

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA**

Scuola di Economia e Statistica

Corso di laurea in

Economia e Finanza



**Valutazioni sulle politiche riassicurative  
ottimali sul Reserve Risk per un portafoglio  
RC Auto**

Relatore: Prof.ssa Anna Maria Fiori

Tesi di Laurea di:

Mattia Bianchi

Matr. N. 844128

Anno Accademico 2019/2020

*“Nessuno accetta il caso come causa del proprio successo, ma solo del proprio fallimento”.*

*Nassim Nicholas Taleb*

## Ringraziamenti

Prima di iniziare il mio progetto di tesi con la Prof.ssa Fiori il mio unico obiettivo era quello di produrre un lavoro che mi permettesse di utilizzare le conoscenze e le competenze acquisite durante il percorso universitario in un contesto concreto.

Questo progetto di tesi è stato possibile solo grazie alla collaborazione con la Dott.ssa Romanello Laura, Attuario iscritto ONA – Responsible Risk Management BNP Paribas Cardif Vita SpA, e con il Dott. Rutto Lorenzo, Risk Management BNP Paribas Cardif Vita SpA, che oltre a fornirmi il dataset su cui lavorare mi hanno supportato durante tutto il percorso, senza farmi mai mancare l'appoggio necessario. Il loro punto di vista molto concreto e pragmatico mi ha permesso di uscire dalla prospettiva accademica, mostrandomi come i problemi e le difficoltà vengono approcciate in contesto lavorativo, evidenziando come molto spesso sia difficile dare concretezza alla teoria studiata. Vi ringrazio davvero molto per la pazienza e per lo spirito con cui mi avete aiutato e ascoltato, la vostra disponibilità e la vostra costante presenza sono stati fondamentali, è stato un piacere lavorare con Voi.

Vorrei anche e soprattutto ringraziare la Prof.ssa Fiori, che con la sua esperienza e profonda conoscenza della materia ha saputo guidarmi, consigliarmi e correggermi quando mi stavo allontanando dalla realtà. Le ore spese a discutere dei problemi e degli sviluppi non si contano, posso solo dire che è stato un piacere poter collaborare con Lei a stretto contatto, il risultato finale senza di lei non sarebbe stato lo stesso.

Questo progetto era anche un test per me stesso, per capire se l'ambito assicurativo che tanto mi aveva affascinato nei corsi di laurea fosse davvero la strada giusta da prendere, dopo aver concluso il lavoro direi proprio di sì. Il prossimo obiettivo diventa quello di proseguire in ambito lavorativo in questo settore, con l'intenzione di sostenere l'esame di stato per diventare attuario. La strada è lunga e difficile ma se ci sono le persone giuste a sostenerti nulla è precluso.

Per concludere vorrei ringraziare la mia famiglia, la mia ragazza ed i miei amici, mi avete sempre sostenuto in tutte le mie scelte, supportandomi anche quando magari le idee erano contrastanti. Due anni fa quando ho deciso di iscrivermi a questo corso di laurea magistrale è stato un momento di svolta nella mia vita, a 25 anni ho lasciato un lavoro che non mi dava le soddisfazioni e gli stimoli giusti per avere la possibilità di inseguire un futuro con un lavoro che mi gratificasse. Dopo aver completato il mio

percorso di studi sono ancora più convinto che sia stata la scelta migliore. Grazie davvero per avermi sostenuto in questa scelta così importante.

# Indice

<b>Introduzione.....</b>	<b>4</b>
<b>1 – La Riassicurazione .....</b>	<b>6</b>
1.1 – Definizione.....	6
1.2 – Criterio dell’utilità attesa e criterio della probabilità di rovina .....	6
1.3 - Motivazioni tecniche e benefici.....	11
1.4 - Le tipologie di riassicurazione.....	12
1.4.1 - La riassicurazione facoltativa e la riassicurazione obbligatoria .....	12
1.4.2 - La riassicurazione proporzionale e la riassicurazione non proporzionale .....	13
1.4.2.1 - I trattati proporzionali.....	14
1.4.2.2 - I trattati non proporzionali.....	16
1.4.2.3 - Trattato E.CO.MO.R. e calcolo dei premi dei trattati di riassicurazione.....	18
1.4.3 - La riassicurazione mista .....	20
<b>2 - La Direttiva Solvency II .....</b>	<b>21</b>
2.1 - Da dove arriva Solvency II? .....	21
2.2 - I principi generali.....	23
2.3 - I tre pilastri.....	26
2.3.1 - Il primo pilastro .....	28
2.3.1.1 - Le riserve tecniche.....	29
2.3.1.2 - Gli investimenti .....	31

2.3.1.3 - I requisiti di capitale .....	33
2.3.2 - Il secondo pilastro.....	39
2.3.3 - Il terzo pilastro .....	44
2.4 – I Quantitative Impact Studies (QIS) .....	45
2.4.1 – La Standard Formula e il Reserve Risk secondo QIS2.....	46
2.4.2 – La Standard Formula e il Reserve Risk secondo QIS5.....	52
<b>3 – Teoria del Rischio e Riserva Sinistri .....</b>	<b>58</b>
3.1 – La distribuzione Poisson Composta Semplice.....	59
3.2 – La distribuzione Poisson Composta Misturata .....	60
3.3 – Le tecniche di approssimazione .....	64
3.3.1 – L’approssimazione Normale.....	64
3.3.2 – L’approssimazione Normale Power.....	65
3.4 – Le tecniche di simulazione.....	65
3.4.1 – Il Bootstrap sul modello Chain-Ladder Paid Classico.....	66
<b>4 – CASO STUDIO: analisi e confronto tra due Portafogli RC Auto nel mercato italiano .....</b>	<b>74</b>
4.1 – Descrizione del dataset.....	74
4.1.1 – Compagnia Small Size.....	75
4.1.2 – Compagnia Medium Size.....	77
4.2 – L’importazione dei dati e la procedura Bootstrap .....	79
4.3 – Le caratteristiche della distribuzione dello stimatore della Riserva .....	80
4.3.1 – Compagnia Small Size.....	81

4.3.2 – Compagnia Medium Size.....	84
4.3.3 – Confronto tra le strategie riassicurative .....	87
4.4 – La Best Estimate .....	89
4.5 – SCR per il Reserve Risk.....	91
<b>Conclusioni.....</b>	<b>93</b>
<b>Bibliografia.....</b>	<b>96</b>
<b>Elenco delle Figure .....</b>	<b>99</b>
<b>Elenco delle Tabelle.....</b>	<b>101</b>
<b>Appendice.....</b>	<b>103</b>

## Introduzione

Negli ultimi anni il mercato assicurativo ha dovuto affrontare un profondo processo di cambiamento su impulso della nuova Direttiva europea, Solvency II, entrata in vigore nel 2016. Solvency II ha cambiato il contesto assicurativo, formulando una “regolamentazione prudenziale” a tutela dei consumatori, in questo caso gli assicurati. Nel farlo si è cercato di introdurre un sistema di rilevazione del rischio capace di conferire ad ogni singola Compagnia la possibilità di avere un ruolo attivo in questo processo, possibilmente individuando una soluzione specifica per ogni impresa. Nel farlo Solvency II ha imposto regole e tecniche di valutazione del rischio molto precise, ha rafforzato il concetto di governance e ha modificato i requisiti di solvibilità che ogni Compagnia deve detenere. I nuovi requisiti hanno spinto le Compagnie a cercare nuove strategie per la gestione del capitale nel tentativo di renderla più sostenibile nel rispetto delle richieste delle Autorità di Vigilanza.

La riassicurazione si è dimostrata uno degli strumenti potenzialmente più utili nel tentativo di mitigare il rischio in capo ad una Compagnia abbassando così i requisiti di capitale. Nell’elaborato verrà affrontata questa tematica facendo riferimento a due Compagnie che operano nel ramo Danni, focalizzando l’attenzione sul Reserve Risk. L’obiettivo finale sarà quello di analizzare due portafogli RC Auto gestiti da reali di Compagnie di differenti dimensioni che operano nel mercato italiano per arrivare a calcolare il capitale di solvibilità specifico per il Reserve Risk.

Il punto di partenza nel primo capitolo sarà la descrizione dei trattati di riassicurazione, verrà spiegato nel dettaglio cosa sono, qual è la loro storia e quali sono le principali tipologie presenti sul mercato. L’obiettivo sarà quello di mostrare i benefici che la riassicurazione è in grado di portare, in linea teorica e generale, ad una Compagnia, mostrando come le differenti tipologie di trattato vengano utilizzate per scopi differenti.

Il secondo capitolo introdurrà il framework normativo europeo, la Direttiva Solvency II verrà analizzata nei suoi molteplici aspetti, dal sistema a 3 pilastri ai metodi di calcolo del *Solvency Capital Requirement*. Il capitolo si concluderà con i *Quantitative Impact Studies*, una serie di studi che prima dell’entrata in vigore di Solvency II hanno permesso di studiare e analizzare quanto fossero adatte le tecniche statistico-attuariali proposte nella normativa per la valutazione dei rischi assicurativi.



Il terzo capitolo descriverà le metodologie di calcolo della riserva sinistri, facendo riferimento alla Teoria Collettiva del Rischio e studiando successivamente il processo di “claim settlement”. La parte conclusiva del capitolo introdurrà tecniche di approssimazione e simulazione utili per calcolare la riserva sinistri, in particolare verrà introdotto il modello deterministico Chan-Ladder Classico che, abbinato ad una simulazione bootstrap, darà origine ad un modello di riservazione stocastico che verrà utilizzato nell’ultimo capitolo.

Prendendo in esame i due portafogli RC Auto, si illustrerà nell’ultimo capitolo la stima bootstrap della riserva sinistri al lordo e al netto di due possibili trattati riassicurativi, valutandone gli effetti di mitigazione del rischio in relazione alla dimensione ed alle caratteristiche dei portafogli osservati.

# 1 – La Riassicurazione

## 1.1 – Definizione

La riassicurazione è la modalità contrattuale con cui un'impresa di assicurazione cede, parzialmente o totalmente, un rischio o un insieme di rischi (portafoglio ceduto) ad un soggetto terzo (il riassicuratore).

Il contratto di riassicurazione non presenta una vera e propria definizione nel Codice Civile, ma è comunque disciplinato negli articoli 1928-1931. Gli unici limiti legislativi che vengono posti sono: “*i contratti di riassicurazione relativi a una serie di rapporti assicurativi devono essere provati per iscritto*” (art. 1928 cc) e “*il contratto di riassicurazione non crea rapporti tra l'assicurato ed il riassicuratore*” (art. 1929 cc). È evidente come la natura del contratto di riassicurazione sia contraddistinta da notevole flessibilità, ma che soprattutto sia una risorsa a disposizione solo degli assicuratori, fondata su un altro rapporto preesistente, quello tra l'assicuratore diretto e l'assicurato.

Generalmente in un contratto di riassicurazione le parti coinvolte sono due: il cedente, ovvero l'assicuratore che ha la necessità di trasferire una parte del rischio, ed il cessionario, ovvero il riassicuratore che accetta il trasferimento dietro il pagamento di uno o più premi da parte del cedente.

## 1.2 – Criterio dell'utilità attesa e criterio della probabilità di rovina

Comprendere a pieno il funzionamento della riassicurazione e le sue dinamiche richiede però un passo indietro, per l'esattezza al processo di costruzione del premio netto di un generico contratto di assicurazione. Tale processo spinge l'assicuratore a valutare la “rischiosità” dell'operazione aleatoria oggetto del contratto in termini di utilità attesa per giudicarne la vantaggiosità. Questa valutazione è necessariamente soggettiva, essendo influenzata dalla cosiddetta “riserva libera” di cui dispone, che verrà indicata con  $R$ . Essa rappresenta il patrimonio iniziale che per il momento, per ragioni di semplicità, considereremo come una quantità certa, iniziando poi, in un secondo momento, a considerarla come una grandezza aleatoria rispecchiando maggiormente quanto osservabile nella realtà. Un assicuratore, disponendo di un patrimonio  $R$  e affidandosi al criterio dell'utilità attesa accetterebbe di offrire copertura ad un rischio (impegno aleatorio  $X$ ) nel caso in cui il premio  $P$  rendesse verificata la condizione

$$E [ u ( P - X ) ] \geq u ( 0 ) = 0$$

dove  $u(x)$  è la funzione di utilità del guadagno  $x$  a partire dalla ricchezza iniziale  $R$ .

L'obiettivo è quello di evidenziare la dipendenza del minimo caricamento applicato al cliente dalle caratteristiche del rischio e dalla riserva iniziale  $R$ , osservando poi come la riassicurazione possa modificare e migliorarne le condizioni. Assumendo per semplicità una distribuzione di utilità quadratica il minimo caricamento,  $m = P - E(X)$ , che rende indifferente l'operazione assicurativa, è la minore delle due radici dell'equazione

$$m - \frac{m^2 + \sigma^2}{2B}$$

dove il minimo caricamento è dato da

$$m = P - E(X) = B \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{B^2}} \right]$$

Nelle formule precedenti  $\sigma^2$  è la varianza di  $X$ , mentre l'importo  $B$  prende il nome di "potenzialità massima" dell'assicuratore. Il reciproco di  $B$  misura l'avversione al rischio nella situazione patrimoniale  $R$ , per questo  $R$  e  $B$  sono legati. Lo sviluppo in serie del radicale consente la seguente approssimazione

$$m \simeq \frac{\sigma^2}{2B}$$

Il minimo caricamento risulta quindi essere proporzionale alla varianza del risarcimento aleatorio e all'avversione al rischio,  $\frac{1}{B}$ , dell'assicuratore. Quando il contratto risulta essere "molto rischioso" (elevato valore di  $\sigma^2$ ), oppure quando l'assicuratore è particolarmente avverso al rischio, il minimo caricamento  $m$  è molto oneroso.

Grazie all'utilizzo della funzione di utilità e alle conoscenze del mercato l'assicuratore può individuare la soglia massima della varianza del risarcimento aleatorio che può accettare per mantenere valida la condizione di non svantaggiosità, pari a  $2Bm$ . Nel caso in cui l'assicuratore si dovesse trovare in una situazione di superamento della soglia potrebbe cedere una parte del rischio riassicurandosi. In questo modo la varianza  $\sigma^2$  dell'impegno aleatorio tornerebbe ad essere inferiore a  $2Bm$ , nonostante il pagamento di un prezzo al riassicuratore per il trasferimento di una parte del rischio. Le modalità con cui il rischio può essere ceduto al riassicuratore verranno analizzate successivamente.

Fino ad ora il problema è stato analizzato nell'ottica di un singolo contratto assicurativo e di conseguenza di un singolo rischio. Osservando il problema della riassicurazione nel contesto della visione globale degli affari sottoscritti da una Compagnia notiamo subito che, a fronte di un portafoglio di rischi singolarmente accettabili, la soglia di vantaggiosità dell'affare globale può essere raggiunta e superata se essi sono positivamente correlati o inomogenei tra loro in termini dell'entità della varianza.

Si considerino  $n$  contratti che comportano i risarcimenti aleatori  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Siano  $m_i$  i minimi caricamenti presenti nei premi  $P_i$  e  $\sigma^2 = var(X_i)$  la varianza di  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Il guadagno aleatorio totale è  $\sum_{i=1}^n (P_i - X_i)$ , il suo valore atteso è uguale a  $\sum_{i=1}^n (m_i)$  mentre la varianza è pari a  $V = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{i>j} cov(X_i, X_j)$ . Considerando una funzione di utilità quadratica, la condizione di non svantaggiosità viene così modificata

$$\sum_{i=1}^n m_i - \frac{(\sum_{i=1}^n m_i)^2 + V}{2B} \geq 0$$

Se i minimi caricamenti  $m_i$  vengono fissati singolarmente, soddisfare la condizione di non svantaggiosità globale è tanto più facile tanto minori sono i valori di  $V$  che, a parità dei contributi  $\sigma_i^2$ , risulta essere più piccola quando i rischi non sono tra loro correlati. Riflettendo su questa conclusione diventa evidente una delle condizioni alle quali conviene riassicurare e accettare in riassicurazione, cioè la possibilità di creare, attraverso cessioni e assunzioni, un portafoglio di rischi poco o per nulla correlati. Diventa fondamentale operare su un mercato globale, agendo in ambito internazionale su aree di provenienza dei rischi geograficamente e ambientalmente diverse. I grandi riassicuratori riescono a mettere in atto in questo modo la cosiddetta "diversificazione geografica".

Come anticipato all'inizio del paragrafo, l'ipotesi di un importo certo per la riserva libera  $R$ , che fino ad ora abbiamo utilizzato, non è realistica ma è stata adottata per ragioni di semplicità. Da questo momento la riserva libera  $R$  sarà rappresentata da un valore aleatorio, per la precisione la somma di una componente certa e di una aleatoria generata dall'esistenza di operazioni aleatorie già assunte dalla Compagnia al momento della valutazione di vantaggiosità di un nuovo contratto. Considerando poi che l'acquisizione dei contratti avviene sequenzialmente nel tempo sarebbe ragionevole ricorrere a funzioni di utilità che, al crescere delle potenzialità economiche, siano

caratterizzate da avversione al rischio decrescente. Anche in questo caso per ragioni di semplicità le ipotesi dei casi analizzati sono invece basate su politiche ad orizzonte finito, ovvero immaginando l'acquisizione dell'intero portafoglio in un unico momento.

Il secondo approccio con il quale l'assicuratore può valutare il caricamento minimo di sicurezza e le relative politiche riassicurative è il criterio della probabilità di rovina.

L'ipotesi di partenza prevede che l'assicuratore all'inizio dell'esercizio abbia a disposizione la riserva di sicurezza  $R$  e la possibilità di stipulare un certo numero di contratti inerenti rischi analoghi, stocasticamente indipendenti. Se il numero dei contratti è sufficientemente ampio, il guadagno globale del portafoglio nell'esercizio è un importo aleatorio  $G$  con distribuzione normale

$$G \sim N(m, \sigma^2)$$

dove  $m$  è la somma dei caricamenti e  $\sigma^2$  è la somma delle varianze. La probabilità  $p$  che a fine esercizio risulti  $G \leq -R$ , e si renda necessario il rifinanziamento della dotazione iniziale  $R$  del riassicuratore (significato di "rovina"), è data da

$$p = Prob \{G \leq -R\} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-R} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

che, con la sostituzione  $\frac{x-m}{\sigma} = t$ , diventa

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{R+m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi \left( -\frac{R+m}{\sigma} \right)$$

dove  $\Phi(x)$  è la funzione di ripartizione della variabile casuale normale standardizzata.

La probabilità di rovina  $p$  è definita quando è noto l'indice di stabilità del portafoglio, ovvero il valore del rapporto  $I = \frac{R+m}{\sigma}$  e ne è funzione decrescente.

Per ipotesi fissiamo il livello massimo di probabilità di rovina accettabile a  $p_0$ , diventa necessario operare sulle variabili decisionali  $R$ ,  $m$  e  $\sigma$  scegliendo i valori  $R'$ ,  $m'$  e  $\sigma'$  in modo da realizzare la condizione:

$$\frac{R' + m'}{\sigma'} = -\Phi^{-1}(p_0)$$

Mantenendo fisso il livello di  $R$ , bisogna cercare di aumentare i carichi singoli  $m$ , rispettando i vincoli che il mercato impone, oppure ridurre lo scarto quadratico medio  $\sigma$ . La riassicurazione è lo strumento ideale per ridurre  $\sigma$ , ricordando che, a causa del prezzo da pagare al riassicuratore, ci sarà anche una riduzione di  $m$ .

Quando il portafoglio è costituito da  $n$  rischi tra loro indipendenti ed egualmente distribuiti, con  $m_0$  a rappresentare il guadagno medio e  $\sigma_0$  lo scarto quadratico medio si ha

$$\frac{R + m}{\sigma} = \frac{R + n m_0}{\sigma_0 \sqrt{n}}$$

e l'indice di stabilità è una funzione di  $n$  con un minimo relativo in  $n_0 = \frac{R}{m_0}$ . La probabilità di rovina è dunque massima quando il numero dei contratti è pari a  $n_0$ , decresce (al crescere di  $n$ ) per  $n > n_0$  e decresce (al decrescere di  $n$ ) per  $n < n_0$ .

Analizzando questo ipotetico portafoglio alla luce del criterio dell'utilità quadratica attesa la condizione di non svantaggiosità da rispettare è

$$n m_0 - \frac{n^2 m_0^2 + n \sigma_0^2}{2B} \geq 0$$

che per assegnati valori di  $m_0$  e  $\sigma_0$  può esser scritta come

$$n \leq \bar{n} = \frac{1}{m_0} \left[ 2B - \frac{\sigma_0^2}{m_0} \right]$$

dove  $\bar{n}$  dipende linearmente da  $B$  ed è pertanto funzione decrescente dell'avversione al rischio  $\frac{1}{B}$ .

Sulla base delle ipotesi appena descritte diventa possibile confrontare i due criteri, dell'utilità attesa e della probabilità di rovina nell'esercizio, notando immediatamente come siano condizionati dall'importo  $B$  (parametro della funzione di utilità della Compagnia) e dal valore della riserva iniziale  $R$ . Di norma  $B$  è molto maggiore di  $R$ , ma in condizioni generali le caratteristiche del portafoglio (guadagno medio e varianza) assumono comunque rilevanza. I risultati prodotti dall'applicazione dei due diversi criteri possono essere tra loro discordi perché sono ispirati a concezioni diverse: il criterio della probabilità di rovina nell'esercizio focalizza l'attenzione sulla preoccupazione di un possibile azzeramento della riserva iniziale, mentre il criterio dell'utilità attesa cerca di individuare le condizioni che possano massimizzare la

vantaggiosità. Dal punto di vista riassicurativo, tuttavia, le soluzioni tendono a portare verso soluzioni simili per la ricerca di una politica riassicurativa ottimale.

### 1.3 - Motivazioni tecniche e benefici

Nel 1979 Cramer scrisse: *“lo scopo basilare della riassicurazione è di offrire protezione contro:*

*il verificarsi di uno o più sinistri di entità molto rilevante,*

*l’accumulo di perdite derivanti da un singolo sinistro,*

*le oscillazioni del danno aggregato annuale rispetto al valore atteso”.*

Dalle sue parole è evidente come oltre agli eventi catastrofici, le fluttuazioni del numero dei sinistri rispetto al valore atteso siano un altro aspetto a cui prestare particolare attenzione. L’obiettivo di ogni Compagnia deve essere quello di costruire un portafoglio con una sufficiente omogeneità qualitativa e quantitativa dei rischi. Ogni assicuratore deve cercare di raggiungere la totale omogeneità attraverso le sue scelte di business, ma viste le condizioni attuali del mercato è molto difficile. La riassicurazione potrebbe essere la migliore soluzione al problema. Prima di parlare di riassicurazione è fondamentale per ogni assicuratore individuare il cosiddetto “pieno di conservazione”, tenendo conto delle LoB (Line of Business) coinvolte nell’attività assicurativa, delle disponibilità di capitale, delle politiche di governance, della tolleranza al rischio ecc.

Il pieno di conservazione determina la struttura del trattato di riassicurazione. Lo scopo della riassicurazione si dimostra dunque prettamente tecnico, individuato il pieno di conservazione, ovvero i rischi e le relative possibili perdite materiali di cui l’assicuratore può farsi carico, attraverso la riassicurazione egli cerca di ridurre le conseguenze dei possibili eventi sfavorevoli. Le perdite non vengono annullate, verrebbe meno l’attività di assicurazione dei rischi, ma la sopportazione delle conseguenze dei sinistri è senz’altro più agevole.

I benefici della riassicurazione sono molteplici:

- la possibilità di prendersi in carico rischi che singolarmente non sarebbero sostenibili. La riassicurazione offre l’opportunità di avere più flessibilità nella misura e nei rischi che una Compagnia può assumersi. Grazie ad essa diventa possibile ampliare il volume d’affari senza dover incrementare il capitale di base;

- una migliore distribuzione su scala internazionale delle perdite. I paesi meno sviluppati sono più soggetti a catastrofi naturali, la riassicurazione su questi eventi distribuisce le perdite su scala mondiale;
- la riduzione della volatilità dei sinistri migliorando il profilo rischio-rendimento. Se consideriamo il ramo Non-life la riassicurazione degli eventi catastrofici permette alle Compagnie di ricevere, in alcuni casi, indennizzi superiori all'intero capitale detenuto dalla stessa, garantendo stabilità anche in caso di eventi estremamente sfavorevoli. La solvibilità e la stabilità così ottenuta aumentano notevolmente la fiducia degli investitori e degli azionisti della Compagnia;
- la liberazione di capitale. La scelta di sottoscrivere un nuovo business è limitata dal capitale disponibile prima ancora che dal suo eventuale costo. Quando il capitale della Compagnia è interamente assorbito, la riassicurazione permette di trasferire una parte del rischio al riassicuratore, liberando la parte di capitale assorbito ad esso collegata, il tutto senza dover prevedere un aumento di capitale.

## 1.4 - Le tipologie di riassicurazione

### 1.4.1 - La riassicurazione facoltativa e la riassicurazione obbligatoria

Nella storia delle riassicurazioni la più antica distinzione tra due tipologie riassicurative è tra obbligatoria e facoltativa.

La riassicurazione obbligatoria consiste nell'accordo tra cedente e cessionario a stipulare un trattato che obbliga la prima a trasferire alla seconda i rischi in esso previsti secondo le modalità specificate. La cessionaria deve accettare il trasferimento del rischio. Le principali forme di riassicurazione utilizzate nel mercato sono obbligatorie, ovvero gestite attraverso dei trattati che vengono sottoscritti da entrambe le parti e nei quali vengono preventivamente specificate tutte le condizioni. La scelta di ricorrere ad un trattato è legata alla necessità di rendere automatiche le operazioni di riassicurazione, così da rendere simultaneo l'inizio della copertura del rischio da parte dell'assicuratore e del riassicuratore. Accettando i trattati, il riassicuratore ha spontaneamente deciso di rinunciare alla facoltà di selezionare i rischi, ottenendo in cambio la possibilità di alimentare il suo portafoglio in modo regolare e più abbondante.



La riassicurazione facoltativa è la tecnica riassicurativa più flessibile, dove non è previsto il rispetto rigoroso di un trattato ma è possibile adattare la struttura del contratto caso per caso sulla base delle necessità del cedente, fermo restando che il cessionario sia d'accordo. Questa tipologia non è dunque disciplinata da alcuna legge, è governata dalla consuetudine. Diventa così possibile riassicurare dei rischi speciali, non previsti nei trattati, a patto che si trovi un accordo che sia in grado di soddisfare sia il cedente che il cessionario. Gli svantaggi della riassicurazione facoltativa sono principalmente di carattere organizzativo e gestionale, non essendo previsti nei trattati standard per la stesura del contratto è necessaria una fase di contrattazione. Questa è una fase molto delicata, non è infatti garantito che si riesca a trovare una controparte riassicurativa disposta a sottoscrivere il rischio al prezzo desiderato dalla Compagnia. Solo nel caso in cui la contrattazione abbia esito positivo si prosegue con la fase di stesura e, successivamente, di verifica. L'ultima fase prevede che venga monitorato il rispetto delle voci inserite nel contratto da parte di entrambe le parti. Nel concreto le riassicurazioni facoltative vengono solitamente stipulate a completamento di un trattato, per gestire aspetti che in esso non sono previsti.

#### 1.4.2 - La riassicurazione proporzionale e la riassicurazione non proporzionale

La principale classificazione rispetto alla modalità di cessione dei rischi è tra riassicurazione proporzionale e riassicurazione non proporzionale. I trattati proporzionali prevedono la ripartizione ex-ante dei rischi mentre i trattati non proporzionali la ripartizione ex-post del danno.

I trattati proporzionali sono caratterizzati dalla ripartizione a priori del rischio, nella consapevolezza che una percentuale prestabilita del danno ad esso collegato sarà trasferita al riassicuratore. L'intervento del riassicuratore è quindi certo.

I trattati non proporzionali invece si riferiscono direttamente al danno, prevedono una *priorità* al di sotto della quale non è necessario l'intervento del riassicuratore. Rispetto ai trattati proporzionali sono più recenti, la loro introduzione risale a circa 50 anni fa.

#### 1.4.2.1 - I trattati proporzionali

I trattati proporzionali sono i più antichi, i primi trattati riassicurativi introdotti nel mercato assicurativo. La loro comparsa risale infatti all'età dei mercanti e dei commerci marittimi, dove per far fronte ai grossi rischi e costi che le spedizioni via mare presentavano i mercanti si rivolgevano agli assicuratori per avere a disposizione del capitale con cui finanziare il viaggio, in cambio della restituzione della somma prestata maggiorata dagli interessi. Gli assicuratori si assumevano dunque una parte del rischio, valutando la convenienza dell'operazione solo sulla base della propria esperienza, senza avere a disposizione gli strumenti di oggi (distribuzioni di probabilità, statistica e i tassi d'interesse).

I primi assicuratori potevano essere assimilati a degli scommettitori, con la differenza che su quelle scommesse volevano creare un solido business. Proprio cercando questa solidità iniziarono a scambiarsi tra loro una quota dei rischi che si erano assunti con i mercanti, così facendo capirono che il rischio complessivo diminuiva. Questa pratica mise le basi ai concetti di mutualità e diversificazione, che verranno poi nei secoli successivi analizzati e definiti in ogni loro aspetto. Lo scambio di rischi tra gli assicuratori dall'epoca delle spedizioni mercantili è stata la prima rudimentale forma di riassicurazione proporzionale della storia.

Il mercato assicurativo nei secoli ha poi assunto un ruolo sempre più importante nella gestione del rischio fino ad arrivare ad oggi, dove ricopre un ruolo centrale nel sistema finanziario. Questa evoluzione durata secoli ha prodotto le due principali tipologie di trattati proporzionali: il *Quota share* e il *Surplus*.

##### Quota share (proporzionale in Quota)

Il primo trattato proporzionale è il Quota share o “in quota globale” che prevede la cessione di una quota dell'intero portafoglio al riassicuratore.

Indicando con  $\tilde{Z}^{(i)}$ <sup>1</sup> il costo totale dei sinistri che colpiscono il rischio *i*-esimo nel portafoglio della Compagnia cedente, con

---

<sup>1</sup> Le lettere maiuscole soprasssegnate da tilde, come  $\tilde{Z}$ , rappresenteranno d'ora in avanti le variabili casuali

$$\tilde{Z}^{(i)} = \sum_{h=1}^{N_i} \tilde{Z}_h^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N$$

Nel caso di riassicurazione Quota share il cedente trattiene una parte del singolo sinistro:

$$\tilde{Z}_{ced}^{(i)} = r \tilde{Z}^{(i)} \quad 0 \leq r < 1$$

dove il valore di  $r$  è costante.

Questa operazione viene ripetuta per l'intero portafoglio riassicurato, considerando una quota di ritenzione  $r$  uguale per tutti gli  $n$  rischi coinvolti. Indichiamo con  $\Gamma$  il totale trattenuto dalla cedente. Otteniamo:

$$\Gamma = \sum_{i=1}^n \sum_{h=0}^{N_i} r \tilde{Z}_h^{(i)}$$

che rappresenta il valore globale trattenuto dalla cedente.

### Surplus (proporzionale per eccedente)

Il secondo trattato proporzionale più utilizzato è il trattato Surplus, più articolato e specifico rispetto al Quota share.

La formula del trattato Surplus è definita rischio per rischio, il che può diventare un limite laddove si debba fronteggiare l'impatto di valori eccezionali del danno aggregato  $\tilde{X}_{tot}$ , soprattutto nel caso in cui l'eccezionalità stia nel numero dei sinistri piuttosto che nell'entità del danno che ogni sinistro produce. La struttura di questa forma riassicurativa fa riferimento ai valori assicurati  $Q_i$  per ciascun rischio  $i$  nel portafoglio della Compagnia cedente ( $i = 1, \dots, N$ ). La Compagnia ed il riassicuratore si accordano su un limite di ritenzione (c.d. "pieno di conservazione") che viene indicato con  $M$  per ogni sinistro  $i$ , in questo modo possono delinearci due situazioni:

- I rischi con  $Q_i \leq M$  rimangono interamente a carico della cedente
- I rischi con  $Q_i > M$  sono condivisi in proporzione all'aliquota di ritenzione  $r_M(Q_i) = M/Q_i$  in modo che il cessionario sia responsabile per un ammontare pari a  $(1 - r_M)\tilde{Z}^{(i)}$ .

L'aliquota di ritenzione trattenuta dal cedente può essere così definita:

$$r_M(Q_i) = \min(1, M/Q_i)$$

mentre la quota totale a carico del cedente sarà:

$$\Gamma = \sum_{i=1}^n \sum_{h=0}^{N_i} r_i \tilde{Z}_h^{(i)}$$

dove  $r_i = r_M(Q_i)$  sarà l'aliquota per l' $i$ -esima polizza.

Il trattato Quota share agisce nello stesso modo per tutti i rischi (l'aliquota  $r$  uguale per l'intero portafoglio) mentre nel trattato Surplus l'aliquota dipende dal valore assicurato  $Q_i$  o dal massimale garantito  $M$  che riguarda singolarmente ogni rischio, determinando così una specifica aliquota per ogni contratto  $i$  nel portafoglio della cedente.

#### 1.4.2.2 - I trattati non proporzionali

I primi trattati non proporzionali sono comparsi nei mercati negli anni '70 per far fronte alle nuove necessità del mercato assicurativo in alternativa alle forme proporzionali. L'esigenza di fronteggiare per specifiche LoB, o rami di attività, un numero sempre più elevato di eventi catastrofali ha avuto come diretta conseguenza l'introduzione di trattati non più improntati sul rischio ma piuttosto sul danno.

I trattati non proporzionali più comuni sono senza dubbio i trattati XL (“excess of loss” o per eccesso sinistri) e gli Stop Loss (per eccesso di perdita).

Il concetto di “pieni di conservazione” tipico dei trattati proporzionali si ripresenta anche nelle tipologie non proporzionali sotto una diversa forma: la *priorità*. Come vedremo in seguito la priorità avrà un significato leggermente diverso a seconda della tipologia di trattato considerata.

#### Excess of Loss – XL

I trattati Excess of loss si basano su due grandezze di riferimento: la *priorità* (in inglese *deductible*) e la *portata*. La prima rappresenta l'esposizione massima in termini monetari riferita al singolo sinistro che la cedente ha intenzione di conservare, la seconda, invece, è un valore monetario, sempre riferito al singolo sinistro, oltre al quale il riassicuratore non è più disposto farsi carico. Indicheremo con  $L_i$  la *priorità* dell' $i$ -esimo contratto. La riassicurazione per eccesso di danno garantisce alla cedente un impegno per ogni sinistro riassicurato pari a

$$\tilde{Z}_L^{(i)} = \min(L_i, \tilde{Z}^{(i)})$$

da cui l'esposizione totale

$$\Gamma = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{h=0}^{N_i} \min(L_i, \tilde{Z}_h^{(i)}) \right)$$

L'intervento del riassicuratore diventa dunque necessario solo nel caso in cui  $\tilde{Z}_h^{(i)} > L_i$  per una quota pari a  $\tilde{Z}_h^{(i)} - L_i$ . La parte ceduta al riassicuratore è collegata allo specifico sinistro, viene definita una forma “rischio per rischio”, non garantisce quindi alcuna copertura dalle fluttuazioni del numero dei sinistri.

L'aspetto più complesso relativo ai trattati non proporzionali, in particolare a quelli XL, è legato alla determinazione del premio del riassicuratore. A differenza dei trattati proporzionali dove basta rapportare i premi incassati alla quota di detenzione del rischio  $r$ , in questo caso il calcolo del premio dovrà essere frutto di valutazioni specifiche utilizzando tecniche statistico-attuariali. Gli attuari incaricati dovranno inoltre ricorrere al loro *expert judgement*<sup>2</sup> nelle valutazioni preliminari e finali ai fini del calcolo.

### Stop Loss

Il trattato Stop loss offre la stessa tipologia di copertura offerta dal contratto Excess of loss, ma questa volta riferendosi al danno globale e non al singolo sinistro. In questo modo è possibile proteggere le Compagnie anche da eventuali fluttuazioni inattese del numero dei sinistri.

La *priorità L* è espressa non più come un valore monetario ma come una percentuale del totale dei premi di portafoglio, viene definita *priorità globale*. In questo trattato non vengono presi in considerazione i singoli sinistri  $\tilde{Z}^{(i)}$  ma viene preso come riferimento il danno totale aggregato:

$$\tilde{X}_{tot} = \sum_{i=1}^n \tilde{Z}^{(i)}$$

---

<sup>2</sup> L'*expert judgement* rappresenta la capacità che ogni attuario deve avere di valutare con occhio critico particolari valori o eventi per i quali gli strumenti statistico-attuariali non sono sufficienti, basandosi sull'esperienza e su casi simili affrontati nel corso degli anni di esercizio della professione

Una volta definito il danno aggregato  $\tilde{X}_{tot}$ , il danno a carico della cedente sarà così determinato:

$$\Gamma = \min(L, \tilde{X}_{tot})$$

Anche per questo trattato l'aspetto più complesso è la determinazione del premio del riassicuratore, che laddove sia prevista una liquidazione differita nel tempo deve necessariamente tenere conto delle dinamiche inflattive che insieme alla distribuzione del danno  $\tilde{X}_{tot}$  determinano il premio. Ipotizzando che il livello di ritenzione rimanga invariato, l'inflazione andrà ad agire sul danno aggregato  $\tilde{X}_{tot}$  attraverso il fattore moltiplicativo  $i > 1$ . Il premio del riassicuratore  $P_{re}$  subirà un incremento pari ad un fattore  $i(M)^* > i$ . La ragione è da individuare nella distribuzione del danno aggregato  $F(x)$ , poiché avrà un'asimmetria molto più piccola di quella del singolo sinistro è lecito attendersi che il rapporto tra  $i^*/i$  sarà piuttosto elevato. Il motivo è semplice: l'inflazione non aumenta solo l'importo del danno, provoca anche l'aumento del numero di sinistri per il quale è previsto l'intervento del riassicuratore visto che il livello di ritenzione è stato mantenuto invariato. L'effetto generato dall'inflazione è assimilabile a quello dell'abbassamento del livello di ritenzione da parte del cedente, la cui conseguenza sarà un premio per il riassicuratore più elevato.

Per ovviare a queste problematiche in molti trattati è inserita la cosiddetta *clausola di stabilità* in forza della quale l'assicuratore è tenuto ad indicizzare il limite di ritenzione  $M$ , adeguandolo nel tempo.

#### 1.4.2.3 - Trattato E.CO.MO.R. e calcolo dei premi dei trattati di riassicurazione

Come appena anticipato il calcolo del premio è una delle principali problematiche. Nella pratica dei mercati riassicurativi il calcolo del premio della riassicurazione per eccesso di singolo sinistro è frequentemente ricondotto alla valutazione del cosiddetto *burning cost*. Il *burning cost* è definito come il rapporto tra l'importo rimasto a carico del cessionario e il monte premi della cedente dell'anno in oggetto. Siano  $C_1, C_2, \dots, C_k$  gli importi a carico del cessionario e  $P_1, P_2, \dots, P_k$  i premi incassati dal cedente in quell'anno, il burning cost  $\tau$  del riassicuratore per l'anno successivo, a patto che non sia variato il tipo di rischio, sarà dato da:

$$\tau = \frac{\sum_1^k C_i}{\sum_1^k P_i}$$

con  $k$  generalmente compreso tra 3 e 5. Un numero  $k$  di anni superiore a 5 avrebbe poca significatività visto che prenderebbe in considerazione valori troppo lontani rispetto al presente. Il burning costs  $\tau$  calcolato deve essere gravato di un caricamento  $\eta$ , relativo a spese e margine di sicurezza, solitamente pari al 40-50%, arrivando ad ottenere il premio per la copertura dichiarata in trattato dal riassicuratore pari a  $\mathfrak{T} = \tau (1 + \eta)$ .

Il secondo problema del calcolo del premio è legato alla liquidazione differita ed ai conseguenti effetti inflattivi. Il trattato non proporzionale E.CO.MO.R. (Excédent du COût Moyen Relatif) introdotto dall'attuario francese Thépaut prova a risolvere questa problematica. Al termine dell'esercizio il cessionario classifica in ordine decrescente i sinistri registrati, seleziona i primi  $n$  sinistri (ad esempio  $n = 20$  fissato ad inizio periodo) e il riassicuratore copre l'eccesso di ciascuno dei primi  $n - 1$  sinistri all' $n$ -esimo. Il premio del riassicuratore dipenderà dall'ammontare del risarcimento dell' $n$ -esimo sinistro della graduatoria. L'ipotesi del Thépaut prevede infatti che vengano considerati solo i risarcimenti estremi sul portafoglio della cedente, che ipotizza siano distribuiti con una distribuzione di Pareto, tipica distribuzione di "coda destra". Sotto questa ipotesi, l'entità del premio è determinata se è nota l'entità del risarcimento dell'  $n$ -esimo sinistro, che rappresenta la classica *priorità* di un trattato stop loss. Considerando la funzione di ripartizione di una variabile casuale di Pareto:

$$H_Y(x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha \quad \text{per } x_0 \leq x < +\infty \quad (\alpha > 1)$$

e indicando con  $x_{(n)}$  il valore osservato del risarcimento corrispondente all' $n$ -esimo sinistro nella graduatoria, l'eccesso medio dei sinistri di entità superiore a  $x_{(n)}$ , ovvero  $E(Y|Y \geq x_{(n)})$ , è uguale a

$$e_n = \frac{\int_{x_n}^{+\infty} H_Y(x) dx}{H_Y(x_n)} = \frac{x_n}{\alpha - 1}$$

Diventa immediato individuare il premio da corrispondere al riassicuratore, pari a  $(n - 1)e_n$ , relativo alla copertura degli eccessi dei primi  $n - 1$  sinistri. La condizione necessaria a mantenere la validità della soluzione presentata è che il parametro di forma  $\alpha$  della Pareto, stimato attraverso l'osservazione statistica, non risenta dell'inflazione.

Si ricorda che il premio è funzione di  $\alpha$ , la varianza non è definita se  $\alpha < 2$ .

### 1.4.3 - La riassicurazione mista

In aggiunta alle normali forme di riassicurazione negli ultimi anni sono state introdotte delle forme ibride, nate dall'unione di due trattati già esistenti. Le forme miste nascono dall'esigenza di correggere dei limiti presenti nei classici trattati e soprattutto per assecondare maggiormente le esigenze dei riassicuratori nel caso di forme non proporzionali di riassicurazione. Ne esistono di vario tipo ma le più utilizzate sono senza dubbio lo *Stop loss modificato* e l'*XL modificato*. Verrà analizzato solo lo *Stop loss modificato* essendo determinabile per analogia il funzionamento dell'*XL modificato*.

#### Stop Loss modificato

Come nel trattato Stop loss classico indichiamo con  $\tilde{X}$  il danno aggregato e con  $L$  il valore della *priorità*. Consideriamo anche l'aliquota di ritenzione  $r$  tipica dei trattati proporzionali. Lo *Stop loss modificato* è così strutturato:

$$\Gamma = \begin{cases} \tilde{X} & \text{se } \tilde{X} \leq L \\ L + r(\tilde{X} - L) & \text{se } \tilde{X} > L \end{cases}$$

con  $r$  compreso tra 0 e 1. La sua struttura è la combinazione tra lo Stop loss tradizionale ( $r = 0$  e  $L \neq 0$ ) e una Quota share di aliquota  $r$ . Questa forma è preferita dai riassicuratori sia rispetto alla Stop loss classica, perché coinvolge l'impegno del cedente anche nel caso in cui venga superata la soglia  $L$ , sia rispetto alla riassicurazione Quota share perché evita che si debba intervenire sui singoli sinistri.



## 2 - La Direttiva Solvency II

### 2.1 - Da dove arriva Solvency II?

Le imprese e, in generale, tutte le attività umane sono esposte al rischio di un fallimento. Gli effetti possono rimanere circoscritti a pochi soggetti o estendersi in modo più o meno permeante sul mercato. La centralità che banche, assicurazioni e società finanziarie assumono nell'attuale società, si pensi ad esempio alle promesse pensionistiche, giustificano l'imposizione di requisiti patrimoniali al fine di limitare, entro una certa probabilità, la possibilità di un loro default.

Fino alla crisi del 2008 si credeva che il mercato finanziario attraverso i suoi meccanismi di trasparenza, libertà e autoregolazione fosse in grado di proteggersi ed anticipare le crisi, di conseguenza le possibilità di default di società finanziarie e grandi banche erano considerate minime.

La crisi nata in America con il crollo del mercato immobiliare ha invece evidenziato la vulnerabilità dell'intero sistema e messo in ginocchio grandi istituzioni ritenute fino ad un attimo prima estremamente solide. In pochi giorni sono venute meno tutte le certezze costruite in decenni di buona gestione riducendo drasticamente la fiducia degli investitori nei settori bancario e finanziario. Il settore assicurativo, meno impattato dagli avvenimenti, ha comunque dovuto fronteggiare la crisi.

I modelli di business del sistema finanziario, fino a quel momento improntati sull'estrema massimizzazione dei profitti senza avere riguardo della dimensione e della correlazione dei rischi assunti, si sono dimostrati deboli e fallimentari. Da quel momento sul mercato si è aperta una profonda riflessione su come considerare la dimensione del "rischio" nella gestione ordinaria delle società, riflessione cui hanno fatto seguito le diverse Autorità di controllo nel rivedere la normativa sulla solvibilità (Basilea, con le sue varie evoluzioni per le banche e Solvency II per le Compagnie di Assicurazione).

Sono oggi 38 le Compagnie di Assicurazione commissariate nel tempo per via di problemi patrimoniali e *mala gestio* da parte degli amministratori. Molte sono oggi in liquidazione coatta amministrativa, la procedura che per le assicurazioni corrisponde al fallimento e che prevede la nomina di liquidatori al fine di smobilizzare il patrimonio della stessa per ricavare la liquidità necessaria per rimborsare i creditori (tra cui gli assicurati). La loro genesi si perde nel tempo, per una di esse infatti il commissariamento

fu firmato dal Presidente della Repubblica Giovanni Leone nel 1976. A fronte di questi 38 commissariamenti il passivo totale risulta essere pari a 5,2 miliardi di euro mentre i relativi creditori sono circa 500.000; su queste vicende sono circa 500 i liquidatori e i consiglieri di sorveglianza che si sono succeduti nel tempo. Circa 17 Compagnie sono in liquidazione da oltre 30 anni, 4 hanno superato la soglia dei 40 anni. L'attivo residuo a copertura dei 5,2 miliardi di euro dovuti oggi ammonta a 920 milioni (già al netto di quanto liquidato ai creditori privilegiati).

L'obiettivo dell'elaborato non sarà quello di analizzare la crisi del 2008, di come sia esplosa e si sia propagata a livello mondiale, ma è doveroso partire dagli avvenimenti di quei giorni perché sono stati la scintilla che ha dato il via a numerose riforme e regolamentazioni dei mercati tra cui, come si diceva, Basilea e Solvency II.

Nel 2008 il quadro normativo in vigore per il settore assicurativo era il c.d. Solvency I, un insieme di regole che attraverso semplici meccanismi di calcolo – basati su grandezze tecniche reperibili dal bilancio di ogni singola Compagnia (principalmente premi e riserve) – permetteva di determinare i requisiti di capitale per le Compagnie assicurative. Per circa 30 anni tale sistema è rimasto in vigore in quanto semplice da utilizzare e da controllare. I suoi limiti erano altrettanto evidenti: il sistema non teneva minimamente conto del rischio associato al business posto in essere dalla Compagnia, in particolare dei rischi finanziari a cui si dovevano esporre per ottenere dei rendimenti dai premi incassati e con i quali, in un secondo momento, far fronte alle obbligazioni future in favore degli assicurati. I requisiti di capitale hanno lo scopo di salvaguardare la Compagnia assicurativa da eventi avversi capaci di comprometterne la solvibilità<sup>3</sup>, impedendone la rovina e garantendo agli assicurati i benefici promessi. Non prevedere alcun legame tra il metodo di calcolo dei requisiti di capitale e l'andamento dei principali fattori di rischio cui è soggetta la Compagnia, era il più grosso limite di Solvency I.

A questa problematica si aggiungeva la necessità di armonizzare a livello europeo il quadro normativo in ambito assicurativo, evitando che le leggi nazionali potessero avvantaggiare alcuni player che operavano in Stati con requisiti minimi di sicurezza e solvibilità più blandi.

Scopo ultimo della riforma, ma non per questo meno importante, era quello di

---

<sup>3</sup> La solvibilità è definita come la capacità di far fronte agli impegni finanziari assunti. In particolare nel settore assicurativo è la capacità di far fronte a tutte le obbligazioni che la Compagnia si è assunta nei confronti degli assicurati

consentire la confrontabilità dei diversi operatori offrendo chiavi di lettura, anche per non addetti ai lavori, circa la loro situazione patrimoniale, finanziaria e reddituale alla luce dei rischi assunti, favorendo quindi una trasparenza e confrontabilità prima impossibile.

La Direttiva 2009/138 CE è stata pubblicata nel 2009 con l'intento di tutelare i mercati e i consumatori. Ci sono voluti 6 anni per produrre ed emanare gli atti delegati necessari a definire le misure tecniche di attuazione ma, infine, Solvency II è stata recepita dai Paesi membri ed è entrata in vigore il 1° gennaio 2016. La normativa rappresenta un compromesso tra le diverse letture dei rischi offerte dai Paesi dell'Unione, è per questo che ha richiesto molto tempo per essere varata ed è ancora oggi soggetta a revisioni e aggiornamenti continui.

### Solvency II - Le tappe



Figura 1 – Tappe di Solvency II

## 2.2 - I principi generali

Solvency II è una regolamentazione prudenziale che pone al centro della sua struttura il rischio, con l'obiettivo di misurarlo e valutarlo. L'attenzione degli stakeholders (Supervisore, mercato e Compagnia) viene focalizzata sulla qualità e quantità del rischio che ogni Compagnia decide di assumere con le sue decisioni di impegno verso gli assicurati e di investimento delle disponibilità finanziarie.

Il nuovo sistema vuole coprire tutti i rischi a cui l'attività assicurativa è esposta

con una probabilità del 99,5 per cento l'anno (VaR<sup>4</sup> 99,5%). Dalla distribuzione di probabilità dei rischi vengono esclusi solo quelli estremi, cui viene assegnata una probabilità di accadimento non superiore allo 0,5%. L'intenzione è quella di determinare livelli di capitale che possano limitare la possibilità di fallimento delle società assicurative ad una volta ogni 200 anni. La realtà però non è facilmente prevedibile e i casi limite che vengono esclusi, o meglio non considerati, nelle valutazioni di Solvency II sono spesso gli eventi che impattano maggiormente sulla stabilità delle Compagnie.

Il matematico libanese Nassim Nicholas Taleb li ha definiti “cigni neri”, dal titolo del suo celebre libro *Il cigno nero*, sono quegli eventi del tutto inattesi ma che periodicamente si verificano con conseguenze catastrofiche.

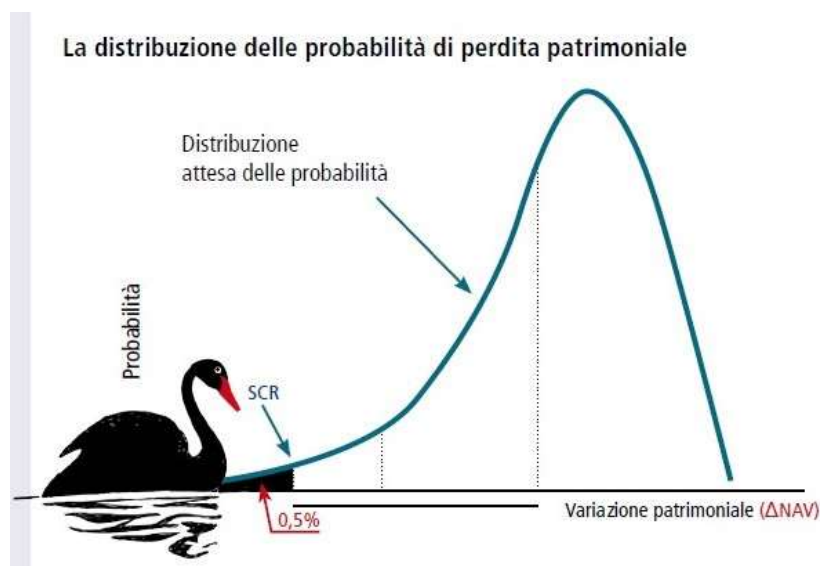


Figura 2 – I “cigni neri” nella distribuzione di probabilità

La crisi del 2008 è un cigno nero, ancora oggi a distanza di più di 10 anni ne subiamo alcune delle sue conseguenze, ma esistono un'infinità di esempi, in ogni ambito della vita e dell'economia. Quello che Taleb cerca di spiegare nel suo libro è che per comprendere a fondo un evento, soprattutto in ambiti dove l'incertezza non è eliminabile, è più importante concentrarsi sugli estremi, visto che quasi sempre implicano uno straordinario effetto cumulativo. Sull'argomento in questione è interessante anche il punto di vista di Faisal Khan un editorialista di origini indiane, ma oggi cittadino

---

<sup>4</sup> Il VaR o Value at Risk è una misura di rischio che definisce il valore potenziale della perdita di un asset rischioso o di un portafoglio per un dato livello di confidenza  $\alpha$ , considerando un certo orizzonte temporale. Nel caso specifico dell'SCR individua il livello di capitale minimo necessario ad evitare di incorrere in perdite, di essere quindi insolvente, con una probabilità pari al 99,5 %

canadese, che per più di un decennio è stato trader a Wall Street: *“Gli eventi più violenti non sono destinati a restare confinati agli investitori finanziari, ma si estenderanno alla generalità delle popolazioni con conseguenze di difficile misurazione ma la cui violenza è dimostrata. Al momento dell’esplosione di una bolla finanziaria<sup>5</sup>, il livello di integrazione raggiunto dai mercati aumenta poi il rischio di contagio e di crescita degli scompensi nella distribuzione della ricchezza tra paesi e tra classi sociali. Troppo spesso la regolamentazione non sembra in grado di contenere gli appetiti di un capitalismo che, negli ultimi vent’anni, si è definitivamente appropriato del potere della finanza, mostrando di saperne forzare gli effetti”*. Diventa evidente come questi eventi estremi una volta accaduti vadano a coinvolgere l’intera economia, non solo il settore assicurativo o finanziario. La scelta di Solvency II è quella di attribuire una probabilità molto bassa, lo 0,5%, a questi eventi estremi, nella consapevolezza che al loro verificarsi provocheranno conseguenze catastrofiche. La Direttiva Solvency II vuole mettere il rischio al centro dell’attenzione delle Autorità di Vigilanza, imponendo alle Compagnie di disporre un capitale tale da garantire la copertura di tutti i rischi a cui si è esposta, qualunque sia la tipologia o la natura.

L’idea è quella di costituire un sistema di controlli interni che attraverso processi e procedure conduca ad una responsabilizzazione della Compagnia e dei suoi organi societari, cercando di creare il giusto mix di investimenti capaci di soddisfare gli azionisti nel rispetto delle regole imposte dalla normativa. La ricerca dell’equilibrio vincente nel trade-off tra rendimenti e solvibilità è la chiave di successo del nuovo sistema. Questo equilibrio tra rischi e requisiti patrimoniali è dinamico esattamente come il mercato, entrambi sono dunque in continuo mutamento. Per rendersi meglio conto della dinamicità di questo equilibrio è sufficiente pensare che gli strumenti utilizzati per fronteggiare il rischio sono attività finanziarie che, per natura, sono strumenti volatili<sup>6</sup>. La valutazione delle attività e delle passività dello Stato patrimoniale con Solvency II diventa, di conseguenza, un aspetto chiave; deve essere eseguito secondo regole precise e con particolare attenzione alla loro valorizzazione. I presidi patrimoniali tipici di una

---

<sup>5</sup> La bolla finanziaria o “bolla speculativa” è una particolare fase di mercato caratterizzata da un aumento considerevole e ingiustificato dei prezzi di uno o più beni, dovuto ad una crescita della domanda repentina e limitata nel tempo. Al momento dello “scoppio” vengono ripristinati i valori originari dei beni in questione, generando un crollo altrettanto improvviso dei mercati

<sup>6</sup> In ambito finanziario la volatilità rappresenta la misura della variazione percentuale del prezzo di uno strumento finanziario nel corso del tempo

Compagnia assicurativa sono rappresentati da:

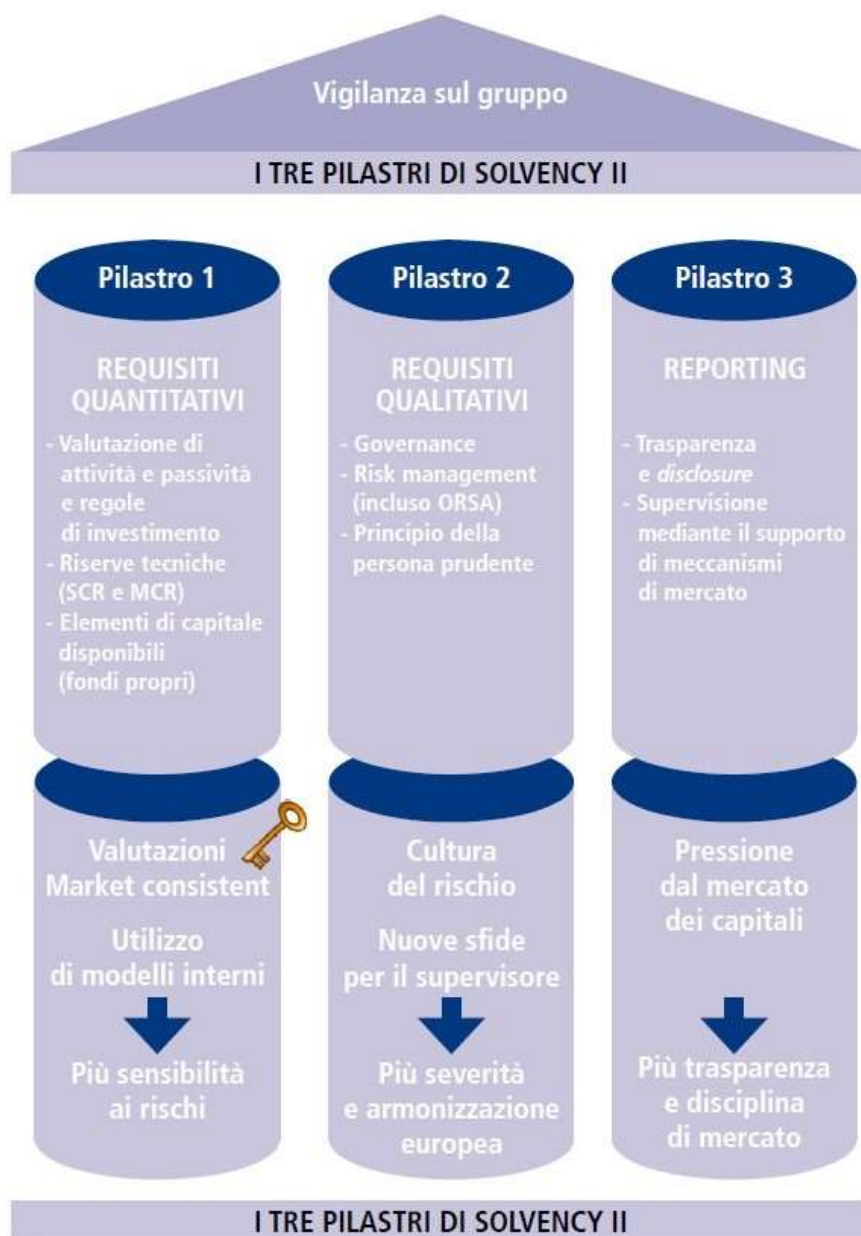
- le riserve tecniche necessarie a coprire gli impegni della Compagnia nei confronti degli assicurati
- gli investimenti dedicati alla copertura delle riserve tecniche
- il requisito di solvibilità necessario a fronteggiare i rischi a cui la Compagnia è esposta

Si tratta, a tutti gli effetti, di collegare attraverso presidi che ne valutino il relativo rischio le attività caratteristiche delle Compagnie, iniziando dalla raccolta dei premi calcolati con tecniche statistico-attuariali basate su distribuzioni di probabilità, all'investimento degli stessi, alla riservazione ed alla gestione dei relativi sinistri qualora si verificano. Eventi inattesi o errori nelle previsioni possono, ad esempio, rendere i premi accantonati inadeguati a fronteggiare gli impegni assunti dalla Compagnia. Il concetto può essere esteso anche agli investimenti considerate le fluttuazioni tipiche dei mercati finanziari. Il Solvency Capital Requirement e il Minimum Capital Requirement nascono per soddisfare questa esigenza di stabilità.

La valutazione di “mercato” (market consistent) diventa l'unità di misura necessaria ad allineare la nuova disciplina di vigilanza in coerenza con quanto previsto dai principi contabili internazionali. In questa nuova accezione: *“le attività e le passività sono valutate all'importo al quale potrebbero essere scambiate – trasferite o regolate – tra parti consapevoli e consenzienti in un'operazione svolta alle normali condizioni di mercato”*.

### 2.3 - I tre pilastri

La Direttiva Solvency II pone le sue fondamenta su 3 pilastri, che insieme danno origine ad un sistema integrato: il primo determina i requisiti quantitativi (valutazione delle obbligazioni e diversificazione degli investimenti), il secondo è orientato ai requisiti qualitativi e introduce il sistema di Governance, il terzo stabilisce requisiti e obblighi informativi.



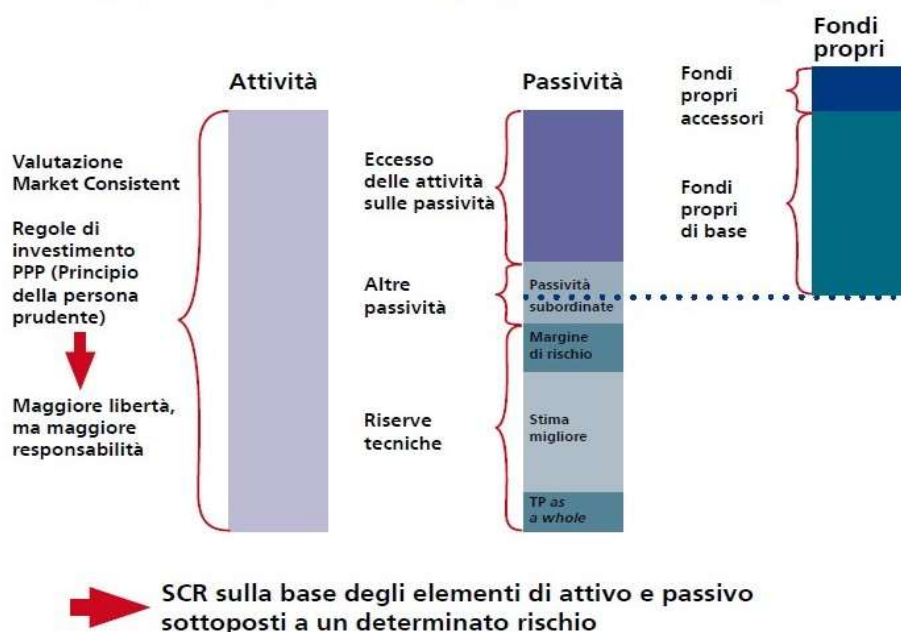
*Figura 3 – I 3 pilastri*

Con questa nuova struttura le Autorità di Vigilanza non sono più semplicemente chiamate ad una mera attività di sorveglianza a posteriori, devono infatti monitorare costantemente le evoluzioni delle scelte aziendali, vagliando le decisioni più impegnative con lo scopo di estrapolare segnali anticipatori di possibili crisi e monitorando il settore. L'obiettivo è cercare di prevenire eventuali crisi dei mercati, come avvenuto nel 2008, intervenendo preventivamente sull'operato delle Compagnie assicurative.

### 2.3.1 - Il primo pilastro

Le metodologie quantitative introdotte da Solvency II sono state una delle novità più complesse da gestire perché hanno richiesto forti investimenti tecnologici ed organizzativi alle Compagnie. Nel primo pilastro vengono definite le metodologie per misurare i rischi e calcolare i requisiti di capitale. Come si diceva in precedenza il primo passo consiste nel redigere un nuovo bilancio, market consistent, della Compagnia in luogo di quello utilizzato a fini civilistici:

**Il bilancio patrimoniale di una compagnia secondo Solvency II**



*Figura 4 – Bilancio Solvency*

Gli elementi della Stato patrimoniale devono essere valutati in ottica Solvency II, al fine di determinare i requisiti di capitale necessari alla solvibilità della Compagnia. In particolare, per le attività la normativa prevede: *“assets shall be valued at the amount for which they could be exchanged between knowledgeable willing parties in an arm’s length transaction”*<sup>7</sup>, mentre per le passività: *“liabilities shall be valued at the amount for which they could be transferred, or settled, between knowledgeable willing parties in an arm’s length transaction”*<sup>8</sup>. Le componenti da valutare e calcolare secondo metodologie stabilite dalla Direttiva 2009/138 CE sono:

- Riserve tecniche

<sup>7</sup> Art. 75 Par 1.a Direttiva 2009/138/CE

<sup>8</sup> Art. 75 Par 1.b Direttiva 2009/138/CE



- Investimenti
- Requisiti di capitale

Riserve tecniche e investimenti sono i punti di maggiore differenziazione contabile rispetto al bilancio civilistico, bilancio che viene utilizzato sia per calcolare l'utile di esercizio e la relativa tassazione che per valutare i dividendi da distribuire agli azionisti.

### 2.3.1.1 - Le riserve tecniche

Le riserve tecniche rappresentano l'ammontare di capitale accantonato per far fronte agli impegni futuri presi nei confronti degli assicurati. Il loro valore è definito dalla Direttiva Solvency II: *“the value of technical provisions shall correspond to the current amount insurance and reinsurance undertakings would have to pay if they were to transfer their insurance and reinsurance obligations immediately to another insurance or reinsurance undertaking”*<sup>9</sup>. Questo valore è facilmente determinabile solo nell'ipotesi in cui siano disponibili sul mercato finanziario degli strumenti che possano replicare i flussi attesi degli impegni assunti dalla Compagnia, i c.d. rischi “hedgeable”. Il valore delle riserve dei rischi “non-hedgeable” viene calcolato sommando la *Best estimate* (miglior stima) e il *Risk margin*<sup>10</sup> (margine di rischio).

La Best estimate corrisponde alla media dei flussi di cassa ponderata con la relativa probabilità di verificarsi, attualizzati sulla base della pertinente struttura per scadenza dei tassi di interesse privi di rischio, mensilmente forniti da EIOPA<sup>11</sup>. Le informazioni utilizzate per il calcolo devono essere aggiornate e realistiche, viene calcolata con metodi attuariali e statistici adeguati, applicabili e pertinenti. I flussi di cassa devono tenere conto di tutte le entrate e le uscite di cassa necessarie a far fronte alle obbligazioni. Il valore finale della Best estimate è calcolato al lordo delle riassicurazioni tenendo però conto di tutte le spese e dell'inflazione. Per individuare la distribuzione probabilistica dei flussi di cassa riconducibili ai contratti vengono utilizzati dei modelli statistico-attuariali. La stima deve essere totalmente oggettiva, senza alcuna correzione di tipo prudenziale. Analizzando un caso concreto la BEL (Best Estimate Liabilities) della

---

<sup>9</sup> Art. 76 Direttiva 2009/138/CE

<sup>10</sup> Art. 77 Direttiva 2009/138/CE

<sup>11</sup> EIOPA = European Insurance and Occupational Pensions Authority

riserva premi di una Compagnia Danni nel calcolo della stima considera tutti i flussi di cassa in entrata e uscita: premi futuri, sinistri futuri, spese di gestione dei sinistri allocati e non allocati, costi di gestione delle polizze. La normativa ammette la possibilità di avere un valore negativo da attribuire alla riserva, solo nell'ipotesi in cui i flussi in entrata siano superiori a quelli in uscita. Ai fini di esempio una formula semplificata potrebbe essere:

$$BE_{premi} = CR \cdot VM + (CR - 1) \cdot PVFP + AER \cdot PVFP$$

dove:

$BE_{premi}$  = best estimate riserva premi

$CR$  = combined ratio per anno di generazione e per LoB

$VM$  = unearned premiums per i contratti già sottoscritti

$PVFP$  = valore attuale premi futuri (comprensivi di provvigioni)

$AER$  = expense ratio per le sole spese di acquisizione

L'applicazione di questa formula richiede che i  $CR$  siano stabili ed affidabili, a tal proposito IVASS, attraverso dei chiarimenti ufficiali, ha introdotto successivamente delle regole da rispettare in merito alla loro stima:

$$CR = \frac{\text{sinistri+spes correlate ai sinistri}}{\text{premi al lordo delle spese di acquisizione}}$$

dove:

- i sinistri devono escludere il risultato di run-off (perdite per sinistri pagati + sinistri riservati dell'anno)
- le spese vanno imputate tutte ai premi ad eccezione delle spese di sinistro
- i premi escludono l'aggiustamento dell'anno precedente e sono comprensivi delle spese di acquisizione

Il Risk margin è il margine di sicurezza necessario a garantire che il valore delle riserve tecniche sia equivalente all'importo di cui le Compagnie avranno bisogno per onorare le obbligazioni future, necessario a sopportare eventuali errori di stima o cambiamenti delle condizioni di mercato. Il suo valore è calcolato determinando il costo necessario a costituire un importo di fondi propri ammissibili che sia almeno pari al requisito patrimoniale di solvibilità necessario a far fronte alle obbligazioni per tutta la loro durata di vita. Il tasso da utilizzare nel calcolo del costo del capitale è pari alla maggiorazione rispetto al tasso d'interesse privo di rischio pertinente in cui una

Compagnia incorrerebbe nel caso in cui detenesse un importo di fondi propri ammissibili. Il tasso del costo del capitale è identico per tutte le Compagnie ed è sottoposto a revisione periodica<sup>12</sup>.

La valutazione di Best estimate e Risk margin viene realizzata separatamente. La normativa prevede un'eccezione nel caso in cui i flussi di cassa futuri connessi con le obbligazioni delle Compagnie possano essere riprodotti in modo affidabile utilizzando strumenti finanziari per i quali sia osservabile un valore di mercato affidabile. Stiamo considerando quei rischi pocanzi definiti come "hedgeable", in questo caso il valore delle riserve tecniche è determinato sulla base del valore di mercato di tali strumenti finanziari, senza dover dunque ricorrere alla valutazione separata di Best estimate e Risk margin.

#### 2.3.1.2 - Gli investimenti

La valutazione degli investimenti viene effettuata considerando il loro valore di mercato (market consistent), in linea con quanto già previsto dai principi contabili internazionali. Le Compagnie per determinare il valore degli investimenti possono utilizzare due differenti approcci, il "mark to market" e il "mark to model", applicabili anche in materia di riserve tecniche.

L'approccio mark to market viene utilizzato quando è possibile determinare il valore degli investimenti facendo riferimento alla valutazione di mercato di strumenti finanziari con le medesime caratteristiche, a patto che la valutazione sia affidabile. In questo modo si individua il "fair value" dell'attività finanziaria che costituisce l'investimento della Compagnia direttamente attraverso le quotazioni attuali del mercato.

L'approccio mark to model invece viene applicato nel caso in cui il valore dell'investimento non è individuabile direttamente attraverso il mercato ma è necessario ricorrere a dei modelli finanziari per determinarne una stima (ad esempio Best estimate e Risk margin). Ciò accade quando l'investimento da valutare è costituito da strumenti finanziari complessi, non assimilabili ad alcuno strumento finanziario prezzato dal mercato. A seconda del tipo di investimento da valutare sarà opportuno utilizzare un differente modello finanziario, che può variare tra le Compagnie. Un tempo questo tipo di valutazioni complesse erano tipiche soltanto degli Hedge Funds che utilizzavano il metodo mark to model per valutare la porzione illiquida del proprio portafoglio. Oggi con

---

<sup>12</sup> Art. 77 Direttiva 2009/138/CE

Solvency II la conoscenza dei mercati finanziari è diventata fondamentale anche per tutti coloro che operano nel settore assicurativo.

Le linee guida in materia di investimento sono dettate dal *principio della persona prudente*<sup>13</sup>, selezionando attività finanziarie per le quali i rischi siano adeguatamente identificati, misurati, monitorati e gestiti. L'obiettivo è quello di indirizzare le scelte di investimento verso strumenti finanziari di qualità, che possano supportare il mantenimento della solvibilità aziendale.

Indirizzare le scelte di investimento non significa prevedere un limite di investimento, è garantita, infatti, *libertà di investimento*<sup>14</sup>. Nella formulazione del piano di investimento ogni Compagnia può scegliere liberamente le attività finanziarie da acquistare e gestire, è però tenuta ad avere un capitale adeguato alla sua esposizione globale al rischio. Maggiore è il rischio, maggiore dovrà essere il capitale necessario a garantirne la solvibilità. Diventano fondamentali le scelte di governance e del cda verso una gestione totalmente consapevole di tutti i rischi, con particolare riferimento a quelli di investimento, ma soprattutto il rispetto del cosiddetto "appetito al rischio" della Compagnia.



Figura 5 – Principio della persona prudente

Rispetto a Solvency I, dove erano ben definiti dall'Autorità di Controllo sia i limiti che le tipologie di attivi da porre a copertura delle riserve tecniche, ora la normativa è evoluta ed è più *principle-based*. Vengono definiti minori limiti ma vengono maggiormente responsabilizzate le Compagnie nell'assumere le proprie strategie gestionali. Questo impone la definizione di un adeguato sistema di controlli interni dei rischi che, di fatto, deve essere costantemente aggiornato al fine di gestire compiutamente quanto richiesto

<sup>13</sup> Art. 132 Direttiva 2009/138/ce, "Principio della persona prudente"

<sup>14</sup> Art. 133 Direttiva 2009/138/ce, "Libertà di investimento"

dalla normativa.

### 2.3.1.3 - I requisiti di capitale

I requisiti di capitale previsti da Solvency II sono il SCR (Solvency Capital Requirement) e il MCR (Minimum Capital Requirement), i cui metodi di calcolo sono regolati dalla normativa comunitaria.

#### Il Solvency Capital Requirement (SCR)

Il SCR, il requisito di solvibilità di riferimento introdotto da Solvency II, deve essere aggiornato almeno una volta all'anno, in linea teorica una maggiore frequenza è obbligatoriamente richiesta solo se cambia il profilo di rischio della Compagnia, avendo come riferimento temporale i dodici mesi successivi dal momento della rilevazione. Nella realtà però sia IVASS che EIOPA richiedono di valutare i requisiti patrimoniali su base almeno trimestrale. In riferimento alla Compagnie di medie o grandi dimensioni che operano sul territorio italiano IVASS impone un monitoraggio settimanale, variato in mensile nell'agosto 2020 in seguito alla crisi scoppiata a causa della pandemia di COVID-19. Un provvedimento di questo tipo è diventato necessario considerata l'elevata volatilità dei mercati in seguito alla scoppio della crisi, in questo modo si è concesso maggior respiro alle Compagnie già in difficoltà nel gestire la situazione di emergenza. Alcune Compagnie hanno stimato che l'instabilità dei mercati abbia provocato riduzioni del 40/50% circa del *coverage ratio*<sup>15</sup>, un orizzonte più lungo aiuta a ridurre le fluttuazioni ed i conseguenti interventi correttivi.

Solvency II non fa altro che cercare di rendere sistematiche le “buone pratiche” dell'attività assicurativa, evidenziando l'importanza dei principi di mitigazione e diversificazione del rischio. Per fornire una indicazione al mercato su come procedere al calcolo del requisito patrimoniale EIOPA ha introdotto la cd. Standard Formula:

---

<sup>15</sup> Il *coverage ratio* è il rapporto tra i fondi propri e il requisito di solvibilità di una Compagnia

## L'albero dei rischi nella formula standard

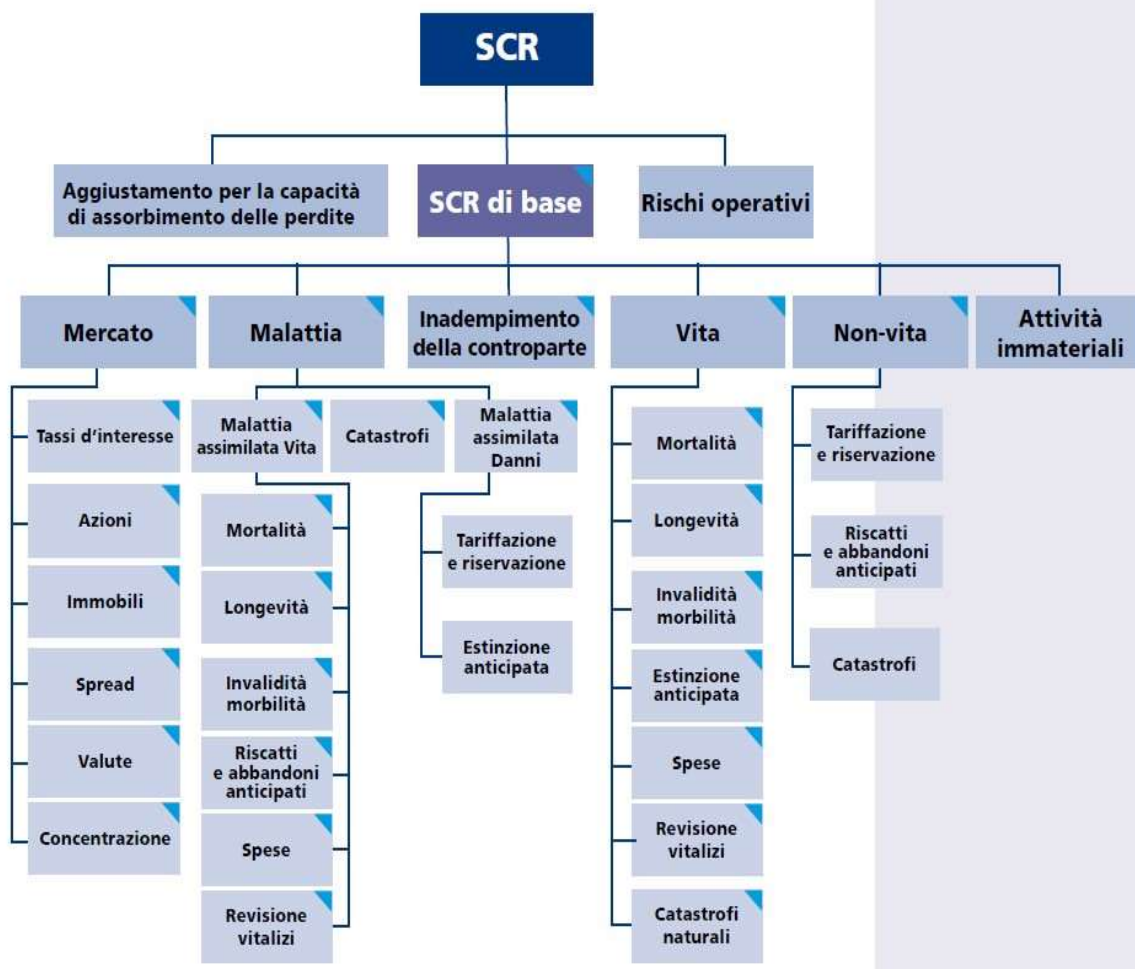


Figura 6 – Albero dei rischi

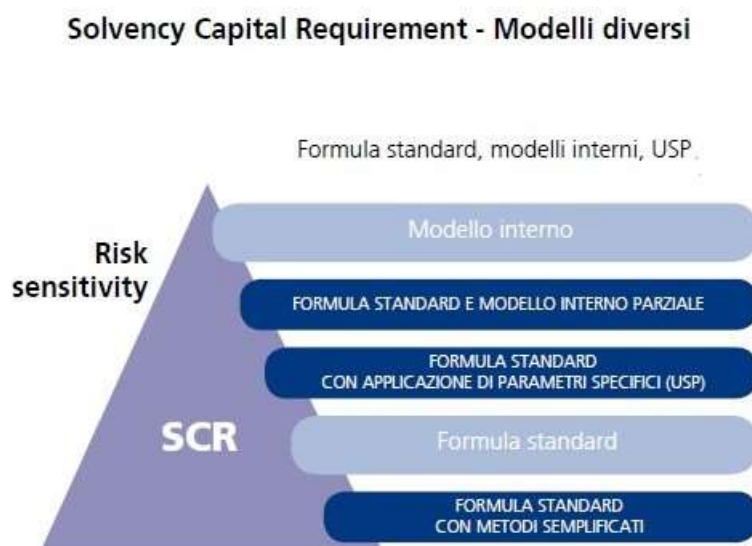
Alla base del calcolo del SCR c'è il concetto di individuazione dei rischi “standard” cui le Compagnie risultano maggiormente esposte e alla considerazione di una adeguata diversificazione tra i rischi, meccanismo che consente nelle Compagnie con diverse LoB<sup>16</sup> di ridurre l'ammontare del requisito grazie alla mitigazione dei rischi attuata sottoscrivendo polizze appartenenti a classi di rischio o rami tra loro poco correlati. Il processo di aggregazione delle diverse classi di rischio avviene attraverso matrici di correlazione definite dal regolatore. Le matrici di correlazione sono state realizzate analizzando le serie storiche disponibili, combinando in modo appropriato i

<sup>16</sup> Line of Business

diversi rischi così da mitigare l'esposizione complessiva di un portafoglio. La suddivisione delle diversi classi in Solvency II viene descritta attraverso l'albero dei rischi (Figura 6), i suoi rami corrispondono alle principali tipologie di rischio. Per ogni classe sono previste delle sottoclassi che identificano le tipologie di rischio specifiche di quel ramo. In base al tipo di coperture offerte dalla Compagnia i rischi da considerare in fase di calcolo saranno diversi. Il processo di calcolo tiene conto delle esposizioni nei vari rami della Compagnia determinando così il requisito di capitale per l'anno considerato.

Le Compagnie che si avvalgono della Standard Formula per il calcolo del requisito patrimoniale devono effettuare delle analisi di *suitability* della stessa, si tratta di analisi che consentono di dimostrare che i portafogli della Compagnia, attivi e passivi, e la rischiosità espressa dagli stessi sono in linea con i parametri definiti a livello di formule standard.

È però previsto l'utilizzo di modelli diversi ai fini del calcolo del requisito patrimoniale. Questi modelli alternativi possono essere adottati dalle Compagnie previa autorizzazione e verifica da parte dell'Autorità di Vigilanza IVASS. Un altro esempio potrebbe essere quello dell'utilizzo di una Standard Formula con applicazione di parametri specifici (USP – Undertaking Specific Parameters).



*Figura 7 – Modelli di calcolo del SCR*

Analizziamo nel dettaglio la Standard Formula e le tipologie di rischio in input che determinano il requisito di capitale. L'SCR è calcolato come segue:

$$SCR = BSCR + Adj DT + SCR_{Op}$$

dove il *BSCR* è il Basic Solvency Capital Requirement, *Adj DT* è il fattore di aggiustamento per le Deferred Taxes e *SCR<sub>Op</sub>* è il requisito di capitale per il rischio operativo (non esplicitato nel regime Solvency I ed ora evidenziato nel calcolo del nuovo requisito di solvibilità).

Il *BSCR* è il requisito di capitale ottenuto combinando le 6 categorie di rischio previste dalla Direttiva prima degli aggiustamenti. Le categorie sono:

- *SCR<sub>mkt</sub>* = requisito di capitale per il rischio di mercato
- *SCR<sub>def</sub>* = requisito di capitale per il rischio di controparte
- *SCR<sub>life</sub>* = requisito di capitale per il rischio di sottoscrizione vita
- *SCR<sub>nl</sub>* = requisito di capitale per il rischio di sottoscrizione non-vita
- *SCR<sub>health</sub>* = requisito di capitale per il rischio di sottoscrizione malattia
- *SCR<sub>intangibles</sub>* = requisito di capitale per il rischio dei beni intangibili

e la formula è:

$$BSCR = \sqrt{\sum_g Corr_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j} + SCR_{intangibles}$$

dove

*Corr<sub>i,j</sub>* = matrice di correlazione

i/j	Mercato	Inadempimento	Vita	Malattia	Non vita
Mercato	1	0,25	0,25	0,25	0,25
Inadempimento	0,25	1	0,25	0,25	0,50
Vita	0,25	0,25	1	0,25	0
Malattia	0,25	0,25	0,25	1	0
Non vita	0,25	0,50	0	0	1

Tabella 1 – Matrice dei coefficienti di correlazione Standard Formula

*SCR<sub>i</sub>*, *SCR<sub>j</sub>* = requisiti di capitale per ogni categoria di rischio, nel rispetto di righe e colonne della matrice di correlazione *Corr<sub>i,j</sub>*

*SCR<sub>intangibles</sub>* = requisito di capitale per il rischio dei beni intangibili

In conformità a quanto anticipato in precedenza l'SCR viene calcolato nel rispetto del VaR al 99,5% considerando un orizzonte temporale di un anno, garantendo in questo modo la probabilità di insolvenza della Compagnia una volta ogni 200 anni.

All'interno della Standard Formula sono applicati due approcci differenti:

- factor-based approach
- scenario-based approach

Il factor-based approach è utilizzato principalmente per i rischi di controparte e per il rischio operativo, i rischi tipici del ramo Non-life. Questo approccio consiste



nell'utilizzo di una formula chiusa e predeterminata con cui si cerca di esprimere una relazione tra il requisito di capitale e la misura di rischio, basandosi sull'applicazione di fattori a misure di esposizione al rischio. I fattori sono prefissati e calibrati da EIOPA in modo da riprodurre un livello  $Var_{99,5\%}$  su un orizzonte annuale.

Lo scenario-based approach maggiormente usato per il rischio di mercato e nei rami life ci concentra sulla valutazione degli effetti prodotti da uno scenario estremo. La calibrazione anche in questo caso vuole riprodurre un livello  $Var_{99,5\%}$  a un anno.

La Direttiva Solvency II, come già anticipato, offre alle Compagnie delle alternative all'utilizzo della Standard Formula, previa autorizzazione da parte dell'Autorità di Vigilanza. L'obiettivo è quello di stimolare e incoraggiare le imprese assicurative nello sviluppo di tecniche di gestione, monitoraggio e controllo del profilo di rischio migliori, il più possibile aderenti alle caratteristiche della realtà aziendale. L'incentivo principale è da individuare nel fatto che generalmente, ma non sempre, l'approccio standardizzato tende a sovrastimare i requisiti di capitale. I modelli interni completi o parziali, l'approccio USP consentono di cogliere con precisione maggiore l'entità, la natura e la connessione dei rischi, in particolare diventa possibile utilizzare una Standard Formula con delle semplificazioni per quei rischi di scarsa rilevanza nel calcolo del SCR. È importante sottolineare come queste semplificazioni non siano chiaramente specificate nella normativa.

L'iter da seguire per ottenere l'autorizzazione ad utilizzare queste semplificazioni prevede che le Compagnie effettuino una stima del genere, dell'importanza e della complessità dei rischi che gravano su di essa, rendendo evidente gli effetti che tale scelta determina in termini di costi. I risultati vengono sottoposti all'Autorità di Vigilanza che dopo un periodo di monitoraggio e controllo può rilasciare l'autorizzazione all'utilizzo del metodo o modello prescelto per il calcolo del requisito di capitale.

Nel mercato assicurativo europeo la ricerca del proprio modello interno è diventata una delle principali attività dei grandi gruppi o delle grandi Compagnie assicurative, tuttavia tutte le piccole e medie imprese non dotate di capitali sufficienti a sostenere i costi per lo sviluppo di un modello interno e per ragioni di convenienza in termini di capitale assorbito continuano ad utilizzare la Standard Formula.

L'ultima alternativa offerta da Solvency II è l'approccio USP che consiste

nell'applicazione della Standard Formula utilizzando dei parametri specifici. L'impresa, dopo essere stata autorizzata dall'Autorità di Vigilanza, può sostituire alcuni parametri della Standard Formula con altri più specifici calcolati direttamente sui dati interni a sua disposizione. Questa metodologia di calcolo molto più aderente al business della Compagnia rispetto alla Standard Formula classica è stata la prima ad essere molto diffusa nel mercato, per ragioni di semplicità e tempi di adozione rispetto ad un modello interno. La ricerca di un'efficienza sempre maggiore e di un'aderenza quasi totale del metodo di calcolo dei requisiti patrimoniali di solvibilità al profilo di rischio aziendale sta però spingendo i principali player del mercato europeo ad adottare un modello interno.

Una volta calcolato il SCR, con uno dei metodi appena descritti, la normativa specifica chiaramente gli elementi di capitale ammissibili per la copertura del requisito: in primo luogo i fondi propri della Compagnia (eccesso delle attività sulle passività), a cui possono eventualmente essere aggiunte le passività subordinate che insieme costituiscono i fondi propri di base. I fondi propri accessori possono essere utilizzati a copertura del requisito in seguito a preventiva approvazione da parte del supervisore.

#### Il Minimum Capital Requirement

Il MCR è il requisito minimo di solvibilità, che come stabilito dall'articolo 129 della Direttiva Solvency II è il livello di fondi *“al di sotto del quale i contraenti e i beneficiari sarebbero esposti ad un livello di rischio inaccettabile qualora alle imprese di assicurazione o riassicurazione fosse consentito di continuare ad operare”*. Le Compagnie devono calcolarlo una volta ogni 3 mesi ed è necessario che sia sempre soddisfatto per avere l'autorizzazione ad operare. Quando ciò non accade l'Autorità di Vigilanza interviene preventivamente obbligando la Compagnia ad un'integrazione fino al raggiungimento della soglia minima, fino ad allora l'autorizzazione ad operare è sospesa.

Il requisito minimo di solvibilità viene calcolato come una funzione lineare di riserve tecniche, capitale di rischio, premi contabilizzati, imposte differite e costi amministrativi della Compagnia al netto della riassicurazione. Questa funzione è calibrata sul VaR dei fondi propri di base della Compagnia con un livello di confidenza dell'85% su un intervallo temporale di un anno. Il legislatore ha stabilito i limiti relativi ed assoluti per il MCR, non può infatti essere inferiore al 25% o superiore al 45% del SCR ed è necessario considerare il valore minimo assoluto fissato dalla Direttiva secondo la

tipologia di attività svolta dalla Compagnia. Per la sua copertura sono ammessi solo i fondi propri di base, non quelli accessori. La misurazione del MCR prevede:

$$MCR = \max (MCR_{co}, AMCR)$$

dove  $AMCR$  rappresenta l'ammontare del requisito di capitale minimo assoluto mentre  $MCR_{co}$  è il MCR combinato ottenuto dalla formula:

$$MCR_{co} = \min [\max (MCR_{linear}, 0,25 \cdot SCR); 0,45 \cdot SCR]$$

nella quale il  $MCR_{linear}$  è la somma dei  $MCR_{linear,nl}$  e  $MCR_{linear,l}$  che rappresentano i requisiti minimi del ramo Non-life e del ramo Life. Il metodo di calcolo del  $MCR_{linear}$  è descritto negli articoli 250, 251 e 252 degli Atti Delegati.

### 2.3.2 - Il secondo pilastro

Una volta stabiliti gli aspetti quantitativi e i requisiti di capitale, il secondo passo è garantire che vengano rispettati e applicati. A tal fine la Direttiva Solvency II interviene attivamente sul sistema di governance, introducendo un insieme di regole che vanno a determinare la struttura gerarchica aziendale. I processi di calcolo e monitoraggio dei ratio prudenziali devono essere vissuti come elementi centrali nella realtà della Compagnia. I focus del secondo pilastro sono dunque gli aspetti qualitativi, prendendo in considerazione una delle peculiarità del settore assicurativo, il *ciclo finanziario invertito*<sup>17</sup>.

Rispetto alle altre realtà economiche il ramo assicurativo è l'unico nel quale si registrano prima gli incassi dei pagamenti, questo potrebbe spingere le Compagnie a sottovalutare i rischi collegati ad investimenti poco prudenti, per questo motivo Solvency II interviene direttamente sul sistema di *governance*<sup>18</sup>. Un buon sistema di governance consiste nell'attribuire precise responsabilità a ciascun organo, con un buon bilanciamento tra i poteri di gestione e quelli di controllo. Il CdA assume un ruolo centrale nel determinare le scelte di governance ma soprattutto nello stabilire il cosiddetto "*appetito per il rischio*". Il controllo del rischio e un efficiente dosaggio del capitale di

---

<sup>17</sup> Il *ciclo finanziario invertito* è tipico del settore assicurativo e consiste nell'esatta inversione del classico ciclo finanziario che caratterizza le imprese industriali. Per prima cosa vengono osservati i flussi di cassa in entrata, successivamente quelli in uscita. I ricavi, con riferimento all'incasso dei premi, sono dunque realizzati in anticipo rispetto ai costi che sono aleatori e da sostenere in un momento futuro

<sup>18</sup> La *governance* è il c.d. "governo d'impresa" ovvero l'insieme di regole, di ogni livello (leggi, regolamenti, ecc.) che disciplinano la gestione e la direzione di una società o un ente, pubblico o privato

cui la Compagnia dispone assumono un ruolo cruciale.

## Il cruscotto del rischio

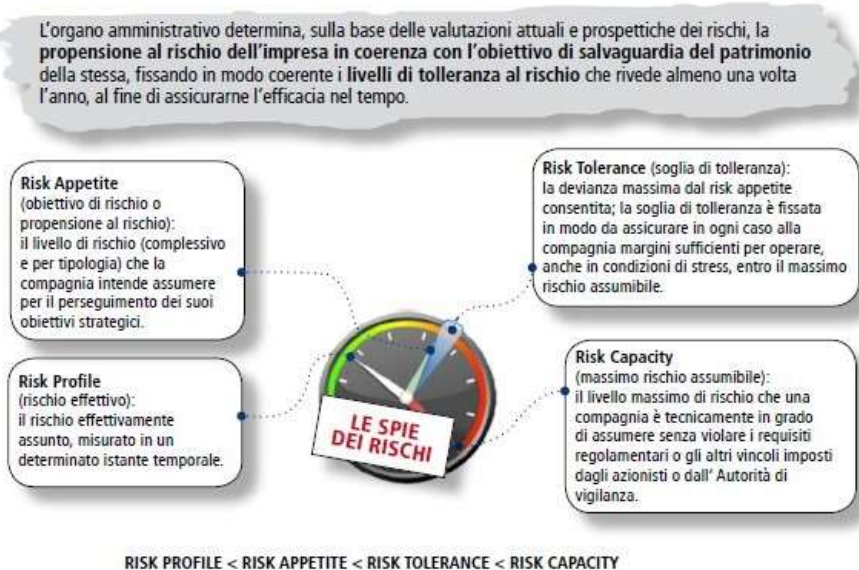


Figura 8 – Cruscotto del rischio

Sulla base del profilo di rischio e dalle scelte del CdA dovrà essere costruita la struttura aziendale nel rispetto delle politiche relative al sistema dei controlli interni del rischio. Il sistema dei controlli interni è primariamente finalizzato ad assicurare che gli obiettivi vengano perseguiti in un contesto di adeguato monitoraggio ed efficace gestione dei rischi insiti nella strategia di business, mediante lo svolgimento di attività di controllo e la predisposizione di idonee policy e procedure organizzative. Un'ulteriore funzione è quella di supportare il management nella definizione delle possibili trasformazioni dell'attività d'impresa, sia in conseguenza ad eventi esterni (nuove normative, mutamenti del mercato), sia in conseguenza ad eventi interni (operazioni straordinarie). Il sistema è costituito oltre che dagli organi sociali anche da quattro funzioni "chiave":

- Compliance
- Risk Management
- Funzione Attuariale
- Audit Interno

In questa struttura ogni organo e funzione assume specifiche responsabilità.

La scelta di introdurre quattro distinte funzioni serve a garantire un sistema di controllo su più livelli per costituire la cosiddetta governance a "livelli di difesa". In

questo sistema di governance le quattro funzioni lavorano separatamente con piena autonomia e indipendenza, cercando di garantire l'efficienza massima per il sistema di controllo.

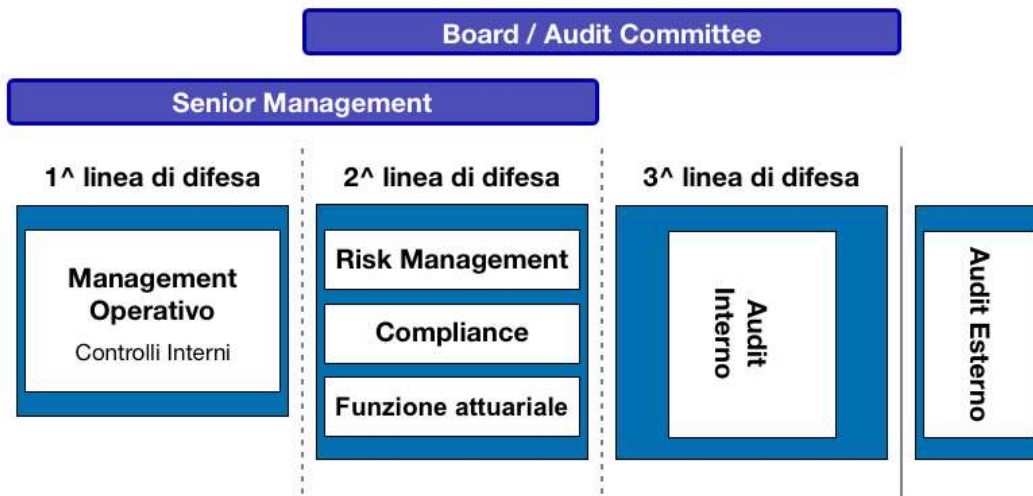


Figura 9 – Governance a “livelli di difesa”

I livelli di difesa previsti sono tre:

- Controlli “di primo livello” o “controlli di linea” sono volti ad assicurare che le operazioni si svolgano correttamente e vengono effettuati direttamente dalle funzioni operative e di business
- Controlli “di secondo livello” coinvolgono le prime 3 funzioni individuate:
  - la funzione di Risk Management svolge l'attività di misurazione, monitoraggio e gestione dei rischi aziendali,
  - la funzione di Compliance svolge l'attività di verifica di conformità dell'operatività aziendale ai limiti ed alle disposizioni normative e regolamentari,
  - la Funzione Attuariale si occupa del coordinamento del calcolo delle riserve tecniche, di verificare l'adeguatezza delle metodologie e dei modelli sottostanti, nonché delle ipotesi su cui si basa il calcolo delle riserve tecniche, di valutare la sufficienza e la qualità dei dati utilizzati nel calcolo delle riserve tecniche. In seconda battuta deve informare il CdA in merito all'affidabilità e all'adeguatezza del calcolo delle riserve tecniche, formulare pareri dettagliati sulle politiche di sottoscrizione e sull'adeguatezza degli accordi di riassicurazione.

I controlli vengono eseguiti dalle differenti funzioni in piena indipendenza ed

autonomia, la valutazione deve essere obbiettiva e non influenzata da alte funzioni,

- controlli “di terzo livello” demandati alla funzione di Audit Interno che viene chiamata ad analizzare e verificare la completezza, l’adeguatezza, l’efficacia e l’efficienza di tutto il sistema dei controlli interni, nonché dell’organizzazione aziendale.

Lo svolgimento dei controlli “di primo livello” è contestuale all’esercizio delle attività aziendali e dagli stessi soggetti preposti al loro svolgimento, per questo vengono definiti “controlli diretti”; i livelli successivi, invece, si basano su flussi informativi generati con lo scopo di permettere gli accertamenti diretti, sono detti “controlli indiretti”. La Direttiva Solvency II chiarisce e sottolinea che:

- il sistema di controlli interni deve essere strutturato nel rispetto del principio di proporzionalità, tenendo in considerazione la natura, la portata e la complessità dei rischi aziendali inerenti all’attività svolta,
- deve sempre essere garantita la *“tempestività del reporting e delle informazioni aziendali”*
- i presidi devono coprire *“ogni tipologia di rischio aziendale [...] secondo una visione prospettica e in considerazione della salvaguardia del patrimonio”* anche in ottica di lungo periodo e che, al tempo stesso, *“l’articolazione delle attività aziendali nonché dei compiti e delle responsabilità degli organi e delle funzioni deve essere chiaramente definita”*.

Sempre nell’ottica di rafforzamento e armonizzazione degli obblighi di natura procedurale, nell’ambito di gestione dei rischi si inserisce una formale valutazione interna del profilo di rischio e della situazione di solvibilità che prende il nome di ORSA (Own Risk and Solvency Assessment).

### L’ORSA

L’Own Risk and Solvency Assesment è lo strumento introdotto da Solvency II orientato alla valutazione prospettica dei requisiti patrimoniali. Si fonda sull’identificazione dei rischi, che vengono rappresentati mediante la c.d. “cartografia dei rischi”, sul loro presidio e mitigazione, sulla loro valutazione effettuata sulla base di quanto previsto dai piani strategici della Compagnia in merito alle prevedibili evoluzioni del requisito patrimoniale. Si tratta di un processo interno di valutazione, richiesto ad ogni Compagnia

soggetta al regime di Solvency II, per il quale la Direttiva si limita a disciplinare l'ambito minimo di indagine e la periodicità minima. In particolare, la valutazione deve essere svolta almeno con cadenza annuale, o comunque ogni volta che vi siano degli avvenimenti che provochino una variazione significativa del profilo di rischio della Compagnia. L'oggetto dell'analisi è la determinazione del fabbisogno di solvibilità globale, l'osservanza su base continuativa dei requisiti patrimoniali, e la misura concreta in cui il profilo di rischio si discosti dalle ipotesi utilizzate nel calcolo del requisito di solvibilità, determinate sulla base dell'adozione della Standard Formula, di un modello interno parziale (con o senza USP) o di un modello interno. La prospettiva di valutazione deve essere di medio-lungo periodo.

La normativa stabilisce espressamente che tale processo di valutazione venga sistematicamente preso in considerazione ai fini delle decisioni strategiche dell'azienda, o quanto meno per la gestione del capitale, la pianificazione del business, lo sviluppo e la progettazione dei prodotti e per ogni attività che comporti la modifica del profilo di rischio della Compagnia. La rilevanza di queste valutazioni non esaurisce la sua importanza all'interno della Compagnia ma ne assume anche esternamente, essendo la stessa oggetto di specifica comunicazione all'IVASS, nonché nei confronti del pubblico visto che alcuni dei risultati del processo ORSA confluiscono nella relazione sulla solvibilità e condizione finanziaria e nel Regular Supervisory Report.

Il report ORSA oltre che essere uno strumento decisionale interno all'azienda è, a tutti gli effetti, uno strumento di vigilanza a disposizione dei supervisori, anche se, nel concreto, forse meno informativo rispetto a quanto inizialmente la normativa voleva prevedere. In origine Solvency II è stato concepito per fornire alle Autorità di Vigilanza una visione risk-based del business, un documento da utilizzare per verificare l'effetto delle decisioni aziendali sul profilo di rischio della stessa e sulla sua dotazione di capitale. In un contesto altamente dinamico dove non è prevista l'imposizione di una quantità "fissa" di capitale predeterminata, ma, al contrario, l'analisi di una realtà aziendale in movimento con un continuo bilanciamento dei presidi patrimoniali necessari a garantirne la sicurezza, questo strumento avrebbe potuto assolvere un compito di coordinamento davvero importante, proprio in considerazione del fatto che nel sistema ci fosse una forte componente di soggettività. In generale, in ogni ambito in cui sia richiesta una valutazione, la probabilità di commettere errori predittivi è sempre alta, anche quando la metodologia di calcolo prevista è rigorosa. Il punto di vista esterno dell'Autorità di

Vigilanza sarebbe potuto diventare un aiuto importante per le stesse Compagnie, non a caso la normativa ha attribuito loro il ruolo di tutor, provando a garantire che le pratiche messe in atto dagli assicuratori fossero indirizzate verso i migliori standard possibili. La procedura condivisa avrebbe dovuto ridurre drasticamente il rischio di distorsione soggettiva da parte dell'azienda, promuovendo, dall'altro lato, un ruolo proattivo dei supervisori con l'obiettivo di prevenire situazioni di crisi anziché di intervenire a danno compiuto per rimediare agli errori. Nella realtà dei fatti tutto ciò è stato realizzato solo in parte, ORSA ha assunto scopi prettamente prospettivi per le Compagnie, come giustamente la Direttiva aveva previsto, ma l'attività di intervento preventivo e coordinamento da parte dell'Autorità di Vigilanza si è rilevata piuttosto limitata.

### 2.3.3 - Il terzo pilastro

L'ultimo ambito in cui Solvency II interviene è quello informativo. Gli obblighi informativi che le Compagnie devono rispettare sono rivolti sia alle Autorità di Vigilanza che al mercato. La tutela del consumatore è l'obiettivo centrale della Direttiva, un'informazione completa e veritiera diventa quindi essenziale. A tal proposito diventa obbligatorio pubblicare, con cadenza annuale, un rapporto sulla condizione finanziaria e di solvibilità, il SFCR (Solvency and Financial Condition Report) che contiene informazioni su:

- Tipo di business e performance
- Governance
- Profilo di rischio
- Criteri di valutazione
- Gestione del capitale

Nella sezione dedicata al "profilo di rischio" deve essere riportata una descrizione dell'esposizione al rischio, delle concentrazioni di rischio, dell'attenuazione del rischio e della sensibilità al rischio. Nei "criteri di valutazione" deve essere presente una descrizione delle attività, delle riserve tecniche e altre passività. In particolare spazio viene dedicato alle basi tecnico-attuariali e ai metodi utilizzati per la valutazione del business, nonché la spiegazione di eventuali differenze rilevanti rispetto alle basi e ai metodi utilizzati per la loro valutazione nel bilancio. Nella "gestione del capitale" deve essere inserita una descrizione che includa: la descrizione della struttura e la suddivisione per importo dei fondi propri, la loro qualità; gli importi del SCR e del MCR; le



informazioni che consentano di comprendere le differenze principali tra le ipotesi sottostanti la Standard Formula e quelle del modello interno adottato dalla Compagnia. Come è stato precedentemente indicato, l'ORSA alimenta in parte il SFCR.

Una versione più completa e dettagliata del report appena citato è il RSR (Regular Supervisory Report), che deve essere inviato alle Autorità di Vigilanza entro 20 settimane dalla chiusura dell'esercizio. Le informazioni richieste comprendono: elementi qualitativi o quantitativi; dati storici, attuali o futuri; dati provenienti da fonti interne o esterne. Con le informazioni presenti all'interno del report le Autorità di Vigilanza possono valutare:

- l'attività che esercitano,
- il sistema di Governance adottato,
- i rischi cui sono esposte ed i relativi sistemi di gestione dei rischi,
- i principi di valutazione applicati a fini di solvibilità,
- la loro struttura patrimoniale, il loro fabbisogno di capitale e la loro gestione del capitale.

Questo report deve essere corredato da documenti contenenti dati sui principali parametri aziendali.

## 2.4 – I Quantitative Impact Studies (QIS)

La Direttiva Solvency II è una struttura normativa europea nata per disciplinare e regolamentare in modo efficace il mercato assicurativo. La decisione di determinare il capitale di solvibilità patrimoniale sulla base del profilo di rischio della Compagnia, di come essa lo gestisce e lo valuta deriva da un lungo processo di studio e analisi del settore assicurativo. La Direttiva è proprio il risultato finale di un percorso durato diversi anni nel quale sono state raccolte moltissime informazioni attraverso degli specifici studi. Il riferimento è ai Quantitative Impact Studies che consistono in specifiche tecniche prodotte dalla autorità europee, inizialmente era il CEIOPS<sup>19</sup> diventato poi EIOPA<sup>20</sup>, contenenti una serie di regole e consigli di corretta gestione e metodologie di valutazione dei rischi tipici dell'attività assicurativa inclusi nella Standard Formula. Alle Compagnie che decidevano di aderire agli standard proposti veniva richiesto di fornire dei dati sui

---

<sup>19</sup> Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors

<sup>20</sup> European Insurance and Occupational Pensions Authority

risultati prodotti dalla loro applicazione per valutarne le conseguenze e poter apportare delle migliorie. Tanti degli standard contenuti nei QIS ancora oggi sono applicabili e richiamati nella Direttiva Solvency II ma il processo di elaborazione è stato molto complesso. I QIS effettuati per arrivare all’attuale definizione della Standard Formula sono stati in totale 5, l’ultimo in particolare, pubblicato nel 2010, era comprensivo di tutte le formule e le tecniche di calcolo di tutti i requisiti di capitale per ogni categoria e ramo di rischio necessario per essere conformi alla Direttiva Solvency II. Nella trattazione verranno analizzati nel dettaglio solo due studi: il QIS2 e il QIS5, in particolare si analizzeranno le principale modifiche apportate nel corso degli anni.

#### 2.4.1 – La Standard Formula e il Reserve Risk secondo QIS2

Il QIS2 è il secondo degli studi proposti dal CEIOPS e risale all’anno 2005; lo studio era rivolto a tutte le Compagnie operanti in Europa all’epoca con adesione facoltativa, dunque non obbligatoria, ad aderire furono più di mille Compagnie. La struttura del requisito di capitale prevista dallo studio è simile a quella attuale, anche se, nel Ramo Danni di interesse, è presente la differenza più rilevante: la divisione tra Reserve Risk e Premium Risk.

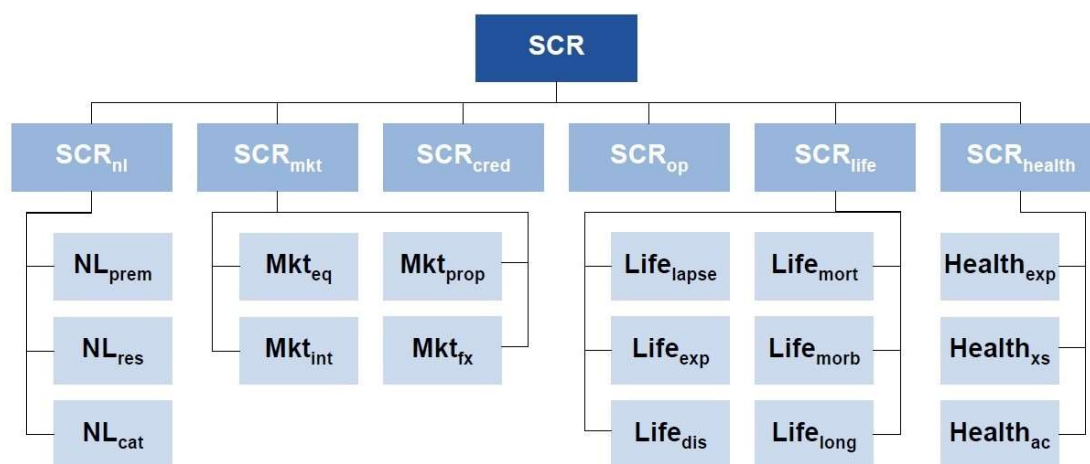


Figura 10 – Albero dei rischi nel QIS2

La richiesta fatta ai partecipanti era di applicare una serie di modelli di calcolo, con approcci differenti, per il medesimo tipo di rischio per poterne poi valutare differenze ed incongruenze. Gli approcci considerati a tale epoca ,per quanto semplici, erano comunque “robusti”, sebbene erano poi previsti metodi più sofisticati ma maggiormente sensibili ai diversi fattori di rischio, metodi c.d. “risk-sensitive”. L’obiettivo finale di questi studi

era di determinare il metodo più efficace, a seconda delle caratteristiche della Compagnia, per ottenere l'effetto di mitigazione del rischio complessivo. La tecnica di aggregazione prevedeva già la matrice di correlazione contenente valori compresi tra bassa e alta, in particolare L = low, M = medium, ML = medium-low, H = high, MH = medium-high.

<i>CorrSCR=</i>	<i>SCR<sub>mkt</sub></i>	<i>SCR<sub>cred</sub></i>	<i>SCR<sub>life</sub></i>	<i>SCR<sub>health</sub></i>	<i>SCR<sub>nl</sub></i>	<i>SCR<sub>op</sub></i>
<i>SCR<sub>mkt</sub></i>	1					
<i>SCR<sub>cred</sub></i>	MH	1				
<i>SCR<sub>life</sub></i>	ML	ML	1			
<i>SCR<sub>health</sub></i>	ML	ML	ML	1		
<i>SCR<sub>nl</sub></i>	ML	M	L	L	1	
<i>SCR<sub>op</sub></i>	M	ML	ML	ML	M	1

Tabella 2 – Matrice dei coefficienti di correlazione Standard Formula secondo QIS2

Successivamente, nelle sezioni specifiche per ogni categoria di rischio, è stato specificato che il valore minimo previsto era di 0,25 mentre il massimo di 0,75.

La formula del SCR considerata dallo studio QIS2 è la seguente:

$$SCR = BSCR - RPS - NL_{PL}$$

dove:

- il BSCR rappresenta il Basic Solvency Capital Requirement già descritto nel paragrafo 2.3.1.3
- il fattore RPS, *Reduction for profit-sharing*, è di particolare interesse nel mercato italiano vista la presenza di numerose polizze vita che prevedono la compartecipazione al rischio tra Compagnie ed assicurato
- NL\_PL ovvero le *Non-life profit and loss attese*, assimilabili ai caricamenti di sicurezza su premi puri e Risk Margin calcolato in previsione di errori di stima in relazione alla Best estimate. Sono, in sostanza, i guadagni o le perdite attese in relazione alle componenti di rischio del Ramo Non-life, il Reserve Risk e il Premium Risk

Il report pubblicato in seguito alla raccolta dei dati collegati allo studio ha mostrato la rilevanza del Rischio Operativo all'interno della struttura del SCR confermando, per le Compagnie che esercitano l'attività non life, che il rischio più importante e delicato resta comunque il Non-life Underwriting Risk, tra cui primaria importanza riveste il Reserve Risk di cui sarà fornita trattazione nel corso del presente

lavoro. Le tre componenti del Non-life Underwriting Risk prese in considerazione in questo studio sono:

- Reserve Risk
- Premium Risk
- CAT Risk, rischio collegato ad eventi “catastrofali” o “estremi”

Queste tre categorie di rischio assumono importanza diversa, il Reserve Risk richiede particolare attenzione nella fase di rilevazione, così come il Premium Risk; il CAT Risk, invece, assume rilevanza diversa a seconda delle Line of Business esercitate dalla Compagnia.

Nel QIS2, l'elemento che deve essere necessariamente analizzato ai fine della trattazione è il Reserve Risk, la componente di rischio su cui successivamente verranno affrontate analisi e verranno fatte delle considerazioni nell'ottica di una valutazione dell'effetto delle varie politiche riassicurative sui requisiti di capitale. Il Reserve Risk che, in questo caso specifico, viene trattato separatamente dal Premium Risk nel modulo previsto per il calcolo del SCR per il Non-life Underwriting Risk. In generale i rischi di riservazione e tariffazione sono riconducibili al rischio di subire delle perdite dovute a cambiamenti nelle obbligazioni nei confronti degli assicurati causate da fluttuazioni temporanee della sinistrosità o della frequenza dei singoli sinistri rispetto alle ipotesi di base, che possono provocare dilatazione nei periodi di liquidazione, insufficienza delle riserve o sottotariffazione. I rischi catastrofici invece rappresentano degli eventi avversi rari o eccezionali che possono essere in grado di mettere in una posizione di insolvenza la Compagnia, laddove si dovessero verificare. Il punto di partenza, prima di arrivare al Reserve Risk, deve essere il requisito di solvibilità previsto per il modulo nel suo complesso:

$$SCR_{NL} = \sqrt{\sum_{r \times c} CorrNL^{r \times c} \cdot NL_r \cdot NL_c}$$

dove

- *CorrNL* rappresenta la matrice di correlazione tra i SCR delle 3 categorie di rischio considerate per il modulo ed è definita nel modo seguente:

$CorrNL =$	$NL_{res}$	$NL_{prem}$	$NL_{CAT}$
$NL_{res}$	1		
$NL_{prem}$	0.5	1	
$NL_{CAT}$	0	0	1

Tabella 3 – Matrice coefficienti di correlazione componenti Reserve Risk nel QIS2

È subito evidente come la correlazione presente tra Premium Risk e Reserve Risk sia considerevole, mentre il CAT Risk è decorrelato con entrambe.

- $NL_r$   $NL_c$  sono i requisiti di capitale per ogni specifica categoria di rischio

Dopo aver introdotto l'intero modulo il focus viene spostato sul Reserve Risk, visto che Premium risk e CAT Risk non saranno oggetto dell'analisi. La determinazione del Reserve Risk è legata a due componenti: le *technical provisions* che rappresentano la stima del livello assoluto di riserva che sarà necessario accantonare per far fronte agli impegni assunti, la seconda componente considera la natura aleatoria dei pagamenti futuri, fa dunque in modo che il valore del Reserve Risk stand alone fluttui intorno alla media secondo un processo prestabilito. Il metodo di calcolo previsto viene definito *Market Wide Approach* (MW), la cui formula è la seguente:

$$NL_r = \rho(\sigma) \cdot PCO$$

dove

- $PCO$  rappresenta le *Provisions for Claims Outstanding*, ovvero la stima della riserva sinistri totale (risultato della somma tra Best Estimate e Risk Margin) al netto della riassicurazione che può essere rilevata utilizzando vari modelli algoritmici o stocastici
- $\rho(\sigma)$  è il moltiplicatore, una funzione il cui argomento, la deviazione standard  $\sigma$  prevista per l'anno successivo, viene stimata attraverso un approccio market wide, ovvero come aggregazione delle deviazioni standard delle singole LoB, come mostrato nella formula seguente:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{PCO^2} \sum_{r,c} CorrLoB\_Res^{rxc} \cdot PCO_r \cdot PCO_c \cdot \sigma_r \cdot \sigma_c}$$

dove

- o  $CorrLoB\_Res^{rxc}$  è la matrice di correlazione tra le varie LoB

CorrLob_Res=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1: A & H	1										
2: M (3 <sup>rd</sup> party)	0.25	1									
3: M (other)	0	0.5	1								
4: MAT	0	0	0.5	1							
5: Fire	0	0	0.5	0.25	1						
6: 3 <sup>rd</sup> party liab	0.25	0	0	0	0	1					
7: credit	0	0	0	0	0	0.75	1				
8: legal exp.	0.5	0.25	0	0	0	0.5	0.75	1			
9: assistance	0	0	0.5	0.5	0.5	0	0	0	1		
10: misc.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
11: reinsurance	0	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0	0	0	0	1

Tabella 4 – Matrice coefficienti di correlazione LoB Reserve Risk nel QIS2

- $\sigma_r$   $\sigma_c$  sono le stime market wide delle deviazioni standard risultato del run-off di ogni singola LoB. Proprio queste stime sono calcolate per ogni LoB secondo la formula seguente:

$$\sigma_{lob} = sf_{lob} \cdot f_{lob}$$

che rappresenta il prodotto tra il *size factor*  $sf_{lob}$ , che considera le dimensioni del singolo ramo rispetto all'ammontare complessivo delle riserve, e il *volatility factor*  $f_{lob}$  che invece considera la volatilità sistemica attribuita al ramo. Il *volatility factor* è predeterminato ed uguale per tutti:

LOB =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f_{lob}$	0.15	0.15	0.075	0.15	0.10	0.20	0.10	0.10	0.20	0.20	0.20

Tabella 5 – Volatility factor per LoB Reserve Risk nel QIS2

Il *size factor*, invece, deve essere calcolato sulla base della grandezza del portafoglio della Compagnia, con lo scopo di aumentare o ridurre la volatilità, secondo la formula seguente:

$$sf_{lob} = \begin{cases} 1 & \text{se } PCO_{lob,gross} \geq 100 \text{ mln } \text{€} \\ \frac{10}{\sqrt{PCO_{lob,gross} \cdot 10^{-6}}} & \text{se } 100 \text{ mln } \text{€} > PCO_{lob,gross} \geq 20 \text{ mln } \text{€} \\ \frac{10}{\sqrt{20}} & \text{se } PCO_{lob,gross} < 20 \text{ mln } \text{€} \end{cases}$$

Dalla formula è evidente come Compagnie di piccole dimensioni si trovino ad avere un *size factor* decisamente più grande rispetto alle Compagnie di dimensioni medio-grandi. L'effetto diretto è di provocare

l'incremento della deviazione standard portando ad un requisito di capitale molto più oneroso per le Compagnie con un portafoglio piccolo rispetto a quelle con portafogli più grandi. Da un lato questa scelta del CEIOPS può sembrare ragionevole considerando l'effetto di mutualità e mitigazione del rischio più forte nei grandi portafogli e, quindi, la maggiore rischiosità dei portafogli piccoli, ma, dall'altro lato, va eccessivamente a penalizzare le Compagnie di piccole dimensioni generando grossi squilibri sul mercato.

Per questo motivo già a partire da QIS3 il *size factor* è stato eliminato.

La deviazione standard è l'argomento di una specifica funzione, dalla quale si ottiene il moltiplicatore per il calcolo del requisito per il Reserve Risk stand alone.

La funzione prevista in QIS2 è la seguente:

$$\rho(x) = \frac{0.99 - \phi(N_{0.99} - \sqrt{\log(x^2 + 1)})}{0.01}$$

La funzione cresce al crescere dell'asimmetria della distribuzione della riserva ed è identica a quella proposta per il Premium Risk.

L'ultima componente da prendere in considerazione è l'*expected surplus* specifico per il Reserve Risk, ovvero l'elemento  $NL\_PL_{res}$  che va stimato come segue:

$$NL\_PL_{res} = \mu \cdot PCO$$

dove

$$\mu = \frac{\sum_{lob} \mu_{lob} \cdot PCO_{lob}}{PCO}$$

calcolato come la stima del valore atteso del risultato di run-off del prossimo anno, ovvero la media ponderata dei  $\mu_{lob}$  dei singoli rami. I fattori  $\mu_{lob}$  dei singoli rami sono stimati come segue:

$$\mu_{lob} = \alpha \cdot \frac{RM_{lob}}{PCO_{lob}}$$

dove  $\alpha$  è la percentuale di riserva che ci si attende verrà liquidata nell'esercizio seguente, calcolata come  $\alpha = 1/D$  con  $D$  che rappresenta la durata media della riserva sinistri della singola LoB. La percentuale  $\alpha$  va applicata sul rapporto tra il Risk Margin calcolato sulla riserva e il valore totale netto atteso della riserva per la LoB. L'elemento  $NL\_PL_{res}$  è stato eliminato nei QIS successivi.

## 2.4.2 – La Standard Formula e il Reserve Risk secondo QIS5

Il QIS5 è l'ultimo studio di impatto quantitativo proposto da EIOPA e la sua pubblicazione risale a 10 anni fa, nel 2010. Anche in questa occasione lo studio proponeva alle Compagnie operanti in Europa all'epoca l'applicazione di metodi e approcci per la rilevazione del rischio ed il conseguente calcolo dei requisiti di capitale. Sulla base degli ottimi risultati ottenuti gran parte dei metodi e delle tecniche contenuti al suo interno sono poi diventati parte integrante della Direttiva Solvency II, entrata in vigore nel 2016. Alla luce di questa considerazione è superfluo ripetere aspetti e considerazioni esposti nel paragrafo 2.3.1.3 ma è interessante fare un confronto con lo studio QIS2, partendo dalle considerazioni generali prima di arrivare al Reserve Risk.

La prima evidente differenza è nella matrice di correlazione tra le varie tipologie di rischio della Standard Formula, che attribuisce la correlazione più alta tra il rischio di Default e il Non-life.

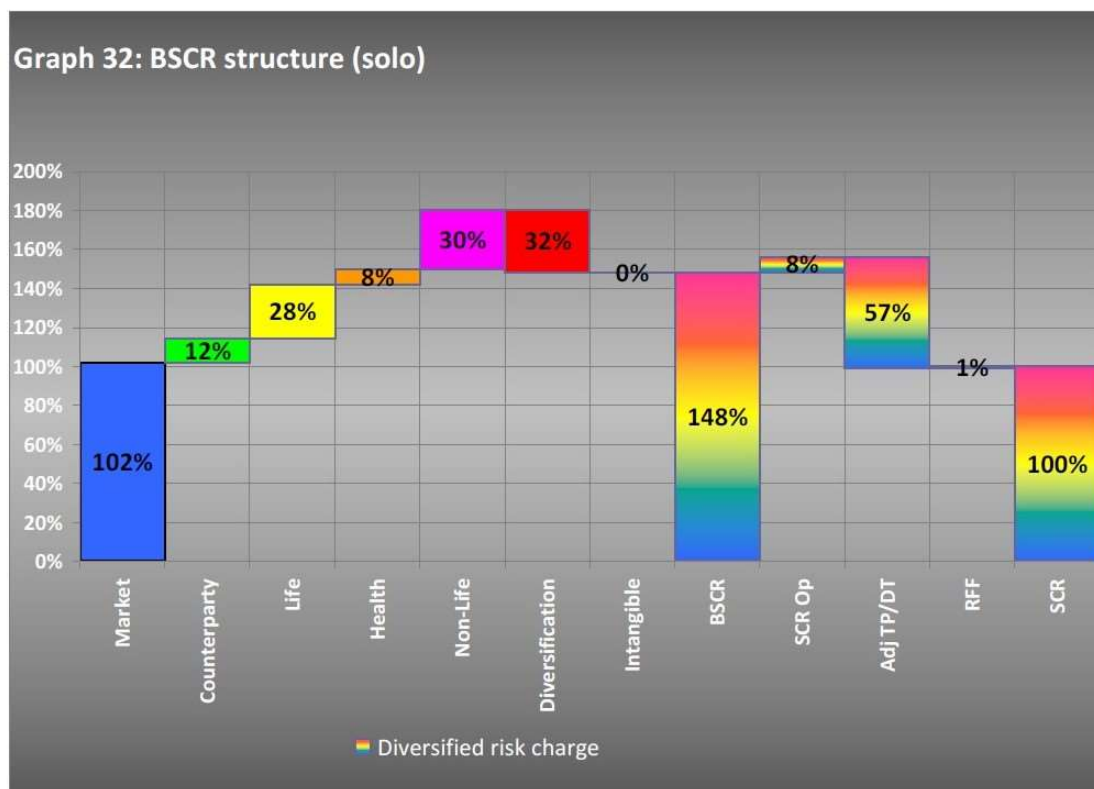
i \ j	Market	Default	Life	Health	Non-life
Market	1				
Default	0.25	1			
Life	0.25	0.25	1		
Health	0.25	0.25	0.25	1	
Non-life	0.25	0.5	0	0	1

Tabella 6 – Matrice coefficienti di correlazione Standard Formula secondo QIS5

La seconda importante differenza è l'eliminazione del rischio di Credito e l'introduzione del rischio di Default, il rischio operativo viene escluso dalla matrice e trattato separatamente nella Standard Formula. Oltre allo studio quantitativo l'EIOPA ha pubblicato nel 2011 un report finale contenente un'interessante analisi sui risultati ottenuti, utile per sottolineare alcuni aspetti che caratterizzano i cambiamenti rispetto al passato. La struttura del SCR stabilita da Solvency II, con l'applicazione di tecniche e metodi contenuti nello studio porta ad individuare l'incidenza delle varie componenti di rischio. I rischi predominanti sono sicuramente il rischio di Mercato (102%), il rischio legato al ramo Non-life (30% circa) e il rischio del ramo Life (28%). Buono è l'effetto di diversificazione sia per le Compagnie individuali che per i gruppi societari dove



chiaramente il beneficio è maggiore, si passa da un buon 32% ad un ottimo 46%. L'ultimo fattore dal grande impatto è il fattore di aggiustamento per le tasse differite e le technical provisions che impatta nella formula per il 57%. Il grafico seguente mostra quanto appena descritto in riferimento alle Compagnie individuali.



*Figura 11 – Struttura dei rischi del SCR con l'applicazione dei metodi contenuti nel QIS5*

Come avvenuto nel paragrafo precedente l'attenzione ora passa sul modulo Non-life Undertaking Risk, iniziando da un'analisi generale prima di prendere in esame gli aspetti riguardanti il solo Reserve Risk. Rispetto a quanto previsto nel QIS2 dove Reserve Risk e Premium Risk sono separati, nel QIS5 sono considerati come un'unica componente di rischio Premium&Reserve, viene appositamente introdotto un modulo per l'aggregazione. Va sottolineato che questo cambiamento era già stato previsto dal QIS3 e confermato negli studi successivi. Nel grafico successivo viene evidenziata l'incidenza delle componenti di rischio sul rischio globale del modulo Non-life Underwriting.

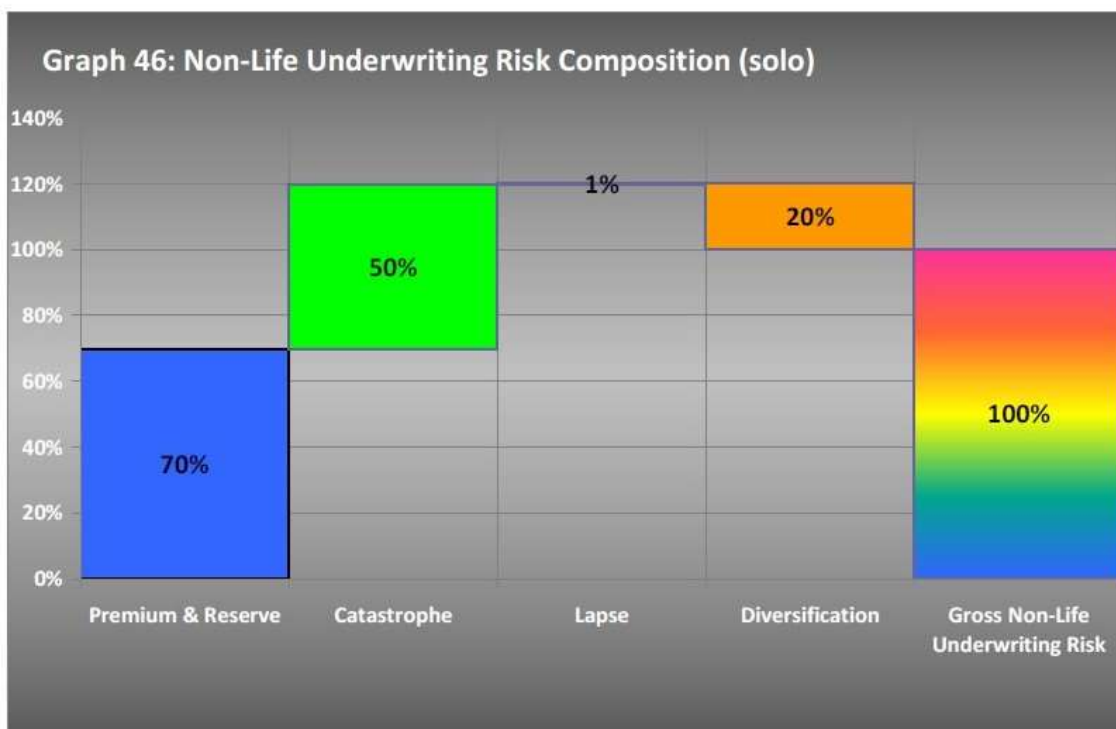


Figura 12 – Incidenza delle componenti di rischio del Reserve Risk nel QIS5

Il CAT Risk che nel QIS2 si ipotizzava avesse un impatto trascurabile diventa molto rilevante, con un impatto vicino a quello di Reserve e Premium Risk aggregati per le Compagnie di assicurazione, per i riassicuratori questa componente di rischio è ancora più considerevole. Il rischio catastrofe diventa una componente importante per la rilevazione del requisito di capitale, che seppur riferita ad eventi rari ed eccezionali, va ad impattare in modo considerevole sulla stabilità di una Compagnia, per questo va seriamente preso in considerazione nonostante sia delicata e complessa la sua rilevazione. Viene introdotto il Lapse Risk, che come vedremo successivamente non è correlato con gli altri rischi e assume rilevanza trascurabile della determinazione del requisito di solvibilità. Come era già stato annunciato precedentemente il *size factor* è stato eliminato perché troppo penalizzante per le Compagnie di piccole dimensioni, riducendo così gli squilibri presenti sul mercato. Allo stesso modo è stato eliminato anche il fattore di correzione per l'*expected surplus*. La matrice di correlazione tra LoB viene ridefinita, come si può notare nella tabella successiva:

<i>CorrLob</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1: Motor vehicle liability	1											
2: Other motor	0,5	1										
3: MAT	0,5	0,25	1									
4: Fire	0,25	0,25	0,25	1								
5: 3rd party liability	0,5	0,25	0,25	0,25	1							
6: Credit	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	1						
7: Legal exp.	0,5	0,5	0,25	0,25	0,5	0,5	1					
8: Assistance	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	1				
9: Miscellaneous.	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1			
10: Np reins. (property)	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	1		
11: Np reins. (casualty)	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	1	
12: Np reins. (MAT)	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	1

Tabella 7 – Matrice coefficienti di correlazione LoB del Reserve Risk nel QIS5

Infine la matrice di correlazione delle componenti di rischio del modulo NL mostra correlazione positiva tra il rischio catastrofale la componente di rischio Premium&Reserve:

<i>CorrNL</i>	$NL_{pr}$	$NL_{lapse}$	$NL_{CAT}$
$NL_{pr}$	1		
$NL_{lapse}$	0	1	
$NL_{CAT}$	0,25	0	1

Tabella 8 – Matrice coefficienti di correlazione componenti del Reserve Risk nel QIS5

Una volta chiarite le novità di carattere generale rispetto al QIS2 arriva il momento di analizzare da vicino i cambiamenti relativi al Reserve Risk che, questa volta, è aggregato al Premium Risk nel modulo Premium&Reserve . Il primo passo, come nel QIS2, è la formula:

$$NL_{pr} = \rho(\sigma) \cdot V$$

dove il moltiplicatore  $\rho(\sigma)$  è funzione della deviazione standard aggregata, il volume totale  $V$  è la somma del volume premi e del volume riserve. La funzione  $\rho(\sigma)$  è cambiata,

considerando un quantile del 99,5% di una LogNormale a due parametri:

$$\rho(\sigma) = \frac{\exp(N_{0,995} \cdot \sqrt{\log(\sigma^2 + 1)})}{\sqrt{\sigma^2 + 1}}$$

La misura di rischio scelta, come ben noto, è il  $VaR_{0,995}$  e questa funzione può essere approssimata come  $\rho(\sigma) = 3 \cdot \sigma$ . Per individuare la deviazione standard aggregata è necessario determinare le deviazioni standard di ogni singola LoB  $\sigma_{lob}$  e poi aggregarle attraverso una matrice di correlazione, questo vale sia per i premi che per le riserve. La formula è la seguente:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{V^2} \sum_{r,c} CorrLoB^{r,c} \cdot V_r \cdot V_c \cdot \sigma_r \cdot \sigma_c}$$

dove la matrice di correlazione definita da EIOPA è quella riportata in Tabella 7 e il risultato finale considera come pesi i volumi totali di ogni singola LoB. Il volume totale di una singola LoB deve essere calcolato nel modo seguente:

$$V_{lob} = (V_{lob}^{prem} + V_{lob}^{res}) \cdot (0.75 + 0.25 \cdot DIV_{lob})$$

dove  $DIV_{lob}$  è l'indice di diversificazione geografica così calcolato:

$$DIV_{lob} = \frac{\sum_j (V_{(prem,j,lob)} + V_{(res,j,lob)})^2}{(\sum_j (V_{(prem,j,lob)} + V_{(res,j,lob)}))^2}$$

Per concludere è necessario definire la deviazione standard relativa a premi e riserve di ogni singola LoB  $\sigma_{lob}$  che, senza il *size factor* coincide con il *volatility factor* indicato in QIS2. Per il Reserve Risk lo studio introduce un metodo di calcolo alternativo all'approccio *Market Wide*, il metodo USP – *Undertaking Specific Parameters* che prevede parametri specifici in relazione alle caratteristiche della Compagnia. Il nuovo approccio USP consiste nel calcolare la deviazione standard di ogni singola LoB per il Reserve Risk come segue:

$$\sigma_{(res,lob)} = c \cdot \sigma_{(U,res,lob)} + (1 - c) \cdot \sigma_{(M,res,lob)}$$

ovvero la ponderazione tra  $\sigma_U$  (la deviazione standard ottenuta utilizzando metodi standardizzati) e  $\sigma_M$  (la deviazione standard prevista per la LoB nella tabella del metodo Market Wide) per un *coefficiente di credibilità*  $c$  che varia in base al ramo e alla lunghezza della serie storica. I valori della deviazione standard previsti dall'approccio Market Wide sono elencati nella tabella seguente:

$LoB_i$	<i>standard deviation for reserve risk (net of reinsurance)</i>
Motor vehicle liability	9.5%
Other motor	10%
MAT	14%
Fire	11%
3rd-party liability	11%
Credit	19%
Legal expenses	9%
Assistance	11%
Miscellaneous	15%
Np reins (prop)	20%
Np reins (cas)	20%
Np reins (MAT)	20%

Tabella 9 – Valori deviazione standard del Reserve Risk Market Wide approach nel QIS5

La credibilità piena ( $c = 100\%$ ) per i rami di Responsabilità Civile (Auto e Generale), Credito e Cauzione è prevista solo in presenza di almeno 15 anni di esperienza

$N_{lob}$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\geq 15$
C	34%	43%	51%	59%	67%	74%	81%	87%	92%	96%	100%

Tabella 10 - Coefficienti di credibilità rami RC, Credito e Cauzione

per tutti gli altri rami sono sufficienti 10 anni.

$N_{lob}$	5	6	7	8	9	$\geq 10$
C	34%	51%	67%	81%	92%	100%

Tabella 11 - Coefficienti di credibilità altri rami

### 3 – Teoria del Rischio e Riserva Sinistri

Il risarcimento aleatorio  $\tilde{X}$  che ricade su una Compagnia assicurativa danni è rappresentato nella Teoria Collettiva del Rischio (CRM<sup>21</sup>), con una distribuzione composta. In generale una distribuzione composta è caratterizzata da una doppia componente aleatoria all'interno della sua struttura che, nello specifico, dipende dalle variabili casuali  $\tilde{Z}$  (costo dei sinistri) e  $\tilde{N}$  (numero dei sinistri). Le ragioni di questa doppia aleatorietà sono facili da interpretare: nel momento in cui l'assicuratore stipula una serie di polizze costituendo così un portafoglio determina il premio sulla base di ipotesi distributive della dinamica dei sinistri, non sapendo esattamente né quante delle polizze stipulate genereranno uno o più sinistri nel periodo contrattuale né l'importo di ogni singolo sinistro. Nei modelli collettivi di rischio una variabile casuale composta che descriva il costo aggregato dei sinistri viene indicata con:

$$\tilde{X} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \tilde{Z}_i & N > 0 \\ 0 & N = 0 \end{cases}$$

dove per ipotesi :

- $\tilde{N}$  è una variabile casuale discreta con  $\mu_{\tilde{N}}, \sigma_{\tilde{N}}^2 < \infty$
- $\tilde{Z}_i$  è una variabile casuale continua con  $\mu_{\tilde{Z}_i}, \sigma_{\tilde{Z}_i}^2 < \infty$
- $\tilde{Z}_i$  sono *i.i.d.* (indipendenti ed identicamente distribuiti, presupponendo contratti omogenei ed indipendenti tra loro)  $\mu_{\tilde{Z}_i} = \mu_{\tilde{Z}} < \infty$  e  $\sigma_{\tilde{Z}_i}^2 = \sigma_{\tilde{Z}}^2 < \infty$
- $\tilde{N}$  indipendente da  $\tilde{Z}_i$  per ogni  $i$

Le caratteristiche di posizione e di scala della distribuzione di  $\tilde{X}$  sono:

$$\begin{aligned} E(\tilde{X}) &= E(\tilde{Z}) \cdot E(\tilde{N}) \\ \sigma^2(\tilde{X}) &= \sigma^2(\tilde{Z}) \cdot E(\tilde{N}) + E(\tilde{Z})^2 \cdot \sigma^2(\tilde{N}) \end{aligned}$$

L'interesse nella distribuzione scelta per i claims è principalmente dovuto agli effetti che le diverse distribuzioni composte possono comportare nella determinazione della riserva e del conseguente SCR specifico per il Reserve Risk. Le distribuzioni che generalmente vengono utilizzate per descrivere il processo distributivo della variabile

---

<sup>21</sup> Collective Risk Model

aleatoria  $\tilde{X}$  sono la Poisson Composta Semplice e la Poisson Composta Misturata.

### 3.1 – La distribuzione Poisson Composta Semplice

Nella distribuzione Poisson Composta Semplice si ipotizza che la variabile aleatoria numero dei sinistri sia distribuita come una Poisson di parametro  $n$ :

$$\tilde{N} \sim \text{Poisson}(n)$$

dove

$$\mu_{\tilde{N}} = \sigma_{\tilde{N}}^2 = n$$

In questo modello diventa quindi possibile semplificare le caratteristiche della distribuzione di  $\tilde{X}$ :

$$\begin{aligned} E(\tilde{X}) &= n \cdot E(\tilde{Z}) \\ \sigma^2(\tilde{X}) &= \sigma^2(\tilde{Z}) \cdot n + E(\tilde{Z})^2 \cdot n = n \cdot E(\tilde{Z}^2) \end{aligned}$$

Se la dimensione del portafoglio è sufficientemente elevata e l'asimmetria di  $\tilde{X}$  è moderata, è possibile adattare l'approssimazione Normale Standard attraverso la standardizzazione della distribuzione di  $\tilde{X}$  rispetto del Teorema del Limite Centrale (TLC<sup>22</sup>). Un limite pratico all'utilizzo di questa distribuzione sta nella caratteristica principale della variabile casuale Poisson, l'uguaglianza tra valore atteso e varianza. Osservando i dati empirici è spesso evidente come la variabile aleatoria numero dei sinistri sia caratterizzata da sovradisersione, ovvero il numero medio dei sinistri è generalmente più piccolo rispetto alla varianza. Questo approccio non è quindi coerente con quanto emerge dai dati e dal mercato; spesso accade, infatti, che la distribuzione dei sinistri segua dei trend, possa avere variazioni periodiche della propensione al rischio (cicli), possa subire oscillazioni di breve termine o fluttuazioni puramente casuali. Adottare una distribuzione Poisson Composta Semplice può portare ad errori valutazione

---

<sup>22</sup> Il Teorema del Limite Centrale: siano date  $n$  variabili casuali  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  tali che siano *i.i.d.* (indipendenti ed identicamente distribuite) con  $E(x) = \mu$  e  $Var(x) = \sigma^2$  si consideri  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  con  $E(S_n) = n \mu$  e  $Var(S_n) = n \sigma^2$ .

Standardizzando la variabile aleatoria  $S_n = \frac{S_n - n \mu}{n \sigma^2} = Z_n$  allora si ottiene che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq x) = \Phi(x)$$

dove  $\Phi(x)$  è l'area sottesa nella curva della Normale Standard nell'intervallo  $(-\infty, x]$ .

del rischio, ipotizzando una variabilità dei sinistri inferiore a quella che si potrebbe normalmente osservare sul mercato.

### 3.2 – La distribuzione Poisson Composta Misturata

La necessità di introdurre sovradisersione e consentire di avere una rappresentazione più realistica della dinamica distributiva del costo dei sinistri porta alla scelta di una distribuzione più complessa, la Poisson Composta Misturata. La caratteristica che la distingue dalla Poisson Composta Semplice è l'introduzione di una variabile  $\tilde{Q}$ , definita *variabile di mistura*, che possa perturbare il processo di Poisson Semplice del numero di sinistri, introducendo aleatorietà al parametro di riferimento  $n$ . La nuova variabile casuale  $\tilde{K}$  (numero dei sinistri) segue una distribuzione Poisson Misturata

$$\tilde{K} \sim \text{MixPoisson}(n \cdot \tilde{Q})$$

dove la variabile di mistura  $\tilde{Q}$  si ipotizza esser distribuita come una Gamma con medesimo parametro di scala e forma

$$\tilde{Q} \sim \text{Gamma}(h, h)$$

caratterizzata da  $\mathbf{E}(\tilde{Q}) = 1$  e  $\text{Var}(\tilde{Q}) = \frac{1}{h}$ .

In generale, per una distribuzione Gamma di parametri  $a, r$  la funzione di densità è assegnata come:

$$f(q) = \frac{a^r}{\Gamma(r)} e^{-aq} q^{r-1} \quad q \geq 0$$

dove  $r$  e  $a$  sono costanti positive e

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{r-1} du$$

è la funzione gamma di Eulero.

Le caratteristiche generiche di una distribuzione Gamma di parametri  $r, a$  sono:

$$\mathbf{E}(\tilde{Q}) = \frac{r}{a}$$

$$\sigma^2(\tilde{Q}) = \frac{r}{a^2}$$

Per la formazione di un processo di Poisson Composto Misturato, la condizione



fondamentale prevede  $E(\tilde{Q}) = 1$  e i parametri  $r$  ed  $a$  devono essere uguali, così che le caratteristiche della distribuzione risultino essere:

$$E(\tilde{Q}) = 1$$

$$\sigma(\tilde{Q}) = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

$$\gamma(\tilde{Q}) = \frac{2}{\sqrt{h}}$$

Al crescere del parametro  $h$ , la variabile causale  $\tilde{Q}$  tende ad una variabile casuale degenerare nel valore 1 e la Poisson Composta Misturata tende a ridursi ad una Poisson Composta Semplice.

Analizzando nel dettaglio la Poisson Misturata, le funzioni di probabilità e di ripartizione condizionata sono:

$$p_k = E_Q(p_k(n \cdot q)) = \int_0^\infty e^{-nq} \frac{(nq)^k}{k!} dH(q)$$

$$F(k) = E_Q(F(k|q)) = \int_0^\infty F_{nq}(k) dH(q)$$

da cui diventa possibile ricavare il valore atteso di  $\tilde{K}$

$$E(\tilde{K}) = E_Q(E(\tilde{K}|q)) = E_Q(n \cdot Q) = n \cdot E(Q) = n \cdot 1 = n$$

In questo modo è stato verificato che il valore atteso di una Poisson Misturata con variabile latente  $Q$  di media 1 è uguale al valore atteso di una Poisson Semplice. Per concludere, le caratteristiche di una Poisson Misturata sono:

$$E(\tilde{K}) = n$$

$$\sigma^2(\tilde{K}) = n + n^2 \cdot \sigma_q^2$$

$$\gamma(\tilde{K})^{23} = \frac{n + 3 \cdot n^2 \cdot \sigma_q^2 + n^3 \cdot \gamma_q \cdot \sigma_q^3}{\sigma_k^3}$$

Poiché la mistura è costituita nella forma Poisson-Gamma, la distribuzione di  $\tilde{K}$

---

<sup>23</sup> Il simbolo  $\gamma$  rappresenta l'indice di asimmetria o skewness di una distribuzione, ovvero un valore che cerca di fornire una misura della sua mancanza di simmetria. In caso di simmetria il suo valore è pari a zero.

può essere rappresentata da una Binomiale Negativa la cui probabilità puntuale può essere calcolata come segue:

$$p_k = \binom{h+k-1}{k} \cdot p^h \cdot (1-p)^k$$

dove

$$p = \frac{n}{n+h}$$

e

$$\binom{r}{s} = \frac{(r+s)!}{r! \cdot s!} = \frac{\Gamma(r+s+1)}{\Gamma(r+1) \cdot \Gamma(s+1)}$$

è il coefficiente binomiale.

Le caratteristiche della distribuzione Binomiale Negativa sono:

$$E(\tilde{K}) = n$$

$$\sigma^2(\tilde{K}) = n + \frac{n^2}{h}$$

$$\gamma(\tilde{K}) = \frac{n + \frac{3n^2}{h} + \frac{2n^3}{h}}{\sigma_k^3}$$

Un metodo più semplice per calcolare le probabilità della Binomiale Negativa è quella di sfruttare la formula ricorsiva tipica della Poisson:

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) \cdot p_{k-1} \quad \text{con } k = 1, 2, \dots$$

che può esser immediatamente derivata dalla formula classica ponendo:

$$p_0 = p^h$$

$$p = \frac{n}{n+h}$$

$$a = 1 - p$$

$$b = (h-1) \cdot a$$

Si arriva infine a descrivere le caratteristiche della distribuzione Poisson Composta sfruttando i momenti della Binomiale Negativa:

$$E(\tilde{X}) = n \cdot E(\tilde{Z}) = n \cdot m$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2(\tilde{X}) &= \sigma^2(\tilde{Z}) \cdot n + E(\tilde{Z})^2 \cdot \left( n + \frac{n^2}{h} \right) \\
&= n \cdot \left[ E(\tilde{Z}^2) - E(\tilde{Z})^2 \right] + E(\tilde{Z})^2 n + E(\tilde{Z})^2 \left( \frac{n^2}{h} \right) \\
&= n \cdot E(\tilde{Z}^2) + E(\tilde{Z})^2 \left( \frac{n^2}{h} \right) = n \cdot E(\tilde{Z}^2) + m^2 \left( \frac{n^2}{h} \right)
\end{aligned}$$

dove  $\tilde{Z}$  ha valore atteso  $m$  e coefficiente di variazione  $CoV(\tilde{Z}) = c_z$ .

La variabile casuale che descrive la distribuzione del costo del singolo sinistro  $\tilde{Z}$ , solitamente viene scelta tra un'Esponenziale, una Log-normale o una Pareto, caratterizzate da asimmetria positiva e coda destra con pesantezza differente.



Figura 13 – Distribuzione asimmetrica per il costo del singolo sinistro

In particolare la distribuzione di Pareto è caratterizzata da coda destra più pesante, rispetto ad una Log-normale. Ai fini della trattazione verrà scelta come distribuzione di riferimento la Log-normale per due ragioni:

- in Solvency II e nei QIS la distribuzione Log-normale viene espressamente scelta nella determinazione del requisito di capitale per il Reserve Risk
- le Compagnie Danni che verranno analizzate sono specializzate nel Ramo RC Auto, caratterizzato da sinistri con distribuzioni a coda destra generalmente poco pesante.

La distribuzione Log-normale selezionata è quella a due parametri  $\mu, \sigma$  la cui funzione di

densità è uguale a:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\exp\left(-\frac{(\ln(z) - \mu)^2}{2\sigma}\right)}{z \cdot \sqrt{2\pi\sigma}} & \text{se } z > 0, \quad \mu \in R, \quad \sigma > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Le caratteristiche della distribuzione Log-normale sono:

$$E(\tilde{Z}) = e^{\mu + \frac{\sigma}{2}}$$

$$\sigma^2(\tilde{Z}) = e^{2\mu + \sigma}(e^\sigma - 1)$$

$$\gamma(\tilde{Z}) = (e^\sigma + 2)\sqrt{e^\sigma - 1}$$

Il nome Log-normale deriva dalla proprietà per cui la trasformata  $\tilde{Y} = \log \tilde{Z}$  è distribuita come una variabile casuale Normale con  $E(\tilde{Y}) = \mu$  e  $\sigma^2(\tilde{Y}) = \sigma$ . Questa trasformazione tornerà molto utile nella costruzione del dataset per eseguire l'analisi, in quanto permetterà di ricavare i parametri di una Log-normale partendo dal triangolo dei pagamenti incrementali per simulare i costi dei singoli sinistri  $\tilde{Z}$ .

### 3.3 – Le tecniche di approssimazione

Le due tecniche di approssimazione che vengono brevemente introdotte sono l'approssimazione Normale e l'approssimazione Normal Power. La prima è la tecnica di approssimazione più comune e vastamente applicata, la seconda, come vedremo in dettaglio, è una trasformazione polinomiale della variabile casuale Normale.

#### 3.3.1 – L'approssimazione Normale

L'ipotesi di approssimazione più semplice ed utilizzata per semplificare lo studio delle probabilità riferite alla variabile casuale  $\tilde{X}$  è senza dubbio l'approssimazione Normale che trova applicazione in un vastissimo numero di ambiti. Ai fini della trattazione la distribuzione Normale sarà utilizzata come termine di paragone per valutare i risultati generati tramite ricampionamento con tecnica bootstrap. Per portafogli di grandi dimensioni e con l'approssimazione normale può essere giustificata in relazione al Teorema del Limite Centrale.

In generale, la mancanza di asimmetria della distribuzione Normale può essere “superata” attraverso l'introduzione di un'opportuna trasformazione, come quella che

conduce all'approssimazione Normal Power.

### 3.3.2 – L'approssimazione Normale Power

L'approssimazione Normal Power (NP) è una trasformazione polinomiale della variabile casuale Normale Standard:

$$\frac{X - E(\tilde{X})}{\sigma(\tilde{X})} \approx y + \frac{1}{6} \gamma_{\tilde{X}} (y^2 - 1)$$

dove

- $y_\varepsilon$  è la variabile casuale Normale Standard
- $R_\gamma$  è il termine di correzione funzione dell'asimmetria e della standard deviation di  $\tilde{X}$  così definito:

$$R_\gamma = \frac{(y^2 - 1)}{6} \sigma(\tilde{X}) \gamma_{\tilde{X}}$$

Considerando un percentile di ordine  $\varepsilon$ , l'approssimazione NP di  $X_\varepsilon$  sarà uguale a

$$X_\varepsilon \approx E(\tilde{X}) + y_\varepsilon \sigma(\tilde{X}) + R_\gamma$$

dove  $y_\varepsilon$  è il percentile di ordine  $1 - \varepsilon$  della Normale Standard.

## 3.4 – Le tecniche di simulazione

Il termine “simulazione” sta ad indicare la riproduzione del comportamento di un sistema, nel caso specifico di un insieme di dati. La simulazione consiste nell'utilizzo di modelli astratti che, attraverso specifici software, consentono di replicare il comportamento di un insieme di dati, generando un numero elevato di campioni omogenei al dataset iniziale da cui ricavare degli stimatori e la loro distribuzione. In finanza e in ambito assicurativo le tecniche di simulazione più utilizzate sono la simulazione Monte Carlo e il metodo di Bootstrap. L'implementazione di una tecnica di simulazione può essere laboriosa sia per i dati in input richiesti e le stringenti condizioni che devono essere rispettate, sia per i tempi di calcolo necessari a completare una simulazione significativa. I risultati di una simulazione non sono mai “esatti” ma possono fornire indicazioni su quello che potrebbe essere il comportamento della distribuzione da analizzare, vanno quindi interpretati ed osservati in modo critico. Ai fini dell'elaborato verrà analizzata soltanto la tecnica bootstrap applicata al metodo di stima puntuale della riserva Chain-Ladder Paid classico

sulla base dei costi dei sinistri organizzati in appositi triangoli di run-off. Il risultato finale del bootstrap sarà la distribuzione della riserva sinistri, ovvero la differenza tra costo ultimo dell'intero portafoglio e costi già pagati al momento della valutazione.

### 3.4.1 – Il Bootstrap sul modello Chain-Ladder Paid Classico

Il Bootstrap è una tecnica potente e, allo stesso tempo, semplice da utilizzare che fa riferimento al campionamento con ripetizione dei dati osservati per creare un elevato numero di insiemi di “pseudo-dati” coerenti con la distribuzione sottostante. Vari articoli scientifici, tra cui è importante ricordare gli autori England e Verrall, evidenziano come il metodo vada utilizzato opportunamente per simulare la variabilità insita nei dati stimati (varianza del processo), oltre che l'incertezza nella stima dei parametri del modello (varianza della stima), da cui poter ricavare la “distribuzione predittiva”.

Il bootstrap è dunque una tecnica statistica che attraverso la simulazione permette di studiare la distribuzione di uno stimatore. Dato un campione casuale  $y_1, y_2, \dots, y_n$  di un fenomeno, con una dimensione  $n$ , in statistica inferenziale l'obiettivo è quello di ricavare da tale campione delle funzioni  $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$  dette stimatori. Il bootstrap consente quindi di arrivare, attraverso un processo simulativo, ad una distribuzione campionaria dello stimatore, costruendo tanti possibili campioni tramite estrazione con reimmissione dal campione osservato. Il numero di campioni che viene simulato deve essere stabilito prima che inizi la simulazione, fissando un numero  $N$  di repliche bootstrap che sia sufficientemente grande da garantire la significatività della stessa.

Prima di proseguire con la simulazione bootstrap applicata al metodo di riservazione Chain-Ladder Paid classico è importante specificarne le caratteristiche e la struttura per rendere comprensibili i passaggi successivi.

#### *Il metodo Chain-Ladder Paid Classico*

La riservazione è uno dei processi cruciali nello svolgimento dell'attività assicurativa. Le Compagnie danni, ad ogni chiusura contabile (e in particolare a fine anno per la chiusura c.d. di bilancio), si trovano a valutare gli importi da accantonare a riserva per far fronte ai sinistri ancora da liquidare, generati da un portafoglio di polizze, facendo spesso riferimento ai risarcimenti già liquidati il cui ammontare viene aggiornato alla data di

valutazione corrente. Le tecniche per procedere alla rilevazione delle riserve sono molteplici, dai più semplici metodi deterministici come il Chain-Ladder (nelle sue diverse varianti) e il Fisher-Lang, ai più complessi e dispendiosi metodi stocastici.

Ai fini della trattazione verrà utilizzato un metodo stocastico che però fonda il suo funzionamento sul metodo deterministico del Chan-Ladder Paid Classico. In questo modello deterministico la dinamica futura dei sinistri viene determinata sulla base dei pagamenti passati, considerando un periodo di tempo limitato. Le osservazioni che vengono utilizzate sono riferite ai pagamenti derivanti da sinistri avvenuti solo in quel lasso di tempo. In questo modo vengono costituiti gli importi pagati negli antecedenti  $n$  anni, chiamati *anni di generazione di sinistro*. Per ogni anno di generazione gli importi dei sinistri vengono suddivisi per *anni di sviluppo*  $j$ , ovvero gli anni in cui i pagamenti dei sinistri generati nell'anno  $i$  sono stati effettivamente sostenuti. Il risultato è un triangolo contenente i pagamenti incrementali. Gli incrementali (d'ora in poi saranno chiamati così gli importi contenuti in ogni singola cella) relativi ai sinistri avvenuti nell'anno  $i$  e pagati in  $j$ , si indicano con

$$P_{i,j} \quad \text{con} \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n - i + 1)$$

Il secondo step prevede il passaggio dal triangolo dei pagamenti incrementali a quello dei pagamenti cumulati, ottenuto come somma dei pagamenti incrementali alla fine di ciascun anno di sviluppo. Il triangolo dei pagamenti cumulati, c.d. triangolo superiore, mostrerà sulla diagonale gli importi totali pagati per ogni anno di generazione  $i$ .

N-7	5.468.967	7.258.631	7.698.320	7.995.240	8.209.298	8.331.652	8.331.652	8.331.652
N-6	6.214.876	6.873.596	7.526.006	7.882.247	7.984.833	8.195.253	8.195.253	
N-5	6.532.147	7.190.867	7.843.277	8.199.518	8.302.104	8.625.148		
N-4	7.028.963	7.687.683	8.340.093	8.696.334	9.563.014			
N-3	7.223.689	7.882.409	8.534.819	9.258.417				
N-2	7.885.963	8.544.683	9.069.558					
N-1	7.123.068	8.667.241						
N	8.563.217							

Tabella 12 – Esempio di triangolo superiore

Ogni cella del triangolo dei cumulati è calcolata secondo la formula:

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^j C_{i,k}$$

L'ipotesi alla base del metodo CL Classico prevede che la progressione dei

pagamenti cumulati si mantenga sostanzialmente invariata per ogni generazione, i pagamenti futuri non dipendono quindi dalla generazione  $i$  ma solo dall'anno di sviluppo  $j$ . Diventa allora necessario calcolare i *fattori di sviluppo*  $\lambda$  di ogni anno  $j$  nel modo seguente:

$$\lambda_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}$$

con  $j = 1, \dots, n - 1$ .

L'obiettivo finale è di determinare gli importi da riservare a copertura dei pagamenti futuri, che sono stimati utilizzando i fattori di sviluppo calcolati sulla base dei risarcimenti passati. Per i pagamenti cumulati futuri da stimare, nel rispetto della progressione prevista per ogni anno di sviluppo  $j$ , è sufficiente applicare la formula seguente in ogni cella del triangolo inferiore:

$$C_{i,j} = \lambda_{j-1} C_{i,j-1}$$

N-7							
N-6							8.264.296
N-5						8.742.122	8.815.772
N-4					9.781.407	9.914.062	9.997.585
N-3				9.568.401	9.786.917	9.919.646	10.003.217
N-2			9.610.968	9.932.756	10.159.593	10.297.376	10.384.129
N-1		10.129.611	10.734.302	11.093.700	11.347.049	11.500.937	11.597.830
N	16.914.587	19.768.481	20.948.567	21.649.952	22.144.378	22.444.698	22.633.789

Tabella 13 – Esempio di triangolo inferiore

La somma degli importi stimati nel triangolo inferiore è equivalente alla stima della riserva sinistri non scontata. Quando entrambi i triangoli sono completi vanno calcolati i *costi ultimi di generazione*  $U_i$ , ovvero gli importi cumulati alla fine dell'ultimo anno di sviluppo.

Una volta determinati i costi ultimi di generazione è possibile determinare la stima CL della riserva sinistri calcolando la differenza tra i costi ultimi  $U_i$  e l'elemento diagonale del triangolo superiore contenente i costi cumulati pagati per ogni anno di generazione:

$$L_i = U_i - C_{i,n-i+1} \quad \text{con } i = 2, \dots, n$$

mentre la riserva totale sarà uguale a



$$L = \sum_{i=2}^n L_i$$

### Il bootstrap sul Chain-Ladder Paid Classico

Prima di introdurre il metodo Chan-Ladder Paid si ricorda una condizione fondamentale della tecnica bootstrap, ovvero che il campione di origine provenga da distribuzioni *i.i.d.*. Bisogna notare come i pagamenti  $P_{i,j}$  non soddisfino questa condizione. La simulazione bootstrap non è dunque applicabile sui pagamenti incrementali, né tantomeno su quelli cumulati. Il ricampionamento può essere svolto sui residui di un modello probabilistico di tipo GLM<sup>24</sup> che sia coerente con l'algoritmo di Chain-Ladder<sup>25</sup>.

Prima di procedere con la simulazione è allora necessario ricavare i residui, in particolare i residui corretti di Pearson, su cui, dopo aver eseguito la simulazione, saranno calcolati per processo ricorsivo inverso i pagamenti incrementali ricostruiti, concludendo infine con la stima della riserva sinistri. Dai pagamenti incrementali ricostruiti sarà possibile ottenere la distribuzione della riserva complessiva e delle singole riserve per ogni generazione. Il valore medio della distribuzione bootstrap rappresenta la stima della *best estimate* non scontata che al crescere del numero delle simulazioni converge al valore della riserva calcolato con il CL tradizionale. Il processo completo può essere riassunto in 7 step, di cui i primi 5 sono di preparazione dei dati:

1. Calcolo dei fattori di sviluppo CL
2. Calcolo dei pagamenti retrocumulati storici a partire dai fattori di sviluppo
3. Calcolo a ritroso dei corrispondenti pagamenti incrementali nel triangolo base
4. Calcolo degli scarti standardizzati di Pearson

---

<sup>24</sup> Generalized Linear Model è la generalizzazione di un modello lineare classico nell'ambito della regressione lineare. Se nel modello lineare classico si ipotizza che la variabile endogena sia distribuita in modo normale, nell'ambito dei modelli lineari generalizzati la variabile endogena può essere distribuita come una qualsiasi variabile casuale della famiglia esponenziale come ad esempio: binomiale, poissoniana, gamma, normale inversa. Le 3 componenti che caratterizzano un GLM sono:

- La funzione di distribuzione  $f$ , appartenente alla famiglia esponenziale
- Il predittore lineare  $\eta = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ , dove le lettere in maiuscolo indicano dei vettori
- La funzione  $g$ , detta "*link function*", tale che  $E(Y) = \boldsymbol{\mu} = g^{-1}(\eta)$

<sup>25</sup> "*Claims reserving with R: ChainLadder-0.2.11 Package Vignette*" paper del 2020 del Dott. Wuthrich

5. Calcolo degli scarti di Pearson corretti
6. Esecuzione del loop iterativo sugli scarti corretti e memorizzazione della stima della riserva per ogni iterazione
7. Calcolo della distribuzione predittiva della riserva sinistri

Il primo step viene eseguito esattamente come riportato precedentemente nel modello Chain-Ladder Paid, bisogna applicare la formula del calcolo dei fattori di sviluppo sul triangolo dei cumulati.

Il secondo step mira ad ottenere in modo ricorsivo i pagamenti retrocumulati storici, partendo dalla diagonale del triangolo superiore dei pagamenti cumulati si torna indietro dividendo ogni cella per i fattori di sviluppo secondo la formula seguente:

$$\hat{C}_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{\lambda_j}$$

Si individua dunque un nuovo triangolo teorico, il triangolo dei pagamenti cumulati ricostruiti, assumendo che i dati soddisfino perfettamente l'ipotesi di base del Chain-Ladder.

Il terzo step prevede il calcolo a ritroso dei pagamenti incrementali a partire dal nuovo triangolo dei cumulati ricostruiti nel modo seguente:

$$\hat{P}_{i,j} = \hat{C}_{i,j} - \hat{C}_{i,j-1}$$

Il triangolo superiore degli incrementali ricostruiti  $\hat{P}_{i,j}$  deve essere confrontato con quello degli incrementali osservati da cui si era partiti, tanto più i due triangoli sono simili tanto più saranno soddisfatte le ipotesi del CL Classico e i residui di conseguenza piccoli. Dei residui molto grandi avranno come conseguenza una grande variabilità della riserva dovuta a possibili scostamenti dall'ipotesi di base del modello.

Il quarto step prevede il calcolo dei residui di Pearson, che, in generale, vengono utilizzati per misurare la bontà di adattamento di uno specifico modello di tipo GLM. Sono definiti come il rapporto tra, a numeratore, lo scarto tra valore osservato e quello stimato e, a denominatore, la deviazione standard. Nell'applicazione del CL bootstrap il modello sottostante la definizione degli scarti di Pearson è il modello poissoniano classico, per cui media e varianza sono uguali e corrispondono, in questo specifico caso, a  $\hat{P}_{i,j}$ . La formula è la seguente:

$$r_{i,j}^P = \frac{P_{i,j} - \hat{P}_{i,j}}{\sqrt{\hat{P}_{i,j}}}$$

La variabilità mostrata dai residui di Pearson considera solo la varianza della stima perché con il bootstrap si andrà a verificare soltanto quanto i dati stimati attraverso lo stimatore specifico del Chain-Ladder si allontanano da quelli osservati. La varianza di processo verrà colta con un processo simulativo più complesso che verrà spiegato successivamente. A questo punto con i residui di Pearson calcolati si costruisce un triangolo per implementare il bootstrap.

Lo step cinque, l'ultimo in preparazione della simulazione con la tecnica bootstrap, consiste nella correzione dei residui di Pearson tenendo conto del numero di osservazioni e dei gradi di libertà del modello. La formula è la seguente:

$$r_{i,j}^{adj} = r_{i,j}^P \cdot \sqrt{\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2} - (2n-1)}}$$

Il fattore  $\frac{n(n+1)}{2}$  al numeratore rappresenta il numero di osservazioni che la Compagnia ha a disposizione sul triangolo superiore ( $n$  è la dimensione del triangolo), a denominatore, invece, si ha il numero di osservazioni al netto del numero di parametri del modello. Il bootstrap sarà applicato su questi residui corretti che, per ipotesi, si assume siano *i.i.d.*.

Il sesto step consiste nel compiere un numero di simulazioni bootstrap  $N$  che sia sufficientemente grande, dove in ogni simulazione  $h$ :

- viene creato un nuovo triangolo di residui di Pearson corretti attraverso campionamento casuale con reinserimento
- si ricostruisce il triangolo degli incrementali mediante la relazione inversa:

$$P_{i,j}^h = r_{i,j}^h \cdot \sqrt{\hat{P}_{i,j} + P_{i,j}}$$

- si costruisce il triangolo dei cumulati e si calcola la riserva applicando l'algoritmo Chain-Ladder

Il campionamento con reinserimento viene svolto partendo dal triangolo dei residui di Pearson corretti dal quale ogni singolo residuo, attraverso la simulazione, viene spostato

in celle diverse rispetto al triangolo di partenza formandone così uno nuovo. L'estrazione con reinserimento prevede che ogni valore del triangolo di partenza possa ricomparire più volte nel triangolo ricampionato. L'ipotesi di fondo del bootstrap è quindi che l'errore (residuo) compiuto in una cella possa essere compiuto in una cella diversa rispetto al triangolo originale, anche più volte. Il bootstrap è completo una volta che questo processo è ripetuto per  $N$  volte. Dopo aver concluso anche i due passaggi successivi del sesto step si hanno a disposizione  $N$  realizzazioni della riserva, se ne ricava la distribuzione su cui calcolare media e varianza. Si può osservare come al crescere della dimensione campionaria e del numero di simulazioni  $N$  fatte, la media aritmetica della riserva tende alla stima del Chain-Ladder Classico.

L'ultimo step, il settimo, mira a definire in modo completo la distribuzione predittiva della riserva, per farlo è necessario affiancare al Chain-Ladder una procedura per la stima della variabilità di processo. Per determinare la varianza di processo è possibile adottare due differenti approcci: un approccio a formula analitica, che non verrà trattato nell'elaborato, ed un approccio simulativo che sfrutta la distribuzione Poisson con sovradisersione. L'approccio simulativo prevede che dopo aver determinato gli  $N$  triangoli con i pagamenti incrementali ricostruiti, ci si ferma prima di procedere con il calcolo classico del triangolo inferiore per arrivare alla stima delle  $N$  riserve. I triangoli inferiori vengono calcolati ipotizzando che ogni singola cella sia estratta da una distribuzione poissoniana con sovradisersione, caratterizzata dai seguenti primi due momenti:

$$E(\hat{P}_{i,j}) = P_{i,j}$$

$$\sigma^2(\hat{P}_{i,j}) = \phi P_{i,j}$$

Alla base c'è l'ipotesi di indipendenza delle celle dei pagamenti incrementali senza la quale non sarebbe possibile procedere con la simulazione. Il parametro di sovradisersione  $\phi$  non inciderà sulla media della riserva stimata (il valore atteso dei pagamenti incrementali  $\hat{P}_{i,j}$  non è influenzato dal parametro), ma inciderà sulla varianza di processo. Si ipotizza che la varianza di ogni cella sia pari ad un parametro costante  $\phi$ , che non dipende da  $i$  e da  $j$ , moltiplicato per la media. Il parametro di sovradisersione deve essere calcolato come la somma dei residui non aggiustati al quadrato divisa per la differenza tra il numero di osservazioni e il numero di parametri:

$$\phi = \frac{\sum_{i+j \leq n+1} (r_{i,j}^{(P)})^2}{\frac{1}{2}n \cdot (n+1) - 2n + 1}$$

Il numeratore rappresenta la somma dei quadrati di variabili approssimativamente gaussiane (i residui quando il numero di simulazioni è sufficientemente grande), che tendono dunque ad una distribuzione  $\chi^2$ , mentre a denominatore si ha la sua media teorica perché per una variabile  $\chi^2$  la media è pari al numero di gradi di libertà. L'obiettivo è quello di arrivare a stimare la varianza di processo della riserva e non dei pagamenti incrementali, ma essendo noto che la riserva è la somma delle celle del triangolo inferiore dei pagamenti incrementali è possibile riscrivere:

$$\sigma^2(R) = \sigma^2\left(\sum_{i+j > n+1} P_{i,j}\right)$$

da cui introducendo il parametro di dispersione  $\phi$

$$\begin{aligned} \sigma^2\left(\sum_{i+j > n+1} P_{i,j}\right) &= \sum_{i+j > n+1} \sigma^2(P_{i,j}) = \sum_{i+j > n+1} \phi \cdot E(P_{i,j}) \\ &= \phi \cdot \sum_{i+j > n+1} E(P_{i,j}) = \phi \cdot E\left(\sum_{i+j > n+1} P_{i,j}\right) = \phi \cdot E(R) \end{aligned}$$

Questa procedura, nel suo complesso, permette di considerare le due fonti di aleatorietà che influenzano la distribuzione predittiva della riserva:

- ogni cella ha una distribuzione con varianza propria, la varianza di stima di ogni singolo pagamento
- estrarre i pagamenti incrementali del triangolo inferiore da una ODP introduce la componente di varianza di processo

Le  $N$  riserve risultato della simulazione bootstrap con estrazione da distribuzione ODP saranno utilizzate per ricavare la distribuzione dello stimatore della riserva sinistri, dove la media sarà invariata mentre la varianza sarà quella complessiva e non soltanto quella di stima. Il risultato finale sarà la distribuzione predittiva dello stimatore della riserva.

## **4 – CASO STUDIO: analisi e confronto tra due Portafogli RC Auto nel mercato italiano**

L'ultimo capitolo dell'elaborato prenderà in esame due differenti dataset di Compagnie che operano nel ramo Rc Auto nel mercato italiano. I dataset verranno analizzati nel dettaglio arrivando a valutare un requisito di solvibilità per il Reserve Risk di entrambe le Compagnie in assenza e in presenza di trattati riassicurativi.

In particolare, saranno considerati due trattati di riassicurazione:

- un trattato proporzionale Quota Share (QS) con varie aliquote di ritenzione  $\alpha$  (95%, 80%, 70%, 50%)
- un trattato non proporzionale Excess of Loss (XL) con due soglie differenti in relazione alla dimensione della Compagnia.

### **4.1 – Descrizione del dataset**

I due dataset considerati provengono da due Compagnie di diverse dimensioni che operano nel mercato italiano. I dati sono aggiornati all'anno 2016 e comprendono i triangoli di run-off dei costi incrementali dei sinistri relativi agli ultimi 20 anni. È stato scelto di focalizzare l'analisi su un periodo di 8 anni (i più recenti) perché, per entrambe le Compagnie, la percentuale di sinistri liquidati entro 8 anni dalla data di accadimento è superiore al 96%, si è quindi ritenuto ragionevole non considerare dati che fossero precedenti a tale periodo. Insieme ai triangoli di run-off dei costi incrementali sono stati forniti i corrispondenti triangoli di run-off contenenti il numero di sinistri relativo ai vari anni di sviluppo per ogni anno di generazione considerato per entrambe le Compagnie. Nel dataset della Compagnia Medium Size è stato inoltre fornito il triangolo di run-off contenente il costo medio del pagato. La combinazione di questi triangoli ha consentito di condurre un'analisi esplorativa per valutare come utilizzare al meglio i dati al fine di realizzare una simulazione realistica e coerente a livello statistico-attuariale della distribuzione del costo dei singoli sinistri per l'applicazione della riassicurazione XL "claim-by-claim". I risultati di queste analisi preliminari hanno portato a scelte diverse per le due Compagnie in relazione alle caratteristiche dei dati a disposizione. Per le riassicurazioni in quota proporzionali, invece, si è lavorato direttamente sui triangoli di run-off dei costi incrementali forniti dalle Compagnie. Tutti questi aspetti verranno trattati

in maniera approfondita nei paragrafi successivi.

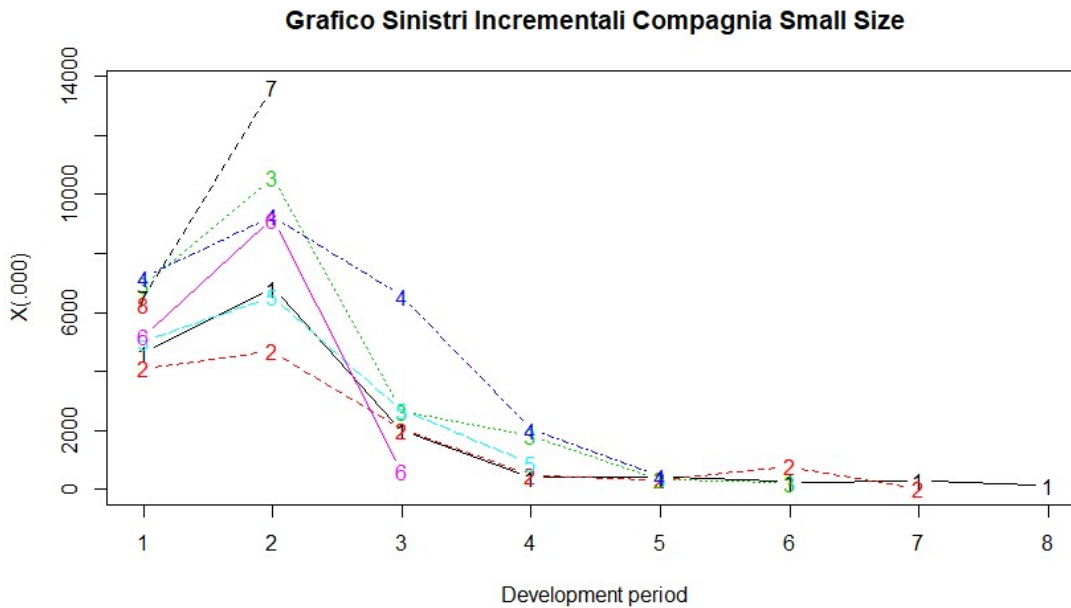
#### 4.1.1 – Compagnia Small Size

Il primo dataset ad essere introdotto è quello della Compagnia Small Size, nella Tabella 14 viene riportato il triangolo di run-off dei costi incrementali dei sinistri

2009	4.596.643	5.958.889	2.001.555	413.906	413.245	250.497	292.143	138.888
2010	4.097.242	4.682.780	2.021.889	483.297	330.602	777.942	38.868	
2011	6.931.862	9.839.464	2.406.371	1.226.519	341.744	194.284		
2012	7.165.220	7.891.747	4.117.024	1.183.875	431.187			
2013	5.031.032	6.299.201	2.207.433	900.780				
2014	5.179.886	6.997.805	635.702					
2015	6.105.651	9.997.277						
2016	6.205.199							

*Tabella 14 - Triangolo dei costi incrementali dei sinistri Compagnia Small Size*

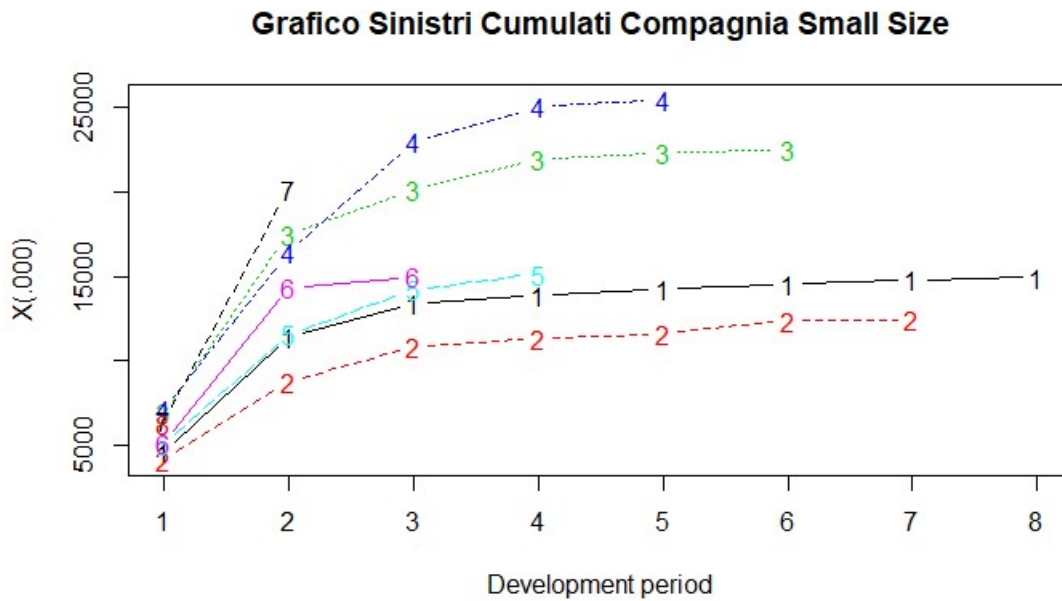
Si nota come il portafoglio polizze di questa Compagnia abbia subito delle variazioni modeste nel corso dell'arco temporale considerato. Dopo un primo periodo iniziale di crescita del costo dei sinistri, tra il 2010 e il 2011, che potrebbe far presagire ad un tentativo della Compagnia di far crescere la dimensione del portafoglio con un aumento di polizze sottoscritte, nel 2013 il costo dei sinistri è calato sensibilmente, indicando forse un ridimensionamento del portafoglio. Va ricordato che gli anni successivi al 2011-2012 in Italia è stato un periodo molto difficile a causa della crisi finanziaria scoppiata nel 2008, una riduzione del portafoglio potrebbe essere in parte dovuta a queste ragioni. Dal 2014 il costo dei sinistri è tornato a crescere per poi consolidarsi l'anno successivo, il che può significare un nuovo tentativo di ampliare il portafoglio da parte della Compagnia.



*Figura 14 - Dinamica costi incrementali dei sinistri al lordo dei trattati riassicurativi, Compagnia Small Size*

Un altro grafico molto interessante per osservare quella che è stata la dinamica dei costi incrementali dei sinistri nel corso degli 8 anni considerati viene presentato nella Figura 14. Risulta evidente come per tutti gli anni di generazione l'anno successivo al primo fa registrare un incremento del costo dei sinistri, per poi assumere un andamento monotono decrescente per i successivi anni di sviluppo. Questo fenomeno può trovare spiegazione nel fatto che tutti quei sinistri avvenuti nell'anno di generazione  $i$ , non liquidati entro la fine dell'esercizio ma in quello successivo, sono caratterizzati da una severity leggermente maggiore perché la ritardata liquidazione è spesso dovuta a tempi tecnici di valutazione necessari a determinare il valore del risarcimento. Un ritardo nella liquidazione può anche essere dovuto a condizioni strutturali della Compagnia non sufficienti a garantire una fase di liquidazione fluida per i sinistri. Per concludere viene presentata nella Figura 15 la dinamica dei pagamenti cumulati (calcolati secondo il metodo descritto nel paragrafo 3.4.1), coerente con quanto già emerso dagli incrementali.





*Figura 15 - Dinamica costi cumulati dei sinistri al lordo dei trattati riassicurativi, Compagnia Small Size*

#### 4.1.2 – Compagnia Medium Size

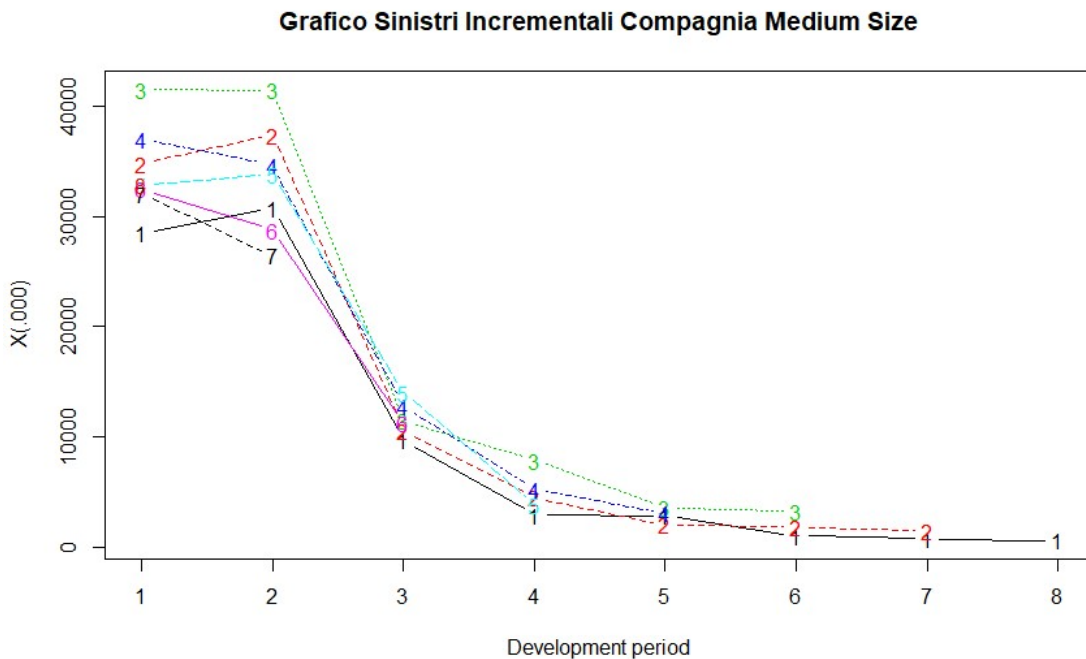
Il dataset di partenza della Compagnia Medium Size è anche in questo caso un triangolo di run-off dei costi dei sinistri incrementali, viene qui riportato nella Tabella 15.

2009	28.493.743	30.701.223	9.712.264	2.956.637	2.895.884	1.078.717	796.261	645.627
2010	34.745.023	37.371.967	10.597.724	4.542.838	2.028.521	1.831.951	1.467.990	
2011	41.488.398	41.401.198	11.483.365	7.889.876	3.649.213	3.254.428		
2012	36.981.277	34.637.562	12.757.664	5.283.165	3.179.784			
2013	32.827.366	33.793.650	14.014.936	3.862.697				
2014	32.432.673	28.735.448	11.219.841					
2015	32.038.755	26.453.348						
2016	32.895.343							

*Tabella 15 - Triangolo dei costi incrementali dei sinistri Compagnia Medium Size*

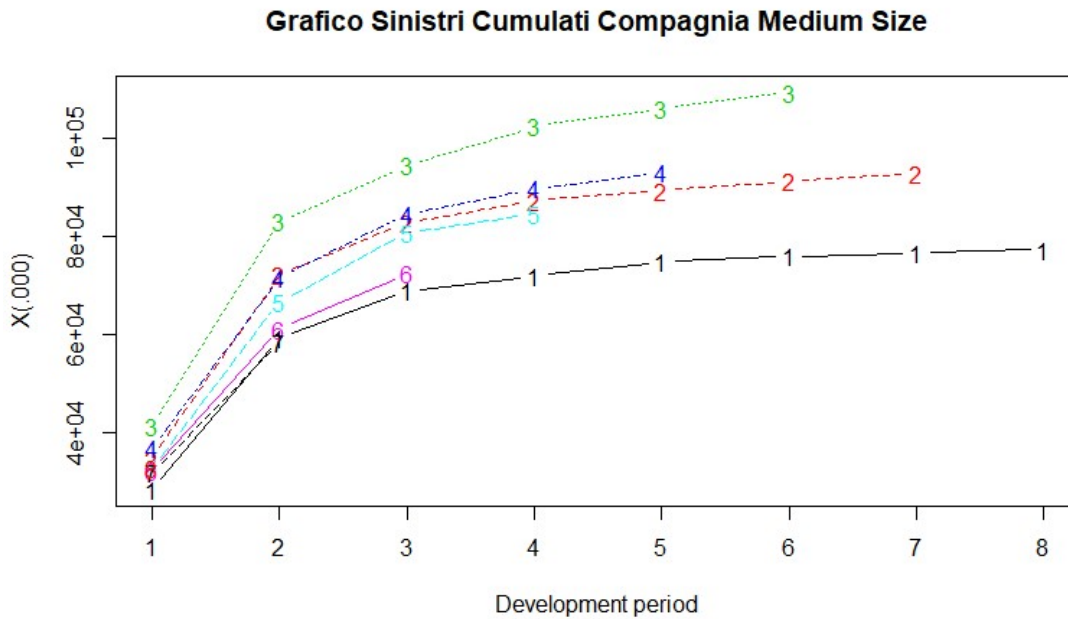
È subito visibile dal triangolo che, in questo caso, i costi incrementali registrati hanno ordini di grandezza da 6 a 8 volte superiori rispetto a quelli osservati nella Small Size. Come avvenuto per la prima Compagnia c'è stata una crescita dei costi tra il 2010 ed il 2011 interrotta repentinamente nel 2012, dal 2013 in poi la Compagnia ha riacquisito

stabilità. Si potrebbe ipotizzare, anche in questo caso, che la contrazione dei costi incrementali in seguito all'anno 2012 sia stata causata da una riduzione del numero di polizze in portafoglio a causa degli effetti della crisi.



*Figura 16 - Dinamica costi incrementali dei sinistri al lordo dei trattati riassicurativi, Compagnia Medium Size*

La Figura 16 mostra le differenze nella dinamica di sviluppo dei costi incrementali rispetto alla Compagnia Small Size, il primo anno di sviluppo non è infatti caratterizzato da un'accentuata tendenza nella crescita del costo incrementale, questo potrebbe essere giustificato da una migliore capacità di liquidazione dei sinistri grazie ad un'organizzazione d'impresa più strutturata ed efficiente. Non va dimenticata infatti la cosiddetta "expertise" che deriva da un numero maggiore di anni nel settore assicurativo da parte della Compagnia Medium che le hanno permesso di acquisire la giusta esperienza per gestire pratiche che inizialmente potevano presentare maggiori insidie o difficoltà. In Figura 17 viene presentata la dinamica dei costi cumulati, coerente con gli incrementali.



*Figura 17 - Dinamica costi cumulati dei sinistri al lordo dei trattati riassicurativi, Compagnia Medium Size*

## 4.2 – L’importazione dei dati e la procedura Bootstrap

Il passaggio successivo all’analisi iniziale dei dataset prevede che si inizi a lavorare con i triangoli dei costi incrementali e con gli strumenti che si ritengono più idonei. L’analisi sviluppata nell’elaborato è stata realizzata utilizzando il software R che, con il pacchetto *ChainLadder*, ha permesso il raggiungimento dei risultati finali.

Per importare il dataset è stato necessario lavorare sulla forma dei dati, innanzitutto considerando soltanto i dati da utilizzare nell’analisi, privi di ogni tipo di formattazione ed inseriti in un file *.csv*, un formato di Excel particolarmente adatto per l’importazione dei dati. Questa fase del processo è stata molto delicata perché una corretta organizzazione ed importazione dei dati costituisce la base di tutto il lavoro.

Una volta importato il dataset è stata applicata la simulazione Bootstrap sul triangolo di run-off dalla quale, al termine della procedura, si è ottenuto un numero N di simulazioni dell’importo della riserva sinistri calcolata con il metodo Chain-Ladder Paid sui triangoli simulati. Si è scelto di applicare il Bootstrap con un numero N di simulazioni pari a 1000. Per la stima della variabilità di processo il Bootstrap è stato eseguito in combinazione con una distribuzione “Overdispersed Poisson” per la Compagnia Small

Size, mentre per la Compagnia Medium Size in combinazione con una distribuzione “Gamma”.

I risultati della simulazione sono stati utilizzati per l’analisi del caso senza riassicurazione e dei casi con riassicurazione QS. Nei trattati proporzionali è noto che l’effetto di ritenzione della riassicurazione proporzionale in quota è il medesimo su ogni sinistro, è per cui stato possibile applicare i trattati di riassicurazione direttamente sugli importi stimati della riserva, dopo averne calcolato la Best Estimate.

Ben più complessa è stata l’applicazione del trattato XL per il quale si richiede la distribuzione del costo dei singoli sinistri per ogni cella del triangolo incrementale. Al fine di ottenere delle simulazioni realistiche sono state fatte scelte differenti per le due Compagnie. Per la Compagnia Small Size la distribuzione del costo dei singoli sinistri di ogni cella dei triangoli simulati con il bootstrap è stata ottenuta dall’estrazione da una Log-normale sfruttandone la trasformazione della Normale descritta nel paragrafo 3.2. I parametri della distribuzione Log-normale sono stati determinati con i dati reali della Compagnia a disposizione ed inoltre si è ipotizzato un  $CoV_Z = 9$  per il singolo sinistro come indicato dalla Direttiva Solvency II, valore ragionevole rispetto a quelle che sono le evidenze empiriche del mercato. Per il numero dei sinistri è stato considerato per tutte le celle il valore osservato contenuto nel dataset. Dopo le analisi esplorative iniziali, non si è utilizzata quindi una distribuzione Poisson Composta Misturata, per tenere conto che la procedura bootstrap implementata in R incorpora già una stima della variabilità di processo. Per la Compagnia Medium Size valgono le medesime considerazioni, l’unica differenza è stata quella di utilizzare anche il triangolo del costo medio del pagato nel determinare i parametri della Log-normale da sui si sono estratti i valori di costo dei singoli sinistri.

### 4.3 – Le caratteristiche della distribuzione dello stimatore della Riserva

Una volta illustrate le scelte e le tecniche di simulazione utilizzate nella trattazione, si analizzano ora i risultati in modo separato per Compagnia Small Size e Compagnia Medium Size, focalizzando l’attenzione sugli effetti della riassicurazione. Il risultato del Bootstrap è stata la simulazione della distribuzione predittiva di una quantità di interesse, che in questo caso è la riserva sinistri. La riserva sinistri è calcolata come somma delle

differenze tra i costi totali previsti e quelli già sostenuti per ogni anno di generazione. Questo calcolo viene iterato per 1000 ripetizioni arrivando ad avere una distribuzione bootstrap della riserva stimata. Una volta ottenuti i valori della riserva è stata osservata la sua distribuzione attraverso un istogramma. Le caratteristiche della distribuzione della Riserva Sinistri stimate con la procedura Bootstrap sono:

- il valore atteso
- la deviazione standard
- il coefficiente di variazione
- la skewness, ovvero l'indice di asimmetria
- la curtosi<sup>26</sup> della riserva, ovvero l'indice di forma che osserva il comportamento del centro e delle code rispetto ad una ipotetica distribuzione gaussiana.

Nelle caratteristiche di interesse sono compresi anche due indici di forma che possono dare indicazioni sul comportamento delle code della distribuzione e sulla forma della curva, utili nel caso in cui ci fossero delle code pesanti sulle quali approfondire l'analisi.

#### 4.3.1 – Compagnia Small Size

Prima di entrare nel vivo dell'analisi della Compagnia Small Size vanno fatte delle precisazioni in merito al trattato XL. In particolare, il limite di ritenzione  $M$  per la Compagnia Small Size è stato fissato a 300.000 euro, arrotondamento del valore ottenuto basando il calcolo sulla formula proposta nel paper<sup>27</sup> dei Dott. Savelli e Pallaria del 2019 nel quale si ipotizza un limite di ritenzione calcolato nel modo seguente:

$$M = E(\tilde{Z}) + k \cdot \sigma(\tilde{Z})$$

dove  $\tilde{Z}$  è la variabile casuale corrispondente al costo medio del singolo sinistro e  $k$  un

---

<sup>26</sup> La curtosi è un indice di forma che viene calcolato abitualmente con l'indice di K. Pearson:

$$\gamma_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3$$

dove al numeratore si ha il momento centrale di ordine 4 mentre al denominatore il quadrato della varianza. Al rapporto viene sottratto il valore 3 che corrisponde alla distribuzione gaussiana. In base al valore  $\gamma_2$  è possibile fare delle osservazioni sulla forma della distribuzione:

- se  $\gamma_2 > 0$  la curva viene definita *leptocurtica*, cioè più “appuntita” di una normale
- se  $\gamma_2 = 0$  la curva viene definita *normocurtica*, cioè “piatta” come una normale
- se  $\gamma_2 < 0$  la curva viene definita *platicurtica*, cioè più “piatta” di una normale

<sup>27</sup> *Premium Risk Net of Reinsurance: From Short-Term to Medium-Term Assessment*. 2019 di Savelli Nino e Pallaria Antonio

opportuno fattore moltiplicativo. Nel paper viene segnalato che il valore di  $k$  specifico per il ramo RC Auto è di 15 (valore adottato nella trattazione), come da evidenze empiriche riscontrate nel mercato italiano. La formula si è dimostrata coerente su un'analisi empirica di molteplici trattati di riassicurazione XL nel mercato italiano.

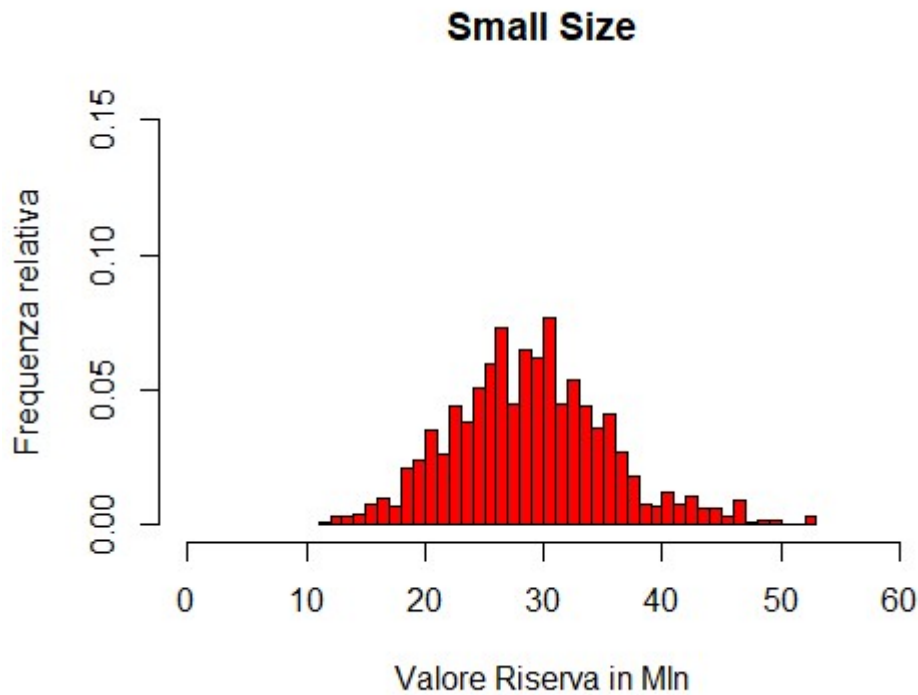


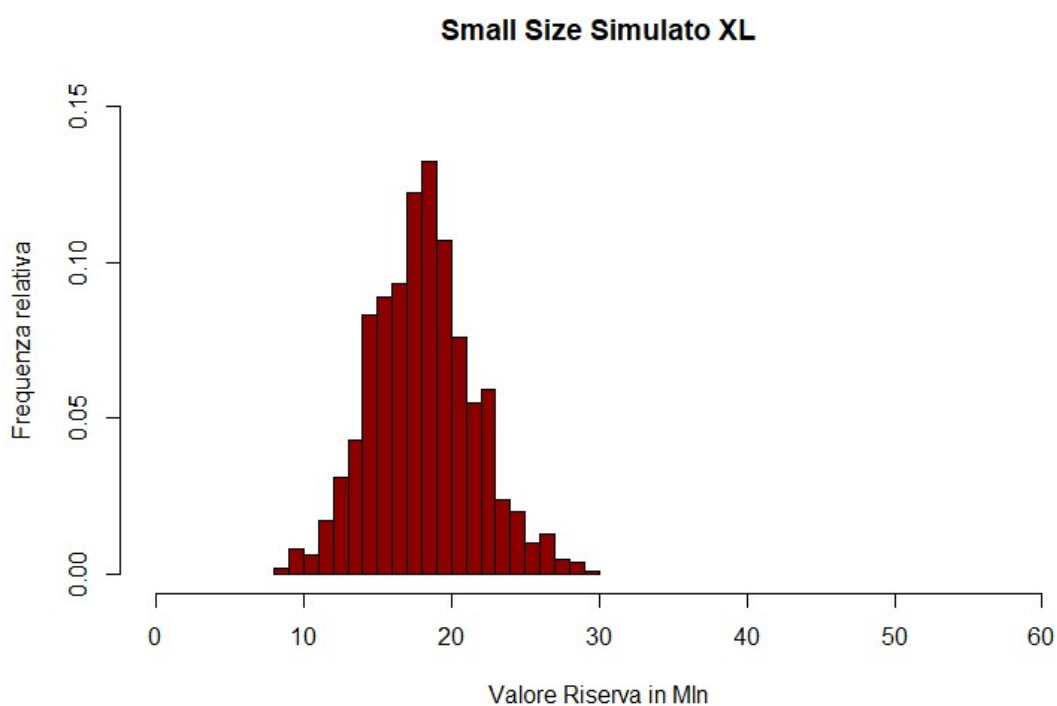
Figura 18 – Distribuzione bootstrap della Riserva Sinistri, Compagnia Small Size

Dall'istogramma è possibile osservare come la distribuzione sia caratterizzata da asimmetria positiva, di entità moderata. Il comportamento delle code non sembra presentare evidenze tali di richiedere un'analisi specifica.

	No Riass.	Riass. QS 95%	Riass. QS 80%	Riass. QS 70%	Riass. QS 50%	Riass. XL
Riserva (CL Mack)	28.400.706	-	-	-	-	-
<b>Bootstrap</b>						
E(R)	28.910.063	27.464.560	23.128.050	20.237.044	14.455.031	18.093.207
$\sigma$ (R)	6.645.581	6.313.302	5.316.465	4.651.907	3.322.790	3.476.073
CoV(R)	0,22987	0,22987	0,22987	0,22987	0,22987	0,19212
Skewness(R)	0,39733	0,39733	0,39733	0,39733	0,39733	0,21705
Kurtosi(R)	0,45885	0,45885	0,45885	0,45885	0,45885	0,15064

Tabella 16 - Caratteristiche distribuzione della Riserva Sinistri R, Compagnia Small Size

Nella Tabella 16 sono riportati i risultati per la Compagnia Small Size da cui è possibile vedere come il comportamento della riserva è in linea con le proprietà teoriche discusse nei capitoli precedenti. Il valore atteso della riserva sinistri al lordo della riassicurazione è di circa 29 milioni di euro, con deviazione standard pari a circa 6,65 milioni. La skewness e la curtosi mostrano come effettivamente la forma della curva sia differente da una gaussiana. È presente leptocurtosi, ciò sta ad indicare una distribuzione più appuntita con code leggermente più pesanti di una normale, mentre l'asimmetria positiva tipica delle distribuzioni del costo aggregato conferma che la riserva ne è direttamente influenzata. L'applicazione dei trattati QS porta ad una riduzione progressiva e proporzionale di valore atteso e deviazione standard, non vengono invece in alcun modo variati il coefficiente di variazione e gli indici di forma (che sono invarianti rispetto alle trasformazioni di scala). Ben diverso invece è l'effetto del trattato XL che, agendo sulla coda destra della distribuzione del singolo sinistro, provoca un cambiamento della forma della distribuzione della riserva totale, riducendo la variabilità, l'asimmetria e la curtosi. In particolare si nota la riduzione del CoV che, essendo il rapporto tra deviazione standard e valore atteso, ha beneficiato di una riduzione di variabilità superiore alla riduzione della media andando così a subire un leggero decremento.



*Figura 19 - Distribuzione bootstrap della Riserva Sinistri al netto di Riassicurazione XL, Compagnia Small Size*

La Figura 19 mostra gli effetti del trattato: la coda destra viene tagliata e l'asimmetria positiva risulta visibilmente ridotta. Nel complesso i due trattati evidenziano effetti di mitigazione del rischio sulla distribuzione della riserva sinistri, diventerà poi necessario valutare il costo del singolo trattato prima di determinarne la convenienza economica.

Un ultimo aspetto da analizzare relativo alle caratteristiche della distribuzione, che potrebbe essere influenzato dagli effetti che la riassicurazione ha sulla forma della distribuzione, sono i quantili. Viene preso come riferimento il quantile al 99,5%.

	No Riass.	Riass. XL
Quantile bootstrap	48.179.470	27.493.426
Approssimazione N	46.027.944	27.046.977
Approssimazione NP	48.507.791	27.755.545

*Tabella 17 – Confronto tra quantili: quantile bootstrap e relative approssimazioni, Compagnia Small Size*

Nella Tabella 17 sono riportate due approssimazioni, precedentemente trattate nei Paragrafi 3.3.1 e 3.3.2, la Normale e la Normal Power. È evidente dai dati riportati come nel caso senza riassicurazione l'approssimazione Normal Power sia più vicina al risultato della procedura bootstrap perché tiene in considerazione l'asimmetria positiva che caratterizza la distribuzione. Grazie all'effetto della riassicurazione XL, che va a ridurre l'asimmetria, si nota nella seconda colonna come le due approssimazioni finiscano quasi per equivalersi, proprio perché in questa distribuzione la skewness è poco più della metà rispetto a quella della distribuzione simulata di partenza.

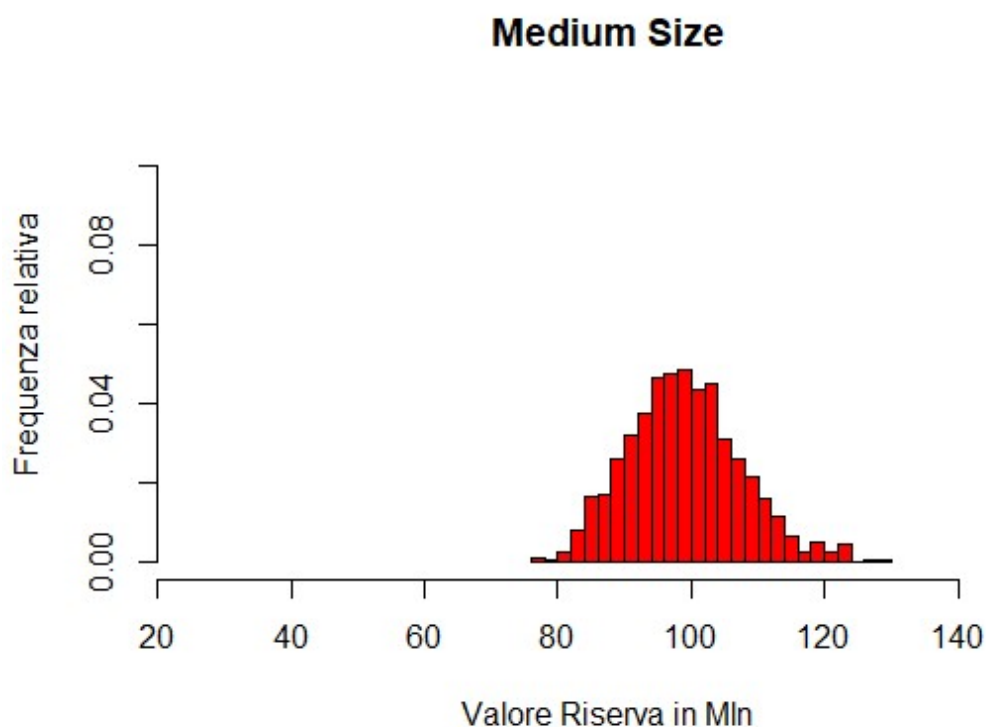
Le Compagnie di piccole dimensioni nuove nel mercato solitamente scelgono un trattato QS per poter avere un supporto costante da parte del riassicuratore ed acquisire competenze specifiche ed esperienza attraverso il rapporto di collaborazione. Solo in una fase successiva la Compagnia stipula dei trattati XL, nel momento in cui ha acquisito la struttura e l'esperienza necessaria alla gestione del business.

#### 4.3.2 – Compagnia Medium Size

Il primo passo anche in questo caso è quello di analizzare l'istogramma della distribuzione della riserva sinistri risultato della simulazione bootstrap. La Figura 20 mostra, come per la Compagnia Small Size, asimmetria positiva. Dal grafico non sembrano esserci delle



code pesanti a cui dover prestare attenzione, questa è una delle tipiche caratteristiche del ramo RC Auto.



*Figura 20 - Distribuzione bootstrap della Riserva Sinistri, Compagnia Medium Size*

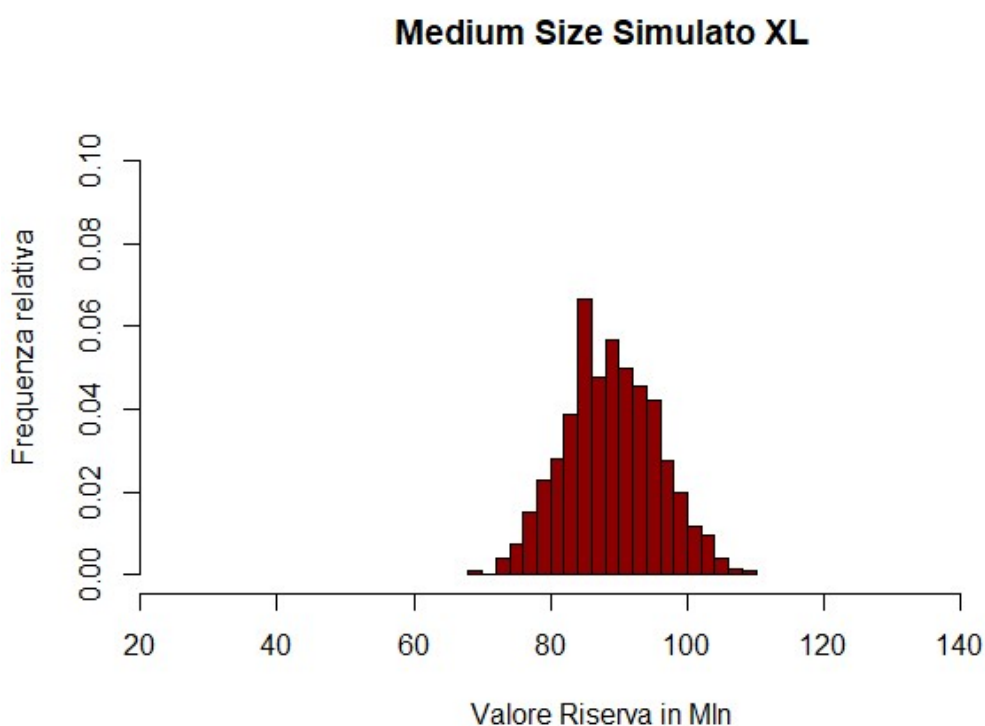
Il trattato di riassicurazione XL prevede un limite di ritenzione per singolo sinistro M pari a 500.000 euro, valore ricavato dal mercato e ritenuto realistico per una Compagnia che opera nel mercato italiano con un portafoglio di medie dimensioni.

	No Riass.	Riass. QS 95%	Riass. QS 80%	Riass. QS 70%	Riass. QS 50%	Riass. XL
Riserva (CL Mack)	98.530.451	-	-	-	-	-
<b>Bootstrap</b>						
E(R)	99.000.297	94.050.282	79.200.238	69.300.208	49.500.149	88.818.389
$\sigma$ (R)	8.431.045	8.009.493	6.744.836	5.901.732	4.215.523	6.813.950
CoV(R)	0,08516	0,08516	0,08516	0,08516	0,08516	0,07672
Skewness(R)	0,35469	0,35469	0,35469	0,35469	0,35469	0,09902
Kurtosi(R)	0,11734	0,11734	0,11734	0,11734	0,11734	- 0,24699

*Tabella 18 - Caratteristiche distribuzione della Riserva Compagnia Medium Size*

Il valore atteso della riserva nel caso di assenza di riassicurazione è di circa 99 milioni di euro mentre la deviazione standard è di circa 8,43 milioni. Il valore della skewness

evidenzia anche in questo caso asimmetria positiva, leggermente inferiore rispetto alla Small Size. La curtosi assume un valore positivo di minima entità, segnalando che le code si comportano quasi come in una distribuzione normale. Gli effetti della riassicurazione QS sono qualitativamente gli stessi prodotti per la Small Size, con una riduzione progressiva e proporzionale di media e deviazione standard lasciando invariati gli indici di forma. Va analizzato con attenzione invece l'effetto della riassicurazione XL, che va ad impattare in maniera consistente sulla forma della distribuzione della riserva sinistri.



*Figura 21 - Distribuzione bootstrap della Riserva Sinistri al netto di Riassicurazione XL, Compagnia Medium Size*

Vediamo che, come avvenuto per la Compagnia Small Size, si riducono sia l'asimmetria, arrivando ad avere un valore prossimo allo zero come in una gaussiana, sia la curtosi che questa volta assume un valore negativo, seppur minimo, a segnalare una curva platicurtica ovvero più piatta della normale. Il coefficiente di variazione, grazie alle proprietà di mitigazione del rischio del trattato di riassicurazione non proporzionale XL, anche in questo caso si riduce assumendo un valore inferiore grazie ad una riduzione maggiore sulla variabilità (la coda destra viene tagliata) rispetto al valore atteso. Dalla figura 21 è possibile osservare l'istogramma bootstrap con tutte queste caratteristiche ed i cambiamenti rispetto al portafoglio iniziale.

Viene analizzato anche per la Compagnia Medium Size l'effetto della riassicurazione XL sul quantile al 99,5% rispetto alle approssimazioni Normale e Normal Power nella Tabella 19.

	No Riass.	Riass. XL
Quantile bootstrap	122.713.430	105.816.340
Approssimazione N	120.717.231	106.369.692
Approssimazione NP	123.525.642	107.003.641

*Tabella 19 – Confronto tra quantile empirico al 99,5% e relative approssimazioni, Compagnia Medium Size*

I risultati sono molto simili a quelli presentati per la Compagnia Small Size nel caso senza riassicurazione, l'approssimazione Normal Power è decisamente più prossima al risultato del bootstrap. Con l'effetto della riassicurazione XL risulta preferibile l'approssimazione Normale, sottolineando il fatto di come la riduzione di skewness e curtosi incidano sul quantile stimato.

Il trattato XL è molto più utilizzato dalle Compagnie di dimensione medio-grande proprio perché attraverso le sue proprietà consente di gestire il rischio derivante da eventi estremi ed inaspettati senza compromettere la solvibilità della Compagnia. Il rapporto con il riassicuratore diventa funzionale alle esigenze, visto che si presuppone che queste Compagnie abbiano una già sufficiente conoscenza del mercato e del business senza aver bisogno di un supporto costante da parte del riassicuratore. Inoltre è un trattato più costoso e complesso da gestire, che viene stipulato con differenti modalità caso per caso.

#### 4.3.3 – Confronto tra le strategie riassicurative

In questo ultimo paragrafo verranno confrontati, più nel dettaglio, gli effetti di due differenti strategie riassicurative sulla distribuzione della riserva sinistri simulata con il bootstrap per entrambe le Compagnie. In particolare per la Compagnia Small Size viene confrontata la riassicurazione QS al 70% di ritenzione con la riassicurazione XL, mentre per la Compagnia Medium Size viene confrontata la riassicurazione QS al 90% di ritenzione con la riassicurazione XL.

Il primo confronto ad esser presentato è quello riguardante la Compagnia Small Size, l'obiettivo è quello di osservare come due trattati differenti tra loro possano portare ad una curva distributiva simile, ma sicuramente non uguale.

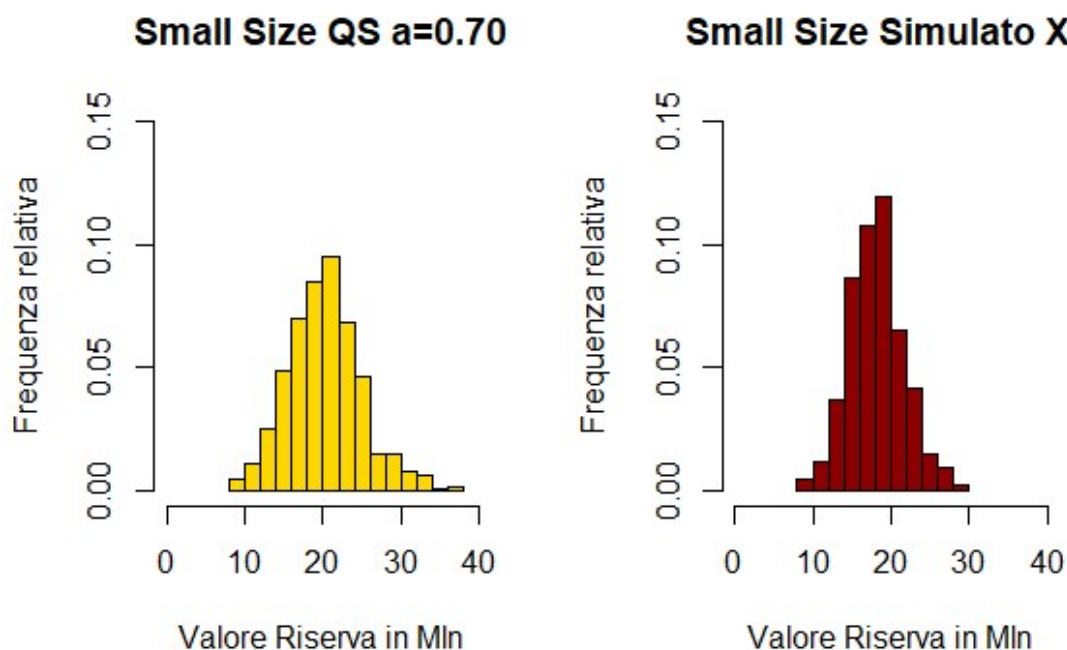


Figura 22 – Confronto tra la distribuzione con riassicurazione QS al 70% e con riassicurazione XL, Compagnia Small Size

Osservando la Figura 22 è possibile vedere come per effetto dei due trattati si ottengano due istogrammi simili, ma con alcune differenze. Il trattato XL taglia la coda destra, cosa che il trattato QS non riesce a fare agendo proporzionalmente su tutta la distribuzione. La forma della distribuzione è identica a quella di partenza nel grafico a sinistra, l'unico cambiamento è da individuare in uno spostamento a sinistra della curva rispetto a quanto osservato nella Figura 18. Nel grafico a destra il trattato XL modifica la forma della distribuzione, riduce l'asimmetria e riduce la variabilità in modo evidente.

Il secondo confronto riguarda la Compagnia Medium Size, questa volta i due trattati considerati sono un QS al 90% (non trattato precedentemente vista la somiglianza con il QS al 95%) e un XL, con risultati qualitativamente comparabili con il caso precedente.

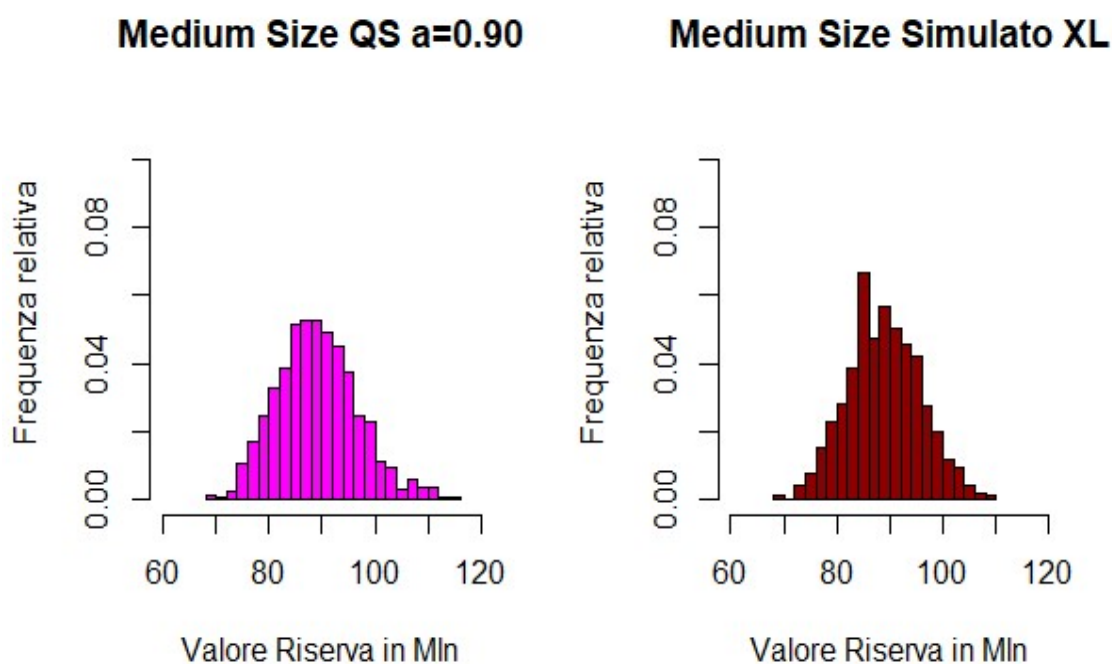


Figura 23– Confronto tra la distribuzione con riassicurazione QS al 90% e con riassicurazione XL, Compagnia Medium Size

Questi due esempi sono stati riportati per mostrare come per entrambe le Compagnie sia possibile trovare un trattato Quota Share che produca effetti simili sul valore atteso della riserva sinistri ad un trattato XL, sottolineando come possa diventare un aspetto importante quando la Compagnia si trova di fronte alla scelta del tipo di trattato.

#### 4.4 – La Best Estimate

L'ultimo passaggio necessario prima di poter lavorare sull'SCR del Reserve Risk è definire il calcolo della Best Estimate, ovvero scontare le riserve future appena calcolate (UBEL<sup>28</sup>) attraverso il processo simulativo. Per calcolare la BEL<sup>29</sup> è necessario fare riferimento ad una curva di tassi free-risk, ai fini della trattazione è stata scelta la curva proposta da EIOPA per l'area Euro al 30 settembre 2020. Il dataset è del 2016 ma nel momento in cui si fanno le valutazioni e si esegue l'analisi la curva più recente da poter utilizzare è quella che viene proposta nella Tabella 4.5 riportata di seguito.

<sup>28</sup> Undiscounted Best Estimate Liabilities

<sup>29</sup> Best Estimate Liabilities

<i>Tassi spot free-risk</i>	
<i>Maturity</i>	<i>%</i>
1	-0,578
2	-0,587
3	-0,575
4	-0,555
5	-0,528
6	-0,496
7	-0,458
8	-0,418
9	-0,375
10	-0,331

*Tabella 20 - Tassi spot free-risk di EIOPA del 30/09/2020*

Una volta individuati i tassi di riferimento, il processo di calcolo della Best Estimate prevede che ogni costo incrementale futuro determinato in ogni simulazione venga attualizzato. Il 2020 è un periodo di tassi negativi, questo comporta per le Compagnie un valore della Best Estimate superiore alla stima non scontata, riflettendo il rischio di tasso che contraddistingue il periodo storico. I valori determinati con questo primo metodo saranno indicati con BEL.

Un metodo alternativo a quello appena presentato prevede la possibilità di sfruttare gli indici di smontamento della riserva sinistri proposti da IVASS, una volta smontata la riserva sinistri è possibile applicare i tassi free-risk sulle varie sezioni ottenute. L'indicatore è calcolato per ogni anno di generazione di sinistri al variare dell'antidurata ed è dato dal rapporto tra:

- la somma dei pagamenti effettuati a partire dall'antidurata successiva a quella di valutazione dell'indice fino all'ultimo anno di bilancio disponibile, al quale si aggiunge la riserva stanziata alla fine dell'ultimo anno di bilancio disponibile
- la riserva stanziata all'antidurata di valutazione dell'indice

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
41,44%	19,87%	12,31%	8,23%	5,67%	3,93%	2,74%	1,93%	1,36%	0,95%	0,64%	0,42%	0,27%	0,16%	0,07%	0,01%

*Tabella 21 - Indici di smontamento calcolati internamente dalla Compagnia Small Size*

I risultati di questo secondo metodo saranno riportati con la sigla BEL2.

## 4.5 – SCR per il Reserve Risk

L'obiettivo finale dell'elaborato è di determinare i requisiti di solvibilità di capitale specifici del Reserve Risk, in questa sezione saranno presentati i risultati. Il calcolo degli SCR è stato realizzato per entrambe le Compagnie nel rispetto dell'approccio Market Wide. Prima di procedere è necessario ricordare quali erano le ipotesi su cui questo approccio si fondava contestualizzate con il dataset e le caratteristiche della Compagnia:

- il volume complessivo  $V$  considerato nella Standard Formula non tiene conto dei premi incassati, ovvero della componente di Premium Risk, pertanto il valore  $V$  sarà rappresentato dal valore PCO già al netto della riassicurazione
- il *size Factor* non deve essere considerato, in accordo con QIS5, di conseguenza il fattore di variabilità  $f_{lob} = \sigma_{lob}$  nell'approccio Market Wide
- entrambe le Compagnie hanno una sola LoB di conseguenza non sarà necessaria l'aggregazione del fattore di variabilità,  $\sigma = \sigma_{lob}$
- le Compagnie operano solo sul mercato italiano di conseguenza non possono beneficiare del fattore di diversificazione geografica.

Vengono presentati qui sotto i risultati per la Compagnia Small.

	No Riass.	Riass. QS 95%	Riass. QS 80%	Riass. QS 70%	Riass. QS 50%	Riass. XL
UBEL	28.910.063	27.465.560	23.128.050	20.237.044	14.455.031	18.093.207
BEL	29.215.337	27.754.570	23.372.270	20.450.736	14.607.669	18.240.865
BEL2	29.303.022	27.837.871	23.442.418	20.512.116	14.651.511	18.339.138
BEL recoverables	- 305.274	- 289.010	- 244.220	- 213.692	- 152.638	- 147.658
$\sigma(R)$ market wide	9,5%	9,5%	9,5%	9,5%	9,5%	9,5%
$\rho(\sigma)$	27,08%	27,08%	27,08%	27,08%	27,08%	27,08%
SCR mw	7.912.088	7.516.413	6.329.670	5.538.461	3.956.044	4.939.985

Tabella 22 - Risultati SCR Compagnia Small Size

I risultati mostrano chiaramente i benefici della riassicurazione sul requisito di capitale specifico per il Reserve Risk, il requisito più basso è in presenza di un trattato di riassicurazione QS al 50%, trattato che difficilmente è offerto sul mercato. Il trattato XL sembra quello in grado di offrire i migliori risultati, sia dal punto di vista della variabilità come osservato nel paragrafo 4.3.1, sia dal punto di vista della riduzione del requisito di capitale. Da segnalare anche come i tassi negativi anziché ridurre l'importo da destinare a riserva ne incrementano il valore, a dimostrazione del fatto che viene aggiunta



un'ulteriore percentuale di rischio che fino a qualche anno fa non esisteva. La soluzione migliore potrebbe essere quella di adottare una strategia riassicurativa distribuita nel tempo, dove dopo un primo periodo con riassicurazione QS diventi possibile introdurre un trattato XL che oltre a ridurre il SCR permetta una maggiore protezione dagli eventi catastrofici che possono pesantemente impattare sulla Compagnia. In sede di valutazione dovranno anche essere tenuti in considerazione i costi del singolo trattato, che se nel trattato QS rappresentano una quota del premio, nel trattato XL variano a seconda di quale sia la quota di rischio trasferita al riassicuratore, ingenti interventi molto spesso producono costi superiori anche al beneficio derivante dalla riduzione del SCR.

Per la Compagnia Medium Size i risultati ottenuti sono i seguenti:

	No Riass.	Riass. QS 95%	Riass. QS 80%	Riass. QS 70%	Riass. QS 50%	Riass. XL
UBEL	99.000.297	94.050.282	79.200.238	69.300.208	49.500.149	88.818.389
BEL	100.078.900	95.074.955	80.063.120	70.055.230	50.039.450	89.750.135
BEL2	100.345.957	95.328.659	80.276.766	70.242.170	50.172.978	90.025.651
BEL recoverables	1.078.603	1.024.673	862.882	755.022	539.301	931.746
$\sigma(R)$ market wide	9,5%	9,5%	9,5%	9,5%	9,5%	9,5%
$\rho(\sigma)$	27,08%	27,08%	27,08%	27,08%	27,08%	27,08%
SCR mw	27.103.334	25.748.167	21.682.667	18.972.334	13.551.667	24.306.101

*Tabella 23 - Risultati SCR Compagnia Medium Size*

I risultati sono molto simili a quelli presentati per la Small Size, chiaramente riproporzionati per la rischiosità del portafoglio che bisogna ricordare riportava valori dei costi incrementali 6 o 7 volte superiori a quelli della Small Size. Nonostante ciò la Tabella 4.8 mostra importi degli SCR per la Medium Size circa 4 volte superiori a quelli della Small Size. Questa riduzione nel rapporto tra costi e SCR è dovuta al beneficio di mitigazione del rischio all'aumentare delle dimensioni di un portafoglio composto da rischi analoghi, il cosiddetto principio di mutualità. Al crescere del portafoglio il capitale di solvibilità necessario a fronteggiare il Reserve Risk diminuisce. Le considerazioni fatte per la Compagnia Small valgono anche in questo caso, l'unica differenza è l'impatto sull'SCR della riassicurazione XL che, in questo caso, per un limite di ritenzione M pari a 500.000 euro è inferiore. I due casi, considerate le differenze metodologiche nell'impostare la simulazione, non sono confrontabili, ma nonostante l'impatto sia stato differente sul SCR ha in entrambi i casi prodotto gli effetti di mitigazione del rischio che il framework teorico prospettava.



## Conclusioni

Le attuali condizioni di incertezza dei mercati e le stringenti regole sui requisiti di capitale delle imprese assicurative previste da Solvency II portano le Compagnie a dover affrontare, giorno per giorno, decisioni che possono favorirne o comprometterne la solvibilità. La Direttiva Solvency II ha modificato il calcolo dei requisiti di solvibilità da rispettare, obbligando le Compagnie a ridefinire le strategie di gestione del capitale. La definizione dei requisiti è stata realizzata attraverso processi di valutazione che partono dalla segmentazione del rischio globale, individuando componenti di rischio da valutare distintamente tra loro. Ogni Compagnia deve quindi essere in grado di riconoscere le categorie di rischio a cui è esposta e procedere alla loro valutazione seguendo i principi che la Direttiva stabilisce.

Dall'altro lato una Compagnia, oltre a rispettare le regole e a far fronte alle obbligazioni assunte, deve continuare a produrre risultati economici positivi, che permettano di remunerare il capitale degli azionisti. Riuscire però ad avere risultati economici positivi in un periodo di tassi free-risk negativi, di estrema incertezza e con le limitazioni imposte dalla regolamentazione ha costretto il mercato assicurativo a cercare delle strategie per fronteggiare queste situazioni. Uno strumento che era già a disposizione delle Compagnie prima dell'avvento di Solvency II, ma che nel mercato attuale riveste un ruolo chiave nella liberazione di capitale è la riassicurazione.

La riassicurazione ha origini molto antiche, ma la sua diffusione è destinata a crescere successivamente all'introduzione della Direttiva. Con la riassicurazione diventa possibile trasferire una quota, più o meno grande, del rischio in capo alla Compagnia ad uno o più riassicuratori, liberando di fatto del capitale per poterlo destinare a scopi maggiormente remunerativi. La strategia di gestione del capitale attraverso trattati riassicurativi è una delle soluzioni al momento più adottate nel mercato. Tuttavia, se utilizzata impropriamente, la riassicurazione potrebbe anche essere controproducente perché i costi da sostenere per poterne usufruire sono molto onerosi. La piena consapevolezza delle proprie caratteristiche e delle necessità da soddisfare porta ogni Compagnia a scegliere la combinazione di trattati più adatta.

Le Compagnie che sono state analizzate in questo elaborato nonostante il medesimo ramo di appartenenza, il ramo RC Auto, hanno evidenziato caratteristiche molto diverse tra loro, di conseguenza, esigenze molto diverse. C'è da sottolineare come

sia difficile esprimere un punto di vista globale sulle reali esigenze delle Compagnie in considerazione del fatto che di entrambe si è analizzato soltanto una minima componente di quello che è il rischio globale, in particolare solo il Reserve Risk. In base ai dati a disposizione è stato possibile osservare l'effetto che questi trattati possono produrre sulla componente di rischio legata alla riservazione dei sinistri, ricostruendo spunti interessanti.

Prima di arrivare ad analizzare i risultati è stato importante definire le caratteristiche del rischio di riservazione arrivando a comprendere dalla Teoria del Rischio come per ogni trattato, e quindi per ogni scelta della Compagnia, ci si debba aspettare un effetto più o meno positivo. Il rischio di riservazione, indipendentemente dal metodo con cui si procede alla stima della riserva, è direttamente collegato alla distribuzione del costo aggregato dei sinistri. Il processo distributivo che definisce il costo aggregato dei sinistri si è constatato essere molto complesso, soprattutto a causa della doppia componente di aleatorietà che lo caratterizza: il numero dei sinistri e la loro gravosità. Le maggiori criticità sono emerse nella fase di simulazione bootstrap degli effetti di un trattato di riassicurazione XL individuale. Integrando le informazioni sulla frequenza ed il costo aggregato dei sinistri con alcuni parametri ricavabili da valutazioni di mercato, è stato comunque possibile simulare un processo di rischio collettivo in grado di rappresentare in maniera ragionevole le implicazioni di questo trattato riassicurativo.

Una volta ottenuta la distribuzione della riserva si è calcolata la Best Estimate con due differenti metodologie, entrambe previste da Solvency II e IVASS, dove si è osservato, una volta di più, come l'incertezza dei mercati, ed i conseguenti tassi free-risk negativi, si ripercuota anche sul settore assicurativo. Il mercato assicurativo è abituato a valutare l'incertezza, l'aleatorietà è la ragion d'essere di ogni contratto assicurativo, per questo motivo è perfettamente ragionevole che un'ulteriore componente di incertezza non faccia altro che aumentare le cautele e di conseguenza il capitale necessario a rispettare i requisiti previsti da Solvency II.

Per il calcolo del requisito di solvibilità specifico del Reserve Risk è stata applicata la Standard Formula, secondo le metodologie proposte nel QIS5 nel modulo dell'Underwriting Non-life Risk. Considerando singolarmente la componente del Reserve Risk è stato possibile mostrare diversi benefici che possono essere tratti dalla riassicurazione. I risultati del SCR al lordo e al netto della riassicurazione hanno evidenziato come i trattati proporzionali, come il Quota Share, si limitino a trasferire una quota prestabilita di rischio al riassicuratore, in modo semplice ed immediato, non

andando ad influenzare la forma della distribuzione della riserva, trasladola solamente verso sinistra. La scelta di questo trattato è sembrata essere una buona soluzione per entrambe le Compagnie, rispondendo però ad esigenze diverse:

- per la Compagnia Small Size dotata di un portafoglio di dimensioni ridotte il trattato Quota Share può essere lo strumento più adatto. Affiancate da una soggetto dotato di profonda conoscenza del mercato la Compagnia può imparare le buone pratiche dell'attività assicurativa e a gestire il business collaborando a stretto contatto con il riassicuratore, visto che questo trattato lo coinvolge ogni singolo rischio in capo alla Compagnia,
- per la Compagnia Medium Size il trattato Quota Share sembra poter essere un valido strumento per cedere una quota precisa di rischio liberando così del capitale. Questo tipo di soluzione viene definita "riassicurazione finanziaria" ed è motivata dal fatto che, oltre a liberare del capitale, una Compagnia con un portafoglio di medie dimensioni non ha più bisogno di supporto da parte di un soggetto esterno ma solo di uno strumento semplice e preciso con cui soddisfare le proprie esigenze.

I risultati sul trattato non proporzionale XL hanno invece confermato effetti diretti anche sulla forma della distribuzione della riserva. La riassicurazione XL, visto l'impatto molto forte sulla struttura della distribuzione della riserva e considerati i costi molto onerosi previsti per la stipulazione di un trattato, è preferibilmente consigliata alla Compagnia Medium Size, che ha già una sufficiente conoscenza delle dinamiche di mercato e può avvantaggiarsi della riduzione del rischio legato ad eventi estremi che potrebbero compromettere la solvibilità della Compagnia.

## Bibliografia

- ANIA, Associazione Nazionale fra le Imprese Assicuratrici. 2013. *Solvency II: origine, struttura e sviluppo*
- Avesani, Renzo. Unipolsai Assicurazioni. 2011. *La riassicurazione come strumento di gestione del rischio e del capitale in Solvency II*
- Boland, Philip. 2007. *Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science*. Londra: Chapman & Hall/CRC by Taylor and Francis Group. Capitolo 1 - Pagine 1-10
- CEIOPS - Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors. 2005. *QIS2 Technical Specifications*. Disponibile online: <https://www.eiopa.europa.eu>
- Central Bank of Ireland. 2012. *Guidelines on the Reinsurance Cover of Primary Insurers & the Security of their Reinsurers*
- Cerchiara, Rocco Roberto. 2016. *La riassicurazione*. Disponibile online: [http://www.ecostat.unical.it/Didattica/Statistica/didattica/2012\\_2013/Tecnica\\_danni\\_Cerchiara/Lezione%2014\\_Riassicurazione.pdf](http://www.ecostat.unical.it/Didattica/Statistica/didattica/2012_2013/Tecnica_danni_Cerchiara/Lezione%2014_Riassicurazione.pdf)
- Clemente, Gian Paolo, Savelli Nino, e Zappa Diego. 2015. *The Impact of Reinsurance Strategies on Capital Requirements for Premium Risk in Insurance*. MDPI. Disponibile online: <https://www.researchgate.net/publication>
- Comerford, Eamon, Fulcher Paul, Van Beers Rik, e Maher Rosemary. Miliman. 2020. *Reinsurance as capital management tool for life insurers*
- Daboni, Luciano. 1989. *Lezioni di tecnica attuariale delle assicurazioni contro i danni*. Trieste: Edizioni LINT Trieste S.r.l.. Capitolo 4 - Pagine 113-188
- Daykin, Christopher D., Pentikainen T., e Pesonen M.. 1994. *Practical Risk Theory for Actuaries*. Londra: Chapman & Hall/CRC by Taylor and Francis Group. Capitoli 1-2-3-4-5. Pagine 3-210
- De Martin, Paolo. SCOR. 2015. *Capital Management in a Solvency II World & the Role of Reinsurance*. Disponibile online: <http://www.actuaries.org/oslo2015>
- EIOPA, European Insurance and Occupational Pensions Authority. 2014. *Technical Specification for the Preparatory Phase (Part 1)*. Disponibile online:

<https://public.staging.eiopa.europa.eu/Pages/Supervision/Insurance/Solvency-II-Technical-Specifications.aspx>

EIOPA, European Insurance and Occupational Pensions Authority. 2010. *QIS5 Technical Specifications*. Disponibile online: <https://www.eiopa.europa.eu>.

EIOPA, European Insurance and Occupational Pensions Authority. 2011. *EIOPA Report on the fifth Quantitative Impact Study (QIS5) for Solvency II*. Disponibile online: <https://www.eiopa.europa.eu>.

England, P.D., e Verrall J. 2002. *Stochastic Claims Reserving in General Insurance*. Disponibile online: <https://www.actuaries.org.uk>

Ernst & Young. 2014. *Interpreting the key principles*. Disponibile online: <https://www.ey.com/Publication>

Fumai, Domenico. ANDRA – Associazione Nazionale dei Risk Manager e Responsabili Assicurazioni Aziendali. 2012. *Il modello ERM come strumento trasversale per la gestione dei rischi e le sue implicazioni operative e gestionali*

Ghirri, Paolo. Munich Re Milano. 2011. *Solvency II – Ottimizzazione del Capitale di Rischio. Soluzioni assicurative per migliorare il Margine di Solvibilità*

ISVAP. Istituto per la Vigilanza sulle Assicurazioni Private e di Interesse Collettivo. 2012. *I metodi stocastici per la misura della riserva sinistri: un approccio al comparto auto italiano*. Disponibile online: <https://www.ivass.it/pubblicazioni-e-statistiche/pubblicazioni/altre-pubblicazioni>

Ivass, Istituto per la vigilanza sulle assicurazioni. 2016. *La nuova regolamentazione prudenziale del settore assicurativo: una guida semplificata*. Disponibile online: <https://www.ivass.it/pubblicazioni-e-statistiche> (pubblicato online a Novembre 2016)

Montegiori, Flaminia e Butera Sara. Servizio Normativa e Politiche di Vigilanza IVASS. 2017. *La Governance delle imprese di assicurazione. Le novità regolamentari*. Disponibile online: <https://www.ivass.it/pubblicazioni-estatistiche/>

Parlamento Europeo. 2009. *Direttiva 2009/138/CE del 25 novembre 2009*. Disponibile online: <https://eur-lex.europa.eu/legal-content>

Savelli, Nino e Clemente Gian Paolo. 2009. *A collective risk model for claims reserve*

*distribution*. Napoli: Loffredo Editore

Savelli, Nino e Pallaria Antonio. 2019. *Premium Risk Net of Reinsurance: From Short-Term to Medium-Term Assessment*. MDPI. Disponibile online: <https://www.mdpi.com/2227-9091/7/3/72>

Taleb, Nassim Nicholas. 2007. *Il Cigno nero*. Milano: il Saggiatore

Woodford, John e Chan Andy. Institute and Faculty of Actuaries. 2013. *Reinsurance Strategies under Solvency II*.

Wuthrich, Mario, Carrato Alessandro, Concina Fabio, Markus Gesmann, Murphy Dan, Zhang Wayne. 2020. *Claims reserving with R: ChainLadder-0.2.11 Package Vignette*. Disponibile online: <https://cran.r-project.org/web/packages>

Zenga, Michele. 1995. *Modello Probabilistico e Variabili Casuali*. Torino: G. Giappichelli Editore. Capitolo 9 – Paragrafo 6 – Pagine: 128 – 132

## Elenco delle Figure

Figura 1 – Tappe di Solvency II .....	23
Figura 2 – I “cigni neri” nella distribuzione di probabilità .....	24
Figura 3 – I 3 pilastri .....	27
Figura 4 – Bilancio Solvency .....	28
Figura 5 – Principio della persona prudente .....	32
Figura 6 – Albero dei rischi .....	34
Figura 7 – Modelli di calcolo del SCR .....	35
Figura 8 – Cruscotto del rischio .....	40
Figura 9 – Governance a “livelli di difesa” .....	41
Figura 10 – Albero dei rischi nel QIS2 .....	46
Figura 11 – Struttura dei rischi del SCR con l’applicazione dei metodi contenuti nel QIS5 .....	53
Figura 12 – Incidenza delle componenti di rischio del Reserve Risk nel QIS5 .....	54
Figura 13 – Distribuzione asimmetrica per il costo del singolo sinistro .....	63
Figura 14 - Dinamica costi incrementali dei sinistri al lordo dei trattati riassicurativi, Compagnia Small Size .....	76
Figura 15 - Dinamica costi cumulati dei sinistri al lordo dei trattati riassicurativi, Compagnia Small Size .....	77
Figura 16 - Dinamica costi incrementali dei sinistri al lordo dei trattati riassicurativi, Compagnia Medium Size .....	78
Figura 17 - Dinamica costi cumulati dei sinistri al lordo dei trattati riassicurativi, Compagnia Medium Size .....	79
<i>Figura 18 – Distribuzione bootstrap della Riserva Sinistri, Compagnia Small Size</i> .....	82
Figura 19 - Distribuzione bootstrap della Riserva Sinistri al netto di Riassicurazione XL, Compagnia Small Size .....	83
Figura 20 - Distribuzione bootstrap della Riserva Sinistri, Compagnia Medium Size .....	85
Figura 21 - Distribuzione bootstrap della Riserva Sinistri al netto di Riassicurazione XL, Compagnia Medium Size .....	86
Figura 22 – Confronto tra la distribuzione con riassicurazione QS al 70% e con	

riassicurazione XL, Compagnia Small Size .....	88
Figura 23– Confronto tra la distribuzione con riassicurazione QS al 90% e con riassicurazione XL, Compagnia Medium Size .....	89



## Elenco delle Tabelle

Tabella 1 – Matrice dei coefficienti di correlazione Standard Formula .....	36
Tabella 2 – Matrice dei coefficienti di correlazione Standard Formula secondo QIS2 .....	47
Tabella 3 – Matrice coefficienti di correlazione componenti Reserve Risk nel QIS2 .....	49
Tabella 4 – Matrice coefficienti di correlazione LoB Reserve Risk nel QIS2 .....	50
Tabella 5 – Volatility factor per LoB Reserve Risk nel QIS2.....	50
Tabella 6 – Matrice coefficienti di correlazione Standard Formula secondo QIS5 ..	52
Tabella 7 – Matrice coefficienti di correlazione LoB del Reserve Risk nel QIS5 ....	55
Tabella 8 – Matrice coefficienti di correlazione componenti del Reserve Risk nel QIS5 .....	55
Tabella 9 – Valori deviazione standard del Reserve Risk Market Wide approach nel QIS5 .....	57
Tabella 10 - Coefficienti di credibilità rami RC, Credito e Cauzione.....	57
Tabella 11 - Coefficienti di credibilità altri rami.....	57
Tabella 12 – Esempio di triangolo superiore.....	67
Tabella 13 – Esempio di triangolo inferiore.....	68
Tabella 14 - Triangolo dei costi incrementali dei sinistri Compagnia Small Size ....	75
<i>Tabella 15 - Triangolo dei costi incrementali dei sinistri Compagnia Medium Size</i>	<i>77</i>
Tabella 16 - Caratteristiche distribuzione della Riserva Sinistri R, Compagnia Small Size .....	82
Tabella 17 – Confronto tra quantili: quantile bootstrap e relative approssimazioni, Compagnia Small Size.....	84
Tabella 18 - Caratteristiche distribuzione della Riserva Compagnia Medium Size..	85
Tabella 19 – Confronto tra quantile empirico al 99,5% e relative approssimazioni, Compagnia Medium Size .....	87
Tabella 20 - Tassi spot free-risk di EIOPA del 30/09/2020 .....	90
Tabella 21 - Indici di smontamento calcolati internamente dalla Compagnia Small Size .....	90
<i>Tabella 22 - Risultati SCR Compagnia Small Size.....</i>	<i>91</i>

Tabella 23 - Risultati SCR Compagnia Medium Size..... 92

## Appendice

Nella sezione appendice viene presentato lo Script R utilizzato per eseguire l'analisi sul dataset. Il codice riportato è in versione ridotta per evitare inutili ripetizioni, ma sufficiente a comprendere come sono stati ottenuti i risultati analizzati.

```
if (! require(ChainLadder)) install.packages("ChainLadder");
library(ChainLadder)
library("readxl")

#### ANALISI DEL TRIANGOLO ORIGINALE ####

#importare il file da excel contenente il triangolo degli incrementali

myCSVfile<-"C:/Users/Michela/Desktop/TESI/Programmazione
MATLAB/2.Incrementali.small.size.TOTALI.csv"
dati1<-as.matrix(read.csv2(file=myCSVfile,header = FALSE))

# creare triangolo degli incrementali e dei cumulati

incrementali1<-as.triangle(as.matrix(dati1))
cumulati1<-incr2cum(incrementali1)

# eseguire Chain Ladder Classico per una prima valutazione

mackCL<-MackChainLadder(cumulati1)
mackCL

# eseguire Bootstrap Odp ####

set.seed(11)
boot1<-BootChainLadder(cumulati1,R=1000,process.distr = c("od.pois"))
boot1

# inserire le simulazioni delle riserve nel vettore Rsim

Rsim<-boot1$IBNR.Totals

# caratteristiche della distribuzione della riserva sinistri

library("moments")
mediaX1<-mean(Rsim)
sdX1<-sd(Rsim)
CoVX1=sdX1/mediaX1
skwX1=skewness(Rsim)
kurX1<-kurtosis(Rsim)-3

# calcolare il quantile 99,5% della distribuzione della riserva (quantile
```

```

empirico)

quant99.5.1<-as.numeric(quant1[5])

# percentile da una Normale Standard e Normal Power per verificare
sottostima

perc99.5.1<-mediaX1+qnorm(0.995)*sdX1
perc99.5NP1<-mediaX1+(qnorm(0.995)+(skwX1*(qnorm(0.995)^2-
1)/6))*sdX1

# Calcolo BEST ESTIMATE #

# estrarre i 1000 triangoli inferiori in t1

t1<-boot1$IBNR.Triangles

# da ogni triangolo estrarre la diagonale da attualizzare anno per anno,
sommare le celle della diagonale, attualizzarle, sommare i totali attualizzati e
metterli in un vettore chiamato riserva che contiene il totale delle 1000
riserve, dividere per 1000 e ho la BE

riserva1<-c(1:1000)
for(i in 1:1000){anno1<-
(t1[8,2,i]+t1[7,3,i]+t1[6,4,i]+t1[5,5,i]+t1[4,6,i]+t1[3,7,i]+t1[2,8,i])/(1-
0.00578)
anno2<-(t1[8,3,i]+t1[7,4,i]+t1[6,5,i]+t1[5,6,i]+t1[4,7,i]+t1[3,8,i])/((1-
0.00587)^2)
anno3<-(t1[8,4,i]+t1[7,5,i]+t1[6,6,i]+t1[5,7,i]+t1[4,8,i])/((1-0.00575)^3)
anno4<-(t1[8,5,i]+t1[7,6,i]+t1[6,7,i]+t1[5,8,i])/((1-0.00555)^4)
anno5<-(t1[8,6,i]+t1[7,7,i]+t1[6,8,i])/((1-0.00528)^5)
anno6<-(t1[8,7,i]+t1[7,8,i])/((1-0.00496)^6)
anno7<-(t1[8,8,i])/((1-0.00458)^7)
riserva1[i]<-anno1+anno2+anno3+anno4+anno5+anno6+anno7
BE1<-sum(riserva1)/1000
}

# BE con pattern di smontamento IVASS

BE2.1<-(mediaX1*0.4227)/(1-0.00578)+(mediaX1*0.207)/((1-
0.00587)^2)+(mediaX1*0.1314)/((1-.00575)^3)+
(mediaX1*0.0906)/((1-0.00555)^4)+(mediaX1*0.065)/((1-
0.00528)^5)+(mediaX1*0.0476)/((1-0.00496)^6)+
(mediaX1*0.0357)/((1-0.00458)^7)

# calcolare SCR Standard Formula senza riassicurazione
# sigma Market Wide è stabilito da solvency 9.5%

sigmaMD<-0.095
phisigma<-
(exp(qnorm(0.995)*sqrt(log((sigmaMD^2)+1)))/(sqrt((sigmaMD^2)+1)))-
1

```

```

# calcolare SCR al lordo della riassicurazione

SCR1 <-phisigma*BE1
SCR1

##### RIASSICURAZIONE QUOTA SHARE #####

#fissare limite di ritenzione alfa

alfa<-0.95

# creare nuovi cumulati

cumulatiQS<-incr2cum(incrementali1*alfa)

#momenti di alfa * Rsim

mediaXqs<-mean(alfa*Rsim)
sdXqs<-sd(alfa*Rsim)
CoVXqs=sdXqs/mediaXqs
skwXqs=skewness(alfa*Rsim)
kurXqs<-kurtosis(alfa*Rsim)-3 # centrato in 0

# quantile del SCR 99,5% della distribuzione empirica

quant99.5qs<-as.numeric(quantQS[5])

#percentile da una Normale Standard e Normal Power per verificare
sottostima

perc99.5qs<-alfa*(mediaX1+qnorm(0.995)*sdX1)
perc99.5NPqs<-alfa*(mediaX1+(qnorm(0.995)+(skwX1*(qnorm(0.995)^2-
1)/6))*sdX1)

# CALCOLO BEST ESTIMATE #

# per calcolare la Best Estimate in questo case è sufficiente moltiplicare

BE*alfa
BEQS<-BE1*alfa

# BE con pattern di smontamento IVASS

BEQS2<-(mediaXqs*0.4227)/(1-0.00578)+(mediaXqs*0.207)/((1-
0.00587)^2)+(mediaXqs*0.1314)/((1-.00575)^3)+
(mediaXqs*0.0906)/((1-0.00555)^4)+(mediaXqs*0.065)/((1-
0.00528)^5)+(mediaXqs*0.0476)/((1-0.00496)^6)+
(mediaXqs*0.0357)/((1-0.00458)^7)

```

```

# calcolare SCR con riassicurazione QS

SCRQS<-phisigma*BEQS
SCRQS

# Ripetere questa operazione per tutti i valori di alfa di cui si desidera la stima

#### RIASSICURAZIONE EXCESS OF LOSS ####

M<-300000

# importare il file da excel, una matrice a due colonne nella quale sono
contenuti: nella prima colonna i costi incrementali per anno di generazione,
dal più antico al più recente nella seconda colonna il numero dei sinistri
rispettando la coincidenza con le celle

myCSVfile<-"C:/Users/Michela/Desktop/TESI/Programmazione
MATLAB/4.Incrementali.colonna. con.numero.small.size.tot.csv"
dati<-as.matrix(read.csv2(file=myCSVfile,header = FALSE))

# vettore con costo medio singolo sinistro per cella

m<-dati[1:(dim(dati)[1])/dati[(dim(dati)[1]+1):(dim(dati)[1]*2)]

# vettore con numero sinistri per cella

n<-dati[(dim(dati)[1]+1):(dim(dati)[1]*2)]

# calcolare parametri di una lognormale sapendo che CoV accettabile per
singolo sinistro nel mercato italiano è 9

CoVZ<-9
std<-m*CoVZ
a2<-std^2+m^2 #momento secondo generico
muLN<-log((m^2)/sqrt(a2))
# muLN2<-log(sqrt((m^2)/(CoVZ^2+1))) metodo alternativo
sigmaLN<-sqrt(log(a2/(m^2)))[1]
# sigmLN2<-sqrt(log(CoVZ^2+1)) metodo alternativo

# estrarre i costi incrementali come somma di costi estratti da una lognormale

x<-c(1:length(n))
set.seed(70)
for(i in 1:dim(dati)[1]){cella<-rlnorm(n[i],meanlog = muLN[i],sdlog =
sigmaLN)
          x[i]<-sum(cella)
}

# convertire in triangolo CL i dati estratti dalla Log-normale

incrementali<-triangle("2009" = c("0"=x[1], "1"=x[2], "2"=x[3], "3"=x[4],
"4"=x[5], "5"=x[6], "6"=x[7], "7"=x[8]),

```

```

"2010" = c(x[9], x[10], x[11], x[12], x[13], x[14], x[15]),
"2011" = c(x[16], x[17], x[18], x[19], x[20], x[21]),
"2012" = c(x[22], x[23], x[24], x[25], x[26]),
"2013" = c(x[27], x[28], x[29], x[30]),
"2014" = c(x[31], x[32], x[33]),
"2015" = c(x[34], x[35]),
"2016" = x[36]
)

# per ogni cella estraggo n lognormali, sostituisco i valori maggiori ad M con
M, sommare i nuovi costi, trovare i nuovi incrementali

set.seed(70)
scarti<-c(1:dim(dati)[1])
x2<-c(1:dim(dati)[1])
for(i in 1:dim(dati)[1]){casella<-rlnorm(n[i],meanlog = muLN[i],sdlog =
sigmaLN)
      casella1<-casella
      casella[casella>M]<-M
      casella2<-casella1-casella
      scarti[i]<-sum(casella2)
      x2[i]<-sum(casella)
}

# costruire un triangolo a partire dal vettore x2,

incredXL<-triangle("1" = c("0"=x2[1], "1"=x2[2], "2"=x2[3], "3"=x2[4],
"4"=x2[5], "5"=x2[6], "6"=x2[7], "7"=x2[8]),
      "2" = c(x2[9], x2[10], x2[11], x2[12], x2[13], x2[14],
x2[15]),
      "3" = c(x2[16], x2[17], x2[18], x2[19], x2[20], x2[21]),
      "4" = c(x2[22], x2[23], x2[24], x2[25], x2[26]),
      "5" = c(x2[27], x2[28], x2[29], x2[30]),
      "6" = c(x2[31], x2[32], x2[33]),
      "7" = c(x2[34], x2[35]),
      "8" = x2[36]
)

# calcolare i cumulati XL

cumulatiXL<-incr2cum(incredXL)

# Chain Ladder per fare confronto con la media dei simulati

mackCLxl<-MackChainLadder(cumulatiXL)
mackCLxl

# eseguire il bootstrap sui cumulati XL

```

```

set.seed(7)
bootXL<-BootChainLadder(cumulatiXL,R=1000,process.distr = c("od.pois"))
bootXL

#inserire le simulazioni nel vettore Rsim

RsimXL<-bootXL$IBNR.Totals

# caratteristiche vettore con la distribuzione della riserva al netto della
riassicurazione XL

mediaXxl<-mean(RsimXL)
sdXxl<-sd(RsimXL)
CoVXxl=sdXxl/mediaXxl
skwXxl=skewness(RsimXL)
kurXxl<-kurtosis(RsimXL)-3

# calcolare del quantile al 99,5% della distribuzione empirica al netto della
riassicurazione XL

quant99.5XL<-as.numeric(quantXL[5])

# percentile da una Normale Standard e Normal Power per verificare
sottostima

perc99.5XL<-mediaXxl+qnorm(0.995)*sdXxl
perc99.5NPXL<-mediaXxl+(qnorm(0.995)+(skwXxl*(qnorm(0.995)^2-
1)/6))*sdXxl

# CALCOLO BEST ESTIMATE #

# estrarre i 1000 triangoli inferiori in t

tXL<-bootXL$IBNR.Triangles

# da ogni triangolo si estrae la diagonale da attualizzare anno per anno,
somma delle celle della diagonale, attualizzazione, somma dei totali
attualizzati ed inserimento in un vettore chiamato riservaXL che contiene il
totale delle 1000 riserve, dividere tutto per 1000 e ho la BE

riservaXL<-c(1:1000)
for(i in 1:1000){anno1<-
(tXL[8,2,i]+tXL[7,3,i]+tXL[6,4,i]+tXL[5,5,i]+tXL[4,6,i]+tXL[3,7,i]+tXL[2,8,i
])/((1-0.00578)
      anno2<-
(tXL[8,3,i]+tXL[7,4,i]+tXL[6,5,i]+tXL[5,6,i]+tXL[4,7,i]+tXL[3,8,i])/((1-
0.00587)^2)
      anno3<-
(tXL[8,4,i]+tXL[7,5,i]+tXL[6,6,i]+tXL[5,7,i]+tXL[4,8,i])/((1-0.00575)^3)
      anno4<-((tXL[8,5,i]+tXL[7,6,i]+tXL[6,7,i]+tXL[5,8,i])/((1-
0.00555)^4)
      anno5<-((tXL[8,6,i]+tXL[7,7,i]+tXL[6,8,i])/((1-0.00528)^5)

```



```

        anno6<-(tXL[8,7,i]+tXL[7,8,i])/((1-0.00496)^6)
        anno7<-(tXL[8,8,i])/((1-0.00458)^7)
riservaXL[i]<-anno1+anno2+anno3+anno4+anno5+anno6+anno7
BEXL<-sum(riservaXL)/1000
}

# BE con pattern di smontamento IVASS

BE2XL<-(mediaXxl*0.4227)/(1-0.00578)+(mediaXxl*0.207)/((1-
0.00587)^2)+(mediaXxl*0.1314)/((1-.00575)^3)+
(mediaXxl*0.0906)/((1-0.00555)^4)+(mediaXxl*0.065)/((1-
0.00528)^5)+(mediaXxl*0.0476)/((1-0.00496)^6)+
(mediaXxl*0.0357)/((1-0.00458)^7)

#calcolare SCR con modello interno con riassicurazione XL

SCRXL<-phisigma*BEXL
SCRXL

#### ANALISI GRAFICA E CONFRONTI ####

#confronto dinamica incrementali

par(mfrow=c(3,2))
plot(incrementali1/1000,main="Grafico Sinistri Incrementali Compagnia
Small Size",
      xlab = "Antidurata",ylab = "Costo Claim X(.000)",ylim=c(0,15000))
plot(incrementali1*alfa/1000,main="Grafico Sinistri Incrementali
Compagnia Small Size",
      sub="Netto Riassicurazione QS a=0.95", xlab = "Antidurata",ylab =
"Costo Claim X(.000)",ylim=c(0,15000))
plot(incrementali1*alfa1/1000,main="Grafico Sinistri Incrementali
Compagnia Small Size",
      sub="Netto Riassicurazione QS a=0.80", xlab = "Antidurata",ylab =
"Costo Claim X(.000)",ylim=c(0,15000))
plot(incrementali1*alfa2/1000,main="Grafico Sinistri Incrementali
Compagnia Small Size",
      sub="Netto Riassicurazione QS a=0.70", xlab = "Antidurata",ylab =
"Costo Claim X(.000)",ylim=c(0,15000))
plot(incrementali1*alfa3/1000,main="Grafico Sinistri Incrementali
Compagnia Small Size",
      sub="Netto Riassicurazione QS a=0.50", xlab = "Antidurata",ylab =
"Costo Claim X(.000)",ylim=c(0,15000))
plot(incremXL/1000,main="Grafico Sinistri Incrementali Compagnia Small
Size",
      sub="Netto Riassicurazione XL (M=300000)", xlab = "Antidurata",ylab =
"Costo Claim X(.000)",ylim=c(0,15000))

#confronto dinamica cumulati

```

```

par(mfrow=c(3,2))
plot(cumulati1/1000,main="Grafico Sinistri Cumulati Compagnia Small
Size",
      xlab = "Antidurata",ylab = "Costo Claim X(.000)",ylim=c(0,25000))
plot(cumulatiQS/1000,main="Grafico Sinistri Cumulati Compagnia Small
Size",
      sub="Netto Riassicurazione QS a=0.95",xlab = "Antidurata",ylab =
"Costo Claim X(.000)",ylim=c(0,25000))
plot(cumulatiQS1/1000,main="Grafico Sinistri Cumulati Compagnia Small
Size",
      sub="Netto Riassicurazione QS a=0.80",xlab = "Antidurata",ylab =
"Costo Claim X(.000)",ylim=c(0,25000))
plot(cumulatiQS2/1000,main="Grafico Sinistri Cumulati Compagnia Small
Size",
      sub="Netto Riassicurazione QS a=0.70",xlab = "Antidurata",ylab =
"Costo Claim X(.000)",ylim=c(0,25000))
plot(cumulatiQS3/1000,main="Grafico Sinistri Cumulati Compagnia Small
Size",
      sub="Netto Riassicurazione QS a=0.50",xlab = "Antidurata",ylab =
"Costo Claim X(.000)",ylim=c(0,25000))
plot(cumulatiXL/1000,main="Grafico Sinistri Cumulati Compagnia Small
Size",
      sub="Netto Riassicurazione XL (M=200000)",xlab = "Antidurata",ylab =
"Costo Claim X(.000)",ylim=c(0,25000))

```

# confronto istogrammi della distribuzione al netto e al lordo della  
riassicurazione

```

par(mfrow=c(3,2))
hist(Rsim/1000000, freq = FALSE,col = "green", nclass =
50,xlim=c(0,60),ylim = c(0,0.15),
      main = "Small Size", xlab = "Valore Riserva in Mln", ylab = "Frequenza
relativa")
hist(alfa*Rsim/1000000,freq = FALSE,col = "dark green",nclass =
50,xlim=c(0,60),ylim = c(0,0.15),
      main = "Small Size QS a=0.95", xlab = "Valore Riserva in Mln", ylab =
"Frequenza relativa")
hist(alfa1*Rsim/1000000,freq = FALSE,col = "blue",nclass =
50,xlim=c(0,60),ylim = c(0,0.15),
      main = "Small Size QS a=0.80", xlab = "Valore Riserva in Mln", ylab =
"Frequenza relativa")
hist(alfa2*Rsim/1000000,freq = FALSE,col = "gold",nclass =
50,xlim=c(0,60),ylim = c(0,0.15),
      main = "Small Size QS a=0.70", xlab = "Valore Riserva in Mln", ylab =
"Frequenza relativa")
hist(alfa3*Rsim/1000000,freq = FALSE,col = "magenta",nclass =
50,xlim=c(0,60),ylim = c(0,0.15),
      main = "Small Size QS a=0.50", xlab = "Valore Riserva in Mln", ylab =
"Frequenza relativa")
hist(RsimXL/1000000,freq = FALSE,col = "dark red",nclass =
50,xlim=c(0,60),ylim = c(0,0.15),
      main = "Small Size Simulato XL", xlab = "Valore Riserva in Mln", ylab =

```

```
"Frequenza relativa")
```

```
# confronto tra riassicurazione QS e XL
```

```
par(mfrow=c(1,2))
```

```
hist(alfa2*Rsim/1000000,freq = FALSE,col = "gold",nclass =  
20,xlim=c(0,40),ylim = c(0,0.15),
```

```
main = "Small Size QS a=0.70", xlab = "Valore Riserva in Mln", ylab =  
"Frequenza relativa")
```

```
hist(RsimXL/1000000,freq = FALSE,col = "dark red",nclass =  
10,xlim=c(0,40),ylim = c(0,0.15),
```

```
main = "Small Size Simulato XL", xlab = "Valore Riserva in Mln", ylab =  
"Frequenza relativa")
```

```
# Rispetto a quanto presentato per la Compagnia Small Size sono da  
applicare due differenze nel codice
```

```
# per la Compagnia Medium Size: inserire il triangolo degli incrementali in  
input, inserire la distribuzione "gamma"
```

```
# nel bootstrap e utilizzare una diversa matrice in input per la  
riassicurazione XL, senza modificarne il codice
```

```
set.seed(1602)
```

```
#applico il bootstrap
```

```
boot1<-BootChainLadder(cumulati1,R=1000,process.distr = c("gamma"))
```

```
boot1
```