \gamma^2 r(\gamma)^2 + o(\gamma^3 r(\gamma)^3) = \frac{\sigma^2}{2} \gamma^2 r_0^2 + o(\gamma^3),$$

dove  $\sigma^2$  è la varianza dei risarcimenti.

Troviamo che:

$$r'(\gamma) = \frac{\sigma^2 r_0^2 (k + cr_0)}{2(c - k\mu - c\mu r_0)} + o(\gamma)$$

e, grazie alla convergenza uniforme,

$$r(\gamma) = r_0 + \frac{\sigma^2 r_0^2 (k + cr_0)}{2(c - k\mu - c\mu r_0)} \gamma + o(\gamma^2),$$

ovvero

$$R(\gamma) = r_0 + \frac{\sigma^2 r_0^2 (k + cr_0)}{2(c - k\mu - c\mu r_0)} \gamma^2 + o(\gamma^3).$$

Notiamo infine che

$$\left( \frac{k\gamma}{k\gamma - r} \right)^\gamma = \left( 1 - \frac{r}{k\gamma} \right)^{-\gamma} \rightarrow e^{r/k},$$

ovvero che la funzione generatrice dei momenti dei tempi di intercorrenza dei sinistri tende ad  $e^{r/k}$ , la quale è una funzione generatrice dei momenti di tempi di intercorrenza deterministici, ( $T = 1/k$ ).

Quindi,  $T(\gamma)$  tende in distribuzione ad  $1/k$  per  $\gamma$  che tende a 0, ma, nonostante ciò, l'esponente di Lundberg non converge ad un esponente di Lundberg di un modello con tempi di intercorrenza deterministici.

## 2.4 Disuguaglianza di Lundberg

Proviamo adesso a ricavare la disuguaglianza di Lundberg con il modello di rinnovamento, cominciando dal caso in cui  $F_1 = F$  [3].

Indicando con  $H(x) = P[\tau < \infty, C_\tau \geq -x / C_0 = 0]$ , abbiamo:

$$\Psi(u) = \int_0^u \Psi(u-y) dH(x) + (H(\infty) - H(u)), \quad (2.9)$$

dove  $H(\infty) = P[\tau < \infty / C_0 = 0]$ .

La probabilità di rovina è espressa mediante i salti record; corrisponde, cioè, alla probabilità che vi siano perdite, ma che comunque il valore delle riserve resti maggiore o uguale di un certo  $x$  tollerato. Se  $x$  è compreso tra 0 e  $u$ , può essere considerata la probabilità di rovina con capitale iniziale uguale ad  $u$  meno la perdita  $x$ , cioè viene considerata  $\Psi(u-x)$ . Se invece la perdita è superiore ad  $u$  la rovina è certa e quindi la probabilità di rovina è uguale alla probabilità che il salto sia compreso tra  $u$  e l'infinito, cioè  $H(\infty) - H(u)$ .

In genere, però, non è possibile ottenere un'espressione esplicita per  $H(u)$ .

Cerchiamo allora di collegare  $R$ , esponente di Lundberg, a  $H$ .

È possibile dimostrare che, se  $C_t$  è un modello di rinnovamento con esponente di Lundberg  $R$ , allora:

$$\int_0^\infty e^{Rx} dH(x) = E[e^{-RC_\tau} 1_{\{\tau < \infty\}} / C_0 = 0] = 1.$$

Da ciò segue che, se  $R$  esiste,  $\Psi(u) < e^{-Ru}$ .

Infatti, se così non fosse, indicato con  $u_0 = \text{Inf}\{u \geq 0 : \Psi(u) \geq e^{-Ru}\}$  e posto  $u_0 \leq u < u_0 + \varepsilon$  in modo che  $\Psi(u) \geq e^{-Ru}$ , abbiamo:

$$\Psi(u_0) \geq \Psi(u) \geq e^{-Ru} > e^{-R(u_0+\varepsilon)}.$$

Quindi  $\Psi(u_0) \geq e^{-Ru_0}$ , da cui

$$\begin{aligned} e^{-Ru_0} &\leq \Psi(u_0) = \int_0^{u_0} \Psi(u_0-x) dH(x) + \int_{u_0}^\infty dH(x) < \\ &< \int_0^{u_0} e^{-R(u_0-x)} dH(x) + \int_{u_0}^\infty dH(x) \leq \int_0^\infty e^{-R(u_0-x)} dH(x) = e^{-Ru_0}, \end{aligned}$$



ovvero una contraddizione.

Pertanto la disuguaglianza di Lundberg continua a valere.

Proponiamo il seguente esempio [41]:

$$Y_i \sim \text{Exp}(\alpha) \quad \text{e} \quad F(t) = 1 - pe^{-t\beta} - (1-p)e^{-t\gamma} \quad \text{con} \quad 0 < \beta < \gamma \quad \text{e}$$

$$0 < p \leq \gamma(\gamma - \beta)^{-1}.$$

La condizione di utile netto diviene:

$$\alpha c(\beta + p(\gamma - \beta)) > \beta \gamma,$$

mentre l'equazione da cui è possibile ricavare  $R$  è:

$$\frac{\alpha}{\alpha - r} \left( \frac{p\beta}{\beta + cr} + \frac{(1-p)\gamma}{\gamma + cr} \right) = 1,$$

che equivale a

$$c^2 r^3 - c(\alpha c - \beta - \gamma)r^2 - (\alpha c(\beta + p(\gamma - \beta)) - \beta \gamma)r = 0.$$

Tale equazione, oltre alla banale soluzione  $r_0 = 0$ , ha per soluzioni:

$$r_{1/2} = \frac{\alpha c - \beta - \gamma \pm \sqrt{(\alpha c - \gamma + \beta)^2 + 4\alpha c p(\gamma - \beta)}}{2c}.$$

Dalla condizione di utile netto risulta  $r_1 > 0 > r_2$ , e dalle condizioni su  $p$  si ottiene:

$$\begin{aligned} r_2 < r_1 &\leq \frac{\alpha c - \beta - \gamma + \sqrt{(\alpha c - \gamma + \beta)^2 + 4\alpha c \gamma}}{2c} < \\ &< \frac{\alpha c - \beta - \gamma + \sqrt{(\alpha c + \gamma + \beta)^2}}{2c} = \alpha \end{aligned}$$

e quindi  $M_Y(r_{1/2}) < \infty$ .

Tuttavia

$$\begin{aligned} -cr_2 &= \frac{\beta + \gamma - \alpha c + \sqrt{(\alpha c - \gamma + \beta)^2 + 4\alpha c p(\gamma - \beta)}}{2} > \\ &> \frac{\beta + \gamma - \alpha c + \sqrt{(\alpha c - \gamma + \beta)^2}}{2} \geq \beta \end{aligned}$$

e quindi  $M_T(-cr_2) = \infty$ , che porta ad escludere la soluzione negativa  $r_2$ .

In conclusione

$$R = \frac{\alpha c - \gamma - \beta + \sqrt{(\alpha c - \gamma + \beta)^2 + 4\alpha c p(\gamma - \beta)}}{2c},$$

con

$$\Psi(u) < e^{-Ru}.$$

Consideriamo adesso il caso generale di modello di rinnovamento, assumendo  $F_1$  arbitrario. Indichiamo la probabilità di rovina del modello in cui  $F_1 = F$  con  $\Psi^0(u)$ , e ricordiamo che  $C_{T_1+t}$  è un modello di rinnovamento con capitale iniziale pari a  $T_1$ .

Esistono due possibilità: o si ha rovina in  $T_1$  o  $C_{T_1} \geq 0$ .

Dunque:

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= \int_0^\infty \left( \int_0^{u+ct} \Psi^0(u+ct-y) dG(y) + \int_{u+ct}^\infty dG(y) \right) dF^1(t) < \\ &< \int_0^\infty \left( \int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-y)} dG(y) + \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-y)} dG(y) \right) dF^1(t) = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-R(u+ct-y)} dG(y) dF^1(t) = e^{-Ru} E[e^{R(Y_1 - cT_1)}] = \\ &= M_Y(R) M_{T_1}(-cR) e^{-Ru}. \end{aligned}$$

Segue  $\Psi(u) < C e^{-Ru}$ , dove  $C = M_Y(R) M_{T_1}(-cR)$  assume valori in  $(0, M_Y(R))$ . Nei casi esaminati assumeremo  $C = 1$ , il che si verifica quando  $F^1(t) = F(t)$  [69].

## 2.5 Approssimazione di Lundberg-Cramer

Ci proponiamo di ottenere un'approssimazione di Lundberg-Cramer.

Moltiplicando  $\Psi(u)$  per  $e^{Ru}$  [67],

$$\Psi(u)e^{Ru} = \int_0^u \Psi(u-x)e^{R(u-x)}e^{Rx} dH(x) + e^{Ru}(H(\infty) - H(u)),$$

e passando al limite per  $u$  che tende all'infinito, si può dimostrare il seguente

### TEOREMA

Supponiamo che  $C_t$  sia un modello di rinnovamento, che  $R$  esista e che esista  $r > R$  tale che  $M_Y(r) < \infty$ .

Allora:

a) se la distribuzione di  $Y_1 - cT_1$  non è aritmetica [12],

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(u)e^{Ru} = \frac{1 - H(\infty)}{R \int_0^{\infty} x e^{Rx} dH(x)} := C$$

b) se  $Y_1 - cT_1$  è una distribuzione aritmetica con lunghezza  $\gamma$ , per  $x \in [0, \gamma)$  [35]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(x + n\gamma)e^{R(x+n\gamma)} = C e^{Rx} \frac{1 - e^{-R\gamma}}{R}.$$

Ricordiamo, però, che in genere non esiste una formula esplicita per  $H(x)$ , né di conseguenza un valore esplicito per  $C$ , comunque compreso tra 0 e 1.

Assumendo  $C$  noto, nel caso "a" del teorema abbiamo:

$$\Psi(u) \approx C e^{-Ru} \quad \text{per valori grandi di } u.$$

Consideriamo, adesso, l'esempio in cui  $Y_i \sim \text{Exp}(\alpha)$ . Poiché  $M_Y(r)$  tende all'infinito per  $r$  che tende ad  $\alpha$ ,  $R$  esiste e le condizioni del teorema, che consente di trovare l'approssimazione di Lundberg-Cramer, sono soddisfatte.

Dalla precedente formula

$$\int_0^{\infty} e^{Rx} dH(x) = E[e^{-RC\tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} / C_0 = 0] = 1,$$

segue

$$e^{-Ru} = E[e^{-RC\tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}] = E[e^{-RC\tau} / \tau < \infty] \Psi(u).$$

Supponiamo di conoscere  $C_{\tau-}$  ed indichiamo con  $Z = C_{\tau-} - C_{\tau}$  l'ammontare del risarcimento che porta alla rovina. Le uniche informazioni su  $Z$  sono che  $Z > 0$  perché in  $\tau$  vi è rovina. Allora:

$$\begin{aligned} P[-C_{\tau} > x / C_{\tau-} = y, \tau < \infty] &= P[Z > y + x / C_{\tau-} = y, \tau < \infty] = \\ &= P[Y_1 > y + x / Y_1 > y] = e^{-\alpha x}, \end{aligned}$$

da cui

$$E[e^{-RC_{\tau}} / \tau < \infty] = \int_0^{\infty} e^{Rx} \alpha e^{-\alpha x} dx = \frac{\alpha}{\alpha - R}$$

e quindi

$$\Psi(u) = \frac{\alpha - R}{\alpha} e^{-Ru}.$$

Pertanto, come nel caso del modello classico, se supponiamo che i risarcimenti abbiano una distribuzione esponenziale, l'approssimazione è esatta, e  $C$  è determinato esplicitamente.

Consideriamo ora il caso generale [68]. Di nuovo moltiplichiamo  $\Psi(u)$  per  $e^{Ru}$  e facciamo tendere  $u$  all'infinito.

Ricordiamo che:

$$\Psi(u) = \int_0^{\infty} \left( \int_0^{u+ct} \Psi^0(u+ct-y) dG(y) + (1 - G(u+ct)) \right) dF^1(t).$$

Moltiplicando il primo integrale del secondo membro per  $e^{Ru}$  ed utilizzando la disuguaglianza di Lundberg, otteniamo:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \int_0^{u+ct} \Psi^0(u+ct-y) e^{Ru} dG(y) dF^1(t) = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{u+ct} \Psi^0(u+ct-y) e^{R(u+ct-y)} e^{Ry} dG(y) e^{-cRt} dF^1(t) < \\ &< \int_0^{\infty} \int_0^{u+ct} e^{Ry} dG(y) e^{-cRt} dF^1(t) \leq \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{Ry} dG(y) e^{-cRt} dF^1(t) = \\ &= M_Y(R) M_{T_1}(-cR) < \infty. \end{aligned}$$

Passando al limite per  $u$  che tende all'infinito, e potendo scambiare limite ed integrale:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \int_0^{u+ct} \Psi^0(u+ct-y) e^{R(u+ct-y)} e^{Ry} dG(y) e^{-cRt} dF^1(t) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \int_0^\infty C e^{Ry} dG(y) e^{-cRt} dF^1(t) = \\
&= M_Y(R) M_{T_1}(-cR) C.
\end{aligned}$$

In quanto al secondo integrale, invece:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_{u+ct}^\infty e^{Ru} dG(y) dF^1(t) &\leq \int_0^\infty \int_{u+ct}^\infty e^{R(y-ct)} dG(y) dF^1(t) \leq \\
&\leq \int_0^\infty \int_u^\infty e^{Ry} dG(y) e^{-cRt} dF^1(t) = M_{T_1}(-cR) \int_u^\infty e^{Ry} dG(y),
\end{aligned}$$

il cui limite per  $u$  che tende all'infinito è 0.

In conclusione

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(u) e^{Ru} = M_Y(R) M_{T_1}(-cR) C \quad (2.10)$$

dove  $C$  è la stesa costante ottenuta nel comune modello di rinnovamento.

Segue che, per  $u$  grande,

$$\Psi(u) \approx e^{-Ru} M_Y(R) M_{T_1}(-cR) C.$$

Riprendiamo l'esempio precedente, in cui i risarcimenti avevano distribuzione esponenziale. Posto  $C = 1$ , si ottiene:

$$E[e^{-RC_{T_1}}] = e^{-Ru} M_Y(R) M_{T_1}(-cR) = \frac{\alpha}{\alpha - R} e^{-Ru} M_{T_1}(-cR)$$

e

$$\frac{\alpha}{\alpha - R} e^{-Ru} M_{T_1}(-cR) = \frac{\alpha}{\alpha - R} \Psi(u).$$

Pertanto

$$\Psi(u) = M_{T_1}(-cR) e^{-Ru}.$$

## 2.6 Approssimazione di propagazione

Consideriamo, come nel caso del modello classico, la cosiddetta approssimazione di propagazione per la funzione  $\Psi$ . Possiamo affermare quanto segue. Sia  $C_t^{(n)}$  una successione di modelli di rinnovamento con

capitale iniziale uguale ad  $u$ , tempi di intercorrenza dei sinistri con distribuzione  $F^{(n)}(t) = F(nt)$ , ammontare dei sinistri distribuiti come

$$G^{(n)}(x) = G(x\sqrt{n})$$

e premio annuo

$$c^{(n)} = \left( 1 + \frac{\frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu}}{\frac{\lambda\mu}{\sqrt{n}}} \right) \lambda^{(n)} \mu^{(n)} = c + (\sqrt{n} - 1)\lambda\mu$$

dove  $\lambda = \lambda^{(1)}$  e  $\mu = \mu^1$ .

Allora, per  $n$  che tende all'infinito,

$$C_t^{(n)} \rightarrow (u + W_t)$$

uniformemente su intervalli finiti, dove  $W_t$  è un moto Browniano  $(c - \lambda\mu, \lambda\mu_2)$ .

In altre parole, si fa tendere all'infinito il numero dei sinistri in un intervallo unitario di tempo e a zero l'ammontare medio dei risarcimenti in modo tale che  $C_t^{(n)} - u$  tenda ad una Normale di media  $c - \lambda\mu$ .

Chiamando  $\tau^{(n)}$  il tempo di rovina del modello di rinnovamento e  $\tau = \text{Inf}\{t \geq 0 : u + W_t < 0\}$ , quello del moto Browniano, vale, come nel caso classico:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[\tau^{(n)} \leq t] = P[\tau \leq t].$$

Dunque  $P[\tau^{(n)} \leq t]$  viene approssimata con  $P[\tau \leq t]$ , che è la probabilità di rovina del moto Browniano. A differenza del modello classico, però, non è possibile sapere se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[\tau^{(n)} < \infty] = P[\tau < \infty],$$

per cui non è possibile approssimare  $P[\tau^{(n)} < \infty]$  con  $P[\tau < \infty]$ .

Tuttavia, come nel modello classico, esempi numerici mostrano che tale approssimazione produce buoni risultati solo se  $c/(\lambda\mu)$  è vicino ad 1.

## CAPITOLO 3

### Alcune osservazioni sulle distribuzioni heavy-tail

#### 3.1 Perché le distribuzioni heavy-tail sono pericolose?

Nella maggior parte dei casi è utile conoscere solo i primi due momenti della distribuzione adottata per l'ammontare dei risarcimenti. La media e la varianza, inoltre, sono facilmente stimabili mediante le seguenti quantità:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\mu})^2.$$

Questi sono stimatori non distorti qualunque sia la distribuzione che viene adottata [13]. Nonostante ciò, usare  $\hat{\mu}$  per stimare la media risulta essere pericoloso qualora la distribuzione prescelta sia di tipo heavy-tail.

Per modellare risarcimenti elevati, infatti, la distribuzione comunemente adottata è la Pareto. Sia  $(Y_i : 1 \leq i \leq n)$  un campione di variabili aleatorie i.i.d., distribuite  $Pa(\alpha, 1)$ . Notiamo che porre il secondo parametro uguale a 1 non fa perdere di generalità, poiché si tratta di un parametro di scala. Supponiamo, inoltre, di sapere che:

$$Y_n^{\max} := \max_{i \leq n} Y_i \leq M$$

dove  $M$  è una costante.

Calcoliamo il valore atteso dello stimatore della media, condizionato dal fatto che  $Y_n^{\max} \leq M$  e che l'errore relativo in riferimento alla vera media sia uguale a  $(\alpha - 1)^{-1}$ .

$$E[\hat{\mu} / Y_n^{\max} \leq M] = E[\hat{\mu} / Y_1 \leq M, \dots, Y_n \leq M] =$$



$$\begin{aligned}
 &= E[Y_1 / Y_1 \leq M, \dots, Y_n \leq M] = E[Y_1 / Y_1 \leq M] = \\
 &= \frac{\int_0^M x \frac{\alpha}{(1+x)^{\alpha+1}} dx}{\int_0^M \frac{\alpha}{(1+x)^{\alpha+1}} dx} = \frac{\int_0^M (x+1) \frac{\alpha}{(1+x)^{\alpha+1}} dx}{\int_0^M \frac{\alpha}{(1+x)^{\alpha+1}} dx} - 1 = \\
 &= \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{1-(1+M)^{-(\alpha-1)}}{1-(1+M)^{-\alpha}} - 1.
 \end{aligned}$$

Quanto all'errore relativo:

$$\begin{aligned}
 \frac{E[\hat{\mu} / Y_n^{\max} \leq M] - (\alpha-1)^{-1}}{(\alpha-1)^{-1}} &= \frac{\alpha(1-(1+M)^{-(\alpha-1)})}{1-(1+M)^{-\alpha}} - (\alpha-1) - 1 = \\
 &= -\alpha \frac{(1+M)^{-(\alpha-1)} - (1+M)^{-\alpha}}{1-(1+M)^{-\alpha}}.
 \end{aligned}$$

Fissiamo  $p \in (0,1)$  e scegliamo  $M$  in modo che  $P[Y_n^{\max} \leq M] = p$ , cioè stabiliamo quale deve essere la probabilità che non sia un errore assumere  $Y_n^{\max} \leq M$ . Esplicitamente:

$$P[Y_n^{\max} \leq M] = P[Y_1 \leq M, \dots, Y_n \leq M] = P[Y_1 \leq M]^n = (1 - (1+M)^{-\alpha})^n = p,$$

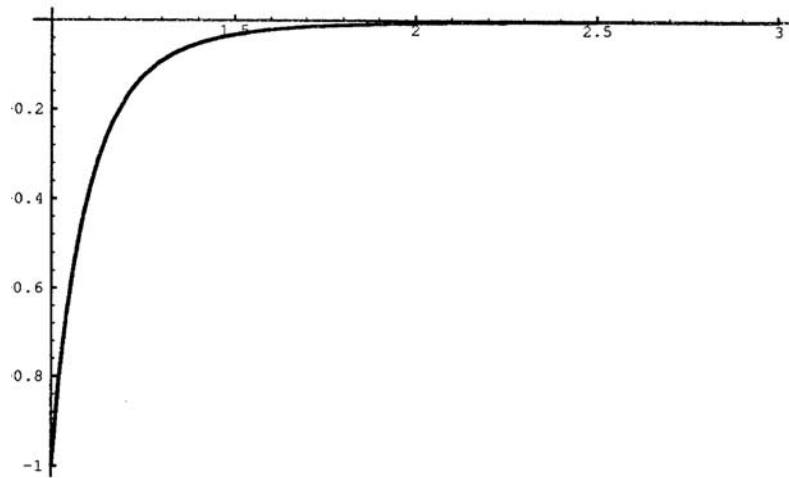
ovvero

$$(1+M)^{-1} = (1 - p^{1/n})^{1/\alpha}.$$

Da qui troviamo per l'errore relativo l'espressione

$$-\alpha \frac{(1 - p^{1/n})^{(\alpha-1)/\alpha} - (1 - p^{1/n})}{p^{1/n}}. \quad (3.1)$$

Il seguente grafico mostra gli errori relativi quando si sceglie  $p = 0.99$ , (probabilità che il massimo valore non superi  $M$ ), con un campione di numerosità 1000, che risulta essere abbastanza grande (tipico, ad esempio, delle le assicurazioni contro gli incendi).



**Figura 1: Errore relativo per  $p=0.99$  e  $n=1000$ .**

Spesso le stime sono calcolate scegliendo valori di  $\alpha$  tra 1 e 1.5. Per tali valori la tabella sottostante riporta alcuni errori relativi:

$\alpha$	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3
<i>errore</i>	-60.7%	-38.6%	-25.6%	-17.6%	-12.5%	-9.1%

$\alpha$	1.4	1.5
<i>errore</i>	-5.2%	-3.2%

Se, ad esempio,  $\alpha$  è 1.25, allora il premio richiesto risulta essere nel 99% dei casi troppo basso di almeno il 12.5%. Questo comporta un errore di calcolo del premio rilevante per le compagnie di assicurazioni, e dunque il comune stimatore della media, precedentemente introdotto, non dovrebbe essere usato nel caso della Pareto. La stessa cosa accade con altre distribuzioni heavy-tail.

Consideriamo, adesso, un problema di riassicurazione. Supponiamo che una compagnia voglia riassicurare risarcimenti distribuiti  $Pa(\alpha,1)$  mediante una

excess of loss con livello di ritenzione uguale a  $M$ . Per calcolare il premio di riassicurazione occorre calcolare il valore atteso della parte dei risarcimenti che spettano al riassicuratore:

$$\begin{aligned}
 E[Y_i - M / Y_i > M] &= \frac{\int_M^\infty x \frac{\alpha}{(1+x)^{\alpha+1}} dx}{\int_M^\infty \frac{\alpha}{(1+x)^{\alpha+1}} dx} - M = \\
 &= \frac{\int_M^\infty \frac{\alpha}{(1+x)^\alpha} dx}{\int_M^\infty \frac{\alpha}{(1+x)^{\alpha+1}} dx} - (M+1) = \frac{\alpha}{\alpha-1} (1+M)^{-(\alpha-1)} - (M+1) = \\
 &= \frac{\alpha(M+1)}{\alpha-1} - (M+1) = \frac{M+1}{\alpha-1}.
 \end{aligned}$$

Quindi  $E[Y_i - M / Y_i > M]$  cresce linearmente con  $M$ , il che implica che per stimare tale valore medio dovrebbero essere considerati solo grandi valori di  $Y_i$ . Viceversa, se consideriamo il caso di risarcimenti distribuiti  $Exp(1)$ , vale  $E[Y_i - M / Y_i > M] = 1$  per ogni  $M$ , e quindi, per calcolare il valore atteso occorre usare l'intero campione.

Spesso viene detto che il valore complessivo di tutti i beni sulla terra è grande, ma finito. Se così fosse, i danni dovrebbero essere limitati e sarebbe possibile adottare sempre distribuzioni light-tail. Ma questo è in contraddizione con quanto viene riscontrato nella realtà. Spesso, infatti, i danni mostrano un comportamento tipico delle distribuzioni heavy-tail. Per esempio, i disastri provocati dagli uragani sono talmente elevati che possono essere considerati infiniti e le compagnie di assicurazioni devono essere pronte a far fronte a questa eventualità. Bisogna, dunque, porre molta attenzione nel maneggiare le heavy-tail. Gli attuari affermano che si tratta di una classe di distribuzioni molto pericolosa, ed è questo il motivo per cui deve essere considerata in un modo particolare.

## 3.2 Come scoprire se una distribuzione è heavy-tail

### 3.2.1 La vita media residua

La quantità precedentemente introdotta,  $E[Y_i - M / Y_i > M]$ , è detta vita media residua. Vediamone il valore per alcune distribuzioni ed analizziamo che cosa accade quando  $M$  tende all'infinito [56].

1)  $Exp(\alpha)$

$$E[Y_i - M / Y_i > M] = \alpha^{-1} \rightarrow \alpha^{-1}.$$

2)  $\Gamma(\gamma, \alpha)$

$$E[Y_i - M / Y_i > M] = \frac{\int_M^\infty \int_z^\infty y^{\gamma-1} e^{-\alpha y} dy dz}{\int_M^\infty y^{\gamma-1} e^{-\alpha y} dz} \rightarrow \alpha^{-1}.$$

3)  $Wei(\alpha, c)$

$$E[Y_i - M / Y_i > M] = \frac{\int_M^\infty e^{-cz^\alpha} dz}{e^{-cM^\alpha}} \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha > 1, \\ c^{-1}, & \text{se } \alpha = 1, \\ \infty, & \text{se } \alpha < 1. \end{cases}$$

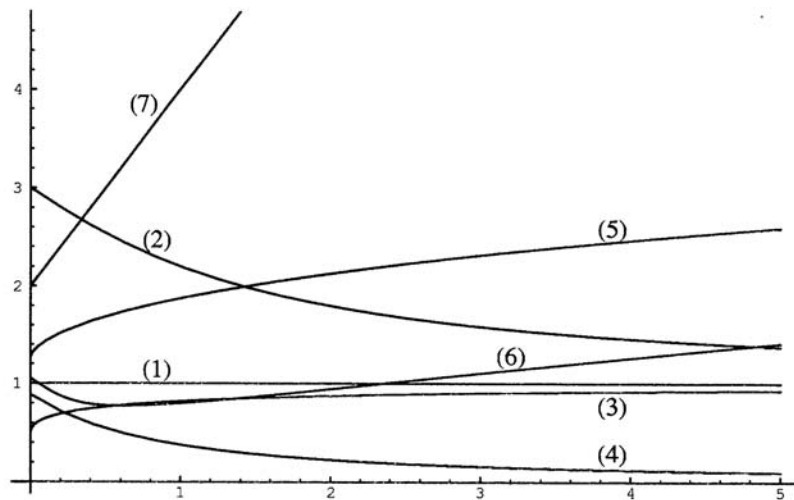
4)  $LN(\mu, \sigma^2)$

$$E[Y_i - M / Y_i > M] = \frac{\int_M^\infty \Phi\left(\frac{\mu - \log z}{\sigma}\right) dz}{\Phi\left(\frac{\mu - \log M}{\sigma}\right)} \rightarrow \infty.$$

5)  $Pa(\alpha, \beta)$

$$E[Y_i - M / Y_i > M] = \frac{M + \beta}{\alpha - 1} \rightarrow \infty.$$

Il seguente grafico mostra l'evolversi, al variare di  $M$ , della vita media residua delle distribuzioni precedenti, per particolari valori dei parametri [59].



**Figura 2:**Vita media residua: (1)  $\text{Exp}(1)$ , (2)  $\Gamma(3,1)$ , (3)  $\Gamma(0.5,1)$ , (4)  $\text{Wei}(2,1)$ , (5)  $\text{Wei}(0.7,1)$ , (6)  $\text{LN}(-0.2,1)$ , (7)  $\text{Pa}(1.5,1)$ .

Possiamo notare che la vita media residua tende all'infinito per  $M$  che va all'infinito se le distribuzioni sono heavy-tail; mentre tende ad un valore finito se sono light-tail. Quindi l'analisi può essere ricondotta alla vita media residua: se quest'ultima va all'infinito, abbiamo a che fare con distribuzioni heavy-tail; se, viceversa, converge ad un valore finito siamo nel caso di light-tail [48].

### 3.2.2 Come stimare la funzione che individua la vita media residua

Se  $(Y_i : 1 \leq i \leq n)$  è un campione di variabili aleatorie i.i.d., lo stimatore più naturale per  $E[Y_i - M / Y_i > M]$  è:

$$\hat{e}(M) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{Y_i > M\}}} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{Y_i > M\}} (Y_i - M),$$

detto funzione empirica della vita media residua [32].

Abbiamo già visto come sia pericoloso utilizzare tale quantità per stimare la media qualora abbiamo a che fare con distribuzioni di tipo heavy-tail. Ma, fortunatamente, quello a cui siamo interessati non è il valore esatto assunto dalla funzione che rappresenta la vita media residua, ma il suo andamento. Basta, allora, poter disegnare un grafico che ne individua la forma, e a questo scopo lo stimatore precedente si dimostra abbastanza valido. I grafici successivi rappresentano gli istogrammi e la funzione empirica della vita media residua ottenuti da una simulazione effettuata con un campione di 1000 unità [59].

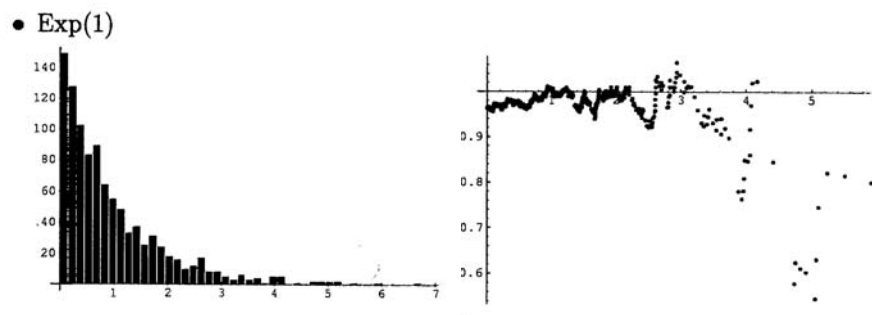


Figura 3: Istogramma

Funzione empirica

CAPITOLO 3 (Alcune osservazioni sulle distribuzioni heavy-tail)

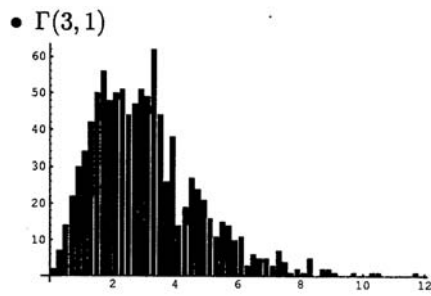
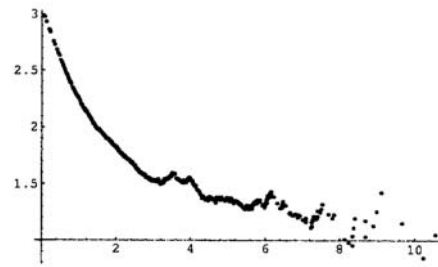


Figura 4: Istogramma



Funzione empirica

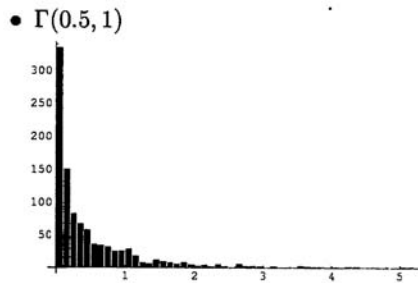
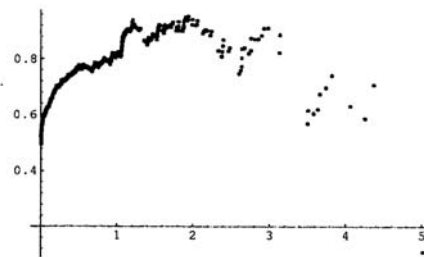


Figura 5: Istogramma



Funzione empirica

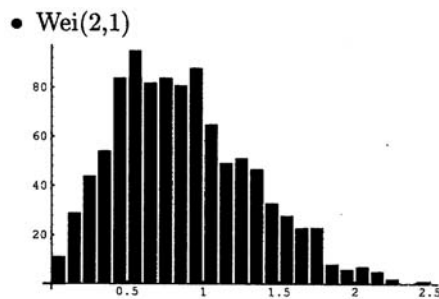
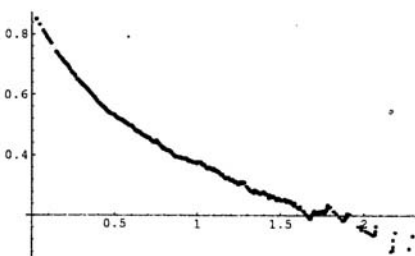


Figura 6: Istogramma



Funzione empirica

• Wei(0.7,1)

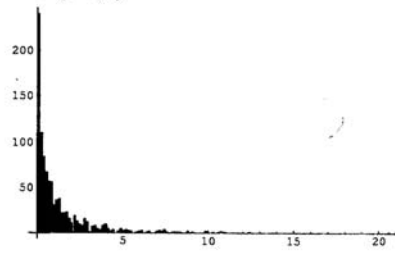
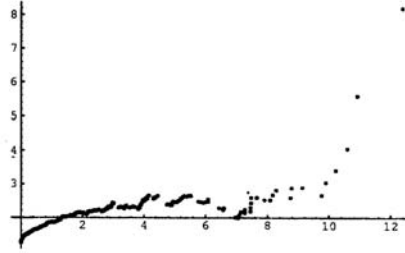


Figura 7: Istogramma



Funzione empirica

• LN(-0.2,1)

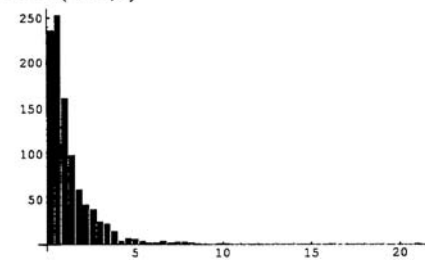
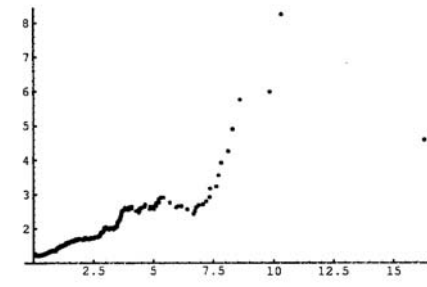


Figura 8: Istogramma



Funzione empirica

• Pa(1.5,1)

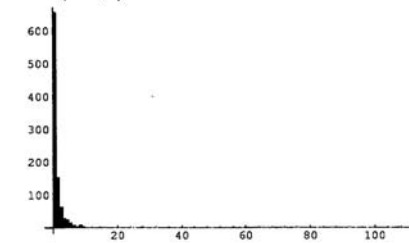
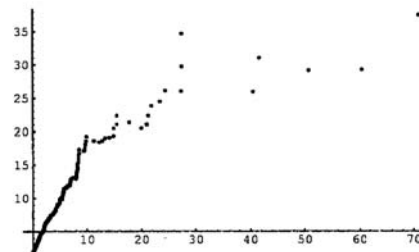


Figura 9: Istogramma



Funzione empirica

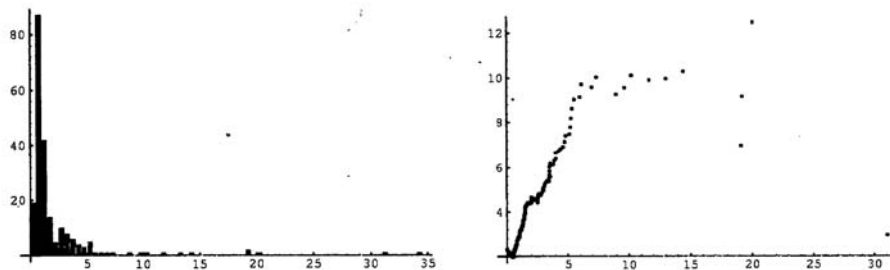
Tali grafici mostrano che l'Esponenziale, le due Gamma e la prima Weibull sono distribuzioni light-tail, in quanto la loro funzione empirica non va all'infinito. Notiamo, inoltre, che gli ultimi punti non risultano essere rilevanti perché calcolati solo con pochi dati a disposizione. Per quanto riguarda la Log-Normale e la Pareto, è facile osservare, dall'andamento crescente della funzione empirica, che sono distribuzioni di tipo heavy-tail. Qualche problema in più è dato dalla seconda Weibull. Infatti, sebbene la



sua funzione empirica cresce, sembra quasi che voglia convergere. Alcuni punti, però, sono fra loro distanti. Il valore più alto è 20.6; quello successivo è 12.4, comportamento tipico delle heavy-tail. Infatti in una distribuzione heavy-tail, se la variabile aleatoria è più alta di un certo valore  $M$ , allora con probabilità 1 tale variabile è molto più elevata di  $M$ , e questo dà l'idea della catastroficità. Questi grafici sui dati osservati, inoltre, si dimostrano importanti per effettuare una giusta scelta del modello da adottare. Consideriamo, per concludere, due esempi di dati reali provenienti da assicurazioni contro gli incendi in Svezia e Danimarca [51].

**ESEMPIO 1 (SVEZIA)**

Facciamo riferimento ad un campione di 218 richieste di risarcimento espresse in unità di milioni di corone svedesi.



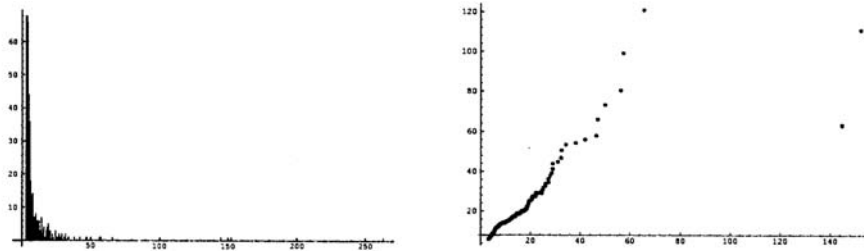
**Figura 10: Istogramma**

**Funzione empirica**

L'istogramma mostra che alcune denunce sono elevate ed inoltre la vita media residua è una funzione crescente, indicando che la distribuzione dei risarcimenti sia di tipo heavy-tail. La funzione empirica, invece, è prima decrescente e poi crescente. Questo significa che le richieste più elevate potrebbero seguire una distribuzione di Pareto o Log-Normale

**ESEMPIO 2 (DANIMARCA)**

Facciamo riferimento ad un campione di 500 richieste di risarcimento elevate effettuate dal primo Gennaio del 1980 fino al 31 Dicembre del 1990, espresse in unità di milioni di corone danesi.



**Figura 11: Istogramma**

**Funzione empirica**

Anche in questo caso sia l'istogramma che la funzione che individua la vita media residua indicano che la distribuzione dei risarcimenti è di tipo heavy-tail. Probabilmente, ancora una volta, le richieste più elevate seguono una distribuzione di Pareto o Log-Normale.

**3.3 Stima dei parametri**

Una volta scelto il modello da utilizzare in base ai dati a disposizione, occorre stimare i parametri in esso coinvolti [13].

**3.3.1 La distribuzione Esponenziale**

Nel caso della distribuzione Esponenziale, adottando sia il metodo della massima verosimiglianza che quello dei momenti, si ottiene per  $\alpha$  la stima:

$$\hat{\alpha} = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \right)^{-1}.$$

**3.3.2 La distribuzione Gamma**

In questo caso la funzione di log-verosimiglianza è:

$$\sum_{i=1}^n (\gamma \log \alpha - \log \Gamma(\gamma) + (\gamma - 1) \log Y_i - \alpha Y_i).$$

Segue che:

$$\gamma = \frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \quad \text{e} \quad \log \alpha - \frac{\Gamma'(\gamma)}{\Gamma(\gamma)} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log Y_i = 0,$$

equazioni che possono essere risolte solo numericamente.

Poiché, però, la distribuzione Gamma è light-tail, può essere utilizzato anche il metodo dei momenti che conduce alle soluzioni:

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{Y}}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \quad \text{e} \quad \hat{\gamma} = \frac{\bar{Y}^2}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

dove  $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ .

Queste seconde stime dei parametri sono, in genere, preferibili per la loro semplicità.

### 3.3.3 La distribuzione di Weibull

La funzione di log-verosimiglianza risulta essere:

$$\sum_{i=1}^n (\log \alpha + \log c + (\alpha - 1) \log Y_i - c Y_i^\alpha).$$

Le equazioni che ne derivano sono:

$$c \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^\alpha = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^n (c Y_i^\alpha - 1) \log Y_i = 1,$$

che, ancora una volta, devono essere risolte numericamente.

Se volessimo, invece, utilizzare il metodo dei momenti, le equazioni che otterremmo sarebbero più difficili da risolvere. In questo caso, inoltre, bisognerebbe prestare attenzione al fatto che la Weibull è una distribuzione heavy-tail se  $\alpha < 1$ , caso in cui il metodo dei momenti non potrebbe essere utilizzato. Si potrebbe allora ricorrere a tale procedimento solo se sapessimo con certezza che  $\alpha \geq 1$ .

### 3.3.4 La distribuzione Log-Normale

Ovviamente, in questo caso, i migliori stimatori dei parametri sono:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log Y_i \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\log Y_i - \hat{\mu})^2.$$

### 3.3.5 La distribuzione di Pareto

Considerando di nuovo la funzione di massima verosimiglianza, le equazioni che ne derivano sono:

$$\frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^n \log \left( 1 + \frac{Y_i}{\beta} \right) = 1 \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{\alpha+1}{n} \sum_{i=1}^n \left( 1 + \frac{Y_i}{\beta} \right)^{-1}.$$

Ancora una volta queste equazioni devono essere risolte numericamente.

Possiamo tuttavia considerare un altro metodo. Supponiamo che  $\beta$  sia noto. Allora lo stimatore di  $\alpha$  ottenuto con il metodo di massima verosimiglianza è:

$$\hat{\alpha} = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( 1 + \frac{Y_i}{\beta} \right) \right)^{-1}.$$

Questo risulta simile allo stimatore trovato nel caso esponenziale. Infatti:

$$P\left[\log \left( 1 + \frac{Y_i}{\beta} \right) > x\right] = P[Y_i > \beta(e^x - 1)] = e^{-\alpha x}.$$

Abbiamo cioè una distribuzione esponenziale.

Inoltre, poiché, per  $Y_i$  grande,  $\log \left( 1 + \frac{Y_i}{\beta} \right) \approx \log \left( \frac{Y_i}{\beta} \right) = \log Y_i - \log \beta$ ,

$\log Y_i$  è approssimativamente distribuito come un  $Exp(\alpha)$  per valori grandi di  $Y_i$ . In formule:

$$P[\log Y_i > x] = (1 + e^x / \beta)^{-\alpha} = (\beta e^{-x} + 1)^{-\alpha} \beta^\alpha e^{-\alpha x} \approx \beta^\alpha e^{-\alpha x}$$

e

$$P[\log Y_i > M + x / \log Y_i > M] = \left( \frac{\beta e^{-M-x} + 1}{\beta e^{-M} + 1} \right)^{-\alpha} e^{-\alpha x}.$$

Pertanto, scegliendo  $M$  abbastanza grande, uno stimatore per  $\alpha$  può essere:

$$\hat{\alpha} = \left( \frac{1}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\log Y_i > M\}}} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\log Y_i > M\}} (\log Y_i - M) \right)^{-1}.$$

Il problema che resta da risolvere è legato alla scelta ottimale di  $M$ .

Gli obiettivi sono:

- 1) scegliere il valore più alto di  $M$  in modo che la distribuzione di  $\log Y_i - M$  approssimi un'esponenziale;
- 2) scegliere il valore più alto di  $M$  in modo che nel valutare lo stimatore siano utilizzati meno dati possibili.

$M$  dipende chiaramente dalla numerosità del campione  $n$ , e sarà tanto più alto quanto più elevata risulta quest'ultima. Tuttavia dipende anche dai parametri  $\alpha$  e  $\beta$ , che non sono noti.  $M$  è legato pertanto anche al campione. Per esempio, possiamo ottenere la stima di  $\alpha$  usando solo i  $k(n)+1$  valori più alti. Indichiamo, quindi, con  $(Y_{i:n} : i \leq n)$  le statistiche ordinate,  $Y_{1:n} \leq Y_{2:n} \leq \dots \leq Y_{n:n}$ , di  $(Y_i : i \leq n)$  e definiamo lo stimatore di  $\alpha$  come [46]:

$$\hat{\alpha} = \left( \frac{1}{k(n)} \sum_{i=1}^{k(n)} (\log Y_{n+1-i:n} - \log Y_{n-k(n):n}) \right)^{-1}. \quad (3.2)$$

Intuitivamente, questo stimatore converge ad  $\alpha$  per  $n$  che tende all'infinito, a patto che  $k(n)$  e  $Y_{k(n):n}$  tendano all'infinito.

Si potrebbe, inoltre, dimostrare che, nel caso in cui

$$\frac{k(n)}{n} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{k(n)}{\log \log n} \rightarrow \infty,$$

allora  $\hat{\alpha} \rightarrow \alpha$  [27].

Rimane da stimare  $\beta$ . È possibile provare che, per  $n$  che tende all'infinito ed un opportuno  $\gamma \in (0,1)$ ,

$$1 - (1 + Y_{[m]n} / \beta)^{-\alpha} \rightarrow \gamma.$$

Allora, per  $n$  grande, lo stimatore per  $\beta$  diviene:

$$\hat{\beta} = \frac{Y_{[(1-\gamma)n]n}}{\gamma^{-1/\hat{\alpha}} - 1}.$$

Poiché spesso le distribuzioni reali non concordano del tutto con quella di Pareto, ma lo fanno solo nella coda, vorremmo che  $\gamma$  tendesse a 0 per  $n$  che tende all'infinito.

Scegliendo dunque  $m = k(n)$ , lo stimatore precedente diviene:

$$\hat{\beta} = \frac{Y_{n-k(n)n}}{(n/k(n))^{1/\hat{\alpha}} - 1}.$$

Volendo semplificare l'espressione notiamo che, asintoticamente, tale quantità è uguale a:

$$\hat{\beta} = \left( \frac{k(n)}{n} \right)^{1/\hat{\alpha}} Y_{n-k(n)n}. \quad (3.3)$$

Si può, ancora, dimostrare che  $\hat{\beta} \rightarrow \beta$  per  $n$  che tende all'infinito [27].

L'ultimo aspetto da analizzare riguarda la scelta ottimale di  $k(n)$  [45].

In molte situazioni è stato verificato che:

se  $k(n)n^{-2/3+2\varepsilon}$  converge a 0, allora la velocità con cui  $\hat{\alpha}$  converge ad  $\alpha$  è  $n^{-1/3+\varepsilon}$ .

Facendo tendere  $\varepsilon$  a 0, si sceglie  $k(n) = [n^{2/3}]$ .

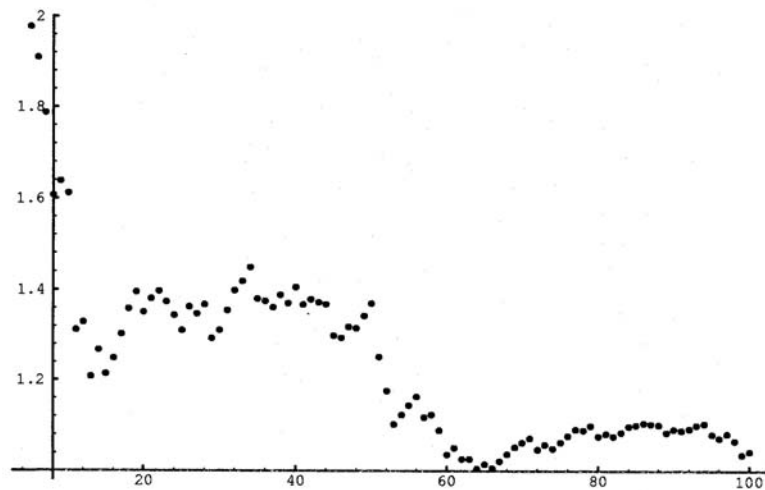
Un'altra possibilità è quella di rappresentare graficamente lo stimatore di  $\alpha$  per  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Si sceglierà, poi, il primo valore per cui la funzione  $\hat{\alpha}(k)$  si stabilizza, anche per un breve periodo [31].

### 3.3.6 Stime dei parametri basandosi sui dati delle assicurazioni contro gli incendi.

Vogliamo adattare una distribuzione di Pareto ed una Log-Normale ai dati riportati in precedenza relativi alle assicurazioni contro gli incendi in Svezia e Danimarca. Abbiamo già visto che per modellare tali dati occorrono distribuzioni heavy-tail.

#### **ESEMPIO 1 (SVEZIA)**

Adottiamo una distribuzione di Pareto e, come abbiamo visto,  $k(218) = \lceil 218^{2/3} \rceil = 36$ . La figura 12, che riporta i valori di  $\hat{\alpha}$  al variare di  $k$ , mostra che, in effetti, il valore di  $k$  da scegliere è vicino a 36.



**Figura 12: Stimatore di  $\alpha$  per i dati dell'assicurazione contro gli incendi Svedese.**

Le stime che otteniamo sono:

$$\hat{\alpha} = 1.37567 \quad \text{e} \quad \hat{\beta} = 0.879807.$$

Da queste è possibile ricavare una stima della media pari a  $\hat{\beta}/(\hat{\alpha}-1) = 2.34199$ , che, rispetto alla media empirica di 2.28172, è di poco più alta. La maggiore differenza si trova per la stima della varianza.

Infatti, la varianza empirica era 14.3158, mentre quella della distribuzione di Pareto è infinita.

Adattando agli stessi dati una distribuzione Log-Normale, le stime che otteniamo sono:

$$\hat{\mu} = 0.218913 \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}^2 = 0.945877.$$

Con tale distribuzione la media risultante è di 1.99741, un valore più piccolo rispetto alla media empirica; mentre per la varianza otteniamo 6.28397, ancora una volta più piccola della varianza empirica.

Deduciamo, quindi, che se una compagnia di assicurazione adotta la Pareto si pone in una posizione più sicura. Infatti, la Pareto è molto usata nella pratica. Viceversa la Log-Normale, in base al confronto con la media e la varianza empirica, non dovrebbe essere utilizzata. Infatti il problema che presenta la Log-Normale è che l'elevato numero di piccoli danni comporta una stima della media troppo bassa. Al contrario, con la Pareto, i danni di piccola entità risultano influenti per le stime [24].

### **ESEMPIO 2 (DANIMARCA)**

Scegliamo una distribuzione di Pareto, con  $k(500) = \lceil 500^{2/3} \rceil = 62$ .

Osservando, anche in questo caso, la figura che riporta i valori di  $\hat{\alpha}$  per vari  $k$ , si nota che  $\hat{\alpha}(k)$  è molto instabile.

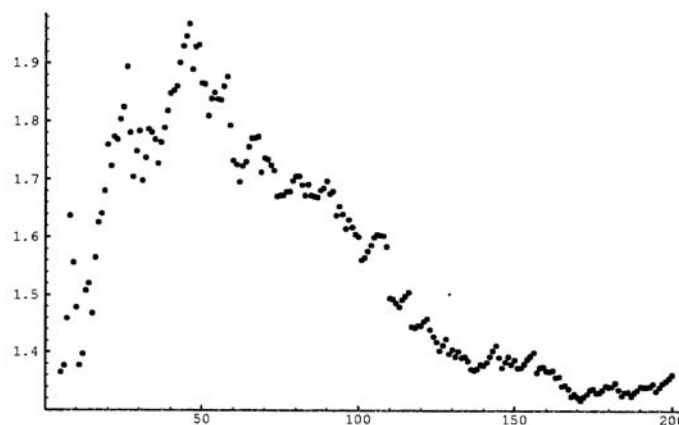


Figura 13: Stimatore di  $\alpha$  per i dati sull'assicurazione contro gli incendi Danese.



### CAPITOLO 3 (Alcune osservazioni sulle distribuzioni heavy-tail)

Per un breve tratto si stabilizza intorno a 70, per cui 62 non sembra essere una cattiva scelta per  $k$ . Tuttavia comincia effettivamente a stabilizzarsi intorno al valore di 170, un po' alto per  $k$ . Consideriamo i valori dei parametri sia per  $k = 62$  che per  $k = 180$ .

Per  $k = 62$  otteniamo:

$$\hat{\alpha} = 1.69605 \quad \text{e} \quad \hat{\beta} = 4.20413.$$

Il valore della media diviene 6.03997, più basso di quello della media empirica, uguale a 9.08176. Questo mostra che la scelta di  $k = 62$  non è molto buona. Ricordiamo, però, che solo i danni superiori ad una certa soglia dovrebbero essere modellati con una distribuzione di Pareto. Se consideriamo, ad esempio, solo i risarcimenti al di sopra del valore 10, la media empirica è 24.0818; mentre quella che risulta dalla stima dei parametri del modello è 30.4067, superiore a quella empirica.

Per  $k = 180$ , invece, le stime sono:

$$\hat{\alpha} = 1.34103 \quad \text{e} \quad \hat{\beta} = 2.87879.$$

La media con tali stime è 8.4415, ancora una volta inferiore a quella empirica. Se, di nuovo, ci limitiamo ai valori al di sopra 10, la media che si ottiene dalla stima dei parametri è 47.7646, di gran lunga superiore a quella empirica di 24.0818.

Adattando una distribuzione Log-Normale otteniamo:

$$\hat{\mu} = 1.84616 \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}^2 = 0.461025.$$

Il valore della media risulta essere 7.97787, inferiore a quello della media empirica. La stessa cosa accade per la varianza, il cui valore diviene 100.924, più basso della varianza empirica che è uguale a 270.933.

Per porsi in una posizione più sicura, pertanto, una compagnia di assicurazione deve scegliere la distribuzione di Pareto.

### 3.4 Verifica del modello prescelto

#### 3.4.1 Q-Q-Plots

Siano  $(Y_i : 1 \leq i \leq n)$  variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione individuata dalla funzione  $G$ , che per semplicità ipotizziamo continua.

Consideriamo le variabili aleatorie  $G(Y_i)$ , che risultano essere i.i.d.

L'obiettivo è determinare la loro distribuzione. Introduciamo la funzione:

$$G^{-1} : (0,1) \rightarrow \mathfrak{R}, \text{ definita da } x \mapsto \text{Inf} \{y \in \mathfrak{R} : G(y) > x\},$$

detta funzione inversa generalizzata di  $G$ .

Poiché  $G$  è crescente e continua per  $x \in (0,1)$ , abbiamo che

$$G(G^{-1}(x)) = x \text{ e } G(z) \leq x \Leftrightarrow z \leq G^{-1}(x).$$

Inoltre:

$$P[G(Y_i) \leq x] = P[Y_i \leq G^{-1}(x)] = G(G^{-1}(x)) = x.$$

Dunque  $G(Y_i)$  è uniformemente distribuita in  $(0,1)$ .

Poniamo  $X_i = G(Y_i)$  e consideriamo le statistiche ordinate  $X_{i:n} = G(Y_{i:n})$ .

La distribuzione di  $X_{k:n}$  è:

$$P[X_{k:n} > x] = \sum_{i=0}^{k-1} P[X_{i:n} \leq x, X_{i+1:n} > x] = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}.$$

Mediante questa espressione è possibile calcolare i primi due momenti di  $X_{k:n}$ .

$$\begin{aligned} E[X_{k:n}] &= \int_0^1 \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} dx = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \int_0^1 x^i (1-x)^{n-i} dx = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \frac{\Gamma(i+1)\Gamma(n-i+1)}{\Gamma((i+1)+(n-i+1))} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{n+1} = \frac{k}{n+1}. \end{aligned}$$

$$E[X_{k:n}^2] = \int_0^1 2x \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} dx = 2 \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \int_0^1 x^{i+1} (1-x)^{n-i} dx =$$

$$= 2 \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \frac{\Gamma(i+2)\Gamma(n-i+1)}{\Gamma(n+3)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=0}^{k-1} (i+1) = \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)}.$$

Quindi la varianza risulta:

$$VAR[X_{k,n}] = \frac{k(n+1-k)}{(n+1)^2(n+2)} \leq \frac{1}{4(n+2)}.$$

Per  $n$  che tende all'infinito la varianza converge a 0, il che implica che  $X_{k,n}$  tende a  $k/(n+1)$ . Tale risultato può essere espresso in modo più preciso. Infatti, poiché  $[0,1]$  è un insieme compatto ed abbiamo a che fare con distribuzioni continue, allora [39]:

$Sup\{|X_{k,n} - k/(n+1)| : k \leq n\}$  converge a 0.

Tracciando il grafico costituito dai punti  $(k/(n+1), G(Y_{k,n}))$ , ci aspettiamo che sia molto simile alla bisettrice  $y = x$ .

Questo grafico è detto Q-Q-Plot o grafico Quantile-Quantile [2].

Mostriamo i grafici Q-Q-Plot per le distribuzioni che abbiamo introdotto, facendo riferimento ai dati a disposizione.

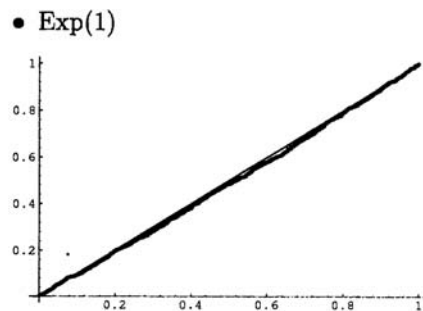


Figura 14: Q-Q-Plot

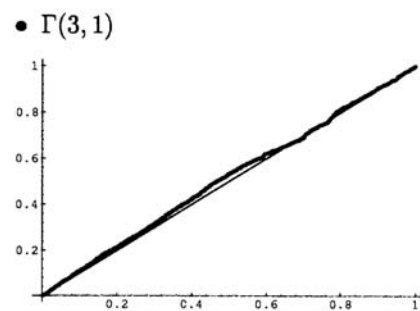


Figura 15: Q-Q-Plot

CAPITOLO 3 (Alcune osservazioni sulle distribuzioni heavy-tail)

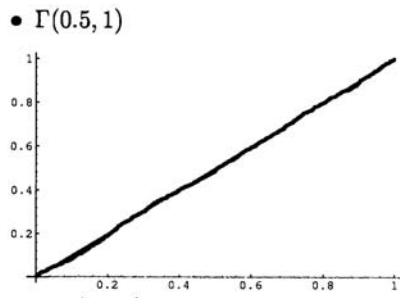


Figura 16: Q-Q-Plot

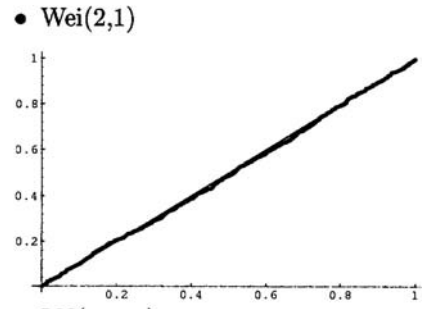


Figura 17: Q-Q-Plot

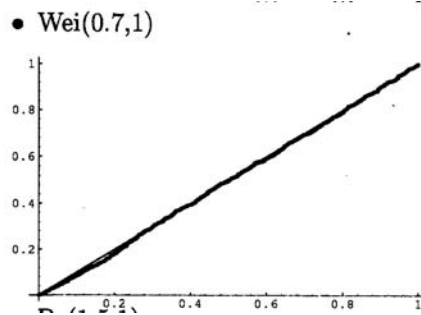


Figura 18: Q-Q-Plot

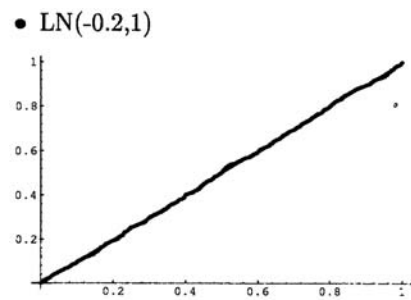


Figura 19: Q-Q-Plot

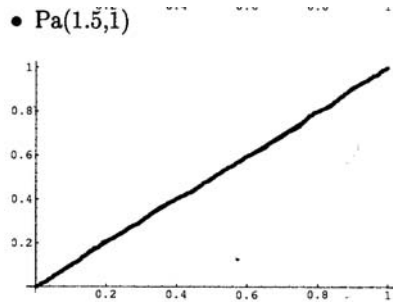
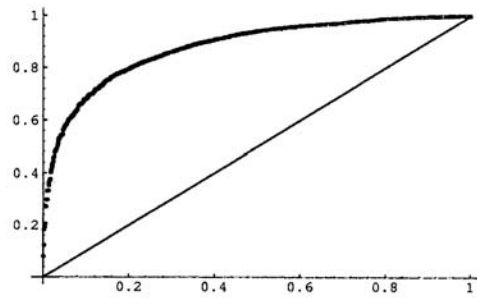


Figura 20: Q-Q-Plot

Come si vede, tutti i grafici sono molto vicini alla bisettrice  $y = x$ , che è indice di una buona scelta del tipo di distribuzione in base ai dati disponibili. Se, viceversa, la scelta non rispecchiasse i dati, ci potremmo trovare in una delle seguenti situazioni.

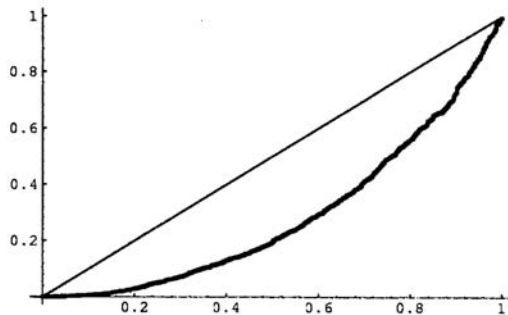
**CASO 1**



**Figura 21: Q-Q-Plot**

$G(Y_{kn})$  è troppo grande. Risulterebbe più corretto adottare una distribuzione con valori più bassi di quella prescelta, che ha troppo peso vicino allo 0. Inoltre la distribuzione corretta è meno asimmetrica di quella adottata.

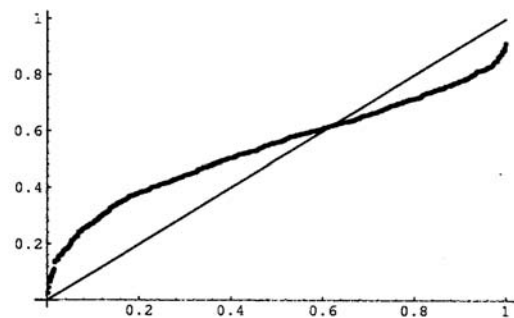
**CASO 2**



**Figura 22: Q-Q-Plot**

$G(Y_{kn})$  è troppo piccolo. Occorrerebbe adottare una distribuzione con valori più alti di quella prescelta, che, questa volta, non ha abbastanza peso vicino allo 0. Inoltre la distribuzione corretta è più asimmetrica di quella presa in considerazione.

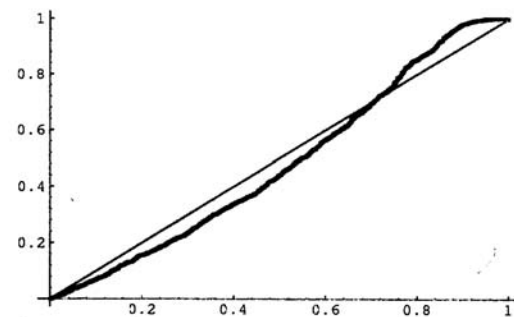
**CASO 3**



**Figura 23: Q-Q-Plot**

$G(Y_{k:n})$  è grande per valori piccoli di  $k$  ed è piccolo per  $k$  elevato. Di conseguenza la distribuzione corretta dovrebbe avere sia un numero inferiore di valori troppo piccoli, sia un numero inferiore di valori troppo grandi, cioè dovrebbe avere una coda più leggera di quella della distribuzione presa in esame.

**CASO 4**



**Figura 24: Q-Q-Plot**

$G(Y_{k:n})$  è troppo piccolo per valori piccoli di  $k$  e troppo grande per  $k$  elevato. Si dovrebbe, allora, adottare una distribuzione con un numero maggiore sia di valori piccoli sia di valori molto elevati. Si dovrebbe adottare, cioè, una distribuzione con una coda più pesante.

Chiaramente, poiché il Q-Q-Plot dipende anche dalla stima dei parametri, non è detto che, qualora il grafico non sia buono, il modello adottato sia sbagliato. Infatti un Q-Q-Plot non molto soddisfacente potrebbe dipendere da una cattiva stima dei parametri, benché il modello sia buono. Inoltre per giungere ad una scelta ottimale occorre tenere presente la numerosità del campione. Infine può accadere che i grafici siano male interpretati. Infatti, poiché essi dipendono dal campione e non dall'intera distribuzione, se, ad esempio, fosse stata adottata una classe di distribuzioni con una coda troppo leggera, i valori grandi del campione sembrerebbero indicare che i parametri stimati provenissero da un modello asimmetrico. Quindi i Q-Q-Plots suggerirebbero di adottare una distribuzione con una coda ancora più leggera di quella prescelta, mentre, in realtà, sarebbe necessario fare il contrario.

### 3.4.2 L'esempio dell'assicurazione contro gli incendi.

Proponendo l'esempio delle assicurazioni contro gli incendi, adattiamo una distribuzione di Pareto ed una Log-Normale ai dati per osservare i Q-Q-Plots che ne risultano.

#### ESEMPIO 1 (SVEZIA)

In questo esempio i Q-Q-Plots sono

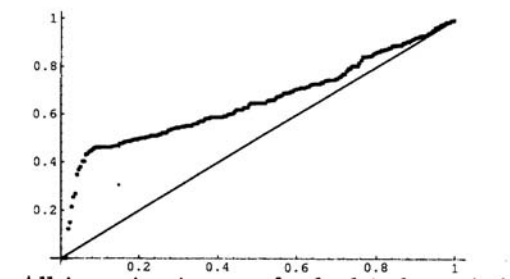


Figura 25: Q-Q-Plot per  $Pa(1.37567, 0.879807)$ .

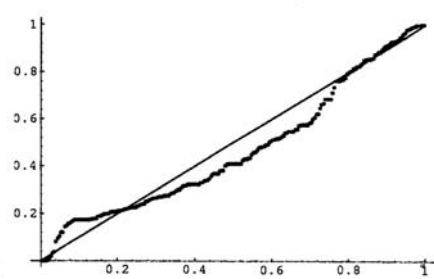


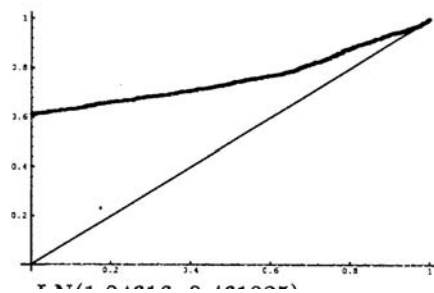
Figura 26: Q-Q-Plot per  $LN(0.218913, 0.945877)$ .

### CAPITOLO 3 (Alcune osservazioni sulle distribuzioni heavy-tail)

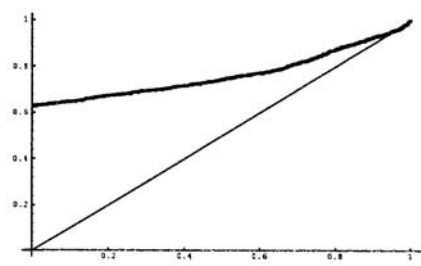
Tutte le analisi precedenti indicavano la distribuzione di Pareto più appropriata ai dati. Viceversa, osservando i Q-Q-Plots, sembra che adesso la Log-Normale sia più vicina alla giusta distribuzione. La Pareto, invece, sembra troppo asimmetrica. La spiegazione potrebbe essere che il parametro  $\alpha$  è troppo distante dal vero valore. Bisogna sottolineare che la Log-Normale rispecchia molto bene l'adattamento nella coda, ed anche nei valori più bassi non è così distante dalla giusta distribuzione. Non potendo pretendere un adattamento perfetto ai dati, vorremmo ottenere dei buoni risultati almeno nella coda, cosa che sembra succedere con la Log-Normale. Se ne può dedurre l'importanza di considerare più classi di distribuzioni, anche se alcune, a prima vista, appaiono non idonee. In questo esempio, infatti, la distribuzione che a priori sembrava la migliore non è poi risultata tale. Ciò può dipendere anche dal fatto che un campione di 218 unità non è molto ampio. Nella pratica bisognerebbe cercare di raccogliere ed utilizzare molti più dati, anche relativi ad anni diversi. Così saremmo agevolati nella scelta del giusto modello da adottare.

#### **ESEMPIO 2 (DANIMARCA)**

Per questo esempio i Q-Q-Plots sono:

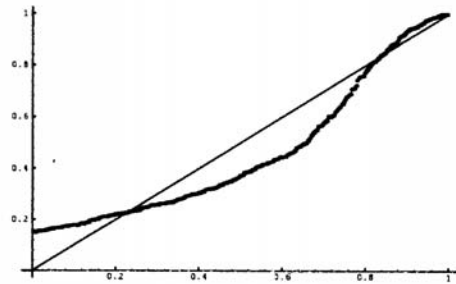


**Figura 27: Q-Q-Plot per  
Pa(1.69605,4.20413).**



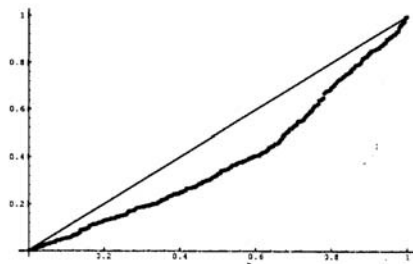
**Figura 28: Q-Q-Plot per  
Pa(1.34103,2.87879).**



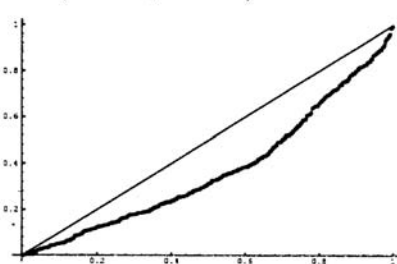


**Figura 29: Q-Q-Plot per  
LN(1.84616,0.461025).**

Risulta evidente che la distribuzione Log-Normale non è quella giusta. Per le Pareto, invece, non ci sono sufficienti dati con valori piccoli. Per i valori elevati, cioè per la coda destra, entrambe le distribuzioni sembrano essere abbastanza buone. Per superare il problema di assenza di dati con valori bassi di risarcimento, si potrebbe considerare una distribuzione di Pareto condizionata. Ponendo la condizione  $Y_i > Y_{1:n}$ , i Q-Q-Plots che si ottengono per le due Pareto sono:



**Figura 30: Q-Q-Plot per  
Pa(1.69605,4.20413).**



**Figura 31: Q-Q-Plot per  
Pa(1.34103,2.87879).**

La scelta dei parametri sembra non dare molto peso né vicino allo 0 né all'infinito. Concludendo, per quanto riguarda  $\alpha$  si dovrebbe scegliere un valore più basso di quello stimato, mentre per  $\beta$  dovrebbe essere fatta la scelta opposta.

## CAPITOLO 4

### IL MODELLO DI RISCHIO MARKOVIANO

#### 4.1 Concetti generali ed alcune definizioni

Abbiamo visto come sia più facile analizzare un modello di rischio assumendo che il processo stocastico che individua il numero dei sinistri abbia una distribuzione di Poisson. Questa scelta, però, non rispecchia in modo esauriente la realtà. Ad esempio, per rendere il modello più realistico, potrebbe essere utilizzata una mistura di Poisson, dove il numero dei sinistri è ancora individuato da una distribuzione di Poisson, ma l'intensità di frequenza dei sinistri non è determinata, ma è, a sua volta, una variabile aleatoria che evolve nel tempo. Questa maggiore flessibilità rende il modello più vicino alla situazione reale, dove ogni individuo che si assicura è caratterizzato da diverse attitudini nei confronti di un medesimo rischio. Le diverse intensità di frequenza dei sinistri possono allora rappresentare le diverse rischiosità che derivano dalle caratteristiche proprie di ciascun individuo. Se  $H(x)$  indica la distribuzione dell'intensità di frequenza dei sinistri, la probabilità di rovina, qualora si adotti un processo di rischio con una mistura di Poisson, è espressa da:

$$\Psi(u) = \int_0^{\infty} \Psi(u, z) dH(z), \quad (4.1)$$

dove  $\Psi(u, z)$  è la probabilità di rovina in un processo di Lundberg-Cramer con intensità di frequenza dei sinistri uguale a  $z$  [16]. Chiaramente, trovare una limitazione esponenziale superiore per tale quantità è possibile solo se esiste un valore  $z_0$  per cui  $H(z_0) = 1$  e  $c > \mu z_0$ .

È interessante analizzare il caso in cui siano presenti diversi livelli di intensità di frequenza dei sinistri in intervalli di tempo di lunghezza diversa. Possiamo svolgere questa analisi adottando un modello di rischio Markoviano [58],[71]. Ricordiamo che in un processo stocastico markoviano, le previsioni sul futuro

dipendono da ciò che è successo nel passato, ma solo per quanto riguarda l'ultima informazione a disposizione, ovvero l'ultimo stato del processo, indipendentemente da come ci si è arrivati. Una conseguenza importante è che, per descrivere un processo stocastico markoviano, non è necessario conoscere le distribuzioni congiunte di tutte le variabili aleatorie coinvolte nel processo, ma solo la distribuzione iniziale e le cosiddette probabilità di transizione, cioè le probabilità di passaggio da uno stato ad un altro nel corso del tempo. Se consideriamo il caso discreto, indichiamo con  $p_{m,n}(s,t)$ , la probabilità di passare dallo stato "m" allo stato "n" nel periodo  $(s,t)$ .

Le  $p_{m,n}(s,t)$  sono quantità legate tra loro dalle ben note equazioni di Chapman-Kolmogorov. Valgono, cioè, le formule

$$p_{m,n}(t,t) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m, \\ 1 & \text{se } n = m, \end{cases}$$

e inoltre, per ogni tempo intermedio tra s e t, cioè per  $s \leq \tau \leq t$ ,

$$p_{m,n}(s,t) = \sum_k p_{m,k}(s,\tau) p_{k,n}(\tau,t).$$

Nel caso continuo, sia  $Q(s,t; y, x) = P(X_t = x / X_s = y)$ . Allora,  $\forall \tau \in [s, t]$ ,

$$Q(s,t; y, x) = \int_{z=-\infty}^{+\infty} Q(\tau,t; z, x) d_z Q(s,\tau; y, z).$$

Un processo Markoviano, in cui le probabilità di transizione dipendono solo dall'ampiezza dell'intervallo e non dall'istante iniziale, è detto stazionario [44].

Osserviamo che un processo ad incrementi indipendenti è Markoviano.

Supponiamo ora che  $N_0$ , cioè il numero dei sinistri all'epoca 0, sia 0 e formuliamo le seguenti ipotesi sulle probabilità di transizione:

1)  $p_{m,n}(s,t) = 0$  se  $m > n$ .

2)  $\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{n,n+1}(t, t+h)}{h} = \lambda_{n+1}(t)$

dove, per ogni  $n$ ,  $\lambda_{n+1}(t)$  è una funzione continua di  $t$ , che rappresenta "l'intensità di frequenza" dell' $(n+1)$ -esimo sinistro.

$$3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} p_{n,n+k}(t, t+h)}{h} = 0.$$

Con queste ipotesi è possibile ricavare la distribuzione del processo del numero dei sinistri. Infatti, si può provare che le probabilità di transizione sono esprimibili mediante le intensità di frequenza dei vari sinistri nel seguente modo:

$$\begin{cases} p_{m,m}(s,t) = e^{-\int_s^t \lambda_{m+1}(\tau) d\tau} \\ p_{m,n}(s,t) = e^{-\int_s^t \lambda_{n+1}(\sigma) d\sigma} \int_s^t p_{m,n-1}(s,\tau) \lambda_n(\tau) e^{\int_s^\tau \lambda_{n+1}(\sigma) d\sigma} d\tau \quad \text{per } n > m. \end{cases} \quad (4.2)$$

Pertanto tali probabilità si calcolano per ricorrenza.

Ricordiamo che in un processo di rischio classico è sempre possibile utilizzare un “tempo operativo”, mediante il quale il processo originario viene trasformato in un processo stazionario. Nel caso classico si può assumere come tempo operativo il valore atteso del numero dei sinistri. Nel caso markoviano la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un tempo operativo è che

$$\lambda_{n+1}(t) = c_{n+1} \gamma(t).$$

Se ciò avviene, il tempo operativo è di nuovo una funzione temporale che rende stazionario il processo di conta dei sinistri.

Con procedimenti analoghi viene calcolata la distribuzione del risarcimento cumulato, anch'esso per ipotesi Markoviano. Le probabilità di transizione rappresentano la probabilità che il risarcimento cumulato ad una certa epoca sia inferiore ad un certo valore, dato l'ammontare del risarcimento cumulato fino all'istante precedente alla valutazione. La distribuzione che si ottiene può essere più o meno complicata. Ad esempio, si può pensare che le funzioni di transizione non dipendano dall'istante considerato, o che il risarcimento cumulato ad una certa epoca non dipenda da quello cumulato precedentemente, oppure che valgano entrambe le condizioni precedenti. Queste tre ipotesi portano a semplificare la distribuzione cercata [34].

## 4.2 Classificazione dei rischi

Consideriamo alcune possibili classificazioni dei rischi. Ad esempio, facendo riferimento all'intensità di frequenza con cui si verificano i sinistri, i rischi possono essere suddivisi in:

**A) RISCHI NORMALI O STANDARD**

**B) RISCHI ESPLOSIVI.**

Abbiamo a che fare con un rischio normale o standard se:

$$\sum_{n=m}^{+\infty} p_{m,n}(s,t) = 1,$$

cioè abbiamo probabilità 0 che nell'intervallo  $(s,t)$  vi siano infiniti sinistri.

Viceversa, se

$$\sum_{n=m}^{+\infty} p_{m,n}(s,t) < 1,$$

siamo nel caso di rischio esplosivo, situazione in cui vi è probabilità positiva,

uguale a  $1 - \sum_{n=m}^{+\infty} p_{m,n}(s,t)$ , di avere infiniti sinistri nell'intervallo  $(s,t)$ .

Chiaramente questo è un rischio non assicurabile, perché l'assicuratore non è in grado di calcolare un premio sufficiente a far fronte alle sue esigenze.

Se l'intensità di frequenza dei sinistri non dipende dal tempo, cioè  $\lambda_{n+1}(t) = \lambda_{n+1}$ , (dunque il processo di conta dei sinistri è stazionario), la condizione necessaria e sufficiente affinché il rischio sia normale, e quindi assicurabile, è che diverga la serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1}}.$$

Un caso particolare di rischi normali sono i cosiddetti rischi con contagio lineare, cioè quelli le cui intensità di frequenza dei sinistri sono stazionarie e dipendono linearmente dal numero dei sinistri. In formule

$$\lambda_{n+1} = a + bn.$$

In tal caso la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a+bn} \quad (4.3)$$

è una serie armonica e quindi diverge.

Il coefficiente  $b$  nella formula (4.3) individua il coefficiente di contagio e possono verificarsi tre casi:

- 1)  $b > 0 \Rightarrow$  contagio positivo: al crescere di  $n$  cresce anche la probabilità di avere un'ulteriore sinistro.
- 2)  $b < 0 \Rightarrow$  contagio negativo: al crescere di  $n$  diminuisce la probabilità di avere un'ulteriore sinistro.
- 3)  $b = 0 \Rightarrow$  assenza di contagio.

I rischi caratterizzati da contagio lineare sono importanti perché le loro probabilità di transizione sono espresse da distribuzioni note. Infatti, nel caso di contagio lineare positivo tali distribuzioni sono Binomiali Negative, nel caso di contagio lineare negativo sono Binomiali e nel caso di assenza di contagio sono, come sappiamo, distribuzioni di Poisson. In altre parole, facendo tendere  $b$  a 0, le probabilità di transizione tendono ad assumere distribuzioni di Poisson.

### 4.3 Modello di rischio Markoviano

Si definisce catena di Markov un processo Markoviano in cui le variabili aleatorie assumono un numero finito di valori ed i tempi sono discreti. Una catena di Markov stazionaria è detta ergodica se:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi_n = \bar{\pi}$$

dove  $\bar{\pi}$  è chiamato vettore degli equilibri statici.

In questo caso le probabilità di trovarsi, asintoticamente, nei vari stati non dipendono dalla posizione all'epoca iniziale.

Sia  $J_t$  una catena di Markov con tempi continui. Indichiamo con  $(1, 2, \dots, j)$  gli stati del processo e con  $\eta = (\eta_{ij})$  la matrice delle intensità di passaggio da uno stato all'altro. Allora  $J \in N - \{0\}$ ,  $\eta_{ij} \geq 0$  per  $i \neq j$  e  $\eta_{ii} = -\sum_{j \neq i} \eta_{ij}$  [50].

Perché il modello sia ergodico assumiamo  $\eta_{ii} < 0$  per tutti gli  $i \leq J$ . Denotiamo i livelli di intensità del numero dei sinistri con  $L_i$ ,  $i \leq J$ , mentre  $G_i(y)$ ,  $i \leq J$ , indica la distribuzione dell'ammontare dei risarcimenti nel periodo in cui il processo è venuto a trovarsi nello stato "i". Sia infine  $\Sigma_{n+1} = \text{Inf}\{t > \Sigma_n : J_t \neq J_{t-}\}$  l'istante dell'(n+1)-esimo cambiamento di stato (ponendo  $\Sigma_0 = 0$ ). I processi  $(C_t^{(i)})$  delle riserve sono, ancora una volta, processi di Lundberg-Cramer, tra loro indipendenti, con capitale iniziale pari a 0 e premio pari a  $c$ . L' $i$ -esimo modello è caratterizzato da un'intensità del numero dei sinistri uguale a  $L_i$  e da una distribuzione dell'ammontare dei risarcimenti pari a  $G_i(y)$ . Indicato con  $N_t^{(i)}$  il processo di conta del numero dei sinistri dell' $i$ -esimo modello e assumendo  $C_{0-}^{(i)} = 0$ ,  $N_{0-}^{(i)} = 0$ ,  $N_{0-} = 0$  e  $C_{0-} = u$ , si ottiene:

$$N_t := N_{\Sigma_{n-}} + N_t^{(J_t)} - N_{\Sigma_{n-}}^{(J_t)}, \quad \text{se } \Sigma_n \leq t < \Sigma_{n+1}$$

e

$$C_t := C_{\Sigma_{n-}} + C_t^{(J_t)} - C_{\Sigma_{n-}}^{(J_t)}, \quad \text{se } \Sigma_n \leq t < \Sigma_{n+1}.$$

dove  $(N_t)$  è il numero dei sinistri del processo  $(C_t)$  nell'intervallo  $[0, t]$ .

Inoltre, l'intensità di  $(N_t)$  è  $\lambda_t = L_{J_t}$ .

In altre parole, dato  $J_t$ ,  $t \geq 0$ ,  $(N_t)$  è un processo disomogeneo di Poisson

con parametro  $\lambda_t$  e  $E[N_t / J_s, 0 \leq s \leq t] = \int_0^t \lambda_s ds$ .

Un danno che si verifica all'epoca  $t$  ha distribuzione  $G_{J_t}(y)$ . Il valore medio di un danno che si verifica nello stato " $i$ " è  $\mu_i = \int_0^\infty (1 - G_i(y)) dy$ , e la funzione generatrice dei momenti è  $M_Y^{(i)}(r) = \int_0^\infty e^{ry} dG_i(y)$ .

$M_Y(r) = \max \{M_Y^{(i)}(r) : i \leq J\}$  è il massimo valore assunto dalla funzione generatrice dei momenti.

Per  $r$  tale che  $M_Y(r) < \infty$ , definiamo con  $S(r)$  la matrice diagonale in cui  $S_{ii}(r) = L_i(M_Y^{(i)}(r) - 1)$  e poniamo  $\theta(r) := \eta + S(r) - crI$ , dove  $I$  è la matrice identità. È possibile dimostrare che [8]:

$$P[J_t = j / J_0 = i] = (e^{t\theta})_{ij}, \quad (4.4)$$

dove le probabilità condizionate sono date dagli elementi della matrice  $e^{t\theta}$ . Un caso di particolare interesse si ha quando  $J_0$  ha una distribuzione tale che  $J_t$  diviene stazionario. Allora la distribuzione iniziale deve soddisfare la relazione:

$$\pi e^{t\theta} = \pi,$$

dove  $\pi$  è un vettore riga. Tale condizione equivale ad assumere  $\pi\theta = 0$ .

Supponiamo, inoltre, che  $\pi$  sia unico e  $\pi_i > 0 \quad \forall i \leq J$ . Posto  $u = 0$  consideriamo la quantità  $V_i(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{J_s=i\}} ds$ , che individua quanto tempo  $J_s$  ha trascorso nello stato " $i$ ". Risulta che:

$$\frac{C_t}{t} = \sum_{i=1}^J \frac{V_i(t)}{t} \frac{\int_0^t \mathbf{1}_{\{J_s=i\}} dC_s}{V_i(t)},$$

dove

$$\int_0^t \mathbf{1}_{\{J_s=i\}} dC_s = \int_0^t \mathbf{1}_{\{J_s=i\}} cds - \sum_{j=1}^{N_t} \mathbf{1}_{\{J_{T_j}=i\}} Y_i.$$

Dalla legge dei grandi numeri [25], segue che

$$\frac{V_i(t)}{t} \rightarrow \pi_i.$$



Inoltre la variabile aleatoria  $\int_0^t \mathbf{1}_{\{J_s=i\}} dC_s$  ha la stessa distribuzione di  $C_{V_i(t)}^{(i)}$  e dal modello classico deriva:

$$\frac{C_{V_i(t)}^{(i)}}{V_i(t)} \rightarrow c - L_i \mu_i.$$

Pertanto

$$\frac{C_t}{t} \rightarrow c - \sum_{i=1}^J \pi_i L_i \mu_i.$$

Per evitare che si abbia  $\Psi(u) = 1$ , cioè per non avere rovina, occorre che l'ultimo limite sia strettamente positivo per ogni  $u$ . Torniamo così alla condizione di utile netto:

$$c > \sum_{i=1}^J \pi_i L_i \mu_i.$$

#### 4.4 L'esponente e la disuguaglianza di Lundberg

Si può dimostrare che la funzione  $\theta(r)$ , precedentemente definita, è convessa e che

$$\theta'(0) = -(c - \sum_{i=1}^J \pi_i L_i \mu_i) < 0,$$

a causa della condizione di utile netto.

Siamo, come in precedenza, interessati alle soluzioni dell'equazione  $\theta(r) = 0$ . Per la convessità di  $\theta(r)$ , se esiste un'ulteriore soluzione  $R = 0$ , tale soluzione è unica. Quest'ultima quantità è detta esponente di Lundberg e consente ancora una volta di ottenere una stima della probabilità di rovina. Infatti, se  $(C_t, J_t)$  rappresenta un modello di rischio Markoviano ed esiste  $R$ , allora si può dimostrare [8]:

$$\Psi(u) < f(x) e^{-Ru}, \quad (4.5)$$

dove  $f(x)$  è una quantità che dipende dagli autovettori della matrice  $e^{\theta(r)}$ .

A differenza del modello classico, in questo caso, la disuguaglianza di Lundberg coinvolge un'ulteriore quantità,  $f(x)$ , legata agli autovettori della matrice  $e^{\theta(r)}$  [11].

### 4.5 L'approssimazione di Lundberg-Cramer

Per trovare l'approssimazione di Lundberg-Cramer occorre, di nuovo, fare riferimento ad una quantità,  $f(x)$ , che dipende dagli autovettori della matrice  $e^{\theta(r)}$  [10]. Infatti, se  $(C_t, J_t)$  rappresenta un modello di rischio Markoviano ed esiste  $r > R$  tale che  $M_Y(r) < \infty$ , allora [8]:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(u) e^{Ru} = f(x)C, \quad (4.6)$$

dove  $C > 0$  è una costante indipendente dalla distribuzione di  $J_0$ .

In questo caso, oltre che da una espressione dipendente dagli autovettori della matrice  $e^{\theta(r)}$ , l'approssimazione di Lundberg-Cramer dipende anche da una costante  $C$ .

## CAPITOLO 5

### LA SECURITIZZAZIONE

Per diminuire la probabilità di rovina esistono essenzialmente due metodi: la riassicurazione e la securitizzazione. Con la prima si trasferisce una parte del rischio ad un'altra compagnia assicurativa e quindi si diminuisce l'onere originario. La securitizzazione, invece, consente di coprire una parte del rischio che la compagnia ha assunto mediante strategie finanziarie ed investimenti. Si cerca, cioè, di trasformare le polizze in obbligazioni, opzioni, o qualcos'altro. La principale differenza con la riassicurazione, che è un contratto privato fra due compagnie, consiste nel fatto che con la securitizzazione si entra nel mercato ed il trasferimento di una parte del rischio del portafoglio assicurativo è operato acquistando strumenti finanziari. Si potrebbe quindi parlare di una riassicurazione da parte del mercato stesso, anziché da parte di un'altra compagnia di assicurazione.

La securitizzazione presenta due aspetti:

- 1) l'aspetto speculativo, in quanto trasforma le polizze in nuovi appetibili prodotti finanziari;
- 2) l'aspetto di copertura, in quanto permette alla compagnia assicurativa emittente di coprirsi, in parte, dalle eventuali perdite.

Ad esempio, qualora si abbia a che fare con danni elevati, il premio che dovrebbe essere richiesto all'assicurato potrebbe risultare talmente alto da essere improponibile. Inoltre, esistono dei limiti sui premi. È possibile, allora, tutelarsi acquistando un'obbligazione che consenta di ottenere un rendimento certo, capace di coprire la parte di premio mancante. Comunque, le coperture finanziarie presenti sul mercato sono molte e spetta alle compagnie individuare quelle più vantaggiose in base alle loro esigenze.

Tratteremo l'argomento facendo riferimento a più autori, ognuno dei quali utilizza metodologie ed approcci differenti, in base a diverse ipotesi adottate sui modelli esaminati.

Innanzitutto considereremo il caso in cui i rischi siano proporzionali alle riserve libere. Ci baseremo, in particolare, sulle indagini effettuate da Siegl e Tichy.

Considereremo, poi, come sia possibile individuare gli investimenti ottimali per un assicuratore, utilizzando le metodologie proposte da Hipp e Plum. Concluderemo con il caso dei rischi catastrofici, che necessitano di speciali coperture in quanto possono dar luogo a perdite molto elevate. Esporremo una molteplicità di approcci a quest'ultima tematica, riconducibili a diversi autori, dipendenti sia dalle coperture usate sia dalle ipotesi formulate.

Prima di procedere oltre, diamo la definizione di strategia ottimale. Affinché una strategia possa essere ritenuta ottimale, deve, innanzitutto, essere efficiente. In altre parole, condizione necessaria per l'ottimalità è l'efficienza. Vediamo cosa si intende per strategia efficiente. Una strategia di investimento è efficiente se presenta il migliore rendimento atteso tra tutte le strategie con uguale grado di rischio e il più basso rischio tra tutte le strategie con uguale rendimento atteso.

Tracciando su un piano cartesiano le coppie di valori che individuano il rendimento atteso ed il rischio delle strategie efficienti, si ottiene la cosiddetta "frontiera efficiente". Questa, chiaramente, dipende dalla relazione che intercorre tra la variazione del rendimento e quella del rischio relativa ai titoli a cui si riferiscono le strategie di investimento. La selezione, tra le molte strategie efficienti, di quella ottima, dipende dalle preferenze degli investitori. Supporremo che gli investitori preferiscano avere maggiori aspettative di rendimento e minori esposizioni al rischio. Essi sono, cioè, avversi al rischio. Inoltre, l'investitore considererà equivalenti tutte le strategie che hanno un tasso di sostituzione, tra rischio e rendimento, tale da rendere per lui indifferente avere una dose aggiuntiva di rendimento a fronte di una dose aggiuntiva di rischio, o viceversa. L'insieme di queste strategie costituisce le

cosiddette strategie equivalenti. La loro rappresentazione grafica dà luogo ad una cosiddetta “curva di indifferenza”, la cui forma, rappresentativa delle preferenze dell’investitore, dipende dai gusti e dall’avversione al rischio dell’investitore stesso. Infine, una volta individuate le preferenze dell’investitore, la strategia ottimale è quella che gli consente di ottenere il massimo grado di soddisfazione.

## **5.1 La rovina nel caso di rischi proporzionali alle riserve libere**

### **5.1.1 Introduzione**

In questo paragrafo esaminiamo il problema della rovina per un rischio proporzionale alle riserve libere, quale può essere un rischio di svalutazione della moneta o un rischio di credito[65]. Per il rischio di credito supporremo che le riserve libere siano investite in obbligazioni relative a tale tipo di rischio. Il valore delle riserve  $x$  può quindi diminuire, in base alla quota di recupero  $\alpha$ , da  $x$  a  $\alpha x$ . Quando ciò avviene si suppone che le riserve libere siano di nuovo investite in obbligazioni relative ad un rischio simile. Nel caso della svalutazione della moneta, invece, si assume che le riserve libere,  $x_1$ , siano investite nella valuta  $A$ , mentre i risarcimenti ed i premi siano pagati nella valuta  $B$ . Se  $x$  indica l’equivalente di  $x_1$  nella valuta  $B$  ed è la valuta  $A$  ad essere svalutata rispetto alla  $B$ , allora il valore delle riserve libere passerà da  $x$  a  $\alpha x$  in valuta  $B$ .

Si suppone, inoltre, che l’assicuratore cerchi di far fronte a tali rischi acquistando un’obbligazione il cui pagamento è dato da un valore costante  $K$  al momento in cui la riserva varia. Perciò il valore di cui dispone passerà da  $x$  a  $\alpha x + K$ .

Il pagamento di tale obbligazione avviene in modo continuo, detraendo una parte  $\hat{c}$  del premio incassato,  $\tilde{c}$ . Verrà cercata, sotto queste condizioni, la strategia ottimale.

Considereremo inizialmente il caso di risarcimenti con distribuzione arbitraria  $F$  e, successivamente, il caso di danni esponenziali, con  $F(y) = 1 - \exp(-y)$ .

### 5.1.2 Modello con barriera

Scriviamo il premio, considerato costante in ogni intervallo unitario di tempo, nella forma  $\tilde{c} = \hat{c} + c$  ( $c > 0$ ). Supponiamo che il numero dei sinistri sia rappresentato da un processo di Poisson,  $N_\lambda(t)$ , con parametro  $\lambda > 0$ , e che i singoli risarcimenti  $Y_i \geq 0$  siano i.i.d con distribuzione  $F(y)$  e valore atteso,  $\mu$ , finito. Inoltre supporremo che la svalutazione sia un evento raro e che possa essere, a sua volta, espressa da un processo di Poisson,  $N_\gamma(t)$ , di parametro  $\gamma > 0$ .

In seguito alla svalutazione, le riserve vengono moltiplicate per un fattore  $\alpha$  compreso tra 0 e 1, mentre viene aggiunto loro un ammontare costante  $K$  che deriva dall'acquisto di una obbligazione, il cui prezzo è pari a  $\hat{c}$ . Al momento di una svalutazione, il valore delle riserve passa dunque da  $x$  a  $\alpha x + K$ , mentre il processo che individua le riserve all'epoca  $t$  è:

$$R_t = R_0 + ct - \sum_{n=1}^{N_\lambda(t)} Y_n - \sum_{n=1}^{N_\gamma(t)} ((1-\alpha)R_{t(n)} - K).$$

Si ha rovina quando  $R_t < 0$ .

Indichiamo con

$$U(x) = P\left(\inf_{t \geq 0} R_t \geq 0\right)$$

la probabilità di non rovina con riserve iniziali  $R_0 = x$ .

Un fatto rilevante è che, per ogni  $0 < \alpha < 1$ , esiste un valore iniziale delle riserve,  $x$ , tale che il valore atteso dei guadagni in un intervallo di tempo unitario sia inferiore ad un valore negativo arbitrario  $-C$ , cioè:

$$c - \lambda\mu - \gamma((1-\alpha)x - K) < -C, \quad \text{per } C \in \mathfrak{R}^+.$$

Si può dimostrare che, senza altre limitazioni, ciò implica che la probabilità di rovina sia 1. Introduciamo, pertanto, una barriera assorbente orizzontale,  $x_{\max}$ , in modo tale che, se le riserve raggiungono questo livello massimo, la compagnia deve adottare nuove forme di investimento e di securitizzazione. Per individuare la migliore strategia utilizziamo delle equazioni integro-differenziali, che divengono equazioni integro-differenziali ritardate qualora  $\alpha x + K$  superi la barriera  $x_{\max}$ .

Considerando il caso in cui  $\lambda = 0$ , otteniamo:

$$\begin{cases} cU'(x) - \gamma U(x) + \gamma U(\alpha x + K) = 0 & \text{per } x < x_{\max}, \\ U(x) = 1 & \text{per } x \geq x_{\max}. \end{cases}$$

Supponendo che, in seguito alla svalutazione, il capitale non possa mai superare la barriera  $x_{\max}$ , cioè  $\alpha x + K \leq x_{\max}$  per  $x \in [0, x_{\max}]$ , che equivale a  $K \leq (1 - \alpha)x_{\max}$ , è possibile trovare una soluzione per la strategia ottimale.

Ciò significa che la somma ottenuta tramite la securitizzazione non eccede mai la massima perdita raggiunta a causa della svalutazione. In altre parole, l'assicuratore non ha obiettivi speculativi, ma cerca solo di coprirsi dai rischi.

La situazione sopra descritta è rappresentata nella seguente figura:

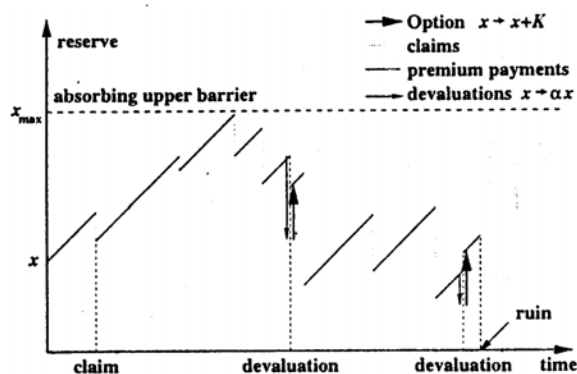


Figura 1: Il modello di rischio.

Adottiamo adesso una barriera lineare, anziché orizzontale. Le equazioni che otteniamo per la probabilità di non rovina,  $U(x)$ , in un intervallo di tempo infinitesimo,  $\tau$ , sono:

$$U(x) = (1 - \lambda\tau - \gamma\tau)U(x + c\tau) + \lambda\tau \int_0^x U(x-y)dF(y) + \gamma\tau U(\alpha x + K) + o(\tau^2), \quad (5.1)$$

con la condizione limite

$$U(x_{\max}) = 1.$$

Mediante un'espansione di Taylor e l'utilizzazione delle equazioni integro-differenziali, la (5.1) può essere trasformata in:

$$cU'(x) - (\lambda + \gamma)U(x) + \lambda \int_0^x U(x-y)dF(y) + \gamma U(\alpha x + K) = 0. \quad (5.2)$$

Tale equazione è di difficilissima soluzione.

Nel caso particolare in cui i risarcimenti abbiano una distribuzione esponenziale, cioè  $F(y) = 1 - \exp(-\beta y)$ , ponendo, senza perdere di generalità,  $\beta = 1$ , è possibile dimostrare che la soluzione è data da:

$$U(x) = \sum_{(i,j) \in I} U_{i,j}(x) = \sum_{(i,j) \in I} A_{i,j} e^{R_{i,j}x}, \quad (5.3)$$

per un opportuno insieme di indici  $I = (0,0) \cup \{1,2\} \times N_0$ .

Tale soluzione è unica.

### 5.1.3 Un modello con orizzonte di tempo aleatorio

Abbiamo finora considerato rischi di credito o di svalutazione che comportano una diminuzione delle riserve. Passiamo al caso in cui l'assicuratore abbia anche la possibilità di vedere moltiplicate le sue riserve per un fattore  $\alpha > 1$ . Questo si verifica quando gli investimenti sono fatti in titoli che pagano dividendi o interessi non deterministici. Per potere ottenere una strategia ottimale occorre, adesso, eliminare la barriera superiore ed assumere la nuova condizione limite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 1. \quad (5.4)$$



Il termine  $K$ , aggiunto alle riserve, può ora rappresentare sia una rivalutazione che una svalutazione. È importante, inoltre, che il processo si interrompa ad un istante finito con probabilità 1.

Consideriamo pertanto l'orizzonte di tempo  $T$  come una variabile aleatoria con distribuzione  $G(T)$ .  $T$  può essere visto come il periodo aleatorio al termine del quale l'assicuratore decide di interrompere la sua attività e può scegliere di modificare il tipo di investimento e di securitizzazione. Supponiamo, infine, che, in ogni modo, la compagnia non fallisca.

La probabilità di non rovina è, allora,

$$U(x) = \int_0^T P\left(\text{Inf}_{0 \leq t \leq T} R_s \geq 0\right) dG(T).$$

Se  $G(T)$  ha una distribuzione esponenziale di parametro  $\eta > 0$ , otteniamo:

$$cU_x(x) - (\lambda + \gamma + \eta)U(x) + \lambda \int_0^x U(x-y) dF(y) + \gamma U(\alpha x + K) + \eta = 0. \quad (5.5)$$

I parametri  $\lambda$ ,  $\gamma$ ,  $c$ , così come i risarcimenti, devono essere positivi e  $\mu$  deve avere valore finito. Dall'equazione (5.5) deriva la condizione limite (5.4), poiché il processo si interrompe con probabilità 1.

Si può dimostrare che la soluzione è data, ancora, da:

$$U(x) = \sum_{i,j \in I} U_{i,j}(x) = \sum_{(i,j) \in I} A_{i,j} e^{R_{i,j}x}, \quad (5.6)$$

dove  $I$  è, come sopra, un insieme opportuno di indici del tipo  $I = (0,0) \cup \{1\} \times N_0$ . La soluzione è unica.

### 5.1.4 Esempi numerici

Consideriamo il caso di maggiore interesse, in cui esista una barriera superiore e  $\alpha < 1$ . Adottiamo una distribuzione esponenziale, il che permette di facilitare i calcoli, anche se l'ipotesi è poco realistica.

**A) VALUTAZIONE DELLA SOLUZIONE ANALITICA.**

Una soluzione dell'equazione (5.3) è stata calcolata con i seguenti parametri:

$$c = 11/10; \lambda = 1; \gamma = 1/10; \alpha = 9/10; x_{\max} = 10; K = 1;$$

troncando la serie a  $j = 80$  e per un assegnato insieme di indici.

Poiché la serie in questione converge abbastanza rapidamente per  $\alpha < 1$ , ciò implica che, in questo caso, il metodo analitico risulti buono e non ci sia bisogno di ricorrere a simulazioni.

**B) DIPENDENZA DI  $U(x)$  DAI PARAMETRI.**

Utilizzando i precedenti valori dei parametri, la figura qui sotto rappresenta la probabilità di non rovina per  $\tilde{x} = x_{\max} / 2$ . Si suppone che sia possibile acquisire un'unità dell'obbligazione col pagamento continuo di  $\gamma$ .

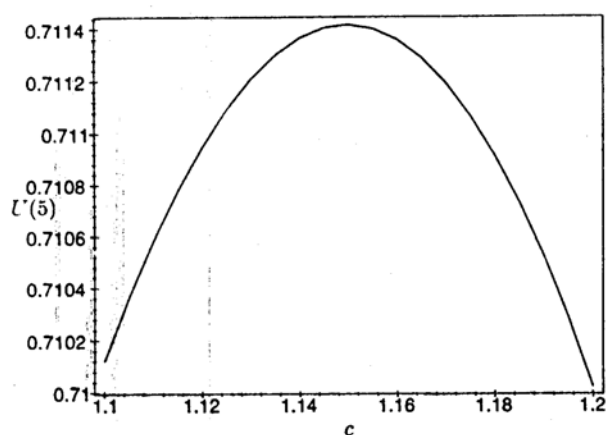


Figura 2: Probabilità di non rovina al variare di  $c = \tilde{c} - \gamma K$ .

Come possiamo vedere, la strategia ottimale si ha con  $K \approx 0.5$  e  $c \approx 1.15$ .

Inoltre, la probabilità di non rovina, con un capitale assegnato  $x$ , è una funzione crescente rispetto a  $K$ ,  $c$  e  $\alpha$ , mentre è decrescente rispetto a  $x_{\max}$ ,  $\lambda$ , e  $\gamma$ .

**C) SIMULAZIONE STOCASTICA.**

Alternativamente alla soluzione analitica, può essere utilizzata una simulazione stocastica per individuare il risultato ottimale. Le simulazioni possibili sono molte e la scelta dipende dalle diverse situazioni in cui ci troviamo.

Il metodo della simulazione è necessario, ad esempio, se dobbiamo utilizzare distribuzioni che non consentono di ottenere una soluzione analitica, ma che nondimeno rispecchiano, meglio di altre, la realtà.

**5.2 Investimenti ottimali per gli assicuratori****5.2.1 Introduzione**

Ci proponiamo di cercare la migliore strategia di investimento per minimizzare la probabilità di rovina, qualora un assicuratore abbia la possibilità di investire parte delle proprie riserve in un bene rischioso.

Questo problema è stato preso in esame nel 1995 da Browne, il quale ha modellato gli affari delle assicurazioni ed i beni rischiosi con dei moti Browniani. Senza prefissarsi un budget limitato, il risultato, sorprendente, è che la migliore strategia consiste nell'investire un ammontare costante di denaro in beni rischiosi, indipendentemente dal valore delle riserve stesse. In questo modo si ottengono risultati totalmente diversi da quelli prodotti da un modello Poisson-Composto [47]. Per quest'ultimo, infatti, indicato con  $T(t)$ ,  $t \geq 0$ , il processo delle riserve, l'ammontare ottimale investito all'epoca  $t$ ,  $A_t$ , deve soddisfare le seguenti proprietà:

- $A_t$  è una funzione delle riserve stesse,  $A(T(t))$ .
- $A(0) = 0$  e  $\lim_{s \rightarrow 0^+} A'(s) = +\infty$ .
- $A(s)$  è limitata se l'ammontare dei risarcimenti è distribuito esponenzialmente, mentre è illimitata se la distribuzione dei risarcimenti è heavy-tail.

Per ottenere la migliore strategia faremo riferimento all'equazione di Bellman, che è un'equazione integro-differenziale non lineare del secondo ordine. Tale equazione ha una soluzione positiva e convessa,  $V(s)$ , che tende a 1 per  $s$  che tende all'infinito. Il valore più piccolo di  $A(s)$  dà la soluzione ottimale, definita da:

$$A_t = A(T(t-)).$$

Sia dunque  $S(t)$ ,  $t \geq 0$ , un processo Poisson-Composto, con intensità  $\lambda$  e distribuzione dell'ammontare dei risarcimenti  $Q$ .

Il processo di rischio della compagnia assicuratrice è definito da:

$$dR(t) = cdt - dS(t), \quad R(0) = s,$$

dove  $c$  è il premio.

In genere si assume un caricamento positivo, cioè:

$$c > \lambda\mu(Q). \quad (5.7)$$

Una possibile misura del rischio è data da:

$$\Psi_0(s) = P[R(t) < 0 \text{ per qualche } t \geq 0].$$

$\Psi_0(s)$  è la probabilità che, ad una certa epoca  $t$ , ciò che si è incassato sia inferiore alle uscite per risarcimenti. Definiamo processo di Wiener,  $W(t)$ , un processo stocastico che:

- inizia da 0:  $W_0 = 0$ ;
- ha incrementi indipendenti: per ogni partizione  $0 \leq t_0 < t_1 \dots < t_m \leq 1$ ,  $W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_m} - W_{t_{m-1}}$  sono indipendenti;
- per ogni  $t \in [0,1]$   $W_t$  è distribuito normalmente con media 0 e varianza  $t$ ;
- le realizzazioni del processo sono curve continue con probabilità 1.

Utilizziamo un indice di mercato,  $X(t)$ , per gli investimenti. Supponiamo che tale indice sia modellato da un moto Browniano del tipo:

$$dX(t) = X(t)(adt + bdW(t)), \quad X(0) = x,$$

dove  $a$  e  $b$  sono parametri noti e  $W(t)$  è un processo di Wiener standard. Se all'istante  $t$  l'assicuratore detiene  $\theta(t)$  quote dell'indice, le riserve  $T(t)$  soddisfano l'equazione differenziale:

$$dT(t) = dR(t) + \theta(t)dX(t), \quad T(0) = s.$$

Pertanto l'indicatore di rischio, che non è altro che la probabilità di rovina, diviene:

$$\Psi(s) = P[T(t) < 0 \text{ per qualche } t \geq 0],$$

per ogni possibile strategia  $\theta(t)$ .

In seguito considereremo possibili solo le strategie prevedibili, quelle cioè che dipendono unicamente dai processi  $X(u)$  e  $R(u)$  e non, ad esempio, dall'ammontare dei risarcimenti. Inoltre non fisseremo limitazioni nel budget. Se adottiamo le ipotesi di Browne, cioè se consideriamo un processo di rischio del tipo:

$$dR(t) = \mu dt + \sigma dV(t),$$

dove  $V$  è un processo di Wiener standard e  $\mu, \sigma > 0$  sono relativi ad un indice di mercato, allora, come abbiamo visto, la migliore strategia è investire un ammontare costante  $A$  di denaro in un indice, ovvero  $\theta(t) = A/X(t)$ , senza fare riferimento alle riserve  $T(t)$ . Con tale strategia le riserve soddisfano l'equazione:

$$dT(t) = (\mu + aA)dt + \sigma dV(t) + bAdW(t), \quad T(0) = s,$$

che, se  $\Psi(0) = 1$ , conduce alla probabilità di rovina

$$\Psi(s) = \exp\left(-2 \frac{\mu + aA}{\sigma^2 + b^2 A^2} s\right). \quad (5.8)$$

Il valore di  $A$  che minimizza tale espressione è la soluzione positiva dell'equazione:

$$ab^2 A^2 + 2b^2 A\mu - a\sigma^2 = 0.$$

Notiamo infine che, in tale modello,  $\Psi(0) = 1$  per ogni possibile strategia.

Con una distribuzione Poisson-Composta, invece, la migliore strategia è completamente diversa. In tale caso, infatti, se non viene investito denaro

nell'indice, cioè  $\theta(t) = 0$ , allora  $\Psi(s) = \Psi_0(s)$ . Adottando un caricamento positivo,  $c > \lambda\mu(Q)$ , risulta:

$$\Psi_0(0) = \frac{\lambda\mu(\theta)}{c} < 1.$$

Mentre, con  $s = 0$ , se vi è un investimento in qualche bene, la probabilità di rovina diviene:

$$1 = \Psi(0) > \Psi_0(0).$$

Ciò significa che la strategia ottimale, in questo caso, non può essere costante. Consumatori e autorità, in genere, utilizzano la probabilità di rovina come funzione obiettivo; gli azionisti preferiscono, invece, utilizzare altre funzioni, ad esempio le aspettative dei dividendi.

### 5.2.2 Equazione di Bellman

Il calcolo della migliore strategia di investimento si basa sull'equazione di Bellman. Tale equazione integro-differenziale, posto  $\delta(s) = 1 - \Psi(s)$ , si ricava considerando un piccolo intervallo di tempo di lunghezza  $dt$ ,  $[0, dt]$ , in cui sono detenute  $\theta$  quote del titolo. In tale periodo vi sarà un risarcimento di ammontare  $Y \sim Q$  con probabilità  $\lambda dt$ . Nel caso  $Y < s$ , il processo di rischio non condurrà alla rovina con probabilità  $\delta(s - Y)$ .

Se, invece, non vi sono sinistri nell'intervallo considerato, allora non vi sarà in futuro rovina con probabilità  $\delta(s + cdt + \theta xadt + \theta xbdW(t))$ , cosa che accadrà con probabilità  $1 - \lambda dt$ .

Tramite alcuni passaggi, si ottiene

$$\delta(s) = \delta(s) + \{\lambda E[\delta(s - Y) - \delta(s)] + (c + a\theta x)\delta'(s) + \frac{1}{2}b^2\theta^2 x^2 \delta''(s)\}dt,$$

per  $s > 0$ .

Ponendo  $A = x\theta$  e massimizzando otteniamo l'equazione di Bellman:

$$\underset{A}{\text{Sup}} \{\lambda E[\delta(s - Y) - \delta(s)] + (c + aA)\delta'(s) + \frac{1}{2}b^2 A^2 \delta''(s)\} = 0, \quad s > 0. \quad (5.9)$$

L'estremo superiore al primo membro della (5.9) esiste qualora  $\delta''(s) < 0$ .

In tal caso:

$$A = A(s) = -\frac{a}{b^2} \frac{\delta'(s)}{\delta''(s)}. \quad (5.10)$$

La funzione  $\delta(s)$ , per soddisfare l'equazione (5.9), deve essere strettamente crescente, strettamente concava ed almeno due volte differenziabile.

Inoltre, per  $s$  che tende all'infinito,  $\delta(s)$  tende a 1.

In questo caso la migliore strategia di investimento è:

$$\theta(t) = \frac{A(T(t-))}{X(t-)},$$

dove  $A(s)$  è la soluzione ottimale data da (5.10).

### 5.2.3 Esistenza di una soluzione nell'equazione di Bellman

Se  $\delta(s)$  è una soluzione di (5.9), ed  $\alpha$  è una costante, anche  $\alpha\delta(s)$  è una soluzione di (5.9). Pertanto, possiamo fissare  $\delta(0)$  e poi sostituire la funzione  $\delta(s)$  che ne deriva con  $\alpha\delta(s)$ , al fine di soddisfare la proprietà  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \delta(s) = 1$ . Poiché  $A(0) = 0$ , segue  $\delta'(0) = \delta(0)\lambda/c > 0$ . Di norma porremo  $\delta'(0) = 1$ . Sostituendo il valore di  $A$  che soddisfa l'equazione di Bellman nella (5.10), otteniamo:

$$\lambda \int_0^\infty [\delta(s-x) - \delta(s)] Q(dx) + c\delta'(s) = \frac{a^2}{2b^2} \frac{(\delta'(s))^2}{\delta''(s)},$$

e ridenominando  $\lambda b^2/a^2$  e  $cb^2/a^2$  rispettivamente  $\lambda$  e  $c$ , si ricava la cosiddetta forma standard

$$\lambda \int_0^\infty [\delta(s-x) - \delta(s)] Q(dx) + c\delta'(s) = \frac{1}{2} \frac{(\delta'(s))^2}{\delta''(s)}.$$

Posto  $H(t) = Q(t, \infty)$ , arriviamo, mediante opportuni calcoli, alla seguente espressione:

$$\delta''(s) \{ -\lambda \int_0^s \delta'(s-x) H(x) dx + c(\delta'(s) - H(s)) \} = \frac{1}{2} (\delta'(s))^2.$$

Pertanto l'equazione originale di Bellman equivale al seguente problema, dove  $u = \delta'$ :

$$u'(s) \left\{ -\lambda \int_0^s u(s-x)H(x)dx + c(u(s) - H(s)) \right\} = \frac{1}{2}(u(s))^2, \quad u(0) = 1. \quad (5.11)$$

Si può dimostrare che, se la densità di  $Q$  è localmente limitata, allora esiste una soluzione  $u \in C^1(0, \infty) \cap C[0, \infty)$  per l'equazione (5.11), e questa soluzione è tale che  $u > 0$ ,  $u' < 0$  su  $(0, \infty)$  e:

$$u(s) = 1 - \sqrt{\frac{s}{c}} + o(\sqrt{s}) \quad \text{quando } s \text{ tende a } 0.$$

Inoltre, se  $H$  ha un integrale finito sull'intervallo  $[0, \infty)$ , allora anche  $u$  lo ha. Ricordando la posizione  $u = \delta'$  e la condizione  $\delta'(0) = \delta(0)\lambda/c > 0$ , segue che, se la densità di  $Q$  è localmente limitata, allora esiste una soluzione positiva, strettamente crescente e strettamente concava dell'equazione di Bellman. Tale soluzione  $\delta \in C^2(0, \infty) \cap C^1[0, \infty)$  soddisfa l'espressione:

$$\delta(s) = \frac{c}{\lambda} + s - \frac{2}{3\sqrt{c}}s^{3/2} + o(s^{3/2}), \quad \text{quando } s \text{ tende a } 0.$$

Inoltre, se  $H$  ha un integrale finito sull'intervallo  $[0, \infty)$ , allora  $\delta$  è limitata nell'intervallo  $[0, \infty)$ .

### 5.2.4 Illimitatezza di $A(s)$

Abbiamo già visto le differenze tra il modello di Browne e quello Poisson-Composto. Nel primo caso  $A(s)$  è una funzione costante, mentre, nel secondo, ciò non avviene e sappiamo solo che  $A(0) = 0$ . Si può, inoltre, dimostrare che  $A(s)$  non è necessariamente limitata. Infatti, se adottiamo una distribuzione heavy-tail per l'ammontare dei risarcimenti, ad esempio una Log-Normale o una Pareto, allora  $A(s)$  tende all'infinito per  $s$  che tende all'infinito. Tale risultato è facilmente intuibile poiché, avendo a che fare con possibilità di risarcimenti molto elevati, si cercherà di investire la maggiore quantità di denaro che si abbia a disposizione.



### 5.2.5 Alcuni casi particolari

#### A) RISARCIMENTI ESPONENZIALI

Supponiamo che i risarcimenti abbiano una distribuzione esponenziale del tipo  $Q = \text{Exp}(\theta)$ . Poniamo  $\theta = 1$  e  $v(x) = u(x)e^x$ .

Allora l'equazione (5.11) può essere riscritta come:

$$-\lambda \int_0^x v(y) dy + c(v(x) - 1) = \frac{1}{2} \frac{v^2(x)}{v'(x) - v(x)}.$$

Posto  $f(x) = (v(x) - v'(x))/v(x)$  e differenziando di nuovo, si ottiene:

$$-\lambda v(x) + cv'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{f^2(x)} (v(x)f(x) - v'(x)f'(x)).$$

Dividendo per  $v(x)$  ricaviamo:

$$\left(-\lambda + c - \frac{1}{2}\right) f^2(x) - cf^3(x) = \frac{1}{2} (f'(x) - f(x)).$$

Dopo avere introdotto le notazioni

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{c} - \frac{1}{2c}\right), \quad \gamma_1 = \left(\alpha^2 + \frac{1}{2c}\right)^{1/2} + \alpha, \quad \gamma_2 = \gamma_1 - 2\alpha,$$

risolviamo rispetto a  $f'(x)$ , ottenendo

$$f'(x) = -2cf(x)(f(x) - \gamma_1)(f(x) + \gamma_2).$$

Per calcolare  $\delta(0)$  occorre determinare il valore di

$$\int_0^\infty u(x) dx. \quad (5.12)$$

Infatti, poiché  $u(0) = 1$  e  $\lambda\delta(0) = c\delta'(0)$ ,

$$\delta(s) = \delta(0) \left(1 + \frac{\lambda}{c} \int_0^s u(x) dx\right),$$

da cui

$$\delta(0) = \left(1 + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty u(x) dx\right)^{-1}.$$

La figura sottostante mostra il valore dell'espressione (5.12) quando  $c$  varia tra 0.5 e 9.5.

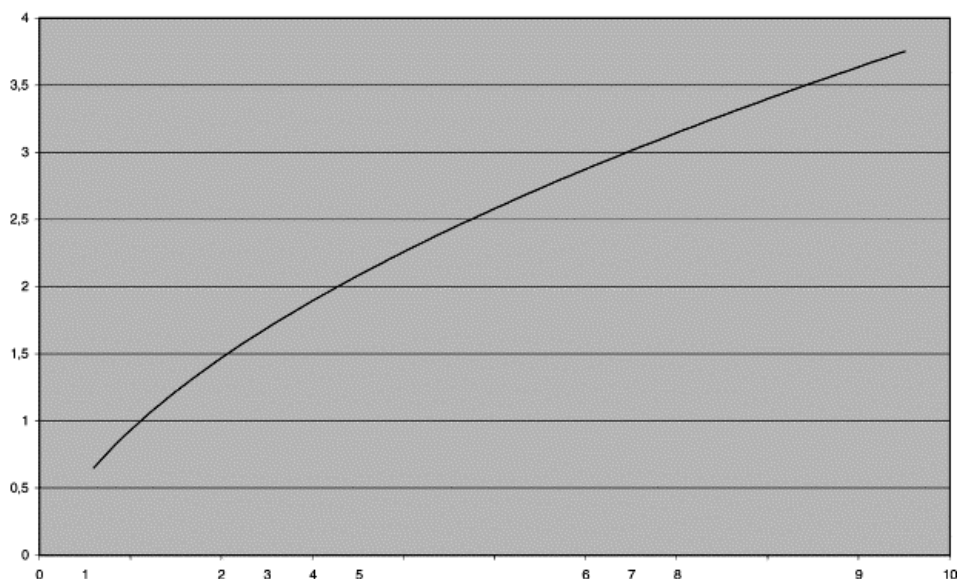


Figura 3: Integrale di  $u(x)$  per  $c = 0.5, \dots, 9.5$ .

### B) RISARCIMENTI PIÙ GRANDI DELLE RISERVE INIZIALI $s$

Consideriamo, per concludere, il caso in cui le riserve siano più piccole di ogni possibile risarcimento:

$$P[Y \leq s] = 0.$$

Allora l'equazione di Bellman diviene:

$$\delta''(s)(-\lambda\delta(s) + c\delta'(s)) = \frac{a^2}{2b^2}(\delta'(s))^2.$$

Dividendo entrambi i termini per  $\delta(s)^2$  e ponendo

$w(s) = (\lambda - c\delta'(s)/\delta(s))^2$ , abbiamo:

$$-\frac{\delta''(s)}{\delta(s)}\sqrt{w(s)} = \frac{a^2}{2b^2c^2}(\lambda - \sqrt{w(s)})^2.$$

Poiché

$$w'(s) = -2c\sqrt{w(s)}\left(\frac{\delta''(s)}{\delta(s)} - \frac{1}{c^2}(\lambda - \sqrt{w(s)})^2\right),$$

l'equazione precedente diviene

$$w'(s) = \left(\frac{a^2}{b^2c} + \frac{2}{c}\sqrt{w(s)}\right)(\lambda - \sqrt{w(s)})^2.$$

Ponendo  $w(0) = 0$ , questa equazione può essere facilmente risolta numericamente.

### 5.2.6 Esempi numerici

#### ESEMPIO 1

Consideriamo il caso di una distribuzione  $Exp(1)$  per la variabile  $X$ , dove i parametri sono  $\lambda = 1$ ,  $c = 2$ ,  $a = b = 1$ . La seguente figura mostra la strategia ottimale,  $A(s)$ , e le probabilità di non rovina in presenza o meno di tale strategia al variare di  $s$ .

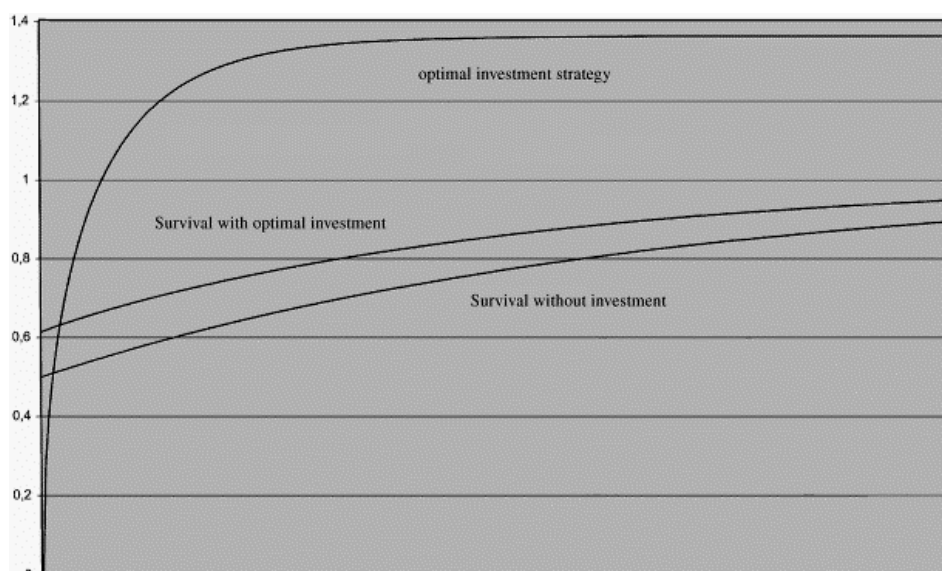


Figura 4: Strategia ottimale e probabilità di non rovina nel caso di risarcimenti esponenziali.

Come si vede, le differenze tra le due probabilità prese in esame sembrano essere piccole: per  $s = 9.43$ , otteniamo  $\delta(s) = 0.001$  con la strategia ottimale, e  $\delta(s) = 0.008$  senza investimenti.

**ESEMPIO 2**

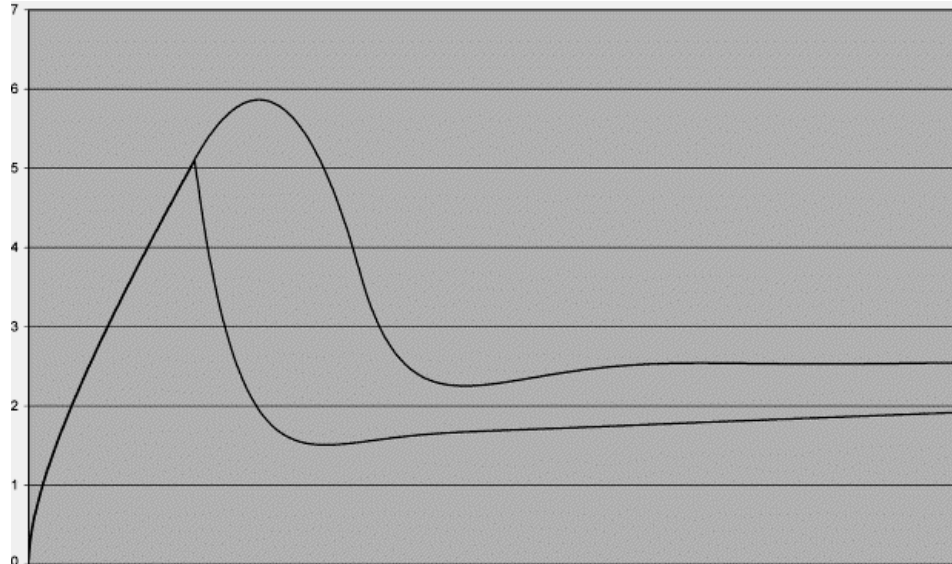
Consideriamo il caso in cui i risarcimenti abbiano una distribuzione di Pareto con densità:

$$a) h(x) = \frac{3}{x^4} \quad \text{per } x > 1,$$

$$b) h(x) = \frac{6}{5}(x-1) \quad \text{per } 1 < x < 2, \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{6}{5}(x-1)^{-4} \quad \text{per } x \geq 2.$$

I parametri siano  $c = 2$ ,  $\lambda = a = b = 1$ .

La figura sottostante rappresenta la strategia ottimale,  $A(s)$ , per le due densità precedenti.



**Figura 5: Strategie ottimali per le due distribuzioni di Pareto.**

Come già sapevamo, poiché la distribuzione adottata per l'ammontare dei risarcimenti è di tipo heavy-tail,  $A(s)$  tende all'infinito, anche se, per un certo tratto, per valori bassi di  $s$ , essa sembra decrescere.

# CAPITOLO 6

## RISCHI CATASTROFICI E PRODOTTI FINANZIARI

### 6.1 Introduzione

In genere, per modellare i rischi catastrofici gli attuari usano delle distribuzioni heavy-tail, ad esempio la Pareto. In tal modo il risarcimento cumulato dipende essenzialmente dai danni più elevati. La necessità di questi modelli divenne evidente agli inizi degli anni '90, quando le compagnie di assicurazione dovettero far fronte ad elevate richieste di risarcimento in seguito a terremoti, uragani o alluvioni. Il problema era di calcolare un premio sufficiente per far fronte alle maggiori perdite. Dal punto di vista degli attuari alcuni eventi venivano considerati non assicurabili, ma le persone che vivevano in aree soggette a tali disastri avevano bisogno di una certa copertura. Una possibilità era che fosse il governo a prendersi cura di tali rischi, destinando allo scopo una parte delle tasse, come nel caso dei rischi di alluvione in Olanda.

Un'altra possibilità, invece, era quella di fare ricorso a futures o opzioni basati su indici di perdita. In questo modo il rischio veniva trasferito sugli investitori privati. Nel 1992 il Ministero del Commercio di Chicago introdusse i cosiddetti CAT-futures [Catastrophic futures] [20]. Questi si basavano sul cosiddetto indice ISO [Insurance Service Office], che misurava l'ammontare dei risarcimenti verificatisi in un determinato periodo e dichiarati ad una prefissata compagnia di assicurazione fino ad una data stabilita.

I CAT-futures, tuttavia, non riscosero molto successo, a causa della struttura stessa dell'indice ISO. L'indice, infatti, veniva annunciato solo una volta prima della pubblicazione ufficiale, producendo, come vedremo, un'informazione asimmetrica. Nel 1995, perciò, i CAT-futures furono sostituiti dalle opzioni PCS [Property Claim Services]. Queste, a loro volta, erano basate su un indice di perdita, il PCS, stimato da un ente indipendente. Inoltre quest'ultimo, a

differenza dell'ISO, veniva annunciato giornalmente, eliminando il problema dell'asimmetria informativa. Vedremo di seguito un modello per indici come l'ISO e il PCS. Cominceremo dal caso in cui il numero dei sinistri derivanti da una catastrofe abbia una distribuzione prefissata, per passare, poi, ad analizzare il caso più generale in cui esso dipenda dalla gravità della catastrofe stessa, che, però, non è nota. Anche se le opzioni PCS non dipendono direttamente dai sinistri denunciati, vedremo che esiste una profonda correlazione tra l'indice PCS ed i sinistri effettivamente riportati.

Inoltre, poiché tali strumenti finanziari sono sostitutivi della riassicurazione, una compagnia che deve far fronte a rischi catastrofici deve essere in grado di stimare l'indice PCS e determinare il prezzo dell'opzione, per potere attuare la migliore strategia di copertura. A tale scopo essa utilizzerà le informazioni che derivano dalle richieste di risarcimenti. È importante anche considerare le denunce che avvengono in ritardo. Mostreremo inoltre un'approssimazione per il prezzo dei CAT-futures, anche se questi non sono più molto utilizzati. Per trovare il prezzo viene utilizzato il metodo dell'utilità esponenziale, che consiste nel supporre che il risarcimento cumulato abbia una coda decrescente esponenzialmente, anche se, in realtà, i dati mostrano che la distribuzione della coda è di tipo heavy-tail. Per ovviare a questo inconveniente ipotizzeremo che sia heavy-tail la distribuzione dei singoli sinistri di una catastrofe.

## **6.2 I CAT – futures**

I CAT-futures sono scambiati a cicli trimestrali, con contratti stipulati nei mesi di marzo, giugno, settembre e dicembre. Un contratto trimestrale si basa sulle perdite che si verificano in un trimestre e che vengono denunciate alle compagnie prima della fine del trimestre successivo. Il contratto deve anche specificare la zona ed il tipo di risarcimento che viene preso in considerazione. I tre mesi successivi alla fine del trimestre preso in esame sono concessi per liquidare le denunce tardive, molto comuni nelle assicurazioni.

Il valore del contratto dipende da un indice di perdita, il già menzionato indice ISO. Ogni trimestre, circa 100 compagnie americane riportano le proprie perdite all'ISO (Insurance Service Office, un agente statistico molto noto). L'ISO, poi, seleziona un pool di almeno 10 compagnie sulla base della grandezza, dei diversi affari e della qualità dei dati riferiti. L'indice ISO è calcolato come un rapporto di perdita del pool del tipo:

$$\text{INDICE ISO} = \text{Perdite avvenute/Premi ottenuti.}$$

La lista delle compagnie incluse nel pool ed il loro volume dei premi vengono annunciati dal Ministero del Commercio prima dell'inizio del periodo di trattazione del contratto. Pertanto il premio applicato da pool è una costante nota per tutto il periodo di trattazione ed i cambiamenti dei prezzi sono attribuibili solo alle diverse aspettative di perdita nei mercati.

Il valore del CAT-future è dato da:

$$F_{T_2} = 25000 \min(I_{T_2}, 2),$$

dove  $I_{T_2}$  è l'indice ISO alla fine del periodo delle dichiarazioni, dato dal rapporto tra le perdite ed il volume dei premi delle compagnie facenti parte del pool.

### 6.3 Le opzioni PCS

In modo analogo, le opzioni PCS si basano sugli indici PCS. Tali indici di perdita, forniti giornalmente dal Ministero del Commercio di Chicago, sono di 9 tipi: uno nazionale, cinque regionali e tre di stato. Ognuno di questi indici si basa sulle perdite delle compagnie assicurative in seguito ad eventi catastrofici nelle zone coperte dai contratti durante un periodo prefissato. Per le opzioni PCS, che possono essere call o put, viene considerato un limite superiore  $K$ . Inoltre, esse sono caratterizzate da due periodi: il periodo delle "perdite" ed il periodo di "sviluppo". Il primo individua l'intervallo di tempo in cui devono verificarsi gli eventi catastrofici affinché i relativi danni siano considerati negli indici. In genere si tratta di un trimestre, ma, in certi casi, può anche essere un anno.

Il periodo di “sviluppo”, invece, inizia subito dopo la fine del periodo delle “perdite”, ed è l’intervallo di tempo in cui vengono effettuate nuove stime sui danni in seguito alle catastrofi avvenute. In genere dura 6 o 12 mesi.

Il valore che ognuno degli indici precedenti,  $L_T$ , assume, rappresenta la somma delle stime delle perdite assicurate effettuate entro la scadenza  $T$ .

Il valore dell’opzione call PCS all’istante  $T$ , con prezzo di esercizio  $A$  e limite superiore  $K$ , è dato da:

$$C(T, L(T)) = \min(\max(L(T) - A; 0); K - A).$$

## 6.4 CAT-futures e opzioni PCS

Come abbiamo accennato, le opzioni PCS possono essere considerate un miglioramento rispetto ai CAT-futures. Il principale problema dei CAT-futures risiede nell’indice ISO, su cui si basano. Esso, infatti, è pubblicato solo una volta prima della data in cui è annunciato il valore definitivo. Di conseguenza soltanto le compagnie che fanno parte del pool, a cui l’ISO si riferisce, e non le altre, hanno la possibilità di conoscere una parte dei dati che determineranno l’indice prima della data della proclamazione definitiva. In altre parole esiste un’informazione asimmetrica, che induce diffidenza ad entrare nel mercato dei CAT-futures. Il motivo per cui l’indice ISO non viene pubblicato giornalmente sembra risiedere nella difficoltà di registrare ed elaborare i dati che serviranno a determinarne il valore. Questa spiegazione, però, non sembra molto fondata dal momento che esistono molti strumenti capaci di accelerare le procedure. I CAT-futures, inoltre, presentano un problema di “moral-hazard”: infatti una compagnia appartenente al pool può manipolare i dati a proprio favore. Ad esempio, può decidere di non dichiarare una grande perdita che si è verificata, per non modificare il valore dell’indice ISO. Ad esempio una compagnia in posizione “corta” rispetto ad un contratto future deve pagare la differenza tra il prezzo del future a scadenza e quello di acquisto. Poiché la compagnia desidera che il prezzo a scadenza sia il più basso possibile, preferisce non denunciare grosse perdite,



che farebbero aumentare l'indice ISO. Questo costituisce un ulteriore motivo di diffidenza relativo al mercato dei CAT-futures. Esiste infine un problema legato al periodo in cui possono essere dichiarate le perdite, che è spesso troppo breve e non consente di ottenere un indice che rispecchi effettivamente i danni subiti. La struttura su cui si basa l'indice ISO non è quindi molto buona; non è così, invece, per il PCS. Questo indice è stimato dal Property Claim Services (PCS), un ente indipendente che definisce come evento catastrofico un qualunque avvenimento che causi elevate perdite o che coinvolga molte compagnie. Le situazioni avverse possono derivare da vari tipi di pericoli, quali uragani, bufere, ghiaccio, neve, grandine, alluvioni, terremoti, incendi, esplosioni ed altro. Il PCS fornisce tre diverse stime: una stima veloce delle perdite, una stima preliminare ed una revisione della stima. La prima viene effettuata appena il PCS segnala una catastrofe, ed è espressa da un intervallo di valori ammissibili. Ciò serve a dare all'assicuratore ed al riassicuratore un'idea della gravità della sciagura, ma non influenza in alcun modo il calcolo dell'indice PCS. Esso è invece determinato dalla stima preliminare e riaggiustato con le successive revisioni. In genere la stima preliminare viene effettuata e pubblicata due settimane dopo che la catastrofe è avvenuta, ma il PCS continua ad esaminare le informazioni sulle perdite subite per individuare se il valore dichiarato è corretto. In seguito, circa 60 giorni dopo, il PCS emette una revisione della valutazione effettuata. Nel frattempo, continua ad esaminare i dati finché non ritiene che i valori forniti siano accettabili. L'indice PCS è perciò annunciato giornalmente e nessuno può avere informazioni prima della sua pubblicazione ufficiale. A differenza dell'indice ISO, in questo caso, tutti hanno le stesse conoscenze e non vi è una situazione di asimmetria informativa. È inoltre molto difficile che le compagnie riescano ad influenzare il valore dell'indice e quindi scompare anche il problema di moral-hazard. Inoltre, nel caso delle opzioni PCS, il periodo in cui vengono considerate le perdite, che ne determineranno il valore finale, è più lungo di quello dei CAT-futures. Ciò consente di ottenere una

maggior attinenza ai dati effettivamente registrati. Per questi motivi le opzioni PCS sono considerate un miglioramento rispetto ai CAT-futures.

## 6.5 Strumenti finanziari e riassicurazione

Consideriamo le principali differenze tra gli strumenti finanziari descritti e la riassicurazione. Come abbiamo detto, tali strumenti possono essere definiti un metodo alternativo di riassicurazione. Nonostante ciò, ci sono differenze importanti tra i due modi di copertura. Il tipo di riassicurazione che più somiglia ai prodotti finanziari è quello non proporzionale, in cui:

$$V(L/M, R) = L - \max(L - M; 0) + \max(L - R; 0),$$

dove  $V(L/M, R)$  è la perdita a cui l'assicuratore diretto deve far fronte,  $L$  è la perdita totale,  $M$  è la cosiddetta priorità, cioè la parte di rischio che resta a carico dell'assicuratore diretto, e  $R$  è un limite superiore per il contratto di riassicurazione stesso, con  $R > M$ . L'assicuratore diretto deve fare fronte all'intera perdita se  $L < M$ , mentre, se  $L > M$ , la parte superiore ad  $M$  spetta al riassicuratore con la limitazione che quanto eccede  $R$  ( $> M$ ) spetta ancora all'assicuratore diretto. Spesso quest'ultimo decide di stipulare un nuovo contratto di riassicurazione per coprire perdite superiori a  $R$  e tutelarsi, così, anche di fronte ai danni più elevati.

Una differenza tra la riassicurazione e gli strumenti finanziari è che, nel caso di prodotti finanziari, i compratori ed i venditori non si conoscono tra loro, sono anonimi ed il prezzo è determinato mediante un'asta di mercato. Nella riassicurazione, invece, il contratto avviene tra due parti note ed il prezzo è determinato mediante trattative. Di conseguenza chi utilizza le coperture finanziarie ha una maggiore garanzia che il prezzo non sia soggetto a possibilità di arbitraggio, anche se chi stipula un contratto di riassicurazione, può trattare con più riassicuratori prima di fare la sua scelta. I contratti di riassicurazione, tuttavia, sono specifici per il compratore diretto e non standardizzati come nel caso degli strumenti finanziari. Pertanto, essi possono essere adattati alle esigenze di chi li acquista, anche se hanno costi di

trattazione e di amministrazione maggiori. D'altra parte, a causa della struttura del contratto di riassicurazione non è possibile passare da una posizione all'altra, come può accadere nel mercato degli strumenti finanziari. Utilizzando i prodotti finanziari il rischio di credito è minore, poiché ci sono margini e limiti che vengono imposti ed aggiustati giornalmente, mentre chi compra un contratto di riassicurazione deve affidarsi alla responsabilità del riassicuratore, che potrebbe rivelarsi insolvente. Qualora ciò avvenga, l'assicuratore diretto è responsabile nei confronti degli assicurati anche per la parte delle polizze riassicurate. Un vantaggio che offre la riassicurazione, invece, è dato dal fatto che essa copre direttamente le perdite di chi compra il contratto, al contrario di quanto avviene con i prodotti finanziari, le cui stime possono non riflettere perfettamente la situazione reale dell'acquirente. Infine, la riassicurazione può offrire anche servizi extra come assistenza e consigli, cosa che non può accadere con i prodotti finanziari.

# CAPITOLO 7

## VALUTAZIONE DEI PRODOTTI FINANZIARI

### 7.1 Un metodo basato su sinistri realmente dichiarati

La prima trattazione di questo argomento è dovuta a Cummins e Geman. Essi prevedevano che, al momento di una catastrofe, ci fosse da aspettarsi una forte crescita dell'indice delle perdite; cosa, però, non molto corrispondente alla realtà. L'approccio di Embrechts e Meister, invece, si basa sul fatto che le funzioni di utilità degli agenti siano di tipo esponenziale [19].

Più precisamente, se  $F_t$  è il prezzo del future,  $L_t$  è il valore delle perdite avvenute in un trimestre e dichiarate fino all'epoca  $t$ ,  $Z_t$  è l'informazione all'epoca  $t$ ,  $\pi$  è il premio incassato e  $c = 25000/\pi$ , si può dimostrare che il prezzo del future all'istante  $t$  è:

$$F_t = c \frac{E_p[\exp(\alpha L_\infty)(L_{T_2} \cap 2\pi)/Z_t]}{E_p[\exp(\alpha L_\infty)/Z_t]}. \quad (7.1)$$

In particolare, deve esistere  $E_p[\exp(\alpha L_\infty)]$  mentre il coefficiente di avversione al rischio  $\alpha$  dipende dal mercato.

Inoltre,  $\exp(\alpha L_\infty)/E_p[\exp(\alpha L_\infty)]$  è una quantità strettamente positiva.

Ipotizziamo anche che il processo delle perdite,  $L_t$ , abbia rispetto alla misura  $Q$  lo stesso tipo di distribuzione che ha rispetto alla misura  $P$ , seppure con parametri diversi. In questo modo è possibile calcolare sia il prezzo dei CAT-futures che delle opzioni PCS. Se poi supponiamo che esista una riassicurazione proporzionale, in cui il premio è equamente suddiviso tra assicuratore e riassicuratore e la proporzione di rischio trattenuta nel portafoglio può essere modificata in ogni momento, allora l'indice  $(L_\infty(T) - \pi(T))$  può essere considerato un bene commerciabile, dove  $L_\infty(T)$  denota tutti i risarcimenti avvenuti fino alla data  $T$  e  $\pi(T)$

rappresenta i premi incassati per far fronte a coprire i suddetti risarcimenti.

Supponiamo che  $\pi(T)$  sia una funzione lineare.

Per calcolare  $F_t$  è necessario scegliere un modello per  $L_t$ . Aase ha utilizzato un modello Poisson-Composto, dove le catastrofi arrivano ad istanti prefissati ed i sinistri sono immediatamente riferiti.

Embrechts e Meister, invece, hanno introdotto un modello di Poisson doppiamente stocastico, in cui cioè il livello di intensità è più alto immediatamente dopo una catastrofe.

### 7.1.1 Il modello e le ipotesi

Sia  $T_1$  la fine del trimestre e  $T_2 > T_1$  la fine del periodo delle dichiarazioni.

Definiamo su uno spazio di probabilità,  $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ , i seguenti processi stocastici:

- $L_t$  : risarcimento cumulato dei sinistri denunciati fino all'istante  $t$ .
- $N_t$  : numero di catastrofi avvenute nell'intervallo  $[0, t]$ .
- $M_i$  : numero di sinistri prodotti dall' $i$ -esima catastrofe.
- $M_i(t)$  : numero di sinistri prodotti dall' $i$ -esima catastrofe e dichiarati fino all'istante  $t$ .
- $Y_{ij}$  : ammontare del risarcimento per il  $j$ -esimo sinistro causato dall' $i$ -esima catastrofe.
- $D_{ij}$  : ritardo nella dichiarazione del  $j$ -esimo sinistro causato dall' $i$ -esima catastrofe.
- $\tau_i$  : istante in cui è avvenuta l' $i$ -esima catastrofe.

Supponiamo inoltre che:

- $Z_t$  sia tale che l'ammontare complessivo delle perdite dichiarate fino all'istante  $t$ ,  $L_t$ , sia  $Z_t$ -misurabile.
- $N_t$  sia un processo di Poisson di parametro  $\Delta \in (0, \infty)$ .

- $(M_i : i \in N)$ ,  $(N_t : 0 \leq t \leq T_1)$ ,  $(D_{ij} : i, j \in N)$ , e  $(Y_{ij} : i, j \in N)$ , siano indipendenti.
- $M_i$  sia una mistura di Poisson con funzione di mistura  $F_\lambda$ . Per valori fissati delle variabili aleatorie  $\lambda_i$ , che hanno distribuzione  $F_\lambda$ ,  $M_i$  sia una Poisson condizionata di parametro  $\lambda_i$ . Se la distribuzione  $F_\lambda$  è degenere, ( $\lambda_i \equiv \bar{\lambda}$ ), allora ogni variabile aleatoria  $M_i$  è Poisson di parametro  $\bar{\lambda}$ .
- $(\lambda_i : i \in N)$  siano i.i.d ed indipendenti da  $N_t$ ,  $D_{ij}$ ,  $Y_{ij}$ .
- $D_{ij} \sim F_D$ ,  $Y_{ij} \sim F_Y$ . Indichiamo con  $Y$  e  $D$ , rispettivamente, delle generiche variabili  $Y_{ij}$  e  $D_{ij}$ , con  $m_Y(r) = E[e^{rY}]$  e  $m_D(r) = E[e^{rD}]$  le rispettive funzioni generatrici dei momenti.
- Il  $j$ -esimo sinistro dell' $i$ -esima catastrofe,  $Y_{ij}$ , sia dichiarato alla data  $\tau_i + D_{ij}$ .

Si può dimostrare che:

$N_T - N_t \sim \text{Poisson}(\Delta(T-t))$  e che  $(\tau_{N_{t+1}}, \dots, \tau_{N_T} / N_T - N_t = n)$  ha la stessa distribuzione di  $(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$ , dove le  $U_i$  sono variabili aleatorie uniformemente distribuite nell'intervallo  $[t, T]$  e le  $U_{(i)}$  sono le statistiche ordinate.

Si può dimostrare, abbastanza sorprendentemente, che il numero di sinistri che avvengono con l' $i$ -esima catastrofe e sono dichiarati nel periodo  $[t, T_2]$ , cioè  $M_i(T_2) - M_i(t)$ , sono indipendenti dal numero di sinistri dichiarati nel periodo  $[\tau_i, t]$ , cioè  $M_i(t)$ , per un assegnato  $\lambda_i$ .

Per  $1 \leq i \leq N_{T_1}$ , dati  $\tau_i$  e  $\lambda_i$ , risulta:

$$M_i(t) / \lambda_i, \tau_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i(F_D(t - \tau_i))), \text{ se } i \leq N_t,$$

$$M_i(T_2) - M_i(t) / \lambda_i, \tau_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i(F_D(T_2 - t) - F_D(t - \tau_i))), \text{ se } i > N_t,$$

che equivale a

$$M_i(T_2) - M_i(t) / \lambda_i, \tau_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i(F_D(T_2 - \tau_i))).$$

Per semplicità supponiamo che i sinistri dell' $i$ -esima catastrofe siano ordinati. Dette  $D_{i,j}$ ,  $1 \leq j \leq M_i$ , le statistiche ordinate di  $D_{ij}$  per  $1 \leq j \leq M_i$  e, analogamente,  $Y_{i,j}$  le statistiche ordinate dei risarcimenti, otteniamo che il risarcimento di un sinistro occorso fino al tempo  $T_1$  e dichiarato fino al tempo  $t \leq T_2$ , risulta:

$$L_t = \sum_{i=1}^{N_{t \cap T_1}} \sum_{j=1}^{M_i(t)} Y_{i,j}.$$

In particolare, il risarcimento cumulato finale,  $L_{T_2}$ , è:

$$L_{T_2} = L_t + \sum_{i=1}^{N_{t \cap T_1}} \sum_{j=M_i(t)+1}^{M_i(T_2)} Y_{i,j} + \sum_{i=N_{t \cap T_1}+1}^{N_{T_1}} \sum_{j=1}^{M_i(T_2)} Y_{i,j}.$$

In seguito faremo riferimento alla misura  $P$  condizionata da  $Z_t$ .

La variabile aleatoria

$$S_i = \sum_{j=M_i(t)+1}^{M_i(T_2)} Y_{i,j},$$

per  $i \leq N_t$ , e per un dato  $\lambda_i$ , ha una distribuzione Poisson-Composta di parametro  $\lambda_i(F_D(T_2 - \tau_i) - F_D(t - \tau_i))$ . Inoltre, poiché all'istante  $t$   $N_t$  è noto, allora  $S_1 + \dots + S_{N_t}$  condizionato da  $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_t}$ , è ancora Poisson-Composto con parametro

$$(\lambda_1(F_D(T_2 - \tau_1) - F_D(t - \tau_1)) + \dots + \lambda_{N_t}(F_D(T_2 - \tau_{N_t}) - F_D(t - \tau_{N_t}))).$$

Anche per  $N_t < i \leq N_{T_1}$ , e sempre per un dato  $\lambda_i$  e  $\tau_i$ ,  $S_i$  è ancora Poisson-Composto di parametro  $\lambda_i(F_D(T_2 - \tau_i))$ , e, di nuovo,  $S_{N_t+1} + \dots + S_{N_{T_1}}$ , condizionato da  $N_{T_1}$ ,  $\lambda_{N_t+1}, \dots, \lambda_{N_{T_1}}$ , e da  $\tau_{N_t+1}, \dots, \tau_{N_{T_1}}$ ,

è Poisson-Composto di parametro  $\sum_{i=N_t+1}^{N_{T_1}} \lambda_i(F_D(T_2 - \tau_i))$ .

Riassumendo,

$$L_{T_2} - L_t = S_1 + \dots + S_{N_t} + S_{N_t+1} + \dots + S_{N_{T_1}}, \quad \text{dati } N_{T_1}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_{N_{T_1}}, \quad \text{e}$$

$\tau_1, \dots, \tau_{N_{T_1}}$ , è una Poisson-Composta di parametro

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N_t} \lambda_i (F_D(T_2 - \tau_i) - F_D(t - \tau_i)) + \sum_{i=N_t+1}^{N_{T_1}} \lambda_i (F_D(T_2 - \tau_i))^d = \\ & = \sum_{i=1}^{N_t} \lambda_i (F_D(T_2 - \tau_i) - F_D(t - \tau_i)) + \sum_{i=N_t+1}^{N_{T_1}} \lambda_i (F_D(T_2 - \tilde{\tau}_i)), \end{aligned}$$

dove le  $\tilde{\tau}_i$  sono variabili aleatorie i.i.d uniformemente distribuite in  $(t, T_1)$  ed indipendenti da  $Z_t$ .

## 7.1.2 Prezzo del CAT-future

### A) SE I $\lambda_i$ SONO DETERMINISTICI

Per calcolare il prezzo dei CAT-futures, qualora i  $\lambda_i$  siano deterministici, occorre, per prima cosa, calcolare il valore di  $E_p[\exp(\alpha L_\infty)]$ .

Ricordando che  $\sum_{j=1}^{M_i} Y_{ij}$  è una Poisson-Composta con funzione generatrice

dei momenti  $\exp\{\lambda(m_Y(r) - 1)\}$ , si ricava:

$$E_p[\exp(\alpha L_\infty)] = \exp\{\Delta(e^{\lambda(m_Y(\alpha) - 1)} - 1)\}.$$

Rispetto alla misura  $Q$ , inoltre, il processo  $L_t$  è dello stesso tipo che rispetto alla misura  $P$ , seppure con parametri diversi.  $N_t$  è dunque un processo di Poisson di parametro

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda E_p[\exp\{\sum_{j=1}^{M_i} Y_{ij}\}] = \Lambda \exp\{\lambda(m_Y(\alpha) - 1)\},$$

mentre il numero dei sinistri prodotti dall' $i$ -esima catastrofe è Poisson di parametro

$$\tilde{\lambda} = \lambda(m_Y(\alpha))$$



ed i singoli risarcimenti hanno distribuzione

$$\tilde{F}_Y(x) = \int_0^x e^{\alpha y} dF_Y(y) / m_Y(\alpha).$$

Infine i  $D_{ij}$  hanno la stessa distribuzione che avevano con la misura  $P$ , per cui il prezzo del CAT-future è

$$cE_Q[L_{T_2} \cap 2\pi].$$

Detta  $\tilde{F}_L(\cdot; t)$  la distribuzione di  $L_{T_2} - L_t$  condizionata a  $Z_t$ , utilizzando  $Q$ , è possibile esprimere il prezzo come:

$$\begin{aligned} c(L_t + E_Q[(L_{T_2} - L_t) - ((L_{T_2} - L_t) - (2\pi - L_t))^+ / Z_t]) = \\ = c(L_t + E_Q[(L_{T_2} - L_t) / Z_t]) - \int_{2\pi - L_t}^{\infty} (1 - \tilde{F}_L(x; t)) dx. \end{aligned}$$

Trovare un'espressione più semplice di questa risulta essere molto difficile. Alcuni dati reali mostrano, inoltre, che uno dei più alti rapporti di perdita raggiunti è stato quello relativo all'uragano Andrew in cui  $L_{\infty} = 1.79\pi$ .

Nella misura  $P$ ,  $\{L_{T_2} > 2\pi\}$  è un evento molto raro e, poiché stiamo trattando il caso di assicurazioni di catastrofi, anche il coefficiente di avversione al rischio non può essere molto elevato, altrimenti tali assicurazioni non sarebbero possibili.

Supponiamo che  $\{L_{T_2} > 2\pi\}$  sia un evento raro anche rispetto alla misura  $Q$ . Trascuriamo l'ultimo termine che individua il prezzo del future, approssimando l'intero valore con:

$$c(L_t + E_Q[(L_{T_2} - L_t) / Z_t]).$$

Ciò permette di semplificare l'espressione se assumiamo un coefficiente di avversione al rischio piuttosto basso.

Indicando con  $p_t$  il prezzo del future all'istante  $t$  e con  $p_t^{approx}$  la sua approssimazione, avremo:

$$p_t^{approx} = p_t + \int_{2\pi - L_t}^{\infty} (1 - \tilde{F}_L(x; t)) dx = c(L_t + E_Q[(L_{T_2} - L_t) / Z_t]).$$

**TEOREMA 7.1**

Se valgono le ipotesi del paragrafo 7.1.1, se i  $\lambda_i = \lambda$  sono deterministici e se il coefficiente di avversione al rischio è fissato, allora:

$$P_t^{approx} = \begin{cases} \frac{25000}{\pi} \left( L_t + \left( \sum_{i=1}^{N_t} (F_D(T_2 - \tau_i) - F_D(t - \tau_i)) + \tilde{\Delta}(T_1 - t) E_Q[F_D(T_2 - \tilde{\tau})] \right) \tilde{\lambda} E_Q[Y] \right), \\ t \in [0, T_1], \\ \\ \frac{25000}{\pi} \left( L_t + \sum_{i=1}^{N_{t_1}} (F_D(T_2 - \tau_i) - F_D(t - \tau_i)) \tilde{\lambda} E_Q[Y] \right), \\ t \in [T_1, T_2]. \end{cases}$$

Il teorema segue dal calcolo di  $E_Q[(L_{T_2} - L_t)/Z_t]$ , mediante le ipotesi adottate in 7.1.1.

Notiamo che:

$$E_Q[F_D(T_2 - \tilde{\tau})] = E_p[F_D(T_2 - \tilde{\tau})] = \frac{1}{T_1 - t} \int_{T_2 - T_1}^{T_2 - t} F_D(s) ds,$$

se  $t < T_1$  e  $E_Q[Y] = m'_Y(\alpha) / m_Y(\alpha)$ .

**B) SE I  $\lambda_i$  SONO STOCASTICI**

L'ipotesi che i  $\lambda_i$  siano stocastici ed indipendenti serve a modellizzare i diversi livelli di gravità delle catastrofi. Per semplicità supponiamo che tali parametri dipendano solo dai sinistri dichiarati, sebbene, nella realtà, si possa fare riferimento ad altre informazioni disponibili, comprese le immagini televisive e le notizie riportate dai telegiornali. Per i sinistri verificatisi prima dell'istante  $t$  sono disponibili alcune informazioni sui parametri di intensità  $\lambda_i$ , ma ciò che interessa sono le distribuzioni a posteriori di tali  $\lambda_i$ , per una data  $Z_t$ . È auspicabile che la distribuzione a posteriori appartenga alla stessa classe di quella a priori. A tale scopo assumiamo una distribuzione Gamma del tipo  $\lambda_i \sim \Gamma(\gamma, \eta)$ .

Dunque:

$$E_p[\exp(\alpha L_\infty)] = \exp\left\{\Delta\left(\frac{\eta}{\eta - m_Y(\alpha) + 1}\right)^\gamma - 1\right\}.$$

Come nel caso precedente, il processo  $L_t$ , adottando la misura  $Q$ , è dello stesso tipo di quello relativo alla misura  $P$ , seppure con parametri diversi.

$N_t$  è dunque un processo di Poisson di parametro

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda \eta^\gamma (\eta - m_Y(\alpha) + 1)^{-\gamma}.$$

Inoltre:

$$\lambda_i \sim \Gamma(\gamma, \eta - m_Y(\alpha) + 1),$$

mentre  $M_i$ , dato  $\lambda_i$ , è una Poisson condizionata di parametro

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i m_Y(\alpha),$$

e  $Y$  ha una distribuzione

$$\tilde{F}_Y(x) = \int_0^x e^{\alpha y} dF_Y(y) / m_Y(\alpha).$$

Infine i  $D_{ij}$  hanno, ancora una volta, la stessa distribuzione che avevano rispetto a  $P$ .  $M_i$  è quindi una Poisson mista con variabile di mistura

$$\lambda_i \sim \Gamma(\gamma, (\eta - m_Y(\alpha) + 1) / m_Y(\alpha)).$$

Posto

$$\tilde{\gamma} = \gamma \quad \tilde{\eta} = (\eta - m_Y(\alpha) + 1) / m_Y(\alpha);$$

e fissata la data  $t$  in cui si desidera calcolare il prezzo del CAT-future, la distribuzione a posteriori di  $\tilde{\lambda}_i$  a tale data è:

$$\tilde{\lambda}_i / Z_t \sim \Gamma(\gamma + M_i(t), F_D(t - \tau_i) + \tilde{\eta}).$$

## TEOREMA 7.2

*Se valgono le ipotesi del paragrafo 7.1.1, se  $\lambda_i \sim \Gamma(\gamma, \eta)$  e il coefficiente di avversione al rischio è fissato, allora:*

$$p_t^{approx} = \begin{cases} \frac{25000}{\pi} \left( L_t + \left( \sum_{i=1}^{N_t} E_Q[\tilde{\lambda}_i / Z_t] (F_D(T_2 - \tau_i) - F_D(t - \tau_i)) + \frac{m_Y(\alpha) \tilde{\Delta}(T_1 - t)}{\eta - m_Y(\alpha) + 1} E_Q[F_D(T_2 - \tilde{\tau})] \right) E_Q[Y] \right), \\ t \in [0, T_1] \\ \\ \frac{25000}{\pi} \left( L_t + \sum_{i=1}^{N_{T_1}} E_Q[\tilde{\lambda}_i / Z_t] (F_D(T_2 - \tau_i) - F_D(t - \tau_i)) E_Q[Y] \right), \\ t \in [T_1, T_2]. \end{cases}$$

Notiamo che:

$$E_Q[\tilde{\lambda}_i / Z_t] = (\gamma + M_i(t)) / (F_D(t - \tau_i) + \tilde{\eta}).$$

### 7.1.3 L'errore di approssimazione

Possiamo chiederci quanto sia buona l'approssimazione del prezzo dei CAT-futures, definita dai due teoremi precedenti. Consideriamo solo il caso in cui i  $\lambda_i$  siano deterministici. L'errore di approssimazione, indicato con  $(AE)$ , è uguale a:

$$c \left( \int_{2\pi - L_t}^{\infty} (1 - \tilde{F}_L(x; t)) dx, \right.$$

dove  $\tilde{F}(\cdot; t)$  è la distribuzione di  $L_{T_2} - L_t$  condizionata da  $Z_t$ , rispetto alla misura  $Q$ .

La ragione per cui si vorrebbe trascurare tale termine è data dalla difficoltà di calcolo della suddetta distribuzione.

Per cercare di trovare un'approssimazione per  $(AE)$  faremo riferimento, in particolare, alle approssimazioni che gli attuari utilizzano per  $L_{T_2} - L_t$ , cioè la Gamma Traslata e l'approssimazione di Edgeworth.

L'idea della Gamma Traslata è quella di approssimare la distribuzione con  $k + Z$  dove  $k$  è una costante e  $Z$  è una Gamma del tipo  $\Gamma(g, h)$ , tale che i primi tre momenti di  $L_{T_2} - L_t$  coincidano con quelli di  $k + Z$ .

Indicati con  $\mu_L$ ,  $\sigma_L^2$ , e  $s_L$  rispettivamente la media, la varianza ed il coefficiente di asimmetria di  $L_{T_2} - L_t$ , i parametri che si ottengono per la Gamma Traslata sono:

$$g = \frac{4}{s_L^2}, \quad h = \frac{2}{s_L \sigma_L}, \quad k = \mu_L - \frac{2\sigma_L}{s_L}.$$

L'errore di approssimazione è, a sua volta, approssimato da:

$$\begin{aligned} AP(G) &= c \left( \int_{2\pi-L_t}^{\infty} \int_{x-k}^{\infty} \frac{h^g}{\Gamma(g)} y^{g-1} e^{-hy} dy dx \right) = \\ &= c \left( \frac{h^g}{\Gamma(g)} \left( \int_{(2\pi-L_t)-k}^{\infty} y^g e^{-hy} dy - (2\pi-L_t-k) \int_{(2\pi-L_t)-k}^{\infty} y^{g-1} e^{-hy} dy \right) \right). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda, invece, l'approssimazione di Edgeworth, viene considerata la variabile standardizzata  $Z$  e poi viene approssimata la sua distribuzione. Dunque:

$$Z = \frac{L_{T_2} - L_t - E_Q[L_{T_2} - L_t]}{\sqrt{VAR_Q[L_{T_2} - L_t]}}.$$

L'espansione di Taylor del logaritmo di  $M_Z(r)$  intorno a  $r = 0$  è:

$$\log M_Z(r) = a_0 + a_1 r + a_2 \frac{1}{2} r^2 + a_3 \frac{1}{6} r^3 + a_4 \frac{1}{24} r^4 + \dots,$$

dove

$$a_k = \frac{d^k \log M_Z(r)}{d_r^k} \Big|_{r=0}.$$

Si può provare che  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = E[Z] = 0$ ,  $a_2 = Var[Z] = 1$ ,  $a_3 = s_L$ , e

$$a_4 = (E[(L_{T_2} - L_t - E[L_{T_2} - L_t])^4] / Var[L_{T_2} - L_t]^2) - 3.$$

La funzione generatrice dei momenti di  $Z$  è data da:

$$\begin{aligned} M_Z(r) &\approx \exp\left\{\frac{1}{2}r^2\right\} \exp\left\{\frac{1}{6}a_3r^3 + \frac{1}{24}a_4r^4\right\} \approx \\ &\approx \exp\left\{\frac{1}{2}r^2\right\} \left(1 + a_3\frac{1}{6}r^3 + a_4\frac{1}{24}r^4 + a_3^2\frac{1}{72}r^6\right). \end{aligned}$$

L'inversa di  $\exp\left\{\frac{1}{2}r^2\right\}$  è facilmente calcolabile a partire dalla distribuzione

Normale,  $\Phi(x)$ .

Per gli altri termini:

$$r^n e^{r^2/2} = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{rx})^{(n)} \Phi'(x) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx} \Phi^{(n+1)}(x) dx.$$

L'approssimazione risulta dunque:

$$P[L_{T_2} - L_t \leq x] = P[Z \leq z] \approx \Phi(z) - \frac{1}{6}a_3\Phi^{(3)}(z) + \frac{1}{24}a_4\Phi^{(4)}(z) + \frac{1}{72}a_3^2\Phi^{(6)}(z),$$

dove  $z = (x - E[L_{T_2} - L_t]) / (\text{Var}[L_{T_2} - L_t])^{1/2}$ ; mentre l'errore di approssimazione è dato da:

$$\begin{aligned} AP(E) &= c(\sqrt{\text{VAR}[L_{T_2} - L_t]}) \int_{z_0}^{\infty} \Phi(z) - \frac{1}{6}a_3\Phi^{(3)}(z) + \frac{1}{24}a_4\Phi^{(4)}(z) + \\ &\quad + \frac{1}{72}a_3^2\Phi^{(6)}(z) dz, \end{aligned}$$

con  $z_0 = ((2\pi - L_t) - E[L_{T_2} - L_t]) / \sqrt{\text{VAR}[L_{T_2} - L_t]}$ .

Per valutare se il risultato che otteniamo per il prezzo del future è attendibile o se sarebbe necessario aggiustarlo in altro modo, consideriamo un esempio.

### ESEMPIO 7.1

Il prezzo del CAT-future è calcolato, secondo la (7.1), come:

$$F_t^C = c \frac{E_p[\exp(\alpha L_\infty)(L_{T_2} \cap 2\pi) / Z_t]}{E_p[\exp(\alpha L_\infty) / Z_t]}.$$

Per tale calcolo supponiamo che:

- 1) l'ammontare dei risarcimenti abbia una distribuzione esponenziale di parametro  $\mu$ ;
- 2) i ritardi dichiarati siano anch'essi esponenziali di parametro  $\beta$ .

Il prezzo del CAT-future approssimato,  $F_t^U$ , è invece calcolato mediante il teorema 7.1 che considera il caso dei  $\lambda_i$  deterministici.

I parametri utilizzati verranno tenuti fissi, ad eccezione del premio  $\pi$  e del coefficiente di avversione al rischio  $\alpha$ , che vengono fatti variare proprio per vedere come le approssimazioni dipendono da tali valori a parità degli altri.

I parametri usati sono:

$$T_1 = 1, \quad T_2 = 2, \quad t = 0.5, \quad \Delta = 6, \quad N_t = 3, \quad \mu = 0.0005, \quad \tau_1 = 0.1, \\ \tau_2 = 0.25, \quad \tau_3 = 0.4, \quad M_1(t) = 698, \quad M_2(t) = 528, \quad M_3(t) = 259, \quad \beta = 3, \\ \lambda = 1000, \quad L_t = E[L_t] = 2.97 \times 10^6, \quad \pi = (1 + \theta)12 \times 10^6.$$

$\pi$  è stato calcolato col principio del valore atteso, ponendo il caricamento di sicurezza uguale a  $\theta$  e supponendo che ogni sinistro sia immediatamente dichiarato. I parametri sono stati scelti in modo che  $L_{T_2}$  non superasse il valore di  $2\pi$  in seguito alle perdite. Per  $\theta = 0.05$ ,  $P(L_{T_2} / \pi > 1.79) \approx 0.01$ , dove 1.79 rappresenta uno dei più alti valori raggiunto dal rapporto delle perdite. La seguente tabella mostra, per diversi valori di  $\alpha$  e  $\theta$ ,  $F_t^C$  e  $F_t^U$ , l'errore di approssimazione,  $AE = F_t^U - F_t^C$ , l'errore di approssimazione se si corregge  $F_t^U$  con una Gamma Traslata,  $AE(G) = (F_t^U - AP(G)) - F_t^C$ , e l'errore di approssimazione se si corregge  $F_t^U$  con l'approssimazione di Edgeworth,  $AE(E) = (F_t^U - AP(E)) - F_t^C$ .

$\alpha$	$\theta$	$F_t^C$	$F_t^U$	AE	AE(G)	AE(E)
$1 \times 10^{-8}$	0.05	23666.8	23668.3	1.5	-1.9	0.5
$1 \times 10^{-8}$	0.10	22590.8	22592.5	1.7	0.2	1.4
$1 \times 10^{-8}$	0.15	21608.8	21610.2	1.4	0.7	1.3
$1 \times 10^{-7}$	0.05	25999.3	26009.7	10.4	-2.1	6.2
$1 \times 10^{-7}$	0.10	24822.5	24827.5	5.0	-1.0	3.2
$1 \times 10^{-7}$	0.15	23743.7	23748.0	4.3	1.5	3.6
$2 \times 10^{-7}$	0.05	29106.7	29158.8	52.1	0.7	32.0
$2 \times 10^{-7}$	0.10	27808.1	27833.4	25.3	-1.7	16.7
$2 \times 10^{-7}$	0.15	26605.0	26623.2	18.2	-4.3	14.3
$3 \times 10^{-7}$	0.05	32817.4	33008.2	190.8	-6.0	62.4
$3 \times 10^{-7}$	0.10	31402.1	31507.9	105.8	-7.4	47.2
$3 \times 10^{-7}$	0.15	30052.8	30138.0	85.2	21.4	60.0

Tabella 1: L'errore di approssimazione.

Come possiamo osservare, il prezzo approssimato sembra rispecchiare il vero prezzo, soprattutto per valori piccoli del coefficiente di avversione al rischio  $\alpha$  e per valori alti del caricamento di sicurezza  $\theta$ . Ma quanto sono ragionevoli i parametri scelti?  $\theta$  è sempre positivo e nel caso delle assicurazioni sulle catastrofi sarà anche più alto del valore usuale, in modo che l'evento  $\{L_{T_2} > 2\pi\}$  non si verifichi mai. Il parametro  $\alpha$ , invece, dipende dagli assicuratori e nel caso in cui le perdite, in seguito a catastrofi, possano essere molto elevate, tende ad essere piuttosto basso. Notiamo inoltre che l'errore di approssimazione, (AE), decresce al crescere del caricamento di sicurezza  $\theta$  e che entrambe le approssimazioni usate danno buoni risultati. D'altra parte sembra che l'approssimazione di Edgeworth sottostimi l'(AE), ma può trattarsi di un caso particolare e non di un risultato generale. Basandosi su questo esempio, però, l'approssimazione Gamma risulta migliore per quasi tutti i valori tranne che per  $\alpha = 1 \times 10^{-8}$ , e  $\theta = 0.05$ .

Per concludere, il prezzo approssimato rispecchia abbastanza bene il prezzo reale, ma, volendo fornire una stima più accurata, dobbiamo correggere il valore ottenuto con una delle due approssimazioni, la migliore delle quali risulta, nell'esempio proposto, la Gamma.



## 7.2 Valutazione delle opzioni PCS

Descriviamo ora un metodo per calcolare il prezzo delle opzioni PCS seguendo l'approccio proposto da Christensen [18].

In tale approccio si cerca di tenere conto di due problemi importanti. Il primo riguarda il fatto che, adottando un modello realistico per il processo delle perdite, il mercato risulta spesso incompleto ed esistono possibilità di arbitraggio. Il secondo è la difficoltà di calcolo incontrata qualora vengano adottate distribuzioni heavy-tail, anche se tale classe di distribuzioni rispecchia in modo migliore la realtà. Per affrontare queste problematiche, Christensen utilizza la trasformata di Esscher, che si rivela efficace nell'ipotesi che il logaritmo del processo che individua il valore delle coperture finanziarie sia ad incrementi indipendenti e stazionari.

### 7.2.1 Il modello

Il modello più naturale da adottare per l'indice delle perdite sarebbe un processo degli arrivi con una distribuzione dei risarcimenti di tipo heavy-tail. Poiché ciò comporta delle difficoltà di calcolo, si cerca di giungere, attraverso opportune ipotesi, a formule più trattabili, per quanto meno realistiche.

Il modello che segue è suggerito da Gerber e Shiu, i quali hanno dimostrato come sia univocamente possibile individuare una misura neutrale al rischio qualora il logaritmo del valore delle coperture finanziarie sia un processo ad incrementi e stazionari, detto processo di Levy.

Sia  $L_t$  l'indice delle perdite delle opzioni PCS,  $[0, T_1]$  il periodo delle perdite e  $[T_1, T_2]$  il periodo di sviluppo, già definiti. Supponiamo che per  $t \in [0, T_2]$ ,  $L_t$  sia definito da:

$$L_t = L^0 \exp(X_t),$$

dove  $X_t$  è un processo di Levy sia per il periodo delle perdite che per quello di sviluppo e  $L^0 \in \mathfrak{R}^+$ . Per  $X_t$  vengono adottati due modelli diversi nei due

periodi citati. Per  $t \in [0, T_1]$  assumiamo che  $X_t$  sia un processo Poisson-Composto del tipo:

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

dove  $N_t$  è un processo di Poisson di parametro  $\lambda_1$  dato e  $Y_i$  ha una distribuzione esponenziale di parametro  $\alpha$ . In questo modo è soddisfatta un'altra proprietà: cioè  $L_t$  ha una distribuzione heavy-tail.

È necessario ricordare che, con tali ipotesi, il modello fornisce soltanto una prima approssimazione della realtà. Per quanto riguarda il periodo di sviluppo, poiché le stime possono variare sia verso l'alto che verso il basso, si suppone che  $X_t$  sia un processo Poisson-Composto del tipo:

$$X_t = X_{T_1} + \sum_{i=1}^{\tilde{N}_{t-T_1}} \tilde{Y}_i,$$

dove  $\tilde{N}_t$  è un processo di Poisson di parametro  $\lambda_2$  dato e  $\tilde{Y}_i$  ha una distribuzione  $N(\mu, \sigma)$ .

Supponiamo, infine, che  $X_t$ , con  $t \in [0, T_1]$ , sia indipendente da  $X_t - X_{T_1}$  con  $t \in [T_1, T_2]$ , per quanto questo non rispecchi la realtà.

Il valore di un'opzione call PCS, al momento della scadenza  $T_2$ , con prezzo di esercizio  $A$  e valore limite  $K$ , è dunque:

$$C(T_2, L_{T_2}) = \min(\max(L_{T_2} - A, 0), K - A).$$

Supponiamo che  $Z_t$  sia l'informazione disponibile all'istante  $t$  e che  $Z_t$  sia tale che l'indice delle perdite,  $L_t$ , sia  $Z_t$  misurabile.

Il valore dell'opzione all'istante  $t$  diviene perciò:

$$C(t, L_t) = \exp(-r(T_2 - t))E^*[C(T_2, L_{T_2})/Z_t],$$

dove  $r$  è il tasso di rischio e  $E^*$  è il valore atteso calcolato rispetto ad una misura neutrale al rischio. Prima di procedere occorre, dunque, individuare una misura neutrale al rischio.

### 7.2.3 Calcolo di una misura neutrale al rischio

Per semplificare i calcoli facciamo riferimento al solo periodo delle perdite.

I risultati ottenuti verranno poi estesi al periodo di sviluppo.

La funzione generatrice dei momenti,  $M(z, t)$ , è definita da:

$$M(z, t) := E[\exp(zX_t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(zx)F(dx, t),$$

se l'integrale è finito, dove  $F$  è la distribuzione di  $X_t$ .

Poiché  $X_t$  è un processo ad incrementi indipendenti e stazionari,

$$M(z, t) = (M(z, 1))^t.$$

Per ogni  $h \in \mathfrak{R}$ , la trasformata di Esscher,  $F(dx, t; h)$ , è data da:

$$F(dx, t; h) = \frac{\exp(hx)F(dx, t)}{M(h, t)}.$$

Definiamo la funzione generatrice dei momenti della trasformata di Esscher come:

$$M(z, t; h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(zx)F(dx, t; h) = \frac{M(z + h, t)}{M(h, t)}. \quad (7.2)$$

Vale, di nuovo,

$$M(z, t; h) = (M(z, 1; h))^t.$$

L'idea di Gerber e Shiu è di scegliere  $h = h^*$  in modo tale che il processo  $\{e^{-rt}L_t\}$  sia una martingala adottando la stessa misura della trasformata di Esscher. Tuttavia questo non è sufficiente per individuare una misura neutrale al rischio. Occorre introdurre un nuovo processo  $P_t$ , che denota i premi pagati fino all'istante  $t$  per ricevere  $L_t$  in  $t$ .

Supponiamo che l'indice  $\{L_t/P_t\}$  sia un'attività commerciabile. Adottando l'idea di Gerber e Shiu di scegliere  $h = h^*$  in modo tale che il processo  $\{e^{-rt}L_t/P_t\}$  sia una martingala secondo la misura della trasformata di Esscher, rimane da individuare un modello per  $P_t$ .

Separiamo di nuovo il periodo delle perdite da quello di sviluppo. Nel primo caso, aggiustando i parametri precedentemente adottati per  $X_t$  in modo che non ci siano possibilità di arbitraggio, avremo che  $\tilde{X}_t$ , il nuovo processo aggiustato, è Poisson-Composto con parametro della Poisson  $\tilde{\lambda}_1$  e parametro della distribuzione esponenziale dei risarcimenti uguale a  $\tilde{\alpha}$ .

Pertanto il premio risulta:

$$P_t = E_p[\tilde{L}_t] = E_p[L^0 \exp(\tilde{X}_t)] = L^0 \exp\left(\frac{\tilde{\lambda}_1 t}{(\tilde{\alpha} - 1)}\right).$$

Per tale motivo il modello adottato per  $P_t$  nel periodo delle perdite è:

$$P_t = L^0 \exp(\beta_1 t).$$

È possibile adesso calcolare  $h_t^*$  e, di conseguenza, la misura neutrale al rischio. Scegliamo  $h_t^*$  in modo che il processo  $\{e^{-rt} L_t / P_t\}$  sia una martingala rispetto alla misura della trasformata di Esscher:

$$E^*[\exp(-rt)L_t / P_t] = 1.$$

Svolgendo tale espressione si ricava che la condizione su  $h_t^*$ , nel periodo delle perdite, è:

$$\exp(r + \beta_1) = M(1, 1; h_t^*). \quad (7.3)$$

In modo analogo, nel periodo di sviluppo,  $X_t$  è un processo aggiustato  $\tilde{X}_t$ .

I parametri coinvolti sono  $\tilde{\lambda}_2$ ,  $\tilde{\mu}$  e  $\tilde{\sigma}$  ed il premio è:

$$\begin{aligned} P_t &= E_p[L^0 \exp(\tilde{X}_t)] = E_p[L^0 \exp(\tilde{X}_{T_1}) \exp(\tilde{X}_t - \tilde{X}_{T_1})] = \\ &= L^0 \exp(\beta_1 T_1) \exp(\tilde{\lambda}_2 (t - T_1) (e^{\frac{\tilde{\sigma}^2}{2} + \tilde{\mu}} - 1)) = \\ &= L^0 \exp(\beta_1 T_1) \exp(\beta_2 (t - T_1)). \end{aligned}$$

Ancora una volta la condizione che consente di ricavare  $h_d^*$  è:

$$E^*[\exp(-rt)L_t / P_t] = 1.$$

Svolgendo i calcoli otteniamo

$$\exp(r + \beta_2) = M(1,1; h_d^*). \quad (7.4)$$

La derivata di Radon-Nikodym per la misura neutrale al rischio di Esscher sulla  $\sigma$ -algebra  $Z_t$ , diviene:

$$\frac{dQ}{dP} / Z_t = \begin{cases} \frac{e^{h_l^* X_t}}{M_l(h_l^*, t)} & t \in [0, T_1], \\ \frac{e^{h_l^* X_{T_1}} e^{h_d^* (X_t - X_{T_1})}}{M_l(h_l^*, T_1) M_d(h_d^*, t - T_1)} & t \in [T_1, T_2], \end{cases}$$

dove i pedici "l" e "d" rappresentano, rispettivamente, il periodo di perdita e quello di sviluppo.

Abbiamo, così, individuato una misura neutrale al rischio  $Q$  sotto l'ipotesi che  $\{L_t / P_t\}$  sia un indice commerciabile, anche se tale supposizione non è indispensabile. Importante, infatti, è che la misura  $Q$  valuti il rischio nello stesso modo in cui lo fa  $P_t$ . La scelta di una misura neutrale al rischio di Esscher può, infine, essere spiegata col fatto che gli investitori cercano di massimizzare la propria utilità attesa.

#### 7.2.4 La misura neutrale al rischio di Esscher per il periodo delle perdite

Poiché abbiamo adottato un processo Poisson-Composto del tipo

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

dove  $N_t \sim Poisson(\lambda_1 t)$  e  $Y_i \sim Exp(\alpha)$ , la funzione generatrice dei momenti di  $X_t$  è:

$$M(z, t) = E \left[ \exp \left( z \left( \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \right) \right) \right] = \exp \left( \lambda_1 t \left( \frac{\alpha}{\alpha - z} - 1 \right) \right), \quad (7.5)$$

mentre la funzione generatrice dei momenti della trasformata di Esscher, in base alla (7.2), è:

$$\begin{aligned} M(z, t; h) &= \exp\left(\lambda_1 t \left( \frac{\alpha}{\alpha - (z+h)} - \frac{\alpha}{\alpha - h} \right)\right) = \\ &= \exp\left(\lambda_1 \frac{\alpha}{\alpha - h} t \left( \frac{(\alpha - h)}{(\alpha - h) - z} - 1 \right)\right). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Da (7.5) e (7.6) segue che il processo trasformato rimane dello stesso tipo di quello originale se  $h < \alpha$ .

Perciò, se  $\tilde{X}_t$  individua il nuovo processo definito dalla trasformata di Esscher, allora:

$$\tilde{X}_t = \sum_{i=1}^{\tilde{N}_t} \tilde{Y}_i,$$

dove  $\tilde{N}_t \sim \text{Poisson}\left(\lambda_1 \frac{\alpha}{\alpha - h} t\right)$  e  $\tilde{Y}_i \sim \text{Exp}(\alpha - h)$ .

Risolvendo l'equazione:

$$M(1, 1; h_t^*) = \exp(r + \beta_1),$$

è possibile calcolare il valore  $h_t^*$  che determina la misura neutrale al rischio di Esscher. Otteniamo un'equazione di secondo grado, una sola delle cui soluzioni soddisfa la condizione  $h_t^* < \alpha$ .

Calcoliamo infine:

$$\begin{aligned} P^*(X_t \leq x) &= P(\tilde{X}_t \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N_t = n) P\left(\sum_{i=0}^n \tilde{Y}_i \leq x\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N_t = n) \int_0^x (\alpha - h_t^*)^n \Gamma(n)^{-1} z^{n-1} e^{-(\alpha - h_t^*)z} dz = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda_1^* t} \frac{(\lambda_1^* t)^n}{n!} \Gamma^*(n, \alpha, x), \end{aligned} \quad (7.7)$$

dove  $\lambda_1^* = \lambda_1 \frac{\alpha}{\alpha - h_t^*}$ ; e  $\Gamma^*(n, \alpha, x) = \int_0^x (\alpha - h_t^*)^n \Gamma(n)^{-1} z^{n-1} e^{-(\alpha - h_t^*)z} dz$ .

### 7.2.5 La misura neutrale al rischio di Esscher per il periodo di sviluppo

Nel periodo di sviluppo abbiamo a che fare con un processo Poisson-Composto in cui i risarcimenti hanno una distribuzione Normale:

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

dove  $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda_2 t)$  e  $Y_i \sim N(\mu, \sigma)$ .

La funzione generatrice dei momenti di  $X_t$  è:

$$M(z, t) = E \left[ \exp \left( z \left( \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \right) \right) \right] = \exp \left( \lambda_2 t \left( e^{\frac{\sigma^2}{2} z^2 / \mu} - 1 \right) \right),$$

mentre la funzione generatrice dei momenti della trasformata di Esscher è:

$$\begin{aligned} M(z, t; h) &= \exp \left( \lambda_2 t \left( e^{\frac{\sigma^2}{2} (z+h)^2 + \mu(z+h)} - e^{\frac{\sigma^2}{2} h^2 + \mu h} \right) \right) = \\ &= \exp \left( \lambda_2 t e^{\frac{\sigma^2}{2} h^2 + \mu h} \left( e^{\frac{\sigma^2}{2} z^2 + (\mu + \sigma^2 h) z} - 1 \right) \right). \end{aligned}$$

Ancora una volta, il nuovo processo definito dalla trasformata di Esscher è dello stesso tipo dell'originale. Indicato con  $\tilde{X}_t$  il processo definito dalla trasformata di Esscher, si ha:

$$\tilde{X}_t = \sum_{i=1}^{\tilde{N}_t} \tilde{Y}_i,$$

dove  $\tilde{N}_t \sim \text{Poisson} \left( \lambda_2 e^{\frac{\sigma^2}{2} h^2 + \mu h} t \right)$  e  $\tilde{Y}_i \sim N(\sigma^2 h + \mu, \sigma^2)$ .

Siamo adesso in grado di calcolare il parametro  $h_d^*$  che determina la misura neutrale al rischio di Esscher.

Dobbiamo risolvere l'equazione:

$$M(1,1;h_d^*) = \exp(r + \beta_2),$$

la cui soluzione è calcolabile numericamente.

Concludiamo di nuovo col seguente calcolo:

$$\begin{aligned} P^*(X_t \leq x) &= P(\tilde{X}_t \leq x) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\lambda_2 t e^{\frac{\sigma^2}{2} h_d^{*2} + \mu h_d^*}\right) \frac{\left(\lambda_2 t e^{\frac{\sigma^2}{2} h_d^{*2} + \mu h_d^*}\right)^n}{n!} P\left(\sum_{i=1}^n \tilde{Y}_i \leq x\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\lambda_2 t e^{\frac{\sigma^2}{2} h_d^{*2} + \mu h_d^*}\right) \frac{\left(\lambda_2 t e^{\frac{\sigma^2}{2} h_d^{*2} + \mu h_d^*}\right)^n}{n!} \Phi\left(\frac{x - n(\sigma^2 h_d^* + \mu)}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda_2^* t) \frac{(\lambda_2^* t)^n}{n!} \Phi\left(\frac{x - n\mu^*}{\sqrt{n\sigma^2}}\right), \quad (7.8) \end{aligned}$$

dove  $\lambda_2^* = \lambda_2 t e^{\frac{\sigma^2}{2} h_d^{*2} + \mu h_d^*}$ ; e  $\mu^* = \sigma^2 h_d^* + \mu$ .

### 7.2.6 Prezzo dell'opzione PCS

Abbiamo ora a disposizione tutti gli strumenti necessari al calcolo del prezzo dell'opzione PCS. Supponiamo di considerare un'opzione call con prezzo di esercizio  $A$ , valore limite  $K$  e data di scadenza  $T_2$ .

Poniamo:

$$v_1(t) = \log(A/(L^0 \exp X_t)) \quad \text{e} \quad v_2(t) = \log(K/(L^0 \exp X_t)).$$

Ricordiamo che il valore dell'opzione alla data  $t$  è:

$$C(t, L_t) = E^*[\exp(-r(T_2 - t)) \min(\max(L_{T_2} - A, 0), K - A) / Z_t].$$

Utilizzando, dunque, i risultati ottenuti nei paragrafi precedenti e le ipotesi fatte su  $L_t$  e  $X_t$  sia nel caso del periodo delle perdite che in quello di



sviluppo, è possibile dimostrare che il prezzo di un'opzione PCS call, per  $t \in [0, T_1]$  è:

$$\begin{aligned}
 C(t, L_t) &= e^{-r(T_1-t)} e^{\beta_2(T_2-T_1)} L^0 \exp(X_t) \\
 &\int_{-\infty}^{\infty} \exp(x) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda_2^{*+1}(T_2-T_1)) \frac{(\lambda_2^{*+1}(T_2-T_1))^n}{n!} \\
 &\left( \Phi \left( \frac{v_2(t) - x - n(\sigma^2(h_d^* + 1) + \mu)}{\sqrt{n\sigma^2}} \right) \right. \\
 &\left. - \Phi \left( \frac{v_1(t) - x - n(\sigma^2(h_d^* + 1) + \mu)}{\sqrt{n\sigma^2}} \right) \right) \tilde{F}(dx, (T_1-t), h_t^*) \\
 &+ e^{-r(T_2-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda_2^*(T_2-T_1)) \frac{(\lambda_2^*(T_2-T_1))^n}{n!} \\
 &\left( K \left( 1 - \Phi \left( \frac{v_2(t) - x - n\mu^*}{\sqrt{n\sigma^2}} \right) \right) \right. \\
 &\left. - A \left( 1 - \Phi \left( \frac{v_1(t) - x - n\mu^*}{\sqrt{n\sigma^2}} \right) \right) \right) \tilde{F}(dx, (T_1-t), h_t^*), \tag{7.9}
 \end{aligned}$$

mentre per  $t \in [T_1, T_2]$

$$\begin{aligned}
 C(t, L_t) &= e^{\beta_2(T_2-t)} L_t \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda_2^{*+1}(T_2-t)) \frac{(\lambda_2^{*+1}(T_2-t))^n}{n!} \\
 &\left( \Phi \left( \frac{v_2(t) - n\mu^{*+1}}{\sqrt{n\sigma^2}} \right) - \Phi \left( \frac{v_1(t) - n\mu^{*+1}}{\sqrt{n\sigma^2}} \right) \right) \\
 &+ e^{-r(T_2-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda_2^*(T_2-t)) \frac{(\lambda_2^*(T_2-t))^n}{n!} \\
 &\left( K \left( 1 - \Phi \left( \frac{v_2(t) - n\mu^*}{\sqrt{n\sigma^2}} \right) \right) - A \left( 1 - \Phi \left( \frac{v_1(t) - n\mu^*}{\sqrt{n\sigma^2}} \right) \right) \right). \tag{7.10}
 \end{aligned}$$

## 7.3 Valutazione di contratti futures mediante l'utilizzo di opzioni Asiatiche

Il procedimento utilizzato è giustificabile in base alla struttura simile che hanno i CAT-futures e le opzioni Asiatiche. Il prezzo di tali futures, infatti, si basa su un indice che dipende dai risarcimenti complessivi che si sono verificati in un periodo fissato. Ciò avviene anche per le opzioni Asiatiche, che fanno riferimento ad una certa media di più valori. Pertanto, per i due tipi di contratti, si incontrano le stesse difficoltà. Spesso per le opzioni Asiatiche viene fornito un valore approssimato, ma Geman e Yor hanno cercato di trovare una soluzione esatta. Innanzitutto hanno calcolato i momenti di qualsiasi ordine di una media aritmetica di una distribuzione Log-Normale. In seguito hanno ricavato un'espressione per il prezzo dell'opzione Asiatica per alcuni valori del prezzo di esercizio, mentre, per altri valori, hanno utilizzato la trasformazione di Laplace. L'articolo a cui facciamo riferimento si basa proprio su questo approccio [23]. Le perdite seguono un processo di moto browniano con valore definitivo pari al valore finale assunto nel periodo considerato, anche se, nella realtà, ci basiamo su tutte le perdite avute e non solo sul loro valore finale.

### 7.3.1 Il modello

In genere gli attuari ipotizzano che il risarcimento cumulato,  $C$ , sia esprimibile come somma di variabili aleatorie del tipo

$$C = \sum_{i=1}^n X_i,$$

dove  $n$  è il numero di sinistri verificatisi e  $X_i$  è il risarcimento relativo all' $i$ -esimo sinistro.  $N$ , a sua volta, è una variabile aleatoria con una distribuzione discreta, ad esempio una Poisson od una Binomiale Negativa.

I risarcimenti sono, invece, individuati da una distribuzione continua, ad esempio una Gamma, e sono ipotizzati i.i.d ed indipendenti da  $N$ .

La distribuzione di probabilità di  $C$  è dunque:

$$f_C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p(k) f_X^{k*}(x),$$

dove  $p(k)$  è una distribuzione di probabilità discreta e  $f_X^{k*}$  è la convoluzione  $k$ -esima della distribuzione dei risarcimenti.

L'adozione di un modello di questo tipo, tuttavia, comporta il rischio di determinare prezzi per i contratti futures che permettano la possibilità di arbitraggi. Per evitare tale inconveniente si ipotizza che i risarcimenti istantanei siano descritti da un moto browniano.

Utilizzando l'approccio di Geman e Yor, vedremo prima come calcolare il valore di contratti futures per assicurazioni non soggette a rischi catastrofici, e successivamente considereremo il caso catastrofico.

### 7.3.2 Ipotesi generali

Le ipotesi comuni ai casi catastrofici e non sono:

- 1) Il valore dei premi delle compagnie appartenenti al pool è noto con certezza. L'aleatorietà è solo nelle perdite.
- 2) Non può prodursi una situazione di moral-hazard.
- 3) Non vi sono costi né quando un assicuratore adotta una posizione lunga né quando ne adotta una corta nei confronti di un contratto future.
- 4) I contratti futures sono infinitamente divisibili ed ogni frazione può essere comprata o venduta.
- 5) Non esiste il rischio di inadempienza.
- 6) Le compagnie che fanno parte del pool riferiscono le loro perdite in modo continuo e tutti coloro che operano sul mercato dispongono delle stesse informazioni alle stesse date.
- 7) Non vi è possibilità di arbitraggio ed il mercato è completo.

### 7.3.3 Contratti futures basati su perdite dovuti a rischi non catastrofici

Per trattare questo caso formuliamo, oltre alle precedenti, la seguente ipotesi:

- 8) L'ammontare dei risarcimenti,  $S(t)$ , ad ogni istante  $t$ , relativo alle polizze delle compagnie appartenenti al pool è esprimibile come:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t),$$

dove  $S(0)$  è noto,  $W(t)$  è un moto browniano rispetto alla misura di probabilità  $P$  e  $\mu$  e  $\sigma$  sono costanti che rappresentano, rispettivamente, il valore atteso e la deviazione standard del processo dei risarcimenti.

Adottando la misura  $Q$  tale processo diviene:

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)d\tilde{W}(t), \quad (7.11)$$

dove  $\tilde{W}(t)$  è un moto browniano rispetto a  $Q$  e  $\alpha$  è una costante.

Per determinare il valore dei contratti futures con tali ipotesi non è possibile usare le formule relative ad opzioni classiche. Infatti:

- A) Il valore definitivo è una media di un processo browniano, anziché un valore determinato ad una certa scadenza.
- B) Non vi è alcun esborso per potere adottare una qualche posizione nei confronti del contratto future.

Il prezzo di un contratto future così definito, invece, è uguale al valore atteso del prezzo finale rispetto alla misura neutrale di rischio,  $Q$ .

Pertanto, ad ogni data  $t \in [0, T]$ , il prezzo di mercato del future è:

$$F(t) = E_Q[F(T)/Z_t] = \frac{25000}{\pi} \{E_Q[L(T)/Z_t] - E_Q[\max(L(T) - 2\pi, 0)/Z_t]\}. \quad (7.12)$$

Valutiamo le due quantità coinvolte in tale formula sulla base delle ipotesi fatte.

Posto

$$V(t)E_Q[L(T)/Z_t] \quad \text{e} \quad Y(t) = E_Q[\max(L(T) - 2\pi, 0)/Z_t],$$

osserviamo che:

$$L(T) = \int_0^T S(s)ds = TA(T),$$

dove  $A(t) = \frac{1}{t} \int_0^t S(s)ds$ . (7.13)

$A(t)$  è la stessa quantità utilizzata alla data  $T$  in un'opzione Asiatica per essere paragonata ad un altro valore al fine di determinare il pagamento dell'opzione.

Inoltre,  $V(t) = TE_Q[A(T)/Z_t]$  può essere interpretato come il valore di un'opzione Asiatica con scadenza  $T$  e prezzo di esercizio  $0$ .

Ricordiamo che le opzioni Asiatiche sono state utilizzate soprattutto nel caso di beni poco trattati come l'oro. I loro pagamenti derivano dal confronto del valore finale del bene con una media dei valori che lo stesso bene ha assunto in un determinato intervallo di tempo. Determinare il prezzo di tale prodotto non è semplice e spesso vengono utilizzate delle approssimazioni, sebbene non si sappia quanto queste siano valide. Adottiamo le stesse ipotesi formulate per i contratti futures, cioè consideriamo una quantità,  $S(t)$ , che si evolve secondo la (7.11) ed il cui valore medio è calcolato secondo la (7.13). Ipotizzando un tasso di interesse costante nell'intervallo  $[0, T]$ , Geman e Yor hanno stabilito che, alla data  $t$ , il prezzo di un'opzione Asiatica con scadenza  $T$  e prezzo di esercizio  $K$  è dato da:

$$C_{t,T}(K) = E_Q[e^{-r(T-t)} \max(A(T) - K, 0) / Z_t].$$

Tale espressione può essere riscritta come:

$$C_{t,T}(K) = \frac{e^{-r(T-t)}}{T} \frac{4S(t)}{\sigma^2} C^{(v)}(h, q), \quad (7.14)$$

dove  $v = \frac{2\alpha}{\sigma^2} - 1$ ,  $h = \frac{\sigma^2}{4}(T-t)$ ,  $q = \frac{\sigma^2}{4} \left[ \frac{KT - \int_0^t S(s)ds}{S(t)} \right]$  e  $\alpha$  è una

costante.

Inoltre, con l'ipotesi che il tasso di interesse sia costante, questa formula diviene:

$$E_Q[\max(A(T) - K, 0) / Z_t] = \frac{4S(t)}{\sigma^2 T} C^{(v)}(h, q), \quad (7.15)$$

espressione che consente di ricavare il prezzo del contratto future.

La quantità  $C^{(v)}(h, q)$  ha una forma semplice qualora  $q$  sia negativo, poiché coinvolge solo il momento del primo ordine di  $A(T)$ .

In questo caso:

$$C^{(v)}(h, q) = \frac{1}{2(1+v)} [e^{2(1+v)h} - 1] - q. \quad (7.16)$$

Ricordando poi che  $V(t) = TE_Q[A(T) / Z_t] = TE_Q[\max(A(T), 0) / Z_t]$ , e cioè che  $V(t)$  rappresenta il prezzo di un'opzione Asiatica con valore di esercizio 0, ricaviamo da (7.14), (7.15), e (7.16) che:

$$V(t) = \int_0^t S(s) ds + \frac{2S(t)}{\sigma^2(v+1)} \left[ e^{\left(\frac{v+1}{2}\right)\sigma^2(T-t)} - 1 \right] =$$

$$\int_0^t S(s) ds + \frac{S(t)}{\alpha} [e^{-\alpha(T-t)} - 1]. \quad (7.17)$$

Tale formula mostra che i sinistri già avvenuti in  $[0, t]$  contribuiscono, in modo non aleatorio, al valore finale  $V(t)$ .

Qualora, invece,  $q$  sia positivo, non è possibile fornire un'espressione esplicita per  $C^{(v)}(h, q)$  e si ricorre alla sua trasformata di Laplace rispetto alla variabile  $h$ :

$$\int_0^\infty e^{-\lambda h} C^{(v)}(h, q) dh = \frac{\frac{1}{2q} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{\mu-v}{2}-2} (1-2qt)^{\frac{\mu+v}{2}+1} dt}{\lambda(\lambda-2-2v)\Gamma\left(\frac{\mu-v}{2}-1\right)},$$

dove  $\mu = \sqrt{2\lambda + v^2}$ .

Come per  $V(t)$  possiamo ricavare  $Y(t)$  usando l'espressione (7.15):

$$Y(t) = TE_Q[\max(A(T) - \frac{2\pi}{T}, 0) / Z_t] = \frac{4S(t)}{\sigma^2} C^{(v)}(h, q_1),$$

dove  $q_1 = \frac{\sigma^2}{4} \left[ \frac{2\pi - \int_0^t S(s) ds}{S(t)} \right]$ , e  $v$  e  $h$  sono quelli precedentemente introdotti.

In genere poi  $\int_0^t S(s) ds$  è più piccolo di  $2\pi$  il che implica che  $q_1$  è positivo e che  $C^{(v)}(h, q_1)$  deve essere espresso mediante la trasformazione di Laplace.

Nei casi in cui  $q_1$  è negativo,  $C^{(v)}(h, q_1)$  si ottiene dalla formula (7.16).

Il valore del contratto future ad ogni istante  $t$  risulta quindi noto. Basta inserire i valori ottenuti per  $V(t)$  e  $Y(t)$  nell'espressione (7.12):

$$F(t) = \frac{25000}{\pi} [V(t) - Y(t)].$$

### 7.3.4 Contratti futures basati su perdite dovute a rischi catastrofici

Per tale tipo di problema restano valide tutte le ipotesi precedenti, ad eccezione della 8, che viene modificata nella 8', per potere includere una componente di salto nel processo  $S(t)$ .

8') Ad ogni istante  $t$ ,  $S(t)$  è esprimibile come:

$$dS(t) = \alpha S(t-)dt + \sigma S(t-)dW(t) + kdN(t),$$

dove  $k$  è una costante positiva che indica la gravità del salto delle perdite in seguito ad una catastrofe e  $N(t)$  è un processo di Poisson di intensità  $\lambda$ .

Posto  $d\Gamma(t) = \alpha dt + \sigma W(t)$  e  $dH(t) = kdN(t)$ , si può dimostrare che l'equazione

$$dS(t) = S(t-)d\Gamma(t) + dH(t)$$

ammette come soluzione

$$S(t) = Z(t)e^{\left[ \left( \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right]}, \quad (7.18)$$

dove il processo  $Z(t)$  deve essere specificato.

Si può anche dimostrare che

$$dZ(t) = e^{\{-(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)\}} dH(t).$$

Pertanto

$$Z(t) = Z(0) + \int_0^t e^{-(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})u + \sigma W(u)} dH(u),$$

e, sostituendo nella (7.18),

$$S(t) = e^{[(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)]} [Z(0) + \int_0^t e^{-(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})u + \sigma W(u)} dH(u)].$$

Introduciamo un nuovo processo:

$$X(t) = \left( \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t).$$

Possiamo allora riscrivere  $S(t)$  come:

$$S(t) = [S(0) + \int_0^t e^{-X(u)} dH(u)] e^{X(t)}.$$

Consideriamo l'ammontare complessivo dei risarcimenti alla data  $t$ :

$$TA(T) = \int_0^T S(s) ds = \int_0^T S(0) e^{X(s)} ds + \int_0^T e^{X(s)} ds \int_0^s e^{-X(u)} dH(u),$$

dove  $u < s < T$ .

L'ultimo integrale può essere scritto come:

$$\int_0^T dH(u) \int_u^T e^{[X(s) - X(u)]} ds.$$

Per semplicità calcoleremo il valore atteso di  $TA(T)$  rispetto alla misura  $Q$  all'istante  $0$ . Tale valore atteso può essere espresso mediante la somma di due termini:

$$U_1 = E_Q[\int_0^T S(0) e^{X(s)} ds], \quad e \quad U_2 = E_Q[\int_0^T dH(u) \int_u^T e^{[X(s) - X(u)]} ds].$$

Ricordando che:

$$X(s) = \left( \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) s + \sigma W(s),$$



otteniamo

$$U_1 = S(0)[e^{\alpha T} - 1]/\alpha.$$

Per trovare il valore di  $U_2$ , invece, supponiamo che il processo di Poisson  $H$  sia indipendente da  $\exp[X(s) - X(u)]$ .

Perciò:

$$U_2 = k\lambda E\left[\int_0^T du \int_u^T e^{[X(s)-X(u)]} ds\right],$$

che equivale a

$$U_2 = k\lambda \int_0^T du \int_u^T e^{(s-u)\alpha} ds = \frac{k\lambda}{\alpha^2} [e^{\alpha T} - \alpha T - 1].$$

Dobbiamo calcolare:

$$TE[A(T)/Z_t].$$

Si ha

$$TE[A(T)/Z_t] = \int_0^t S(s) ds + E\left[\int_t^T S(s) ds / Z_t\right],$$

e

$$E\left[\int_t^T S(s) ds / Z_t\right] = E\left[\int_t^T e^{X(s)} ds \left\{1 + \int_0^s e^{-X(v)} dH(v)\right\} / Z_t\right],$$

dove  $t < s < T$  e  $0 < v < s$ .

Quest'ultimo valore atteso può essere considerato come la somma di tre termini:

$$U'_1 = e^{X(t)} \int_t^T e^{(s-t)\alpha} ds;$$

$$U'_2 = \int_0^t dH(v) e^{-X(v)} \left[ e^{X(t)} \int_t^T e^{(s-t)\alpha} ds \right];$$

$$U'_3 = E\left[\int_t^T e^{X(s)} ds \int_t^s e^{-X(v)} dv\right].$$

Per prima cosa osserviamo che:

$$U'_1 + U'_2 = \frac{e^{(T-t)\alpha} - 1}{\alpha} \left\{ e^{X(t)} \left[ 1 + \int_0^t e^{-X(v)} dH(v) \right] \right\},$$

dove il secondo fattore è esattamente  $S(t)$ , mentre  $U'_3$ , analogamente a quanto abbiamo già visto è dato da:

$$U'_3 = k\lambda \int_t^T dv \int_v^t E[e^{X(s)-X(v)}] ds = k\lambda \frac{e^{(T-t)\alpha} - (T-t)\alpha - 1}{\alpha^2}.$$

Abbiamo così ottenuto:

$$TE[A(T)/Z_t] = \int_0^t S(s) ds + S(t) \left[ \frac{e^{(T-t)\alpha} - 1}{\alpha} \right] + k\lambda \frac{e^{(T-t)\alpha} - (T-t)\alpha - 1}{\alpha^2}.$$

Come possiamo notare, la variabilità  $\sigma$  non compare esplicitamente in tale espressione, ma è implicita nei valori osservati dei risarcimenti ed in  $S(t)$ . Inoltre, in modo coerente con la realtà osservata, tale valore atteso cresce al crescere del primo membro, cioè all'aumentare dell'istante  $t$  a cui i risarcimenti si riferiscono. Cresce anche al crescere di  $S(t)$ , livello attuale dei risarcimenti, e di  $k$  e  $\lambda$ , rispettivamente la gravità e la frequenza della componente che rappresenta il salto delle perdite in seguito ad una catastrofe.

# CAPITOLO 8

## SPECIFICAZIONE DI CONTRATTI FINANZIARI AD USO ASSICURATIVO

Ci proponiamo di analizzare più dettagliatamente l'approccio proposto nel capitolo precedente per determinare il prezzo dei futures. In particolare cercheremo di considerare dei contratti specifici. In modo specifico, ci riferiamo ad un articolo di Aase [1].

### 8.1 Premesse

Per descrivere il modello utilizzato consideriamo, innanzitutto, un gruppo di  $I$  compagnie di riassicurazione. Ogni compagnia è caratterizzata da una funzione di utilità,  $U^{(i)}$ , e da un ammontare delle riserve alla data  $t$  esprimibile come:

$$X^{(i)}(t) = W_t^{(i)} + \int_0^t a^{(i)}(s) ds - Z^{(i)}(t),$$

dove  $W_t^{(i)}$  è il capitale alla data  $t$ ,  $a^{(i)}(t)$  è l'aliquota di premio e

$$Z^{(i)}(t) = \sum_{k=1}^{N^{(i)}(t)} Y_k^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, I.$$

$N^{(i)}(t)$  è il numero di sinistri avvenuti fino alla data  $t$  nel portafoglio dell'assicuratore  $i$  e  $Y_k^{(i)}$  è l'ammontare dei risarcimenti per il  $k$ -esimo sinistro.

Considerando tali variabili in modo aggregato si ottiene:

$$X(t) = W_t + \int_0^t a(s) ds - Z(t),$$

dove, in questo caso,  $W_t$  rappresenta il capitale complessivo nel mercato alla data  $t$  e  $\int_0^t a(s) ds$  è il premio incassato nell'intero mercato, sempre fino a  $t$ .

In genere, l'aliquota di premio,  $a_t$ , varia nel tempo; ma, per semplicità, considereremo il caso in cui tale aliquota sia costante ( $a(t) = a > 0$ ).

Il trimestre viene indicato con  $T$ , mentre i premi incassati per il trimestre successivo,  $\pi$ , sono considerati pagati prima dell'inizio del trimestre stesso. Poichè  $a(t)$  è una costante pari ad  $a$ , allora  $\pi = aT$ . Ipotizziamo, inoltre, che  $W_t$  sia indipendente da  $Z_t$  per ogni  $t$ . Il processo  $Z(t)$ , che individua tutti i sinistri riferiti all'ISO fino alla data  $t$  è:

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k,$$

dove  $N(t)$  è il numero di sinistri avvenuti fino alla data  $t$  e  $Y_k$  è l'ammontare dei risarcimenti per il  $k$ -esimo sinistro avvenuto alla data aleatoria  $\tau_k$ .

$Z(t)$  è dunque un processo Poisson-Composto con  $N(t)$  processo di Poisson di parametro  $\lambda$  e  $Y_1, Y_2, \dots$ , variabili aleatorie non negative, indipendenti tra loro e rispetto ad  $N$  e con distribuzione Gamma di parametri  $(n, \mu)$ , con  $n$  intero positivo e  $\mu$  reale positivo. Tutte queste variabili aleatorie sono definite su uno spazio di probabilità del tipo  $(\Omega, H, P)$ .

Il mercato ha, inoltre, un orizzonte di tempo finito  $\Sigma = [0, T]$ , ed il flusso delle informazioni è dato da  $\{H_t; t \in \Sigma\}$ .

Supponiamo infine che:

$$E\left(\int_0^T Y(t)^2 dt\right) < \infty,$$

e che le preferenze degli agenti siano rappresentate da una funzione di utilità di Von-Neumann-Morgenstern del tipo

$$U^i(X^{(i)}) = E\left(\int_0^T u_i(X^{(i)}(t), t) dt\right), \quad i = 1, 2, \dots, I,$$

dove  $u_i'(x, t) = e^{-\alpha_i x - \rho_i t}$ , con  $\alpha_i$  coefficiente di assoluta avversione al rischio e  $\rho_i$  tasso di impazienza dell'agente  $i$ .

Aggregando tali risultati ed estendendoli a tutti gli agenti:

$$U(X) = E\left(\int_0^T u(X(t), t) dt\right)$$

dove  $u'(x, t) = e^{-\alpha x - \rho t}$ ,  $\alpha$  è il coefficiente assoluto di avversione al rischio nel mercato e  $\rho$  è il tasso di impazienza soggettivo all'interno del mercato stesso. Il modello così costruito,  $X(t) = w + at - Z(t)$ , è esattamente quello di Lundberg-Cramer e racchiude in sé salti imprevedibili all'istante aleatorio in cui si verifica un sinistro.

## 8.2 Prezzo di equilibrio di mercato

Per una qualunque attività che assegna dividendi pari a  $D^i$ , il prezzo di equilibrio di mercato,  $S^i$ , all'istante  $t$  è del tipo:

$$S^i(t) = \frac{1}{u'(X_t, t)} E\left(\int_t^T (u'(X_{s-}, s-) dD^i(s) + d[D^i, u'](D)) / H_t\right) \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8.1)$$

dove  $u'(x, t) = e^{-\alpha x - \rho t}$ , e  $[D^i, u']$  è la covarianza tra  $D^i$  e  $u'$ .

Siano:

$$p_t = \exp\left(-\int_0^t r(u) du\right), \quad p_{t,s} = \exp\left(-\int_s^t r(u) du\right)$$

dove  $r$  è il tasso mondiale istantaneo di interesse fornito, per ipotesi, esogenamente.

Consideriamo un contratto a termine sull'indice  $\hat{Z} = \frac{Z(t)}{\pi}$ , dove  $\hat{Z}(t)$  è l'indice del rapporto delle perdite. In questo tipo di contratto il processo dei dividendi è esprimibile come:

$$D(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < s < T, \\ (\hat{Z}_t - \tilde{F}_t) & \text{se } s \geq T. \end{cases}$$

$\tilde{F}(t)$  rappresenta il processo dei prezzi futuri del future, esprimibile anche, facendo riferimento alla formula (8.1), come:

$$\tilde{F}_t = \frac{E_t[u'(X_T, T)\hat{Z}_T]}{E_t[u'(X_T, T)]} \quad \text{per } 0 \leq t \leq T,$$

dove  $E_t$  è il valore atteso condizionato da  $H_t$ .

Per quanto riguarda i contratti futures dove i dividendi sono uguali al prezzo stesso,  $F_t$ , è possibile dimostrare, sempre partendo dalla formula (8.1), che il processo dei prezzi è dato da:

$$F_t = \frac{E_t[u'(X_T, T)p_{t,T}^{-1}\hat{Z}_T]}{E_t[u'(X_T, T)p_{t,T}^{-1}]} \quad \text{per } 0 \leq t \leq T.$$

Sostituendo ad  $u'$  il valore adottato per la funzione di utilità nel paragrafo 8.1, possiamo riscrivere la formula che individua i prezzi per i contratti a termine come:

$$\tilde{F}_t = \frac{E_t[e^{-\alpha X_T}\hat{Z}_T]}{E_t[e^{-\alpha X_T}]} \quad \text{per } 0 \leq t \leq T. \quad (8.2)$$

Analogamente, per i prezzi dei contratti futures,

$$F_t = \frac{E_t[e^{-\alpha X_T}p_{t,T}^{-1}\hat{Z}(T)]}{E_t[e^{-\alpha X_T}p_{t,T}^{-1}]} \quad \text{per } 0 \leq t \leq T. \quad (8.3)$$

Sembra abbastanza ragionevole supporre che il tasso istantaneo di interesse sia indipendente, dato  $H_t$ , da  $W$  e  $Z$ . Ciò implica:

$$\tilde{F}(t) = F(t)$$

per ogni  $t \leq T$ , ipotesi che adotteremo in seguito.

### 8.3 Contratti futures per fare fronte ad eventi catastrofici

I risultati precedenti sono applicabili a contratti futures basati su indici assicurativi. Nel caso del CAT-future, ad esempio, il valore è esprimibile come:

$$\Phi(F_T) = 25000 \min(\hat{Z}_T, 2).$$

Vediamo come possono essere espresse le formule precedenti se consideriamo il modello adottato e le ipotesi che l'aliquota di premio, ( $a_t = a > 0$ ), sia costante e che il tasso istantaneo di interesse sia indipendente da  $W$  e  $Z$ .

La formula che determina il prezzo dei futures diviene:

$$F_t = \hat{Z}_t + \frac{n\mu^n \lambda(T-t)}{\pi(\mu-\alpha)^{n+1}} \quad \text{per } t \leq T \quad \text{e } 0 \leq \alpha < \mu. \quad (8.4)$$

Utilizzando le ipotesi, tale risultato si ricava sviluppando la parte destra delle formule (8.2) o (8.3), che abbiamo supposto coincidenti.

La (8.4), che dipende solo da parametri che possono essere stimati mediante dati di mercato, come  $n$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$  ed  $\alpha$ , può essere riscritta nella forma:

$$F_t = \hat{Z}_t + \frac{n\lambda(T-t)}{\pi\mu} \left( \frac{\mu}{\mu-\alpha} \right)^{n+1} = \hat{Z}_t + E[\hat{Z}_T - \hat{Z}_t / H_t] \left( \frac{\mu}{\mu-\alpha} \right)^{n+1},$$

dove l'ultima uguaglianza vale se  $E[\hat{Z}_T - \hat{Z}_t / H_t] = \lambda(T-t) \frac{n}{\pi\mu}$ .

Altre considerazioni possibili sono:

- $F_t$  dipende dalle preferenze del mercato mediante il parametro  $\alpha$ , coefficiente assoluto di avversione al rischio. Infatti, a parità degli altri valori, il processo del prezzo dei futures cresce al crescere di  $\alpha$ . Questo è intuibile, poiché una maggiore avversione al rischio comporta una più costosa riassicurazione ed un più alto livello dei premi richiesti.
- A parità degli altri valori,  $F_t$  cresce all'aumentare di  $(T-t)$ , della frequenza dei sinistri,  $\lambda$ , e del valore atteso dell'ammontare dei risarcimenti, espresso dal parametro  $n$ , poiché  $E[Y_i] = n/\mu$ .
- $F_t$  non dipende dal capitale complessivo del mercato. Ciò è conseguenza del fatto che, con l'ipotesi di una funzione di utilità esponenziale, il coefficiente assoluto di avversione al rischio non dipende dalla ricchezza posseduta. Naturalmente tale risultato non rispecchia la realtà.

## 8.4 Il premio

Nel modello proposto è implicito che sia il mercato e non gli attuari a determinare il prezzo dei futures e quindi anche il premio. Quest'ultimo è definito come la differenza tra il prezzo di mercato di un contratto ed i pagamenti attesi in base al contratto stesso. Perciò nel modello adottato è esprimibile come:

$$F_t - \{\hat{Z}_t + E[(\hat{Z}_T - \hat{Z}_t) / H_t]\} = \frac{n}{aT\mu} \lambda(T-t) \left\{ \left( \frac{\mu}{\mu - \alpha} \right)^{n+1} - 1 \right\}.$$

Se  $\alpha < \mu$ , allora la quantità:

$$\left( \frac{\mu}{\mu - \alpha} \right)^{n+1} > 1 \text{ per un } n \text{ intero positivo.}$$

Ciò implica che il premio sia positivo, come è auspicabile. Se, invece, vi è neutralità al rischio ( $\alpha = 0$ ), allora il premio risulta essere 0. Inoltre, per un dato valore di  $\mu$ , il premio è una funzione crescente di  $\alpha$  e di  $n$ , mentre, per dati valori di  $\alpha$  e di  $n$ , il premio è una funzione decrescente di  $\mu$ . Tutto ciò rispecchia la realtà, poiché  $E[Y_i] = n/\mu$  e  $Var[Y_i] = n/\mu^2$ : un aumento di  $\mu$  provoca una diminuzione sia del valore medio che della varianza delle perdite e pertanto verrà richiesta una minore remunerazione per fronteggiare il rischio.

## 8.5 Particolari contratti futures per usi assicurativi

La pratica assicurativa non si basa direttamente sui comuni contratti futures, ma piuttosto su indici. In genere gli assicuratori ottengono profitti da perdite inferiori rispetto a quelle attese. Un metodo alternativo potrebbe essere quello di acquistare un'opzione call su un indice future. Il suo valore è del tipo:

$$\Phi(F_T) = 25000 \min\left(\frac{Z(T)}{\pi}, 2\right) = 25000[\hat{Z}(T) - \max(\hat{Z}(T) - 2, 0)],$$

dove  $\hat{Z}(T) = \frac{Z(T)}{aT}$  è il rapporto delle perdite.



Esistono due tipi di opzioni futures: quelle pure e quelle convenzionali. Un'opzione call convenzionale richiede il pagamento del premio al momento dell'acquisto e, a scadenza, paga la differenza tra il prezzo del bene e quello di esercizio, se essa è un valore positivo; altrimenti il valore dell'opzione è 0. Un'opzione futures pura, invece, permette di ricevere o pagare quotidianamente ogni variazione del prezzo dell'opzione stessa. Ha, quindi, una struttura simile ad un conto corrente, in cui, ogni giorno, vengono versati soldi se il future ha un valore positivo; mentre viene prelevato denaro se il prezzo del future scende.

Sulla base dei risultati precedenti e ricordando che  $u'(x,t) = e^{-\alpha x - \rho t}$ , troviamo che il prezzo di equilibrio di mercato per un contratto future puro è:

$$\pi^\Phi(F_t, t) = \frac{E_t[u'(X_T, T)p_{t,T}^{-1}\Phi(F_T)]}{E_t[u'(X_T, T)p_{t,T}^{-1}]} \quad \text{per } 0 \leq t \leq T, \quad (8.5)$$

mentre per un contratto future convenzionale è:

$$\pi_c^\Phi(F_t, t) = \frac{E_t[u'(X_T, T)\Phi(F_T)]}{u'(X_t, t)} \quad \text{per } 0 \leq t \leq T. \quad (8.6)$$

Per individuare le relazioni tra i due prezzi, consideriamo un contratto a termine su un indice future il cui prezzo è:

$$\pi_f^\Phi(F_t, t) = \frac{E_t[u'(X_T, T)\Phi(F_T)]}{E_t[u'(X_T, T)]} \quad \text{per } t \leq T.$$

Sia:

$$\Delta_{i,T} := \frac{E_t[u'(X_T, T)]}{u'(X_t, T)} \quad \text{per } t \leq T.$$

Segue che

$$\pi_f^\Phi(F_t, t) = \frac{1}{\Delta_{i,T}} \pi_c^\Phi(F_t, t).$$

Ricordiamo che l'ipotesi di indipendenza da  $Z$  e  $W$  del tasso istantaneo di interesse  $r$  comporta

$$\pi_f^\Phi(F_t, t) = \pi^\Phi(F_t, t).$$

Allora

$$\pi^\Phi(F_t, t) = \frac{1}{\Delta_{i,T}} \pi_c^\Phi(F_t, t).$$

Pertanto, se  $\Delta_{i,T} < 1$ , cosa che avviene se  $r$  è positivo, il prezzo dei futures puri è uguale o superiore a quello dei futures convenzionali.

## 8.6 Prezzo dei futures convenzionali e puri

Si può dimostrare che, adottando il modello precedente nonché l'ipotesi che  $r$  sia indipendente da  $Z$  e  $W$ , il prezzo di mercato di un future puro è:

$$\pi^\Phi(F_t, t) = e^{-\lambda(T-t)\left(\frac{\mu}{\mu-\alpha}\right)^n} \left\{ \Phi(\hat{Z}_t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left( \lambda(T-t)\left(\frac{\mu}{\mu-\alpha}\right)^n \right)^k}{k!} E\{\Phi(\hat{Z}_t + \hat{V}_k) / \hat{Z}_t\} \right\},$$

dove  $\hat{V}_k$  è una Gamma di parametri  $(kn, aT(\mu-\alpha))$ , condizionata da un dato  $\hat{Z}_t$ ; mentre il prezzo di un future convenzionale è:

$$\pi_c^\Phi(F_t, t) = h(\alpha, t) e^{-(\lambda+\rho+a\alpha)(T-t)} \times \left\{ \Phi(\hat{Z}_t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left( \lambda(T-t)\left(\frac{\mu}{\mu-\alpha}\right)^n \right)^k}{k!} E\{\Phi(\hat{Z}_t + \hat{V}_k) / \hat{Z}_t\} \right\}.$$

Entrambe i risultati si ottengono svolgendo le formule (8.5) e (8.6).

Possiamo notare che il prezzo del future puro non dipende dal tasso di impazienza del mercato,  $\rho$ , come avviene invece nel caso del future convenzionale.

## 8.7 Contratti futures limitati

Consideriamo una limitazione superiore

$$\Phi(\hat{Z}_T) = 25000 \min(\hat{Z}_T, c).$$

Facciamo riferimento ad un contratto futures puro, dal momento che quello convenzionale differisce solo per una costante moltiplicativa, dipendente dalle informazioni possedute alla data  $t$ . Nel caso in cui  $\hat{Z}_t < c$ , il prezzo di mercato per un tale future con scadenza in  $T$  è dato da:

$$\begin{aligned} \pi^{(x \wedge c)}(F_t, t) = & 25000 \left[ F_t + \exp \left\{ -(\mu - \alpha) \pi(c - \hat{Z}_t) - \lambda(T-t) \left( \frac{\mu}{\mu - \alpha} \right)^n \right\} \times \right. \\ & \left. \times \left( (c - \hat{Z}_t) \Sigma_1^c - \frac{n}{a \Gamma \mu} \lambda(T-t) \left( \frac{\mu}{\mu - \alpha} \right)^{n+1} \Sigma_0^c \right) \right] \quad (8.7) \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \Sigma_0^c &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left( \lambda(T-t) \left( \frac{\mu}{\mu - \alpha} \right)^n \right)^k}{k!} e_{(k+1)n}((\mu - \alpha) \pi(c - \hat{Z}_t)); \\ \Sigma_1^c &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left( \lambda(T-t) \left( \frac{\mu}{\mu - \alpha} \right)^n \right)^k}{k!} e_{kn-1}((\mu - \alpha) \pi(c - \hat{Z}_t)); \end{aligned}$$

e

$$e_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Poiché tale espressione converge rapidamente ad  $e^x$ , per  $n$  abbastanza grande, l'approssimazione può essere considerata buona.

Perciò:

$$\Sigma_0^c \approx \exp \left\{ (\mu - \alpha) \pi(c - \hat{Z}_t) + \lambda(T-t) \left( \frac{\mu}{\mu - \alpha} \right)^n \right\},$$

e

$$\Sigma_1^c \approx \exp\left\{(\mu - \alpha)\pi(c - \hat{Z}_t) + \lambda(T-t)\left(\frac{\mu}{\mu - \alpha}\right)^n\right\} - \exp(\mu - \alpha)\pi(c - \hat{Z}_t).$$

Sostituendo tali valori nella (8.7) otteniamo:

$$\pi^{(x \wedge c)}(F_t, t) \approx \begin{cases} 25000 \left[ c + (\hat{Z}_t - c) \exp\left\{-\lambda(T-t)\left(\frac{\mu}{\mu - \alpha}\right)^n\right\} \right] & \text{se } \hat{Z}_t < c, \\ 25000c & \text{se } \hat{Z}_t \geq c. \end{cases}$$

Notiamo che il prezzo di tale future decresce al crescere di  $\mu$ , mentre cresce al crescere della frequenza dei sinistri,  $\lambda$ , del parametro che individua l'ammontare dei risarcimenti,  $n$ , dell'avversione al rischio,  $\alpha$ , e del periodo che intercorre fino alla scadenza,  $(T-t)$ .

Per analizzare la bontà dell'approssimazione fornita, poniamo:

$$x = \lambda(T-t)\left(\frac{\mu}{\mu - \alpha}\right)^n, \quad y = (\mu - \alpha)\pi(c - \hat{Z}_t).$$

Data una costante positiva  $K > 0$  e  $\varepsilon > 0$ , esiste un intero positivo  $n_0$  tale che se  $|x| \leq K$ ,  $|y| \leq K$ , e  $n \geq n_0$ , allora:

$$\left|e^{x+y} - \Sigma_0^c\right| < e^K \frac{(K + \varepsilon)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{e} \quad \left|(e^x - 1)e^y - \Sigma_1^c\right| < e^K \frac{(K + \varepsilon)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Le approssimazioni precedenti sono buone anche per  $n$  non molto elevato, poiché i fattoriali crescono molto rapidamente. Pertanto l'errore che si commette nel calcolo finale del prezzo del future diviene trascurabile.

Tuttavia esistono delle situazioni in cui l'approssimazione non è molto buona.

È questo il caso in cui  $y$  sia molto alto, il che implica  $Z_t$  piccolo rispetto alla limitazione  $c$ .

## 8.8 Opzioni call futures

Consideriamo, di nuovo, solo il caso di un contratto future puro. Il pagamento che tale prodotto offre a scadenza è:

$$\Phi(x) = (x - c)^+ = \max(x - c, 0),$$

dove  $x$  è il valore dell'indice su cui si basa il future e  $c$  è il prezzo di esercizio della call.

Il prezzo per tale tipo di contratto diviene:

$$\pi^{(x-c)^+}(F_t, t) = 25000e^{-\lambda(T-t)\left(\frac{\mu}{\mu-\alpha}\right)^n} \times \left\{ \Phi(\hat{Z}_t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(\lambda(T-t)\left(\frac{\mu}{\mu-\alpha}\right)^n\right)^k}{k!} E\{(\hat{Z}_t + \hat{V}_k - c)^+ / \hat{Z}_t\} \right\}.$$

Sviluppando tale espressione otteniamo:

$$\pi^{(x-c)^+}(F_t, t) = \begin{cases} 25000 \left[ \exp\left\{- (\mu - \alpha)\pi(c - \hat{Z}_t) - \lambda(T-t)\left(\frac{\mu}{\mu-\alpha}\right)^n\right\} \right] \times \\ \times \left( \frac{n}{aT\mu} \lambda(T-t)\left(\frac{\mu}{\mu-\alpha}\right)^{n+1} \Sigma_0^c - (c - \hat{Z}_t)\Sigma_1^c \right) & \text{se } \hat{Z}_t < c, \\ 25000(F_t - c) & \text{se } \hat{Z}_t \geq c. \end{cases} \quad (8.8)$$

Notiamo che

$$\pi^{(x-c)^+}(F_t, t) \rightarrow 25000(\hat{Z}_t - c)^+ \text{ per } t \text{ che tende a } T.$$

Utilizzando, adesso, le approssimazioni precedentemente introdotte per  $\Sigma_0^c$  e  $\Sigma_1^c$ , otteniamo:

$$\pi^{(x-c)^+}(F_t, t) \approx \begin{cases} 25000 \left[ (\hat{Z}_t - c) \left( 1 - \exp \left\{ -\lambda(T-t) \left( \frac{\mu}{\mu-\alpha} \right)^n \right\} \right) + \right. \\ \left. + \frac{n}{\pi\mu} \lambda(T-t) \left( \frac{\mu}{\mu-\alpha} \right)^{n+1} \right] & \text{se } \hat{Z}_t < c, \\ 25000(F_t - c) & \text{se } \hat{Z}_t \geq c. \end{cases}$$

(8.9)

Il prezzo dell'opzione call futures decresce al crescere di  $c$  e cresce al crescere di  $\hat{Z}_t$ . Qualora, poi, il prezzo di esercizio dell'opzione call,  $c$ , divenga eccessivamente elevato rispetto agli altri parametri, l'approssimazione sopra fornita non risulta più valida. Infatti in tale caso il prezzo del future può addirittura divenire negativo.

## 8.9 L'oscillazione della call

L'ultimo contratto che analizziamo è un'opzione call future a cui sono poste delle limitazioni. I pagamenti che tale prodotto offre sono espressi da:

$$\Phi(x) = 25000 \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq c_1, \\ (x - c_1) & \text{se } c_1 < x \leq c_2, \\ (c_2 - c_1) & \text{se } x > c_2. \end{cases}$$

Il contratto risulta, quindi, simile ad un trattato di riassicurazione excess of loss con un livello di ritenzione pari a  $c_1$  ed un limite superiore pari a  $c_2 > c_1$ .

Il prezzo di mercato di tale prodotto è facilmente calcolabile sulla base dei risultati precedenti relativi all'opzione call future.

Infatti, chi detiene un contratto di questo tipo è come se avesse assunto una posizione "lunga" su un'opzione call future con prezzo di esercizio pari a  $c_1$  ed una posizione "corta" sempre su un'opzione call future, ma con prezzo di esercizio pari a  $c_2$ .

Il prezzo di tale prodotto è dunque:

$$\pi^\Phi(F_t, t) = \pi^{(x-c_1)^+}(F_t, t) - \pi^{(x-c_2)^+}(F_t, t),$$

dove le due quantità al secondo membro sono ricavabili dalla formula (8.8).

Utilizzando anche in questo caso l'approssimazione che ha condotto alla formula (8.9), otteniamo:

$$\pi^\Phi(F_t, t) \approx \begin{cases} \left(1 - \exp\left\{-\lambda(T-t)\left(\frac{\mu}{\mu-\alpha}\right)^n\right\}\right)(c_2 - c_1), & \hat{Z}_t < c_1, \\ (c_2 - c_1) + (\hat{Z}_t - c_2) \exp\left\{-\lambda(T-t)\left(\frac{\mu}{\mu-\alpha}\right)^n\right\}, & c_1 \leq \hat{Z}_t < c_2, \\ (c_2 - c_1), & \hat{Z}_t \geq c_2. \end{cases}$$

Il caso più interessante è quello in cui  $\hat{Z}_t < c_1$ .

Notiamo che, sotto questa condizione, il prezzo cresce al crescere della differenza dei due limiti,  $(c_2 - c_1)$ . Cresce anche al crescere della frequenza dei sinistri,  $\lambda$ , del periodo di scadenza  $(T-t)$ , dell'avversione al rischio del mercato,  $\alpha$ , e del parametro  $n$ , mentre decresce al crescere di  $\mu$ .

Ciò è corrispondente alla realtà. Infatti, all'aumentare di  $\mu$  si ha una riduzione del valore atteso e della varianza delle perdite.

Nel caso, invece, in cui  $c_1 \leq \hat{Z}_t < c_2$ , il prezzo cresce al crescere di  $\hat{Z}_t$ ,  $\lambda$ ,  $(T-t)$ ,  $n$ ,  $\mu$  e  $\alpha$ .

Infine, per quanto riguarda la bontà dell'approssimazione, questa non è garantita, specialmente nel caso in cui  $\hat{Z}_t < c_1$ . Infatti, tale approssimazione non è molto buona qualora  $\hat{Z}_t$  sia piccolo, mentre migliora al crescere del suo valore.

## 8.10 Conclusioni

Abbiamo cercato di fornire un metodo di calcolo dei prezzi di contratti a termine e contratti futures.

Da questi sono state ricavate le formule relative a specifici contratti utilizzati nella pratica assicurativa per fare fronte ai rischi catastrofici. È stata anche introdotta una possibile approssimazione, per ottenere espressioni più facilmente trattabili. Le approssimazioni, tuttavia, possono risultare non adeguate e devono essere quindi considerate con molta cautela.



# CAPITOLO 9

## LA RIASSICURAZIONE

Concludiamo illustrando l'altro strumento utilizzato dagli assicuratori per far fronte ai rischi assunti: la riassicurazione.

### 9.1 Premesse

Prima di decidere se assumersi un rischio, una compagnia di assicurazione deve valutare se ha la possibilità di sostenere tale onere.

Ricordiamo che il criterio della probabilità di rovina si basa sul fatto che la probabilità di rovina non superi un certo livello  $\alpha$  tollerato e ipotizziamo che l'assicuratore detenga un fondo di garanzia pari a  $w$  ed un portafoglio con  $k$  contratti.

Assumiamo che:

- $g_i$ , per  $i = 1, 2, \dots, k$ , rappresenti il guadagno relativo all' $i$ -esimo contratto.
- $\pi_i$ , per  $i = 1, 2, \dots, k$ , rappresenti il premio, comprensivo di caricamento, relativo all' $i$ -esimo contratto.
- $X_i$ , per  $i = 1, 2, \dots, k$ , rappresenti il risarcimento globale dell' $i$ -esimo contratto.

Aggregando tali quantità:

- $g = \sum_{i=1}^k g_i$  rappresenti il guadagno dell'intero portafoglio,
- $\pi = \sum_{i=1}^k \pi_i$  rappresenti il premio complessivo del portafoglio,
- $X = \sum_{i=1}^k X_i$  rappresenti il risarcimento complessivo del portafoglio.

Il valore medio e la varianza della variabile aleatoria  $g$  sono:

$$E[g] = \sum_{i=1}^k E[g_i] = \sum_{i=1}^k E(\pi_i - X_i) = \sum_{i=1}^k m_i,$$

dove  $m_i$  rappresenta il caricamento applicato al premio equo; e

$$\sigma^2(g) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} \sum COV(X_i, X_j),$$

dove  $\sigma_i^2$  rappresenta la varianza dell' $i$ -esimo guadagno e  $COV(X_i, X_j)$  rappresenta la covarianza tra l' $i$ -esimo ed il  $j$ -esimo guadagno.

Esprimiamo adesso la probabilità di rovina,  $\alpha$ , come:

$$P\{g \leq -w\} = \alpha.$$

Al fine di valutare la necessità di ricorrere alla riassicurazione, è utile introdurre la quantità  $\frac{w+m}{\sigma}$ , detta indice di stabilità. Tale indice, infatti, può

essere messo in relazione con la probabilità di rovina  $\alpha$ .

Ad esempio, nel caso particolare in cui la variabile aleatoria  $g$  abbia una distribuzione Normale del tipo  $N(m, \sigma^2)$ ,

$$\alpha = P\{g \leq -w\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{-w} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{w+m}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi\left(-\frac{w+m}{\sigma}\right),$$

dove  $\Phi$  è la funzione di ripartizione della Normale standard.

In questo caso, dunque, la probabilità di rovina assume un valore preciso. Tuttavia, se l'ipotesi di normalità non sussiste,  $\alpha$  rimane comunque legata all'indice di stabilità. Infatti, si può dimostrare che, in molti casi, la probabilità di rovina decresce al crescere dell'indice di stabilità. Tale indice dipende dal valore del fondo di garanzia  $w$  che l'assicuratore detiene, dal caricamento di sicurezza  $m$  e dalla variabilità del portafoglio  $\sigma$ . Stabilito dunque un livello di  $\alpha$  sufficientemente basso e tollerato dalla compagnia di assicurazione, si utilizzerà l'indice di stabilità che si ottiene con il valore di  $\alpha$  prefissato per confrontarlo con l'indice effettivo che compete alla compagnia in base a ciò che realmente ha a disposizione.

Se il valore con  $\alpha$  prefissato è inferiore a quello reale della compagnia, allora non vi è alcun problema. Se, viceversa, si ottiene un valore superiore, l'assicuratore dovrà provvedere ad innalzare il suo indice reale, affinché possa avere una probabilità di rovina più bassa, almeno uguale al valore di  $\alpha$  da lui tollerato. A questo fine egli non può intervenire direttamente su  $\sigma$ , e deve quindi cercare di innalzare  $w$ , chiedendo magari maggiori contributi ai soci. Oppure può aumentare  $m$ , ma sempre entro dei limiti imposti dal mercato sui caricamenti di sicurezza. In certi casi, però, questi due interventi non sono sufficienti ad innalzare l'indice di stabilità al livello desiderato. È in questa circostanza che l'assicuratore dovrà agire indirettamente su  $\sigma$ , non assumendosi l'intero rischio, ma trasferendone una parte, per esempio, con la riassicurazione.

## 9.2 Alcuni contratti di riassicurazione

Un contratto di riassicurazione è un accordo mediante il quale una compagnia, detta la cedente, cede una parte del rischio assunto ad un'altra compagnia, detta la cessionaria. Quest'ultima, a sua volta, può decidere di cedere nuovamente parte del rischio che le è stato trasferito mediante un altro contratto di riassicurazione. L'assicurato, invece, non è a conoscenza dei vari trasferimenti di rischi che le compagnie effettuano.

I più comuni tipi di riassicurazione sono: la riassicurazione proporzionale e la riassicurazione non proporzionale.

Nella prima una quota  $1 - \rho$ ,  $\rho \in [0,1]$ , del rischio viene ceduta prima che un danno avvenga. Pertanto l'assicuratore mantiene a suo carico una quota  $\rho$  del rischio, e l'intervento della cessionaria è certo, anche se è aleatoria l'entità a cui dovrà far fronte.

Nella riassicurazione non proporzionale, invece, l'intervento della cessionaria non è certo. L'assicuratore diretto, infatti, fissa un importo massimo del risarcimento che è disposto a pagare e trasferisce l'eccedente al riassicuratore.

La suddivisione del rischio, perciò, non è nota *ex-ante*, al momento della stipula del contratto di riassicurazione, ma solo a sinistro avvenuto.

In genere la riassicurazione proporzionale è utilizzata nelle assicurazioni vita, dove le prestazioni sono prestabilite ed è possibile ripartire gli oneri a priori. Viceversa nelle assicurazioni contro i danni, dove non è possibile conoscere le prestazioni prima che un sinistro avvenga, viene maggiormente utilizzata la riassicurazione non proporzionale, in quanto permette di fare fronte in modo migliore, *ex-post*, a risarcimenti molto elevati.

Entrambe le forme di riassicurazione, inoltre, sono disponibili in due ulteriori tipi: l'individuale e il globale. La riassicurazione individuale implica che la parte di rischio trattenuta vari da rischio a rischio, mentre tale porzione è uguale per ogni rischio in una riassicurazione globale. Ad esempio, in una riassicurazione non proporzionale individuale l'assicuratore stabilisce un valore massimo,  $D_i$ , detto priorità, che è disposto a pagare per ogni singolo sinistro del rischio  $i$ : tale tipo di riassicurazione è detto *excess-of-loss*.

In una riassicurazione non proporzionale globale, invece, l'assicuratore stabilisce un valore massimo,  $M$ , detto portata, che è disposto a pagare per ogni singolo sinistro di un qualunque rischio presente nel portafoglio: tale tipo di riassicurazione è detto *stop-loss*.

Per esaminare più dettagliatamente alcuni tipi di contratti, formuliamo le seguenti ipotesi. Supponiamo che gli ammontari dei singoli risarcimenti,  $X_n$ , siano variabili aleatorie i.i.d, non negative, con distribuzione  $F$ , valore medio,  $E(X)$ , finito ed indipendenti dal numero dei sinistri avvenuti fino all'epoca  $t$ ,  $N(t)$ , e che  $N(t)$  abbia una distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda > 0$ . Il risarcimento complessivo relativo all'intero portafoglio è esprimibile come:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \quad t \geq 0.$$

Poniamo  $\mu(t) = E[S(t)] = E(X)E[N(t)]$ .

Pertanto, nei contratti di riassicurazione precedentemente introdotti, la porzione di rischio che spetta al riassicuratore è così espressa:

- 1) RIASSICURAZIONE PROPORZIONALE GLOBALE

$$R_1(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} (1-\rho)X_i = (1-\rho)S(t).$$

- 2) RIASSICURAZIONE PROPORZIONALE INDIVIDUALE

$$R_2(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} (1-\rho_i)X_i.$$

- 3) RIASSICURAZIONE STOP – LOSS

$$R_3(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} (X_i - M)^+.$$

- 4) RIASSICURAZIONE EXCESS - OF – LOSS

$$R_4(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} (X_i - D_i)^+.$$

Nel caso 4), in particolare, il riassicuratore può decidere di non fare fronte all'intero risarcimento superiore a  $D_i$ , ma di fissare a sua volta un valore massimo che è disposto a pagare, diciamo  $D_i^*$ , o, equivalentemente, stipulare un nuovo contratto di riassicurazione con priorità uguale a  $D_i^*$ .

È perciò interessante avere una stima del numero di sinistri i cui risarcimenti cadano nell'intervallo  $(D_i, D_i^*]$ , o  $(D_i, \infty]$  se l'assicuratore non pone una limitazione superiore [31].

Il numero cercato può essere espresso come:

$$B_i(A) = \sum_{i=1}^{N(t)} I_{\{X_i \in A\}},$$

dove  $A = (D_i, D_i^*]$ , o  $A = (D_i, \infty]$ .

Condizionatamente a  $N(t)$ ,  $B_i(A)$  può essere rappresentata da una distribuzione Binomiale con probabilità di successo pari a  $F(A) = P(X \in A)$ .

Pertanto:

$$\begin{aligned} P(B_i(A) = l) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(B_i(A) = l / N(t) = k) P(N(t) = k) = \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{l} (F(A))^l (1-F(A))^{k-l} \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Volendo, invece, analizzare il comportamento dei risarcimenti più elevati, ricordiamo che la distribuzione della  $k$ -esima più alta statistica d'ordine su un campione di  $n$  variabili aleatorie i.i.d. può essere espressa da:

$$P(X_{k,n} \leq x) = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{n}{r} (1-F(x))^r (F(x))^{n-r}.$$

Questa non è altro che la probabilità che una Binomiale di parametro  $(1-F(x), n)$  non ecceda  $k$ .

Condizionando di nuovo a  $N(t)$ :

$$\begin{aligned} P(X_{k,N(t)} \leq x) &= \sum_{l=0}^{\infty} P(X_{k,l} \leq x / N(t) = l) P(N(t) = l) = \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{l=k}^{\infty} P(X_{k,l} \leq x / N(t) = l) \frac{(\lambda t)^l}{l!} = \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{l=k}^{\infty} \left( \sum_{r=0}^{k-1} \binom{l}{r} (1-F(x))^r (F(x))^{l-r} \right) \frac{(\lambda t)^l}{l!}. \end{aligned}$$

L'espressione precedente risulta, attraverso opportuni calcoli, uguale a:

$$e^{-\lambda(1-F(x))t} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{(\lambda(1-F(x))t)^r}{r!},$$

ovvero alla probabilità che una Poisson di parametro  $\lambda(1-F(x))t$  non ecceda  $k$ .

Osserviamo che, oltre ai contratti di riassicurazione sopra descritti, ne esistono altri che possono essere visti come loro derivati e che cercano di venire incontro alle diverse esigenze degli assicuratori. Per esempio, può essere utilizzata una riassicurazione proporzionale in parte globale ed in parte individuale. Si trasferisce, cioè, una quota piuttosto bassa uguale per ogni rischio, mentre per la restante parte dei rischi, rimasti a carico dell'assicuratore

diretto, si agisce in modo individuale, cercando, per ogni singolo rischio, la quota ottimale che consente di minimizzare la varianza del portafoglio.

Un altro tipo di contratto è la cosiddetta stop-loss modificata. Questa, in pratica, è la combinazione di una stop-loss e di una proporzionale globale.

Ciò che resta a carico della cedente è:

$$Z = \begin{cases} X & X \leq M, \\ M + \rho(X - M) & X > M. \end{cases}$$

Pertanto la cedente contribuisce all'eccedenza rispetto a  $M$  mediante un'aliquota  $\rho$ . Con questo tipo di trattato la cessionaria ha il vantaggio che, dovendo la cedente fare fronte ad ogni rischio, cosa che non avviene nell'excess-of-loss, l'assicuratore diretto avrà interesse a valutare attentamente l'ammontare di ogni risarcimento, dal momento che spetta a lui avere contatti diretti con l'assicurato. Non si corre, cioè, il rischio di avere risarcimenti superiori al dovuto per negligenza dall'assicuratore, che, a sua volta, ha il vantaggio di evitare un intervento del riassicuratore anche per piccoli danni. Al contrario la proporzionale, dove ciò accade, richiede premi di riassicurazione più elevati e quindi non vantaggiosi se il risarcimento è basso.

Concludiamo, infine, con due tipi di contratti in cui l'onere del riassicuratore dipende dai risarcimenti a cui l'assicuratore diretto stesso deve fare fronte.

Il primo esempio è quello in cui il riassicuratore decide di coprire solo i  $k$  sinistri più elevati che si sono verificati in un certo intervallo di tempo  $[0, t]$ .

Ciò che spetta al riassicuratore è dunque:

$$R_s(t) = \sum_{i=1}^k X_{i,N(t)}.$$

Un secondo esempio, invece, può essere rappresentato dal cosiddetto trattato ECOMOR che, in pratica, è un excess-of-loss con priorità aleatoria individuata dal  $k$ -esimo sinistro più elevato avvenuto nell'intero portafoglio.

In questo caso la parte di rischio che copre l'assicuratore è:

$$R_6(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} (X_{i,N(t)} - X_{k,N(t)})^+ = \sum_{i=1}^{k-1} X_{i,N(t)} - (k-1)X_{k,N(t)}.$$

Questa espressione ricorda lo stimatore (3.2), utilizzato per individuare il parametro  $\alpha$  nella distribuzione di Pareto. Anche in quel caso, infatti, una volta individuate le statistiche d'ordine, ci si basa solo sulle prime  $k+1$  variabili per ottenere la stima e quindi solo sui  $k+1$  valori più elevati.

### 9.3 Strategie ottimali di riassicurazione

Il fine principale della riassicurazione è individuare il trattato ottimo, che consente di avere la migliore suddivisione del rischio. Per analizzare tale problema ci occupiamo delle strategie ottimali di riassicurazione. Queste possono essere di due tipi: unilaterali o bilaterali. Nel primo caso si cerca il trattato ottimo solo per l'impresa cedente, mentre nel secondo caso si cerca di ottenere il trattato migliore per entrambi i contraenti.

Continuando a fare riferimento al criterio della probabilità di rovina, una volta fissato un livello  $\alpha$  per la probabilità di rovina tollerato dalla compagnia di assicurazione, vengono cercati quei valori delle quote di ritenzione, o della portata, o della priorità, che consentano di avere un indice di stabilità che consenta di ottenere un valore per la probabilità di rovina minore o uguale di  $\alpha$ . Ipotizzando, per semplicità, una distribuzione normale dei guadagni, abbiamo visto che

$$\alpha = \Phi\left(-\frac{w+m}{\sigma}\right).$$

In seguito alla riassicurazione,  $m$  e  $\sigma$  dipendono da  $\rho$ , quota di rischi trattenuta nel proporzionale, o  $M$ , portata, o  $D_i$ , priorità.

Vengono pertanto ricercati valori adeguati di  $\rho$ ,  $M$ , o  $D_i$  per ottenere  $\alpha$ .

Nel paragrafo 1.6 abbiamo già visto come sia possibile, per mezzo dell'esponente di Lundberg, legare il livello assoluto di riassicurazione  $C$  alla probabilità di rovina  $\alpha$ . È possibile, cioè, individuare le scelte ottimali di  $C$



per ottenere i livelli di  $\alpha$  desiderati. In questo paragrafo, invece, abbiamo suggerito un altro criterio per individuare le strategie ottimali di riassicurazione basate sull'indice di stabilità. Concludiamo proponendo degli indici utili per determinare la parte di rischio che deve essere riassicurata.

## 9.4 Gli indici estremi

Sia  $(X_n)$  una sequenza di variabili aleatorie e  $\theta$  un numero non negativo. Ipotizziamo che per ogni  $\tau > 0$  esista una sequenza  $(u_n)$  tale che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - F(u_n)) = \tau,$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq u_n) = e^{-\theta},$$

dove  $M_n$  è il valore massimo assunto da  $X_1, \dots, X_n$ .

Se valgono tali condizioni,  $\theta$  è detto indice estremo della sequenza  $(X_n)$  [31]. È possibile dimostrare che  $\theta \in [0, 1]$ . Intuitivamente, tale indice individua una relazione tra le variabili aleatorie  $X_1, \dots, X_n$  ed il loro valore massimo; in particolare determina la relazione che sussiste tra la struttura dei dati ed il loro comportamento estremo. Purtroppo, però, non tutte le sequenze di variabili aleatorie hanno un indice estremo. Qualora, invece, esso esista, proponiamo un semplice metodo per ottenerne una stima.

Si può infatti dimostrare che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log P(M_n \leq u_n)}{n \log F(u_n)} = \theta.$$

Da questa espressione è possibile ricavare uno stimatore per  $\theta$ .

Il problema è fornire una stima per  $P(M_n \leq u_n)$  e  $F(u_n)$ , che sono quantità non note. Un ovvio stimatore per la coda,  $1 - F(u_n)$ , è lo stimatore empirico:

$$\frac{N}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{X_i > u_n\}}.$$

Da questo è facilmente ottenibile  $F(u_n)$ .

Per quanto riguarda, invece,  $P(M_n \leq u_n)$ , poniamo  $r = [n/k]$  e dividiamo il campione  $X_1, \dots, X_n$  in  $k$  parti di ampiezza  $r$ :

$$X_1, \dots, X_r; \dots; X_{(k-1)r+1}, \dots, X_{kr}.$$

Calcolando il massimo di ogni parte in cui è stato diviso il campione,

$$M_r^{(i)} = \max(X_{(i-1)r+1}, \dots, X_{ir}), \quad i = 1, \dots, k,$$

è possibile esprimere  $P(M_n \leq u_n)$  come:

$$\begin{aligned} P(M_n \leq u_n) &= P(\max_{1 \leq i \leq k} M_r^{(i)} \leq u_n) \approx P^k(M_r \leq u_n) \approx \\ &\approx \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k I_{\{M_r^{(i)} \leq u_n\}} \right)^k = \left( 1 - \frac{K}{k} \right)^k. \end{aligned}$$

Dalle espressioni trovate per  $F(u_n)$  e  $P(M_n \leq u_n)$  possiamo ottenere un primo stimatore per  $\theta$  del tipo:

$$\hat{\theta}_n^{(1)} = \frac{k \log(1 - K/k)}{n \log(1 - N/n)} = \frac{1 \log(1 - K/k)}{r \log(1 - N/n)}, \quad (9.1)$$

dove  $N$  rappresenta il numero di eccedenze della sequenza  $(u_n)$  rispetto al campione  $X_1, \dots, X_n$  e  $K$  rappresenta il numero di parti che presentano una o più eccedenze.

Utilizzando un'espansione di Taylor è adesso possibile determinare un secondo stimatore per  $\theta$ :

$$\hat{\theta}_n^{(2)} = \frac{K}{N} = \frac{1}{r} \frac{K/k}{N/n} \approx \hat{\theta}_n^{(1)}. \quad (9.2)$$

Notiamo che, poiché  $\theta$  è un indicatore del comportamento dei valori estremi di una sequenza,  $(X_n)$ , tale indice può essere utile per individuare il migliore trattato di riassicurazione in quanto permette di farsi un'idea sugli eventuali valori elevati che possono assumere i risarcimenti. Tuttavia, resta il problema di quale sia la scelta ottimale di  $r$ ,  $k$ , e  $u_n$  per ottenere dei buoni stimatori [66].

## 9.5 Indice dei risarcimenti elevati

Un altro indice che permette di analizzare il comportamento dei risarcimenti più elevati è il seguente.

Sia  $F$  una distribuzione continua su  $(0, \infty)$  con media finita uguale a  $\mu$ . Per  $0 \leq p \leq 1$  l'indice dei risarcimenti elevati di  $F$  è definito da:

$$D_F(p) = \frac{1}{\mu} \int_{1-p}^1 \tilde{F}(y) dy, \quad (9.3)$$

dove  $\tilde{F}(y)$  è il quantile  $y$ -esimo di  $F$ .

Tale indice individua i contributi all'ammontare complessivo dei risarcimenti a partire dal  $p$ -esimo risarcimento più elevato.

Risulta evidente che  $D_F(p)$  possa essere un utile strumento per individuare il trattato di riassicurazione ottimale, in quanto indicatore di livelli dei risarcimenti elevati. È, infine, dimostrabile che [53]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{S_n} = 0 \text{ se e solo se } E(X) < \infty.$$

Pertanto, nel caso in cui abbiamo a che fare con distribuzioni light-tail, il massimo valore assunto dai risarcimenti apporta un contributo trascurabile al risarcimento complessivo.

Viceversa, se abbiamo a che fare con distribuzioni heavy-tail, i valori più elevati dei risarcimenti producono un contributo abbastanza notevole. Ciò implica la necessità di trasferire parte del rischio che la compagnia ha assunto tramite uno dei metodi a disposizione, al fine di diminuire la probabilità di rovina [6],[57].

## CONCLUSIONI

Nelle pagine precedenti abbiamo cercato di fornire un quadro abbastanza esauriente dei principali modelli utilizzati per trattare la probabilità di rovina. In particolare abbiamo posto l'attenzione sul modello classico, che è l'approccio tradizionale alla base di tutte le teorie.

I principali risultati sono:

- La possibilità di porre alla probabilità di rovina una limitazione superiore di tipo esponenziale, cosa che permette di poterne avere un controllo. La stima ottenuta ha una forma molto semplice ed è nota come disuguaglianza di Lundberg.
- La possibilità di esprimere la probabilità di rovina mediante un'approssimazione, detta di Lundberg-Cramer, che ha la caratteristica di risultare abbastanza precisa anche per bassi livelli di capitale.

La teoria del rinnovamento, invece, è utile in quanto consente di esprimere la probabilità di rovina con formule semplici, grazie, soprattutto, all'utilizzo della distribuzione dei cosiddetti "salti record".

Chiaramente, sarebbe auspicabile che le ipotesi adottate in questi modelli rispecchiassero la realtà, cosa che, invece, non sempre accade.

Con l'introduzione dei processi markoviani, ad esempio, si cerca di considerare diversi livelli di intensità del numero dei sinistri, piuttosto che uno solo. Questo è reso possibile dall'uso di una mistura di Poisson, anziché di una Poisson, e consente di rappresentare diversi tipi di rischiosità.

In un'assicurazione auto, ad esempio, ogni individuo è sottoposto ad una diversa probabilità di avere incidenti, determinata da proprie caratteristiche nei confronti del rischio, quali l'età, il sesso o la capacità di guida.

Dunque, ipotizzando diverse intensità di frequenza del numero dei sinistri, è possibile esprimere le diverse attitudini al rischio che ogni individuo possiede.

Risulta di particolare importanza il fatto che, anche con l'adozione di processi markoviani, sia possibile ottenere una disuguaglianza di Lundberg ed una

(Conclusioni)

approssimazione di Lundberg-Cramer, seppure in una forma un po' diversa e leggermente più complicata.

Abbandonando i modelli teorici, abbiamo visto che, nella pratica, non sempre è facile trovare soluzioni ottimali per tutelarsi dai rischi assunti. Spesso è necessario adottare ipotesi un po' forti che si discostano dalla realtà. Ciò avviene, ad esempio, quando abbiamo a che fare con rischi proporzionali alle riserve libere, come può essere una svalutazione della moneta o un rischio di credito. In tal caso, infatti, abbiamo visto che è possibile ottenere una strategia ottimale di investimento per minimizzare la probabilità di rovina solo nel caso in cui i risarcimenti siano ipotizzati distribuiti esponenzialmente. Tuttavia i dati reali mostrano che la distribuzione dei risarcimenti è ben rappresentata da una distribuzione heavy-tail.

Il Ministero del Commercio di Chicago ha introdotto due prodotti finanziari destinati a fare fronte ai rischi, in particolare a quelli con possibilità di danni elevati. Questi prodotti, Cat-futures e opzioni PCS, sono importanti perché il loro valore dipende da un indice che si basa sul rapporto tra le perdite ed i premi di un gruppo di compagnie selezionate in base a determinate caratteristiche. Tali prodotti, perciò, dovrebbero essere in grado di rispecchiare la situazione reale delle compagnie, e, di conseguenza, di soddisfare le loro esigenze. Abbiamo visto, però, che solo uno di questi due, l'opzione PCS, consegue abbastanza bene in tale scopo, mentre l'altro presenta problemi nella struttura dell'indice su cui si basa. È per questo motivo che le opzioni PCS sono considerate un miglioramento rispetto ai CAT-futures. Comunque un problema tuttora aperto è quello di individuare nel mercato i prodotti più utili a soddisfare le esigenze assicurative, senza escludere la possibilità di crearne nuovi più appetibili.

È importante essere in grado di ottenere un'accurata valutazione dei prodotti in questione. Per questo abbiamo presentato diversi metodi possibili, in quanto non ne esiste uno ottimale.

(Conclusioni)

Il primo metodo analizzato consente di ottenere una formula semplice e ben trattabile per il valore dei prodotti finanziari, ma con ipotesi piuttosto forti che si discostano dalla situazione reale.

Si è cercato di superare in parte questo problema con il secondo approccio presentato. Tale approccio conduce ad un'espressione più lunga e quindi meno maneggevole per il prezzo dei prodotti finanziari, ma le ipotesi formulate sono più aderenti alla realtà.

Infine, per ottenere una valutazione delle opzioni PCS, abbiamo sfruttato risultati relativi alla valutazione delle opzioni asiatiche perché questi due tipi di opzioni presentano aspetti simili. Anche in questo caso, però, per giungere a formule trattabili si è dovuto ricorrere ad ipotesi non del tutto realistiche.

È evidente, dunque, che il problema maggiore resta legato alle ipotesi adottate, spesso non verosimili, ma indispensabili per potere ottenere formule maneggiabili.

Infine, abbiamo elencato alcuni contratti specifici ad uso assicurativo. Abbiamo visto che il loro valore dipende, in parte, dalle preferenze del mercato, espresse attraverso il coefficiente di avversione al rischio, in parte dal valore atteso del numero dei sinistri e dei risarcimenti. Più specificamente, all'aumentare dell'avversione al rischio aumenta anche il ricorso ai possibili strumenti di copertura. Perciò il prezzo dei contratti sale, cosa che avviene anche con un aumento del valore atteso del numero dei sinistri o dei risarcimenti.

Un tipo di contratto particolarmente importante è un'opzione il cui pagamento ammette delle limitazioni inferiori e superiori. La sua importanza è legata alla forte analogia che esso ha con una riassicurazione excess of loss con livello di ritenzione uguale alla soglia inferiore ed un limite superiore uguale alla soglia superiore. Questo consente di individuare le similitudini che esistono tra i prodotti finanziari ad uso assicurativo e la riassicurazione. Nonostante queste affinità, tuttavia, i prodotti finanziari, benché utilizzati con il medesimo scopo della riassicurazione, presentano, rispetto a quest'ultima, caratteristiche diverse che abbiamo cercato di mettere in evidenza.

(Conclusioni)

Per concludere, abbiamo visto come sia possibile, sempre sotto certe ipotesi, individuare un'eventuale necessità di ricorrere alla riassicurazione e la misura in cui è giusto farlo.

A questo scopo abbiamo, in particolare, analizzato il comportamento dei valori estremi della distribuzione dei risarcimenti.