



Università  
degli Studi  
del Sannio

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL SANNIO**

**FACOLTÀ DI ECONOMIA**

**Corso di Laurea Specialistica in Scienze Statistiche ed Attuariali**

**Tesi di Laurea  
in  
Teoria del Rischio per le Assicurazioni contro i danni**

***Un modello stocastico per il calcolo della  
riserva sinistri nell'ottica Solvency II:  
il metodo di Mack.***

**Relatore:**

Ch.mo Prof.

Marco Pirra

**Candidata:**

Brunella Lando

Matr. 701/000005

**Correlatore:**

Ch.mo Prof.

Nicolino Ettore D'Ortona

ANNO ACCADEMICO 2006-2007

# INDICE

<i>Introduzione</i>	<i>Pag.1</i>
<b>Capitolo 1</b>	
1.1 <i>Premessa</i>	<i>Pag.3</i>
1.2 <i>Il concetto di rischio</i>	<i>Pag.3</i>
1.3 <i>Garanzie finanziarie</i>	<i>Pag.4</i>
1.3.1 <i>Le riserve tecniche: la Riserva Sinistri</i>	<i>Pag.5.</i>
1.3.2 <i>Il Margine di Solvibilità</i>	<i>Pag.6</i>
1.4 <i>Il concetto di solvibilità</i>	<i>Pag.12</i>
1.5 <i>Il percorso della Normativa fino al Solvency II</i>	<i>Pag.15</i>
1.6 <i>Il progetto</i>	<i>Pag.16</i>
1.6.1 <i>Un cenno ai Principi Contabili Internazionali (IAS)</i>	<i>Pag.19</i>
1.6.2 <i>Solvency I: uno sguardo retrospettivo</i>	<i>Pag.20</i>
1.6.3 <i>Solvency II</i>	<i>Pag.22</i>
1.6.3.1 <i>Solvency II: La struttura generale del modello</i>	<i>Pag.23</i>
1.6.3.2 <i>Solvency II: perché un 2° e un 3° pilastro?</i>	<i>Pag.26</i>
1.6.3.3 <i>Solvency II: i cambiamenti</i>	<i>Pag.27</i>
<b>Capitolo 2</b>	
2.1 <i>Premessa</i>	<i>Pag.31</i>
2.2 <i>Le metodologie di riservazione di tipo stocastico e deterministico</i>	<i>Pag.32</i>
2.3 <i>I modelli per il calcolo della riserva sinistri: stocastici e deterministici?</i>	<i>Pag.33</i>
2.4 <i>Best estimate e risk margin</i>	<i>Pag.35</i>
2.5 <i>Le metodologie di “riservazione” stocastiche e deterministiche: similarità e differenze</i>	<i>Pag.39</i>
2.6 <i>Il run-off</i>	<i>Pag.42</i>
2.7 <i>Valutazione della riserva sinistri</i>	<i>Pag.44</i>
2.8 <i>Il metodo del chain ladder</i>	<i>Pag.46</i>
2.9 <i>Una classificazione generale dei modelli stocastici</i>	<i>Pag.49</i>
2.10 <i>I metodi stocastici</i>	<i>Pag.51</i>
2.10.1 <i>Il modello ODP</i>	<i>Pag.52</i>
2.10.2 <i>Il modello di Mack</i>	<i>Pag.56</i>
2.10.3 <i>Differenze metodologiche tra il modello ODP e il modello DFCL</i>	<i>Pag.59</i>
2.11 <i>Il Prediction Error ed il Prediction Error “Overall”</i>	<i>Pag.60</i>

### **Capitolo 3**

<b>3.1</b>	<b><i>Premessa</i></b>	<b><i>Pag.62</i></b>
<b>3.2</b>	<b><i>Analisi preliminare del metodo deterministico del chain ladder</i></b>	<b><i>Pag.62</i></b>
<b>3.3</b>	<b><i>Analisi della formula Age-to-Age Factor: chiave per la misura della variabilità</i></b>	<b><i>Pag.65</i></b>
<b>3.4</b>	<b><i>La variabilità dell'ultimo risarcimento cumulato <math>C_{it}</math></i></b>	<b><i>Pag.67</i></b>
<b>3.5</b>	<b><i>Verifica delle assunzioni del chain-ladder attraverso i dati</i></b>	<b><i>Pag.70</i></b>
<b>3.6</b>	<b><i>Il modello di Mack: similarità con l' approssimazione Normale al modello della Binomiale Negativa</i></b>	<b><i>Pag.73</i></b>
<b>3.7</b>	<b><i>Applicazione</i></b>	<b><i>Pag.74</i></b>
<b>3.8</b>	<b><i>Conclusioni</i></b>	<b><i>Pag.89</i></b>
	<b><i>Bibliografia</i></b>	<b><i>Pag.92</i></b>
	<b><i>Appendice</i></b>	<b><i>Pag.94</i></b>

## **Introduzione**

Ogni impresa, qualunque sia il settore di attività in cui opera, è soggetta, a causa dell'aleatorietà che in ogni momento e in ogni luogo incombe sui risultati degli affari, al rischio di “*insolvenza*” e provvede debitamente a tutelarsi da esso.

L'impresa assicuratrice, in particolare, “vende sicurezza” e quindi deve essere il più possibile sicura di se stessa. Da qui la massima attenzione da parte degli organi di vigilanza e controllo dell'attività assicurativa nello stabilire norme gestionali e nel chiedere attestazioni volte a garantire la “*solvibilità*” nel tempo dell'impresa assicuratrice.

Le problematiche connesse all'analisi della solidità patrimoniale e finanziaria di un'impresa sono diffusamente trattate nella letteratura aziendale che presenta, sulla tematica, una vasta produzione tecnico-scientifica relativa all'impresa di tipo generale; con riferimento a settori produttivi specifici, quale quello assicurativo è noto come l'argomento sia particolarizzato e peraltro caratterizzato da problematiche complesse.

Obiettivo di questo lavoro è quello di valutare la riserva sinistri di una compagnia danni attraverso metodi stocastici, che solo ora iniziano a trovare un loro impiego nella pratica attuariale.

La discussione sarà condotta in relazione agli sviluppi e alle teorie imposte dal Solvency II, progetto destinato a cambiare profondamente le compagnie di assicurazione, interessando tutti i soggetti legati al business assicurativo, gli assicurati, le autorità di vigilanza, gli azionisti.

Nel primo capitolo del lavoro si descrivono alcune nozioni fondamentali quali il rischio, la riserva sinistri e i principali aspetti della solvibilità in un'impresa assicuratrice, ponendo l'accento sul progetto Solvency II.

Nel secondo capitolo si descrivono le metodologie di “riservazione” utilizzate nella letteratura e nella pratica attuariale in riferimento a metodi deterministici e in

particolare a modelli stocastici come il modello di Poisson con sovradisersione e il modello di Thomas Mack<sup>1</sup>.

Successivamente nel terzo ed ultimo capitolo viene fornita un'applicazione del calcolo della riserva, in particolare, attraverso l'utilizzo del modello stocastico di Mack.

---

<sup>1</sup> Mack 1993, v.bibliografia [2].

# Capitolo 1

## ***1.1 Premessa***

La teoria del rischio ha lo scopo di mirare ad evidenziare l'importanza dei modelli stocastici ai fini della rappresentazione dell'evoluzione patrimoniale di una compagnia di assicurazioni danni che possono rappresentare un valido strumento di analisi per la valutazione della solvibilità, immediata e prospettica di un'impresa di assicurazione. Tali modelli possono rappresentare importanti strumenti per la definizione, per esempio, delle politiche di *pricing*, per le scelte in merito alla cessione di rischi, per la definizione di opportune politiche di gestione finanziaria.

Il presente capitolo ha il compito di introdurre i principali concetti di rischio, riserva sinistri, solvibilità, margine di solvibilità al fine di giungere alla presentazione del ben noto progetto *Solvency II*, presentato in tal sede, dalle sue origini fino alla sua futura attuazione attraverso cambiamenti, novità e perché.

## ***1.2 Il concetto di rischio***

Nell'ambito del business assicurativo la gestione del rischio è l'aspetto fondamentale ai fini del raggiungimento della stabilità di un'impresa.

Esistono diverse definizioni di rischio ma quella più in uso è stata pubblicata nel 1995 dagli *Standards Australia* e *Standards New Zealand* nella realizzazione del "*Standard on Risk Management*" (ASNZS 4360:1995).

Secondo tale definizione:

*“Risk – the chance of something happening that will have an impact upon objectives. It is measured in terms of consequences and likelihood.”<sup>2</sup>*

Quindi il rischio può essere definito come la conseguenza, favorevole (*upside risk*) o non favorevole (*downside risk*), derivante dal verificarsi di eventi aleatori.

Tale concetto è stato poi rafforzato più tardi.

*“Risk management is as much about identifying opportunities as avoiding or mitigating losses.”* Ossia il risk management riguarda l’opportunità di eliminare o limitare le perdite.

Tuttavia nell’uso comune si è soliti collegare la nozione di rischio a quella di danno economico, ossia al *downside risk*.

### ***1.3 Garanzie finanziarie***

Nel luglio del 1973 il Consiglio della Comunità Economica Europea ha emanato una “Direttiva in tema di coordinamento delle disposizioni legislative regolamentari ed amministrative in materia di accesso ed esercizio dell’assicurazione diretta dei Rami Danni”.

In tale direttiva le condizioni di esercizio prevedono l’obbligo, per le imprese, di provare l’esistenza – a fronte degli impegni assunti – di garanzie finanziarie che risultino commisurate al grado di sviluppo delle attività per le quali sono state autorizzate.

Le garanzie in esame sono costituite da:

-  Riserve tecniche;
-  Margine di solvibilità comprensivo di un fondo di garanzia.

---

<sup>2</sup> “Il rischio è la possibilità che accada qualcosa che avrà un impatto sugli obiettivi da raggiungere. E’ misurato in termini di conseguenze e probabilità”.

### ***1.3.1 Le riserve tecniche: la Riserva Sinistri***

La riserva sinistri riguarda gli accantonamenti che un'impresa d'assicurazione, autorizzata all'esercizio dei rami danni, deve effettuare a fine esercizio in previsione dei costi che dovrà sostenere in futuro, in relazione ai sinistri avvenuti nell'esercizio al quale si riferisce il bilancio, o in esercizi precedenti, ed in corso di liquidazione alla data di chiusura del bilancio stesso.

Essa si genera principalmente per due ragioni:

- Perché alla chiusura dell'esercizio, sinistri denunciati e registrati dall'impresa, nell'esercizio stesso o in esercizi precedenti, non sono stati ancora (completamente) pagati;
- Perché alla chiusura dell'esercizio non appaiono registrati sinistri accaduti nell'esercizio stesso o in esercizi precedenti (tardiva denuncia); in tal caso si parla di sinistri I.B.N.R.<sup>3</sup>

Tale riserva, dal punto di vista contabile, può essere considerata un *valore numerario presunto passivo*<sup>4</sup> di fine esercizio, atteso che sorge in previsione delle uscite monetarie che l'impresa d'assicurazione dovrà effettuare in futuro quando dovrà pagare i sinistri una volta conclusosi il processo di liquidazione.

La riserva sinistri può essere valutata attraverso un approccio di tipo collettivo o un approccio di tipo individuale.

Secondo l'approccio collettivo è possibile analizzare un portafoglio sufficientemente ampio di sinistri e quanto più omogeneo in termini di risarcimenti

D'altro canto l'approccio individuale prevede l'analisi del singolo sinistro dall'epoca in cui avviene al momento in cui è definitivamente liquidato, ottenendo così una valutazione dinamica del costo finale dello stesso.

---

<sup>3</sup> Incurred But No Reported.

<sup>4</sup> Tratto da "Il bilancio delle imprese di assicurazione" di Gismondi, Curti, Di Gregorio.

In genere, se si ha un portafoglio caratterizzato da un numero sufficientemente elevato ed omogeneo di rischi e da sinistri di basso importo si preferisce adottare il metodo collettivo, al contrario avendo a che fare con pochi sinistri, ma di importo elevato è preferibile l'approccio individuale.

Qualunque sia il procedimento utilizzato la stima della riserva sinistri risulta complessa e richiede innanzitutto l'informazione disponibile per la formulazione di future ipotesi sull'evoluzione di grandezze di tipo economico, quali l'inflazione, la redditività degli investimenti a copertura delle riserve.

### ***1.3.2 Il Margine di Solvibilità***

Fino al 1978, epoca di recepimento della Prima Direttiva CEE Danni, alle compagnie di assicurazione in Italia, veniva richiesto solo un capitale sociale minimo (leggermente differenziato a seconda dei rami esercitati) che non dipendeva in alcun modo dal volume dei premi né tanto meno dalla loro ripartizione nei singoli rami.

Solo con l'adozione della Direttiva CEE del 1973, per le compagnie danni è richiesto un patrimonio libero almeno pari ad un Margine Minimo di Solvibilità calcolato in funzione del volume dei premi o dei sinistri, ed opportunamente rettificato secondo la politica di riassicurazione dei rischi.

Il primo studio su questo tema a livello europeo fu condotto negli anni '50 dall'attuario belga Campagne, i cui risultati sono stati presentati in sede OCSE che successivamente ha incaricato De Mori e Grossman a procedere ad un'analisi statistica sui diversi mercati europei.

L'obiettivo riguardava la definizione dell'entità del fondo di sicurezza che l'impresa dovesse possedere al fine di garantire che l'eventuale risultato economico sfavorevole di un esercizio, connesso alla gestione di una massa premi, non fosse superiore all'entità del fondo medesimo, secondo un fissato livello di probabilità.

Ipotizzando un portafoglio sufficientemente numeroso ed una adeguatezza delle riserve tecniche, Campagne individuò due metodi, uno Teorico ed uno Pratico per la definizione di un margine minimo.

Per quanto riguarda il Metodo Teorico si ipotizza che il costo sinistri segua una distribuzione di Poisson; con tale metodo si individua un margine minimo di solvibilità pari al 30/60% dei premi puri nel caso si ipotizzi una probabilità di rovina accettabile dello 0.33/1.00 %.

Tale metodo, anche per lo stesso Campagne si è rilevato però non affidabile.

D'altro canto secondo il Metodo Pratico si esamina il comportamento del rapporto Sinistri - Premi (S/P) del conservato, registrato da 10 compagnie svizzere nel periodo 1945-1954 e, attraverso il metodo dei momenti, si ricavano i parametri della distribuzione teorica Beta che meglio si adattano ai dati empirici; ulteriori ipotesi si riferiscono ai tassi di premio pari all'1 per mille per tutte le compagnie e ad una ripartizione del premio di tariffa in:

- premio di rischio: 46%
- margine di sicurezza: 12%
- caricamento per spese: 42%.

Fissata una probabilità di rovina inferiore al 0,33%, Campagne individuò un margine di patrimonio necessario, pari al 16% dei premi di tariffa (o equivalentemente al 35% dei premi di rischio);

Nel caso invece di una probabilità di rovina inferiore allo 0,03% il margine di patrimonio diviene pari al 25% dei premi di tariffa (o 54% dei premi di rischio), quest'ultimo risultato è stato poi quello raccomandato da Campagne.

Inoltre, per la parte dei rischi ceduti in riassicurazione Campagne suggerì, senza darne però una concreta giustificazione, un margine patrimoniale aggiuntivo pari al 2,5% dei premi ceduti in riassicurazione, in modo da far fronte alla possibile insolvenza dei riassicuratori.

L'analisi statistica dei principali mercati europei, successivamente condotta da De Mori e Grossman, mediante distribuzione di un apposito questionario distribuito alle Autorità di Vigilanza dei principali paesi europei<sup>5</sup> ha evidenziato che per tutti i paesi esaminati il rapporto Patrimonio Libero/Premi netti in riassicurazione (incassati) superava largamente il valore del 27,5% indicato da Campagne quale misura di riferimento, con una media del 52,3%.

Sulla base di questi studi e di varie indagini statistiche svolte in sede comunitaria per verificare l'impatto dei nuovi requisiti patrimoniali sui diversi mercati assicurativi, la prima direttiva CEE in materia assicurativa danni (Dir. 73/239/CEE recepita in Italia con la Legge n°295 del 1978) ha previsto il possesso di un margine di solvibilità, rappresentativo in linea generale del patrimonio libero dell'impresa, almeno pari ad un margine minimo calcolato in funzione di alcune caratteristiche dell'impresa come i premi, il costo sinistri e le cessioni in riassicurazione.

Inoltre, in tale ottica, circa trenta anni fa<sup>6</sup> è stato introdotto l'istituto del margine di solvibilità, uno dei pilastri del sistema di controllo europeo sulla solvibilità.

Il funzionamento dell'istituto si ispira ai seguenti criteri:

- Misurazioni delle situazioni di rischio;
- Determinazione del patrimonio netto necessario a coprire quanto "misurato";
- Verifica dell'ammontare disponibile;

Sistema sanzionatorio e poteri d'intervento in caso di violazione delle disposizioni prefissate dall'istituto stesso.

Il margine di solvibilità corrisponde al patrimonio dell'impresa libero da qualsiasi impegno prevedibile, al netto di elementi immateriali.

---

<sup>5</sup> Francia, Germania, Gran Bretagna, Italia, Svezia, Olanda e Danimarca.

<sup>6</sup> Prima Direttiva 73/239/CEE no life.

Rappresenta una riserva, complementare alle riserve tecniche, non destinata alla copertura di specifici impieghi ma in eccedenza.

In particolare, il margine di solvibilità richiesto per le imprese che esercitano le assicurazioni contro i danni corrisponde al patrimonio considerato al netto delle immobilizzazioni immateriali, ed è costituito dai seguenti elementi:

- il capitale sociale versato (fondo iniziale effettivo se si tratta di mutue);
- la metà della quota non versata del capitale sociale o del fondo – appena la parte versata raggiunga il 50% del capitale o del fondo;
- le riserve<sup>7</sup> non destinate alla copertura di specifici impieghi o a rettifica di voci dell'attivo;
- il riporto di utili;
- il fondo di integrazione;
- i crediti che le società di mutua assicurazione a contributo variabile hanno verso i soci per eventuali integrazioni dei contributi (per un importo non superiore al 50% del margine di solvibilità);
- i prestiti subordinati e i titoli a durata indeterminata e altri strumenti finanziari (sino a concorrenza del 50% del margine);

e a richiesta dell'impresa, previa autorizzazione dell'ISVAP:

- il 75% della differenza fra la riserva premi per i rischi in corso calcolata con il metodo forfettario e la stessa riserva determinata sulla base del metodo analitico (fino a concorrenza del 20% del margine di solvibilità).

Un terzo del margine di solvibilità, denominato quota di garanzia, non può essere inferiore a determinati importi, assolvendo il ruolo di garanzia per le imprese appena costituite.

---

<sup>7</sup> Legali, statutarie o facoltative.

La sua determinazione va riferita alla data di chiusura dell'esercizio e riportata nei prospetti dimostrativi da allegare al bilancio; la normativa vigente in materia di margine di solvibilità, come mostra la seguente tabella, interviene in relazione alla sua scomposizione, ai criteri di valutazione delle attività patrimoniali, alle modalità di calcolo e ai poteri d'intervento dell'organo di controllo in caso di violazione delle precedenti disposizioni.

Fonti Normative	Composizione	Calcolo	Quota di Garanzia	di Sanzioni
Ramo danni: d.l. n° 75/1995	Art. 33	Artt. 35, 36, 37 e 38	Art. 39	Artt. 62, 63

**Tabella 1: Fonti Normative per il Ramo danni relative al margine di solvibilità.**

Il margine minimo di solvibilità, nelle assicurazioni contro i danni, deve essere determinato in funzione di criteri oggettivi, tali da consentire alle imprese di dimensioni similari di competere su un piano di parità, e che a tal fine deve essere calcolato in funzione di due criteri.

$$MMS = MAX [U_{req1}, U_{req2}]$$

Il primo criterio fa riferimento all'ammontare dei premi dell'ultimo esercizio (con una aliquota pari al 16-18%);

$$U_{req1} = [18\% * 10 \text{ mln di } \text{€} + 16\% (B - 10 \text{ mln di } \text{€})] * \alpha$$

Il secondo criterio effettua il calcolo in funzione dell'onere medio dei sinistri degli ultimi 3 esercizi (ultimi 7 se l'assicurazione riguarda i rischi credito, tempesta, grandine, gelo) con una aliquota pari al 23-26%;

$$U_{\text{req2}} = [26\% * 7 \text{ mln di } \text{€} + 23\% (\bar{S} - 7 \text{ mln di } \text{€})] * \alpha$$

L'ammontare del margine minimo da costituire deve essere almeno pari al più elevato tra i risultati ottenuti applicando i due criteri.

Viene poi introdotto un grado di conservazione,  $\alpha$ , calcolato in funzione del costo sinistri conservato nell'ultimo esercizio, senza alcuna differenziazione in base alla tipologia della copertura riassicurativa (almeno pari al 50%).

I due criteri di calcolo si equivalgono quando il rapporto S/P è prossimo al 70% mentre per valori più elevati (contenuti) il calcolo sarà effettuato sui Sinistri (Premi).

La ragione di questo doppio calcolo risiede nella volontà di evitare di richiedere un margine inferiore nei casi di sottotariffazione.

Per imprese di dimensioni medio-grandi il margine di solvibilità si può approssimare come segue:

$$U_{\text{req}} = \begin{cases} 16\% B * \alpha & \text{se } \bar{S} / B < 70\% \\ 23\% \bar{S} * \alpha & \text{se } \bar{S} / B \geq 70\% \end{cases}$$

dove:

**B** sono i premi di tariffa di competenza dell'esercizio (diretto e indiretto);

$\bar{S}$  è l'onere medio dei sinistri nell'ultimo triennio;

$\alpha$  è il grado di conservazione pari al  $\max \{50\%; (S - S_r) / S\}$ .

A causa dei suoi limiti, quali il non tener conto delle politiche di investimento dei fattori ciclici, alcuni studiosi ritengono che il margine di solvibilità dell'Unione Europea possa essere considerato più una struttura logica per l'intervento della vigilanza che non un tentativo di offrire un qualsivoglia livello di sicurezza per gli assicurati.

In particolare diversi sono gli elementi di criticità rivolti a tale quantità:

- il limite minimo della quota di garanzia è un importo fisso di cui non è stato previsto un adeguamento per tener conto dell'inflazione;
- le deroghe concesse in termini di criteri di valutazione dell'attivo hanno permesso l'introduzione di plusvalenze latenti che aumentano il patrimonio, diminuendo il margine implicito; non si tiene conto della composizione dei rami danni; i rami di responsabilità civile richiederebbero una maggiore patrimonializzazione essendo caratterizzati da un rischio di sovrasinistralità più elevato;
- vi è una maggiore penalizzazione per imprese di grandi dimensioni che sono caratterizzate da una sinistralità più stabile;
- il margine di solvibilità dipende direttamente dal bilancio e dai criteri di valutazione delle poste passive e attive, con evidenti problemi disomogenizzazione in ambito europeo.

Ad ogni modo, vari studi effettuati a proposito hanno mostrato, per entrambi i rami assicurativi, l'insufficienza di tale margine.

#### ***1.4 Il concetto di Solvibilità***

Il concetto di "solvibilità", fondamentale per affrontare problematiche assicurative di rilevante interesse pratico, è usato, nel linguaggio comune, spesso in modo impreciso e comunque con un significato non univoco.

E' chiaro che un soggetto risulta *non solvibile* nel momento in cui non è in grado di far fronte al pagamento degli importi dovuti nel momento stesso.

L'”inversione” di tale affermazione conduce al significato del termine di solvibilità: “*capacità di un soggetto di far fronte ai propri impegni*”.

Ricorrendo ad un concetto di solvibilità in senso probabilistico, e non in senso assoluto, il significato di solvibilità diventa: “*capacità di far fronte, con assegnata probabilità, agli impegni aleatori realisticamente descritti da una struttura probabilistica*”.

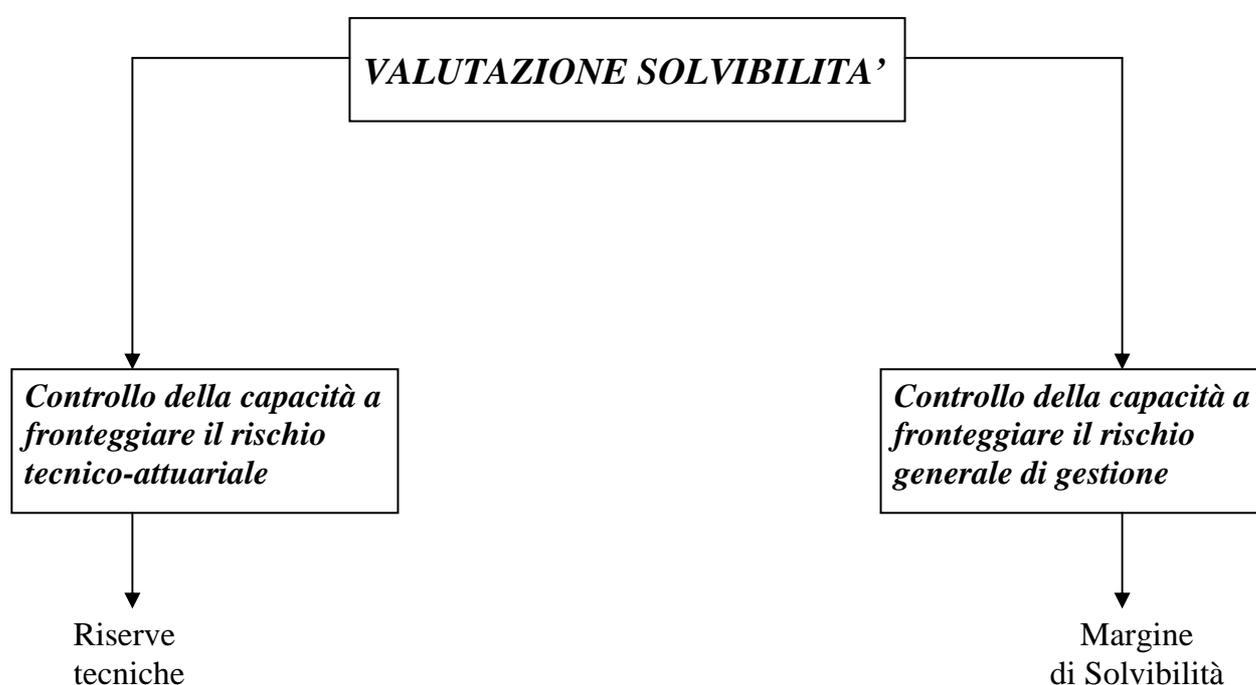
Tal significato necessita di alcune specificazioni, infatti nel valutare la capacità di far fronte agli impegni occorre:

1. Specificare il valore della probabilità a fronte degli impegni assunti;
2. Individuare i “risultati” che si considerano atti ad accertare la capacità in questione;
3. Definire un intervallo temporale sulla cui estensione considerare i risultati;
4. Scegliere se ragionare in termini di risultati annuali o di sintesi;
5. Scegliere un'impostazione di tipo “portafoglio chiuso” o “portafoglio aperto” a nuovi ingressi.

Al fine di far fronte agli impegni assunti sono stati istituiti organi di controllo e sono state stabilite leggi, mentre l'impresa, in aggiunta alle diverse misure preventive, ricorre alla riassicurazione. Va comunque sottolineato che, accanto al margine di solvibilità, come misura di sicurezza per la solvibilità di un'impresa di assicurazione, è opportuno prendere in considerazione le riserve tecniche.

Tuttavia, considerare semplicemente il margine minimo di solvibilità, che comunque rappresenta un mezzo importante per la stabilità di un'impresa, trascurando una corretta valutazione delle riserve tecniche, non risulterebbe adeguatamente sufficiente.

In particolare il margine di solvibilità legato alla gestione di un'impresa di assicurazione può essere assunto a valore espressivo di un aspetto specifico della struttura di solvibilità di un'impresa, rappresentandone sinteticamente la sua *capacità a fronteggiare il rischio generale di gestione*; parimenti le riserve, correlate alle coperture in essere, possono considerarsi valori espressivi della *capacità a fronteggiare il rischio tecnico-attuariale* dell'impresa.



**Figura 1: Struttura del sistema di valutazione della solvibilità.**

Il legislatore italiano, in linea con le indicazioni comunitarie, ha da tempo recepito l'importanza e la complessità del fenomeno della solvibilità delle imprese di assicurazione, emanando norme e principi che stabiliscono un sistema di valutazione fondato sulla garanzia contro le due tipologie di rischio evidenziate.

## ***1.5 Il percorso della Normativa fino al Solvency II***

Uno dei maggiori temi di discussione nell'ambito delle scienze attuariali è stato, ed è tuttora, la ricerca di un criterio universalmente valido per la valutazione della capacità o meno di un'impresa di assicurazione di far fronte ai propri impegni futuri.

Riguardo a ciò sono stati condotti numerosi studi, presenti in letteratura, mentre importanti ricerche sono state promosse da varie autorità.

Tra queste, le ricerche maggiormente interessanti sono quelle condotte negli anni Sessanta da Campagne, Buol e De Mori per conto dell'O.C.S.E. (Organizzazione Mondiale per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico).

Sulla base dei risultati forniti da questi studi, sono state fissate, nell'ambito dei paesi della Comunità Europea, le misure minime del margine di solvibilità in entrambi i rami di assicurazione, danni e vita.

A partire dagli anni Settanta, diversi autori hanno evidenziato limiti e inconvenienti di una siffatta regolamentazione, in riferimento non solo alle formule scelte ma anche alla loro filosofia che, in pratica, individua lo stato di benessere di una compagnia in base ad un unico indicatore. Poiché la definizione di una regolamentazione rigida, valida *erga omnes*, comporta comunque delle limitazioni, alcuni autori hanno prospettato un superamento del problema, individuando una metodologia di controllo di secondo livello.

Quest'ultima prenderebbe in considerazione tutte le più significative peculiarità di un'impresa, che per la loro complessità non possono essere tenute nella dovuta considerazione in un controllo di primo livello, costituito da un test classico di solvibilità come quello della legislazione comunitaria.

A tal fine, nel campo di entrambi i rami di assicurazione, sono state condotte numerose ricerche in ordine alla definizione di modelli stocastici il più possibile

rappresentativi della realtà gestionale di un'impresa assicurativa, con tutte le sue possibili interdipendenze.

Un notevole sviluppo, in tal senso, è stato fornito da attuari scandinavi e anglosassoni, a partire dagli anni Ottanta.

In particolare, per le assicurazioni contro i danni si ricordano, Pentikainen et al. [1989], Daykin e Hey [1990].

Un'altra linea di ricerca per la definizione di metodologie di controllo della solvibilità di un'impresa assicurativa è quella basata su tecniche di analisi discriminante multivariata degli indici di bilancio. Essa ha conosciuto largo sviluppo negli U.S.A.<sup>8</sup> ma interessanti contributi sono stati forniti anche da attuari italiani (da Buoro [1980] a De Angelis [1993]).

## ***1.6 Il progetto***

La Commissione Europea e gli Stati Membri hanno iniziato nel 2000 un progetto di riforma per la determinazione del margine di solvibilità per le imprese di assicurazione.

L'obiettivo ambizioso del progetto Solvency II è definire una serie di procedure per stabilire un sistema di solvibilità che rifletta le realtà di mercato ed in funzione del profilo di rischio della singola impresa. Il progetto è stato anticipato da una prima fase di studio terminata nel 2003 in cui gli Stati Membri e la Commissione Europea hanno esaminato le principali problematiche connesse al monitoraggio e gestione dei rischi.

I due documenti di maggior rilevanza di questa fase sono:

---

<sup>8</sup> Cfr. ad esempio Atena Life & Casulty [1987].

1) lo studio<sup>9</sup> che la Commissione Europea ha affidato alla KPMG e pubblicato il 2 maggio 2002 in cui si suggerisce l'attuazione del nuovo modello di solvibilità basato su tre pilastri simile a quello adottato dal Comitato di Basilea per le banche (Basilea II).

2) la relazione<sup>10</sup> sulla vigilanza prudenziale delle imprese di assicurazione (nota come "Sharma report") pubblicata nel dicembre 2002, elaborata in occasione della *Conference of Insurance Supervisory Services* degli Stati Membri dell'Unione Europea, che apporta al progetto l'indispensabile punto di vista delle autorità di vigilanza degli Stati Membri.

Terminata la fase di studio, il progetto Solvency II verrà adottato tenendo conto dell'approccio Lamfalussy<sup>11</sup> con una procedura di comitati su 4 livelli:

Livello 1. La Commissione Europea, dopo essersi consultata con i comitati di livello inferiore, adotta un "progetto di direttiva".

Livello 2. il Comitato di Livello 2, l'*European Insurance and Occupational Pension Committee* (EIOPC), dopo aver consultato il comitato di livello 3, sviluppa le implementazioni tecniche e le sottopone al comitato di Livello 1.

Livello 3. il Comitato di Livello 3, il *Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors* (CEIOPS) formato dai rappresentanti delle autorità di vigilanza europei, si fa carico di armonizzare le norme, le linee-guida e i principi tra gli Stati Membri, esamina le proposte dei comitati di livello 2, e raffronta le pratiche regolamentari per assicurare la coerenza dell'attuazione e dell'applicazione delle norme.

---

<sup>9</sup> Study into the methodologies to assess the overall financial position of an insurance undertaking from the perspective of prudential supervision – KPMG – European Commission - maggio 2002 disponibile sul sito [www.europa.eu.int](http://www.europa.eu.int).

<sup>10</sup> Report – Prudential Supervision of Insurance Undertakings - Conference of Insurance Supervisory Services of the Member States of the European Union – Dicembre 2002 disponibile sul sito [www.europa.eu.int](http://www.europa.eu.int).

<sup>11</sup> Approccio illustrato nella relazione del Comitato dei Saggi sulla regolamentazione degli European Securities Markets.

Livello 4. la Commissione vigila su rispetto delle norme da parte degli Stati Membri.

Considerata la complessità del progetto è essenziale, per l'obiettivo della promozione della competitività, che le norme in preparazione rispondano ai criteri della "*betterregulation*":

- "semplificazione": codificazione in un testo unico delle direttive assicurative vigenti;
- "trasparenza": costante consultazione con le parti interessate;
- "proporzionalità": applicazione dei medesimi principi in modo differenziato, tenendo conto della realtà delle entità regolate;
- "valutazione d'impatto": analisi dei costi e dei benefici delle misure proposte nei riguardi di tutte le componenti del mercato (imprese, consumatori, *supervisors*).

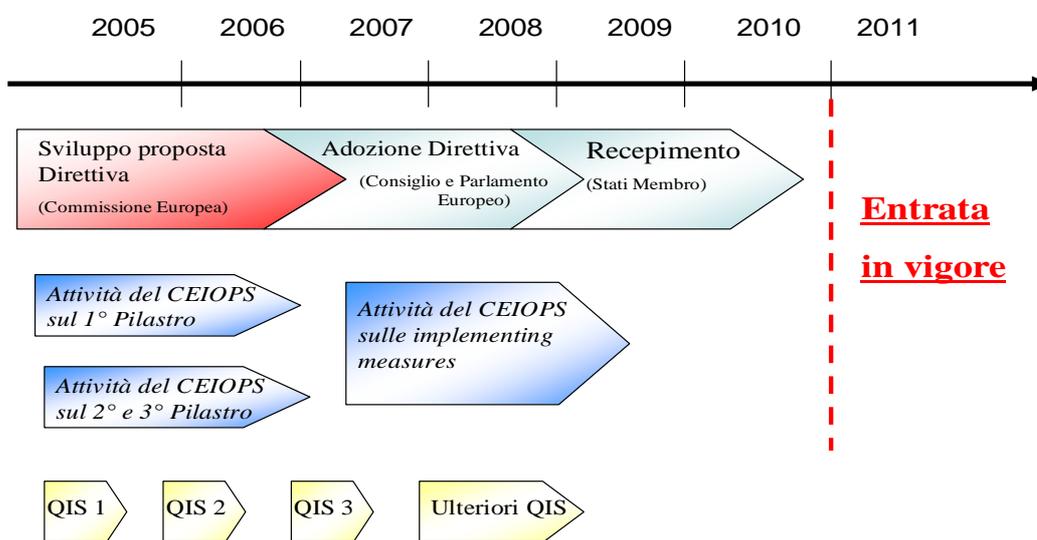


Figura 2: La tempistica del progetto.

Per ora sembra di essere sulla buona strada; in particolare, in questo quadro, i *Quantitative Impact Studies (QIS)* rivestono un'importanza cruciale.

Infine, il progetto Solvency II è strettamente connesso al passaggio delle valutazioni a *fair value* per cui i tempi risentono della completa adozione dei principi IFRS; allo stato attuale, comunque, si attende l'emanazione della direttiva finale nel 2007 e la sua adozione negli Stati Membri tra il 2009 ed il 2010.

Nella figura precedente sono stati individuati i tempi di attuazione del progetto "Solvency II" in riferimento non solo i contributi ma anche ai *QIS* del CEIOPS.

### **1.6.1 Un cenno ai Principi Contabili Internazionali (IAS)**

La commissione IASB, *International Accounting Standard Board*, ha emanato un documento contenente i principi contabili IAS – *International Accounting Standard* (ora *International Financial Reporting Standards* - IFRS).

Il principio di fondo che guida queste novità normative è quello della convergenza e della trasparenza dell'informativa finanziaria a livello internazionale, affinché i bilanci delle imprese di assicurazione diventino strumenti di informativa finanziaria utili a tutti gli operatori per prendere decisioni economiche.

In particolare l'Unione Europea ha deciso di adottare provvedimenti per rafforzare la comparabilità dei bilanci redatti dalle società, specialmente quelle quotate, ossia quelle i cui titoli sono ammessi alla negoziazione in un mercato regolamentato<sup>12</sup>.

Inoltre, con tali principi, formulati al fine di creare una contabilità internazionale uniforme per ciascuna attività economica, si tende a privilegiare il concetto di competenza anziché il principio della prudenza che, consiste nell'impiego di un certo grado di cautela nell'effettuare stime in condizioni di incertezza richieste dal bilancio, in

---

<sup>12</sup> Si tratta di società i cui titoli sono negoziati in un mercato.

modo che le attività o i ricavi non siano sovrastimati e le passività e i costi non siano sottostimati.

Nell'analisi dell'influenza relativa all'adozione dei nuovi principi contabili bisogna tener conto dei considerevoli cambiamenti del mercato assicurativo europeo negli ultimi anni, come la liberalizzazione delle tariffe del 1994 e le nuove norme in materia di concorrenza.

### ***1.6.2 Solvency I: uno sguardo retrospettivo***

Nel Marzo 2002 sono state approvate due direttive una per il ramo vita e una per il ramo danni<sup>13</sup>, in materia di margine di solvibilità.

In Italia le modifiche sono state introdotte con il d.l. 307 del 3 novembre 2003 e sono entrate in vigore il 1 Gennaio 2004, data in cui entra in vigore il cosiddetto Solvency I, un primo aggiustamento in vista della riforma totale con il Solvency II.

L'impianto regolamentare in vigore con "Solvency I" è stato costituito da disposizioni stabilite a partire dagli anni '60, quindi piuttosto datate se si prova ad immaginare la portata dei cambiamenti occorsi da allora ad oggi. Queste disposizioni hanno visto la loro origine in un periodo in cui l'integrazione fra i vari paesi dell'Europa, tra i quali l'Italia, era molto limitata.

Il Solvency I ha portato dei cambiamenti negli elementi costitutivi il Margine di Solvibilità, il cui calcolo era effettuato mediante l'osservazione di vari parametri e relative combinazioni:

- premi sottoscritti;
- conteggi particolari riguardanti il valore del sinistro medio;
- fondo di garanzia;

---

<sup>13</sup> Rispettivamente la n. 2002/12/CE e la n. 2002/13/CE.

- coefficienti di “penalizzazione” particolari per le attività in certi rami tecnici, quali trasporti ed aviazione.

In altri termini, la valutazione era basata su indici di tipo quantitativo che difficilmente consentivano di rilevare il livello di rischiosità del *business*.

Tale progetto ha riguardato particolarmente la quota di garanzia e le soglie minime del livello dell'onere medio dei sinistri e del livello dei premi sotto il quale è previsto un margine più elevato.

Per la quota di garanzia il livello minimo è stato incrementato e varrà indicizzato nel futuro in linea con l'inflazione.

Il margine richiesto in relazione ai premi sarà pari al 18% per i primi 50 milioni di euro (contro i 10 milioni del passato) e al 16% oltre i 50 milioni.

Il margine richiesto in relazione ai sinistri sarà pari al 26% per i primi 35 milioni di euro (contro i 7 milioni del passato) e al 23% oltre i 35 milioni; le soglie sono state anch'esse incrementate e indicizzate.

Per alcuni rami assicurativi<sup>14</sup>, caratterizzati da un profilo di rischio maggiormente volatile, il margine di solvibilità richiesto verrà incrementato, aumentando gli imponibili di riferimento del calcolo (Premi e Onere Medio dei sinistri) del 50%.

In definitiva, le novità introdotte nel Solvency I vanno inserite nell'ottica più ampia di una revisione del sistema di solvibilità con l'attuazione del progetto Solvency II.

---

<sup>14</sup> Rami 11 (Aerei) – 12 (Navi) – 13 (contro terzi).

### ***1.6.3 Solvency II***

Il progetto Solvency II ha come obiettivo la revisione completa dell'attuale sistema di solvibilità. Le ragioni di questo intervento sono individuabili nel cambiamento del quadro normativo (liberalizzazione delle tariffe), nel calo dei proventi degli investimenti, nel trend crescente di fusioni e acquisizioni, nella pressione crescente degli azionisti, per ridurre il capitale impiegato.

Si tratta di una riforma a 360° del sistema attuale, che interesserà non solo i requisiti minimi di capitale, ma anche la vigilanza e l'informativa di mercato.

Il sistema di solvibilità attuale finora è risultato adeguato, ma le condizioni future del mercato inducono ad un rafforzamento del sistema.

Gli obiettivi sono essenzialmente quelli di individuare un margine di solvibilità che: rifletta meglio i rischi effettivi di un'impresa, consenta alla vigilanza di cogliere per tempo i segnali di difficoltà, consenta confrontabilità e trasparenza tra le compagnie ed i mercati nazionali, rifletta gli sviluppi del mercato (flessibilità), non eccessivamente complesso e compatibile con i metodi di controllo delle autorità di vigilanza, non comporti per le imprese oneri patrimoniali eccessivi, tenga conto del processo di armonizzazione internazionale di norme e procedure di vigilanza, con particolare riferimento all'Accordo Basilea II, in tema di requisiti patrimoniali per le banche e dei Modelli Interni di misurazione dei rischi, e ai principi contabili internazionali.

L'aspetto più importante è l'introduzione di requisiti minimi più aderenti ai rischi sopportati dalle compagnie da calcolarsi o attraverso un sistema standard o attraverso modelli interni di gestione del rischio. È evidente come la necessità di creare una disciplina comune sul margine di solvibilità si scontra con le regole di calcolo e di stima delle attività e delle passività, ed in particolare delle riserve tecniche. Ecco allora che il progetto Solvency II non può prescindere dal guardare con attenzione all'introduzione dei nuovi principi contabili internazionali IAS, i quali, tra l'altro,

diminuiranno il livello di prudenza in molte nazioni, aspetto che accentua ancora di più l'importanza di un rafforzamento del sistema di solvibilità e di un'analisi sempre più attenta dei vari rischi a cui l'impresa è esposta.

Il progetto Solvency II è diviso in due fasi distinte: la prima, avviata all'inizio del 2001 e conclusasi due anni dopo, è stata sostanzialmente una fase preliminare, di studio delle principali problematiche.

In questa prima fase si è ritenuto fondamentale ricercare nei sistemi di vigilanza esteri, *in primis* il RBC americano, principi che potessero essere trasferiti alla realtà europea.

La seconda fase, avviata nel 2003 e tuttora in corso, è dedicata all'elaborazione di soluzioni dettagliate ed ha avuto come obiettivo la redazione di una bozza della nuova direttiva entro il 2005.

In definitiva la struttura generale del futuro sistema di solvibilità sarà articolata in tre punti fondamentali:

- Il modello a tre pilastri:
  - Requisiti patrimoniali minimi ( I Pilastro);
  - Regolamentazione delle autorità di controllo ( II Pilastro);
  - Disciplina del mercato ( III Pilastro).
- L'individuazione del profilo di rischio delle compagnie;
- L'introduzione di modelli interni delle compagnie in analogia con le banche.

### **1.6.3.1 Solvency II: La struttura generale del modello**

Il primo pilastro (Requisiti Patrimoniali Minimi) coinvolge il mantenimento di

- a) appropriate riserve tecniche;
- b) idonee attività a copertura degli impegni;

- c) un requisito minimo di capitale per ogni assicuratore definito sulla base dell'insieme dei rischi – full range of risks - che impattano sulla situazione finanziaria dell'impresa.

Nell'ambito di questo pilastro, è generalmente condiviso che debbano essere ricompresi le seguenti tipologie di rischio:

- underwriting risk;
- credit risk;
- market risk;
- operational risk.

La quantificazione di tali rischi dovrebbe avvenire sulla base di una *factor driven* formula laddove un opportuno orizzonte temporale e un elevato livello di confidenza rivestiranno un ruolo decisivo.

Il secondo pilastro (processo di vigilanza prudenziale) è necessario, in aggiunta al primo pilastro, poiché non tutti i tipi di rischi possono essere valutati adeguatamente con misure solamente quantitative. Anche per quei rischi che possono essere valutati quantitativamente, la loro determinazione, ai fini della solvibilità, richiederà una revisione indipendente ed autonoma da parte delle Autorità di vigilanza o da una terza parte qualificata come l'attuario. Ciò è particolarmente specificato nel caso in cui siano usati modelli interni.

Questo secondo pilastro è inteso per accertarsi non solo che gli assicuratori abbiano capitale sufficiente per sostenere tutti i rischi nel loro business ma anche per consigliare agli assicuratori di sviluppare ed usare migliori tecniche di *risk management* in relazione al profilo di rischio dell'assicuratore, al monitoraggio e alla gestione di questi rischi. Tale revisione permetterà l'intervento delle autorità di sorveglianza qualora il capitale dell'assicuratore non risulta essere sufficientemente adeguato a sopportare tali rischi.

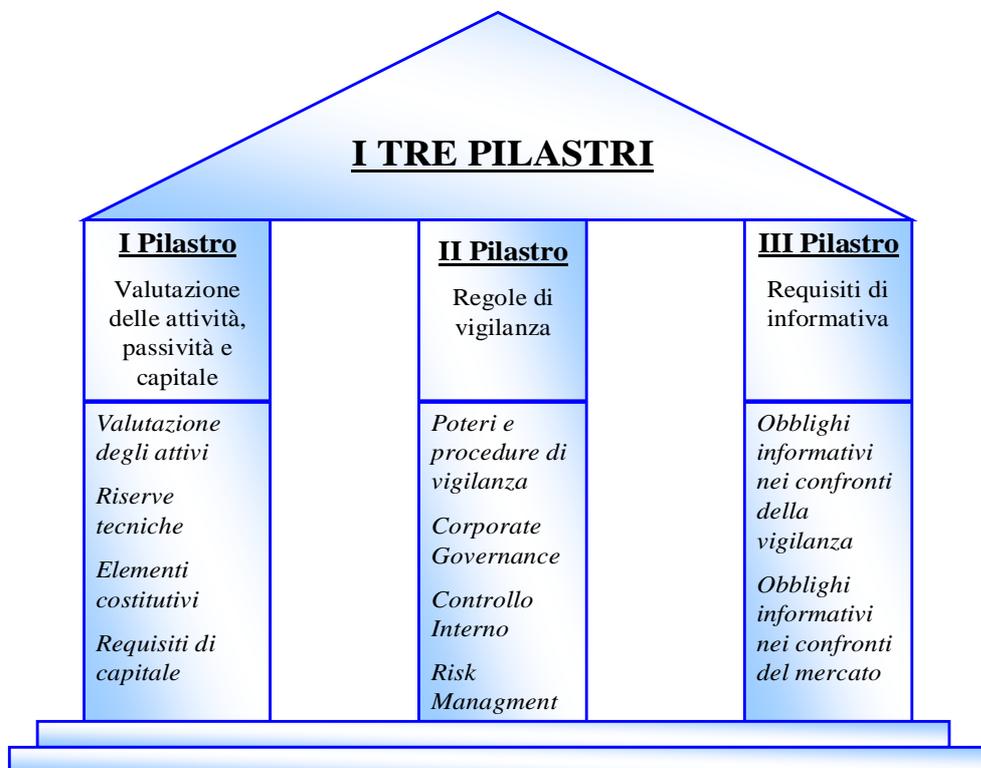
Come nell'accordo Basilea II, sarà fissato uno *Standardized Approach* che comporti misure di capitale alquanto prudenziali, ad esempio mediante una sovrastima dei coefficienti di correlazione, comportando un maggior interesse, da parte delle compagnie, nello stimare il *Target Capital* tramite modelli interni che colgano, con maggior precisione, la connessione tra i diversi rischi, determinando così una misura di capitale molto verosimilmente più contenuta di quella fissata attraverso lo *Standardized Approach*.

L'utilizzo di Modelli Interni consentirà allora, alle compagnie di personalizzare e correggere i risultati degli *Standards Models* e questi Modelli Interni potranno essere usati non solo per la stima del capitale da possedere dalla compagnia ma soprattutto come supporto valido delle decisioni del management dell'impresa .

Infine il terzo pilastro (Disciplina di Mercato), serve a rinforzare la disciplina del mercato introducendo requisiti nel campo dell'informativa:

- obblighi di pubblicazioni e raccomandazioni pressanti (imprese del gruppo considerate, composizione dei fondi propri adeguatezza del capitale);
- norme in materia di pubblicità delle informazioni.

La suddetta struttura è riportata nella figura sottostante attraverso una rappresentazione grafica.



**Figura 3: Struttura a tre pilastri del progetto Solvency II.**

### 1.6.3.2 Solvency II: perché un 2° e un 3° pilastro?

Diversi sono i motivi per cui si è giunti all'identificazione del secondo e terzo pilastro.

Innanzitutto il primo pilastro non può riflettere appieno tutti i rischi alcuni dei quali non possono essere quantificabili o lo sono parzialmente, inoltre se si vuole rafforzare il mercato unico occorre una maggiore armonizzazione degli strumenti e delle prassi di vigilanza.

La necessità di armonizzare gli obblighi informativi verso le imprese, un' informativa chiara e trasparente nei confronti degli investitori e dei consumatori per favorire la “disciplina del mercato”, (capacità del mercato di valutare la solvibilità delle imprese di assicurazione) e renderla efficace al fine di ridurre le distorsioni derivanti dall'esigenza di fissare requisiti patrimoniali (1° Pilastro) elevati, sono le motivazioni riguardanti la definizione del terzo pilastro.

È previsto che con tutti i requisiti citati, l'industria “*best practice*” sia promossa.

Inoltre, la professione attuariale potrà aiutare i soprintendenti all'interno del secondo pilastro fornendo una revisione indipendente nella determinazione di responsabilità dell'assicuratore e del *risk management* ed all'interno del terzo pilastro nel disegno delle pratiche di revisione adatte a servire l'interesse pubblico.

In conclusione tale progetto rappresenta una grande occasione a disposizione del mercato europeo e dovrà portare ad:

- un miglioramento dell'armonizzazione degli standard europei e delle riserve tecniche;
- una più profonda conoscenza dei rischi;
- una maggiore trasparenza;
- un uso più efficiente del capitale;
- una migliore protezione degli assicurati.

### **1.6.3.3 Solvency II: i cambiamenti**

I requisiti minimi di capitale si distingueranno in “*target capital requirement*” e “*minimum capital requirement*” e dovranno essere calcolati in maniera tale da risultare sufficienti, data una certa probabilità di rovina.

Il Target Capital rappresenterà il capitale auspicabile che ogni impresa dovrà possedere e potrà essere calcolato sia con un metodo standard (ad esempio l'RBC americano), sia con modelli interni di gestione del rischio.

Inoltre da considerare la presenza di due misure di rischio raccomandate dall'IAA WP<sup>15</sup> e dall'IAA-SWP<sup>16</sup>:

- ✚ SHORT-TERM: l'ammontare del capitale necessario deve risultare sufficiente per un livello di confidenza elevato (99%) che comprende al termine di 1 ANNO il valore attuale delle future obbligazioni residue;
- ✚ LONG-TERM: per far fronte alla complessa natura di alcuni rischi, può essere imposta anche una seconda condizione. Qualora il valore attuale delle passività (riferito ad un orizzonte di 2-3 anni per le assicurazioni non-life e considerato ad un livello di confidenza abbastanza elevato, per esempio 90/95%) sia più grande, allora dovrebbe essere mantenuta quest'ultima misura di capitale.

Questa seconda misura cattura tutti i rischi per tali anni inclusi i rischi sistematici e non-sistematici. Un livello di confidenza più contenuto rispetto al precedente (90/95% invece del 99%) è appropriato in quanto va considerato che alla fine dell'anno la compagnia può intraprendere varie strategie per gestire al meglio i propri rischi.

I requisiti di capitali saranno allora influenzati non solo dalla dimensione dell'impresa, ma anche dalla diversa volatilità dei rami assicurativi, dalle caratteristiche dei trattati riassicurativi, dal tasso di crescita e dal tasso di interesse, dai caricamenti applicati e dall'inflazione.

Per il metodo standard, si potrebbero stabilire parametri uguali per tutte le imprese europee oppure permettere una diversificazione attraverso l'utilizzo di

---

<sup>15</sup> International Actuary Association - Working-Party.

<sup>16</sup> International Actuary Association - Solvency Working-Party.

parametri flessibili, quali ad esempio la tassazione, al fine di poter cogliere al meglio le differenze di ogni realtà nazionale.

Indispensabile la definizione di un requisito di capitale per la copertura dell'*underwriting risk*<sup>17</sup>, del rischio di mercato e di credito.

Per quanto riguarda il calcolo dei requisiti di capitale, per le coperture degli ultimi due rischi, di mercato e di credito, probabilmente si utilizzeranno metodi simili a quelli dei modelli *Risk Management* che si stanno sviluppando nell'ambito bancario, come ad esempio strumenti di analisi statistica multivariata.

Infine, il calcolo del *minimum capital requirement*, ovvero del livello sotto il quale la compagnia non dovrà mai scendere, sarà molto semplice. Bisognerà scegliere se calcolarlo come una frazione del target capital o in modo simile al margine minimo di solvibilità odierno, ipotesi più probabile.

In conseguenza della varietà e della complessità del profilo di rischio delle singole compagnie non sembra possibile prevedere un approccio rigido.

In ogni caso l'esperienza delle autorità di controllo delle assicurazioni, negli USA in particolare, e del settore bancario (Basilea II) dimostra che ci sono dei benefici quando si stabiliscono regole standard che comunque contemplano un'analisi interna del rischio da parte del management delle imprese.

Gli Internal Risk Models sono da utilizzare non solo per analisi di solvibilità, ma anche per assistere il management nella definizione delle strategie più appropriate, ad esempio pricing, riassicurazione, misura del capitale di rischio, dividendi.

Da ricordare le tre condizioni necessarie affinché i modelli interni, per la valutazione del livello dell'adeguatezza del capitale, possano essere considerati affidabili dalle autorità di controllo:

---

<sup>17</sup> Specifico rischio assicurativo derivante dalla sottoscrizione di contratti assicurativi; il più rilevante per una compagnia d'assicurazione.

- il senior management deve usarli ai fini delle decisioni da prendere, li deve considerare utili;
- devono consentire di quantificare il rischio, misurarlo obiettivamente;
- deve essere possibile “validarli” secondo una procedura interna e test indipendenti.

I modelli di rischio possono rappresentare un utile strumento per l’ autorità di controllo, anche se possono comportare difficoltà. In ogni caso il beneficio maggiore consiste nella capacità di prevedere/prevenire eventuali situazioni di rischio.

Il senior management deve assicurare che un sistema adeguato di “risk management” sia realizzato e mantenuto in costante efficienza.

Questa è un’ area dove saranno necessarie regole standard da incorporare nel futuro sistema di risk management.

## Capitolo 2

### *2.1 Premessa*

Le tecniche attuariali sono da tempo utilizzate al fine di effettuare le valutazioni della riserva sinistri la cui entità risulta, per sua natura, un importo stimato.

Le stime basate su valutazioni effettuate sinistro per sinistro ed utilizzate dalle compagnie per rappresentare il costo ultimo dei sinistri, sembrano in generale essere inadeguate, ad esempio per quei rami caratterizzati da un più lungo processo di liquidazione dei sinistri.

La potenziale sottostima degli impegni di rimborso in-essere (*Outstanding LossLiabilities, OLL*) e la conseguente insufficienza della riserva sinistri, costituisce una considerevole fonte di rischio per le imprese di assicurazione contro i danni e le metodologie attuariali sono, da tempo, parte integrante dello specifico processo di valutazione specialmente per i rami a lenta liquidazione.

L'introduzione del progetto Basilea II, relativo al settore bancario, i nuovi Principi Contabili Internazionali (IAS) e, infine, il progetto Solvency II hanno apportato e apporteranno inoltre sostanziali modifiche al modo in cui gli operatori del mercato finanziario ed assicurativo gestiranno alcuni aspetti tradizionali, quali, ad esempio, la stima di alcune voci di bilancio e la valutazione del margine di solvibilità.

Tutti questi progetti hanno lo scopo di modificare l'intero settore finanziario-assicurativo cercando una maggiore trasparenza e rispondenza con il mercato.

## ***2.2 Le metodologie di riservazione di tipo stocastico e deterministico***

Uno degli argomenti tra i più dibattuti negli ultimi due decenni nella letteratura e nella pratica attuariale internazionale dell'assicurazione danni, riguarda l'utilizzo di metodologie di "riservazione" (*loss reserving models*) di tipo stocastico e deterministico, allo scopo di costituire o controllare a posteriori la riserva sinistri.

Lo sviluppo e l'uso di metodi stocastici è oggi in forte crescita ma ad oggi si preferiscono ancora modelli di tipo deterministico che forniscono, per costruzione, solamente un dato puntuale della previsione.

In particolare, l'impiego di metodologie stocastiche si considererà in prospettiva, a seguito del progetto Solvency II, ove il CEIOPS, su richiesta della Commissione, ha posto tra l'altro, quale traguardo ai paesi aderenti il raggiungimento di un *benchmark* armonizzato in chiave probabilistica, quale requisito regolamentare per la riserva sinistri:

$$\text{BEST ESTIMATE} + \text{RISK MARGIN},$$

dove la prima componente, definita dalla speranza matematica dei futuri esborsi, è utile per catturare implicitamente la volatilità dei rischi cosiddetti diversificabili, ossia tutti quei rischi che possono essere trasferiti, attraverso l'utilizzo di un portafoglio replicante, ad un terzo soggetto; per quanto riguarda il *risk margin*, invece, è posto a copertura della volatilità dei rischi non diversificabili, aspetto non catturato nelle riserve *best estimate* e, quindi, con i modelli deterministici.

Infatti, in tale contesto una precisa definizione di *best estimate* e *risk margin* può essere fornita solamente mediante l'applicazione di un modello di valutazione stocastico alle serie storiche dei sinistri.

In linea con il progetto Solvency II, il nuovo requisito di riserva sinistri è stato quindi definito quale somma della *best estimate* degli impegni in essere alla fine

dell'esercizio e di un *risk margin* volto ad esplicitare il livello di incertezza dei *cash-flow* futuri.

### ***2.3 I modelli per il calcolo della riserva sinistri:stocastici e deterministici?***

Ogni metodo di stima per l'individuazione della riserva sinistri fornisce stime differenti del livello di riserva; a partire da queste, spetta poi all'attuario selezionare la stima "migliore" (*best estimate*) in base ai pregi di ciascun metodo ma anche alla conoscenza del business.

Tali metodi, che non forniscono informazioni relative ad altri possibili risultati nell'intorno della stima, sono generalmente definiti deterministici.

Nel momento in cui vengono indicati anche dei *range* di valori possibili, la *best practice* è quella di fornire dei risultati forfaitariamente, come, ad esempio, intervalli di variazione ricavati dalle indicazioni fornite dai diversi metodi applicati, o basate su una analisi di sensitività su alcuni fattori.

Questi metodi non forniscono alcuna informazione sulla misura di probabilità che il valore stimato sia compreso nell'intervallo di variazione.

Questa procedura operativa rappresenta un ostacolo al raggiungimento di un'armonizzazione tra attuari, rami assicurativi, imprese e i diversi paesi.

Inoltre, a seconda dei diversi casi, la vigilanza attuariale è frequentemente costretta a spendere risorse per verificare il livello di prudenza contenuto nelle riserve sinistri accantonate nel bilancio, in più i metodi statistici non risultano essere sempre applicabili in presenza di dati irregolari o statisticamente insufficienti o comunque a tutti i diversi rami e/o imprese.

In questi casi, allora, la vigilanza attuariale deve venire a conoscenza di procedure alternative impiegate per la valutazione della riserva, chiedendo opportuni chiarimenti agli attuari e alle imprese stesse.

Di tutti questi aspetti ne ha tenuto conto il CEIOPS che in merito ai metodi statistici ha osservato:

*“Considerato che un singolo metodo di calcolo non può essere appropriato a tutte le circostanze, il processo di revisione della vigilanza sulle riserve tecniche dovrà prendere in considerazione, per quanto possibile, la specificità di ogni impresa.*

*Per assicurare che lo standard qualitativo è soddisfatto il supervisore dovrà, quando opportuno:*

- *controllare la qualità dei dati. Questa fase dovrà essere chiave nel processo di supervisione; la cattiva qualità dei dati può incrementare significativamente l'errore di stima dei metodi statistici;*
- *controllare l'applicabilità e la rilevanza dei metodi statistici;*
- *esaminare altre giustificazioni attuariali o tecniche (stima di inventario, ecc.);*
- *giudicare se il livello di prudenza ritenuto dall'impresa sia in linea con lo standard qualitativo.”*

Inoltre, raccomanda *“il principio di uno standard quantitativo generale dovrebbe essere completato da un set di requisiti minimi sull'impiego di metodi statistici, inclusa la richiesta (ove praticabile) di applicare almeno due differenti approcci statistici nella riservazione”*.

L'obiettivo è quindi quello di regolare la soggettività del processo di riservazione, rendendo più trasparenti metodi, algoritmi di calcolo e ipotesi di valutazione a vantaggio degli *stakeholders*.

Il nuovo sistema di calcolo delle riserve tecniche proposto dal CEIOPS si muove proprio in questa direzione, infatti si distinguono le due componenti: *best estimate* e *risk margin*.

## 2.4 Best estimate e risk margin

La Commissione Europea, nell'ambito del progetto Solvency II, ha invitato il CEIPOS ad esplicitare quantitativamente, attraverso *standard* comuni, il principio generale di prudenza contenuto nelle direttive, al fine di promuovere un approccio più armonizzato per il livello di prudenza da includere nelle riserve tecniche.

Come accennato il nuovo standard sarà definito dalle due componenti *best estimate* più un *risk margin* volto ad esplicitare il livello di incertezza dei cash-flow futuri.

D'altronde mentre la definizione del concetto di *best estimate* ( $\bar{L}$ ), in linea con i principi attuariali di valutazione, come aspettativa  $E(L)$  della distribuzione di probabilità dei futuri cash-flow è diffusamente accettata<sup>18</sup>, per la definizione di *risk margin* è in corso un dibattito.

E' opinione comune intendere quest'ultima quantità quale opportuno *Risk Loading* (margine prudenziale) dipendente dalla variabilità del processo di liquidazione futuro dei sinistri volto a "compensare" l'incertezza che grava sugli importi futuri delle prestazioni, ovvero, secondo un'impostazione coerente con la *valutazione a fair value*, il premio al rischio che un altro assicuratore richiederebbe, in una libera trattativa di mercato, per rilevare gli impegni in-essere nel portafoglio considerato.

---

<sup>18</sup> In alcuni casi  $\hat{L}$  è stata proposta anche come mediana della distribuzione.

Il dibattito sulla definizione quantitativa del *risk margin* si basa principalmente su due approcci: il *quantile approach* e il *cost-of-capital approach*.

Secondo il *quantile approach*, proposto originariamente dalla Commissione secondo l'impostazione della Vigilanza Australiana, il *risk margin* è definito come la distanza tra la *best estimate* ed il percentile della distribuzione della riserva scelto ad un prefissato livello di probabilità, tipicamente uguale al 75-esimo o al 90-esimo percentile.

In base al secondo approccio, sostenuto dal CRO Forum<sup>19</sup> il *risk margin* è dato dal costo del patrimonio di vigilanza (*reserve risk capital*) richiesto dalla normativa per coprire il rischio di insolvenza fino all'estinzione completa della riserva sinistri. Esso è pari alla sommatoria dei valori attuali derivanti dal costo per il premio a rischio (differenza tra il tasso di remunerazione richiesto dall'azionista e quello di investimento *risk-free*), moltiplicato per i rispettivi capitali di solvibilità annuali fino ad estinzione delle passività.

Utilizzando quest'ultimo approccio, il *risk margin* restituisce generalmente un requisito più contenuto di quello ottenuto attraverso il *quantile approach*.

Per fissare il *risk margin* come costo del capitale è necessario definire il capitale da considerare ai fini del calcolo; a riguardo, tenendo conto che la riserva sinistri, pur includendo il *risk margin*, può risultare a fine anno insufficiente a coprire un'inattesa perdita sui pagamenti, all'assicuratore viene richiesta, oltre al *risk margin*, anche una disponibilità di capitale di vigilanza (*reserve risk capital*).

Per determinarne l'ammontare viene selezionato un valore particolarmente pessimistico del fabbisogno di riserva (*Worst case*) con orizzonte temporale di un anno, determinato in base ad un livello prefissato (elevato) di probabilità. Il patrimonio di

---

<sup>19</sup> CRO Forum 2006; il Chief of Risk Officer Forum raggruppa 13 primari gruppi assicurativi europei, tra cui Generali e Allianz.

vigilanza che l'impresa deve detenere a fronte del rischio di insufficienza è dato allora dalla differenza tra il *Worst case* e la riserva richiesta (*best estimate* più *risk margin*).

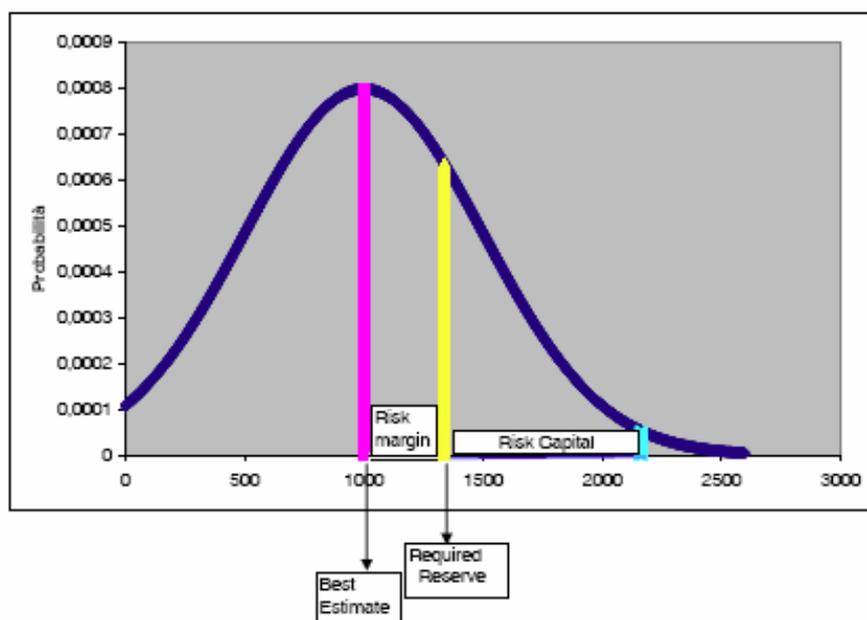


Figura 4: Scomposizione della Required Reserve.

La misura del *risk capital* dipende quindi dalla misura del rischio utilizzata come *Worst case* (*Value at Risk*, *Expected Shortfall*, ecc.) e dal livello di confidenza prescelto.

Per una precisa individuazione delle grandezze definite in precedenza, in questo contesto, l'Isvap, in collaborazione con i professori De Felice e Moriconi, ha svolto uno studio: "I metodi stocastici per la misura della riserva sinistri: un approccio al comparto auto italiano"<sup>20</sup>.

<sup>20</sup> Si tratta di uno lavoro condotto da un gruppo di studio dell'ISVAP – coordinato da Lino Matarazzo e formato da Stefano Cavastracci e Stefano Pasqualini – con la supervisione scientifica dei professori Massimo De Felice e Franco Moriconi.

Il suddetto studio ha comportato, tra l'altro, la risoluzione di delicate questioni teoriche e metodologiche aventi significative implicazioni operative nei calcoli del *risk margin* e del *reserve risk capital*, quali, ad esempio:

- un approccio stocasticamente corretto, ai fini del calcolo del *reserve risk capital*, per ricavare, all'epoca di valutazione della riserva, la distribuzione sia dei pagamenti per sinistri, sia dell'aspettativa di riserva (residua) nell'esercizio successivo (entrambe variabili casuali costituenti l'impegno di "primo anno" dell'assicuratore);
- la determinazione della quota di *risk margin* da sottrarre al *worst case* nel calcolo del *risk capital* di primo anno, per evitare il doppio conteggio di capitale, nel caso di passaggio da una distribuzione di probabilità *risk adjusted* a quella naturale, dovuto all'assenza di un mercato di riferimento per le *liability* danni;
- la soluzione, nel caso del *risk margin* determinato come *cost of capital*, del problema della cosiddetta *circularità* della definizione;
- il controllo, nel caso del *discounting*, della sub-additività dei *risk margin* dovuta all'effetto di diversificazione (la somma dei *risk margin* delle singole generazioni sinistri è superiore al *risk margin* della somma delle stesse, dopo la diversificazione); proprietà che può comportare effetti distorsivi nei calcoli dei valori attualizzati (si può avere, ad esempio, il caso "paradossale" di una riserva scontata – ma non diversificata – di importo superiore a quella non scontata diversificata).

L'inosservanza o la sottovalutazione di tali aspetti può condurre all'applicazione di tecniche di calcolo approssimative con riflessi negativi sugli stessi livelli di prudenzialità richiesti da *Solvency II* (es. *risk margin* o *risk capital* inferiori a quelli correttamente calcolati). Pertanto, durante il lavoro, gli studiosi hanno ritenuto necessario esplorare varie opzioni di calcolo sviluppando diverse soluzioni, sia esatte

sia approssimate, per il calcolo del *reserve risk capital* e del *risk margin*, operando nell'ambito di un *framework* di riferimento originato da un'impostazione finanziaria del problema coerentemente con il principio della *fair valuation*.

## ***2.5 Le metodologie di “riservazione” stocastiche e deterministiche: similarità e differenze***

Prima di addentrarci nella descrizione della tecnica deterministica del *chain ladder* e di alcuni modelli stocastici come l'Over-Dispersed Poisson Model e il metodo di Mack, in tale paragrafo si cerca di dare una visione sintetica ma globale delle principali caratteristiche e differenze delle metodologie di riservazione deterministiche e stocastiche.

Un decisivo impulso all'impiego delle metodologie stocastiche, in generale, si è avuto negli ultimi anni grazie all'ingresso nella finanza d'impresa delle tecniche della finanza dei mercati e della connessa modellizzazione stocastica; si è assistito di conseguenza ad un ricorso sempre più frequente a tecniche di *Asset Liability Management* da parte delle imprese per il monitoraggio e la misurazione dei diversi rischi, principalmente rischi di mercato, credito e operativo, ai fini della quantificazione dei capitali necessari alla loro copertura (*risk capital*).

Le metodologie di tipo stocastico, a fronte di una minore maneggevolezza dal punto di vista operativo, hanno il vantaggio di offrire, in aggiunta alla stima puntuale della riserva, *best estimate*, degli intervalli di variazione della stessa secondo dati livelli di probabilità.

Tale tipo di metodologia, pur considerati i punti di forza, come la rigosità dell'algorithm, e di debolezza, come la selezione dell'appropriata distribuzione per un

determinato ramo, ha, rispetto alle valutazioni di variabilità ricavate dai metodi tradizionali, il vantaggio di essere basata su ipotesi statistiche esplicite e coerenti e di ridurre al minimo gli aggiustamenti ad hoc e le valutazioni discrezionali.

Inoltre, i modelli stocastici sono oggetto di critica in quanto a volte su di essi si fanno ipotesi troppo semplicistiche oltre alla difficoltà di calcolo che richiede una loro attuazione. Nonostante ciò, i modelli stocastici risultano molto utili in quanto riescono a superare i metodi deterministici lì dove quest'ultimi falliscono e la loro utilità sta proprio nel fatto di fornire ulteriori informazioni alla compagnia, rispetto agli altri metodi, non solo relativamente al processo di costituzione della riserva ma anche nella sua gestione complessiva.

Mediante questi modelli è sempre possibile pervenire ad una stima dei momenti di primo ordine (media) e di secondo ordine (varianza) della distribuzione della riserva .

D'altra parte, a differenza dei metodi di tipo stocastico, i metodi deterministici forniscono una stima puntuale del valore della riserva, ma ciò non basta in quanto in essa è presente comunque una certa forma di variabilità per cui sembra meglio avere sì un valore puntuale ma che abbia un intervallo entro cui oscillare; è quindi necessario trovare una distribuzione di probabilità il cui valore medio è la cosiddetta *best estimate*, attorno a cui poi si prenderà un intervallo di confidenza entro il quale la riserva può oscillare.

Per favorire il raccordo con la *best practice* molti dei metodi stocastici per le riserve sono stati costruiti estendendo le tradizionali tecniche deterministiche nell'ottica di una rappresentazione probabilistica dei risultati.

Lo sviluppo e l'uso di metodi di questo tipo è ora in forte crescita, in particolare, sin dagli anni '80 è stato avviato lo studio di estensioni stocastiche della tecnica deterministica *chain-ladder* ed in particolare, si è svolto un approfondito dibattito scientifico su quale tra le metodologie introdotte possa essere correttamente considerata un'estensione dell'approccio tradizionale.

In questo ambito due modelli stocastici, che verranno descritti di seguito, riscuotono attualmente una particolare attenzione, sia nell'aspetto scientifico sia nelle applicazioni operative.

Si tratta del:

- modello di Mack detto “*Distribution-Free Chain-Ladder*” (DFCL), proposto dallo stesso Mack nel 1993, che non prevede ipotesi specifiche sulla distribuzione dei pagamenti futuri, limitandosi a modellarne la media e la varianza;
- Over-Dispersed Poisson Model (ODP), introdotto da Renshaw e Verrall nel 1998, che appartiene alla classe dei Modelli Lineari Generalizzati, o GLM, e ipotizza per i pagamenti dei sinistri una distribuzione di Poisson sovradispersa.

Tuttavia, per il secondo modello, è possibile ottenere la distribuzione completa di probabilità attraverso una tecnica di simulazione di tipo *bootstrap* applicata ai residui. E' quindi possibile ricavare le statistiche di interesse, come quantili o percentili, senza ipotesi aggiuntive ad *hoc* sulla distribuzione sottostante.

Il modello di Mack, invece, è stato recentemente impiegato in Germania e Portogallo in uno studio sui rispettivi mercati nazionali RCA; essendo l'approccio *distribution-free*, i quantili sono stati calcolati facendo un'ipotesi aggiuntiva sulla forma della distribuzione di probabilità, che è stata scelta di tipo log-normale, con media e varianza uguali a quelle prodotte dall'applicazione del modello.

Prima di introdurre i metodi di tipo stocastico, nel seguente paragrafo si procede alla descrizione dello schema generale di partenza per la base dati, il cosiddetto triangolo *run-off*.

## 2.6 Il run-off

L'analisi del flusso informativo dei sinistri organizzato per generazione (di denuncia o avvenimento), e anno di sviluppo fa riferimento al tipico schema triangolare *run-off*, idoneo a contenere qualunque tipo di informazione sui sinistri.

Inoltre, le informazioni utilizzate nei *run-off* per stimare il valore della riserva sinistri fanno generalmente riferimento al database dell'impresa di assicurazione, anche se a volte si ricorre a statistiche di settore.

L'elemento generico del *run-off*, il cui schema è rappresentato in figura 5,  $\mathbf{X}_{i,j}$ , che può incorporare informazioni diverse relative al sinistro, si riferisce:

- alla generazione *i-esima*
- dopo *j* anni di differimento
- nell'anno di bilancio  $i+j$ , con  $\{i=0, \dots, t\}$  e  $\{j=0, \dots, t-i\}$

dove l'inserimento del generico elemento  $x_{i,j}$  può avvenire in due forme:

- forma incrementale;
- forma cumulata.

Come mostrato in figura, in generale nelle assicurazioni danni, per valutare alla chiusura dell'anno di bilancio gli accantonamenti per sinistri ancora da liquidare, generati da un portafoglio di contratti, si fa riferimento al triangolo dei risarcimenti effettuati nel passato aggiornato alla data corrente di valutazione.

		Anni di sviluppo						
		0	....	j	....	....	....	k
Generazioni	0	$X_{0,0}$		$X_{0,j}$				$X_{0,k}$
	....							
	i	$X_{i,0}$	....	$X_{i,j}$	....	$X_{i,k-i}$		
	....							
	....							
	....							
	....							
	k	$X_{k,0}$						

Figura 5: Schema generale di rappresentazione dei dati.

Si assume che le osservazioni riguardanti i pagamenti effettuati siano riferite ai sinistri avvenuti in un limitato periodo precedente ( $n$ ) e pertanto, in questo schema, risultano disponibili gli importi pagati degli antecedenti  $n$  *anni di avvenimento* o *generazioni di sinistro*. Per ciascuna generazione, inoltre, si suddividono i dati per l'anno di sviluppo che misura l'anzianità di pagamento del sinistro<sup>21</sup>.

Inoltre, per una semplice lettura di riga del triangolo si analizza il comportamento dell'impresa relativamente alla generica generazione *i-esima* nei vari anni di sviluppo, una lettura di colonna fa riferimento al comportamento dell'impresa relativamente al generico anno di sviluppo *j-esimo* per le diverse generazioni. Infine, sulla diagonale del triangolo è possibile leggere il comportamento dell'impresa

<sup>21</sup> Se la generazione più vecchia non risulta completamente estinta ed esiste ancora una coda di riserva per sinistri non pagati all'*n*-esimo anno, per prolungare i tempi di liquidazione si può far ricorso a numerose tecniche, che selezionano il cosiddetto "*tail-factor*".

relativamente al generico anno di bilancio *i+j-esimo* con  $i + j = t$  coincidente con l'epoca di valutazione.

Ai fini della valutazione si devono stimare, sulla base dei risarcimenti passati, gli elementi incogniti alla data corrente (pagamenti da effettuare nel futuro), collocati nel triangolo inferiore. La somma dei dati riferiti a tale triangolo inferiore equivale alla stima della riserva sinistri (non scontata).

## ***2.7 Valutazione della riserva sinistri***

Con riferimento al decreto di attuazione, le imprese devono costituire alla fine di ogni esercizio la riserva sinistri, aggregato economico rappresentativo delle somme che, da una prudente valutazione effettuata in base ad elementi obiettivi, sono necessarie per far fronte al pagamento dei sinistri avvenuti nell'esercizio stesso o in quelli precedenti, e non ancora pagati, e alle relative spese di liquidazione.

Per avere un'idea dei cambiamenti apportati dal decreto di attuazione, rispetto alla normativa precedente, nella tabella sottostante sono riportate le variazioni introdotte dal decreto stesso.

Per quanto riguarda i metodi e/o modelli di calcolo della riserva sinistri nei successivi paragrafi si fornirà una descrizione del metodo deterministico del *chain ladder* e di due modelli stocastici l'*Over Dispersed Poisson Model* ed il modello di Mack.

	<i>Normativa antecedente</i>		<i>Decreto di attuazione</i>	
	Sinistri avvenuti e non ancora liquidati	Sinistri avvenuti e non ancora denunciati	Sinistri avvenuti e non ancora liquidati	Sinistri avvenuti e non ancora denunciati
<i>Importo di riferimento</i>	Somme relative al pagamento dei sinistri dell'esercizio o dei precedenti e relative spese di liquidazione	Somme relative al pagamento dei sinistri dell'esercizio e relative spese di liquidazione	Somme relative al pagamento dei sinistri dell'esercizio o dei precedenti e relative spese di liquidazione	Somme relative al pagamento dei sinistri dell'esercizio e relative spese di liquidazione
<i>Tipo di valutazione</i>	Non specificato		Per tutti i rami: valutazione a costo ultimo Per la rcauto: valutazione a costo ultimo, con possibilità di deduzione dei proventi da investimento	
<i>Metodo di valutazione</i>	Metodo non specificato rispondente a criteri di prudenza ed obiettività	Criterio fissato con provvedimento o ISVAP del 12 luglio 1995 n°29	<u>Metodo base</u> : calcolo analitico separatamente per ciascun sinistro. <u>Metodo statistico</u> : criterio del costo medio per gruppi di sinistri omogenei numerosi, con eccezione dei rami credito e cauzione.	Criterio fissato con provvedimento ISVAP del 12 luglio 1995 n°29

**Tabella 2: Confronto tra la normativa precedente ed il decreto di attuazione per la definizione di criteri di valutazione della riserva sinistri.**

## 2.8 Il metodo del chain ladder

Il metodo tradizionale del *chain ladder*, le cui origini non sono note, è la tecnica di valutazione della riserva sinistri più comunemente adottata grazie alla sua semplicità applicativa ed all'assenza di ipotesi sulla distribuzione dei dati di partenza.

Il *chain ladder* che utilizza come base dati il triangolo *run-off* contenente gli importi cumulati dei sinistri, si basa sull'ipotesi di trend lineare in ogni colonna del rapporto tra le cumulate del costo del pagato. In altre parole si ipotizza che la distribuzione dei pagamenti dei sinistri nei vari anni di sviluppo rimanga costante al variare della generazione.

Il metodo, detto anche metodo della catena, consiste nel determinare tanti fattori di sviluppo quanti sono gli anni di sviluppo meno uno, rapportando il totale dei pagamenti di ogni singola colonna a quello della colonna precedente.

In termini di formule si ha:

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=0}^{k-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{k-j-1} C_{i,j}} \quad \text{con } j = 0, \dots, k-1$$

Dove  $S_{i,j}$  rappresentano i sinistri pagati cumulati, espressi dalla seguente

relazione  $S_{i,j} = \sum_{h=0}^j C_{i,h}$ , e sono definiti come somma dei pagamenti incrementali  $C_{i,j}$ ,

con il generico elemento  $C_{i,j}$  rappresentante gli importi pagati, denominati incrementali, relativi ai sinistri avvenuti nell'anno  $i$  e pagati in  $j$  con  $i = 0, 1, \dots, k$  e  $j = 0, 1, \dots, k-i$ .

Inoltre, si ipotizza che i fattori di sviluppo rimangano inalterati anche per il futuro e quindi, applicandoli agli importi cumulati liquidati dei sinistri dell'ultimo anno di bilancio, consentiranno di determinare, per ogni generazione, i futuri importi cumulati dei sinistri.

Quindi per  $S_{i,j}$  si applica la formula:

$$S_{i,j} = S_{i,k-i} \prod_{h=k-i}^{k-1} \hat{\lambda}_h, \quad i = 1, \dots, k$$

L'ultimo pagamento cumulato di ogni generazione rappresenterà poi il costo totale stimato dei sinistri, allora, la differenza tra tale importo con il corrispondente anno di bilancio fornirà la riserva per quella generazione.

La somma di tutte queste differenze, per ogni generazione, fornirà l'importo totale stimato della riserva sinistri, espresso dalla seguente formula:

$$\sum_{i=1}^k S_{i,k-1} \left( \prod_{j=k-i}^{k-1} \hat{\lambda}_j - 1 \right).$$

Per avere un quadro generale di tutti i passaggi sopra descritti si riporta il triangolo di run-off degli importi stimati, cumulati, dei sinistri pagati e della riserva sinistri.

		Anno di sviluppo ( $j$ )							Riserva
		0	1	2	....	....	k-1	k	
Anno di generazione ( $i$ )	0	.	.	.	.	.	.	$S_{0,k}$	0
	1	.	.	.	.	.	$S_{1,k-1}$	$S_{1,k-1}\hat{\lambda}_{k-1}$	$S_{1,k-1}\hat{\lambda}_{k-1} - S_{1,k-1}$
	....	.	.	.	.	.	.	.	.
	....	.	.	.	.	.	.	.	.
	k-1	.	$S_{k-1,1}$	.	.	.	.	$S_{k-1,1}\prod_{j=1}^{k-1}\hat{\lambda}_j$	$S_{k-1,1}\prod_{j=1}^{k-1}\hat{\lambda}_j - S_{k-1,1}$
	k	$S_{k,0}$	.	.	.	.	.	$S_{k,0}\prod_{j=0}^{k-1}\hat{\lambda}_j$	$S_{k,0}\prod_{j=0}^{k-1}\hat{\lambda}_j - S_{k,0}$
	Riserva sinistri totale = $\sum_{i=1}^k S_{i,k-1} \left( \prod_{j=k-i}^{k-1} \hat{\lambda}_j - 1 \right)$								

Figura 6: Triangolo di run-off degli importi stimati, cumulati, dei sinistri pagati e riserva sinistri.

Tale metodologia di valutazione della riserva sinistri è limitata a portafogli di grandi dimensioni che garantiscono maggiore stabilità e meno errori casuali.

In letteratura diverse sono le modifiche a questo metodo per eliminare o attenuare l'influenza di eventuali effetti perturbativi dell'ipotesi di costanza della progressione dei pagamenti cumulati (inflazione, mutamenti nella politica liquidativa da parte dell'impresa, effetti dell'orientamento della magistratura in tema di risarcimento, ecc.). Solitamente la manipolazione soggettiva, più o meno giustificata, dell'attuario avviene con l'esclusione di alcuni dati storici del triangolo.

In più tale metodo si presta a molte varianti tra cui quelle che considerano:

- ❖ il rapporto tra le cumulate dei costi medi teorico calcolato come media ponderata dei rapporti osservati con pesi dipendenti dall'indice della generazione e dell'antidurata;
- ❖ il rapporto tra le cumulate dei costi medi teorici calcolato come media ponderata dei rapporti osservati con pesi pari alle cumulate dei costi medi stessi;
- ❖ la perequazione esponenziale di ogni colonna del rapporto tra le cumulate dei costi medi.

Nel corso del tempo sono state utilizzate diverse tecniche statistiche per la determinazione della riserva sinistri ed alcune di esse hanno dato risultati diversi da quelli ottenuti attraverso il tradizionale chain ladder.

Sostanzialmente si è visto che il metodo della catena consente di ottenere previsione tramite l'utilizzo di fattori che legano ogni colonna con quella successiva fino ad ottenere una stima puntuale dell'ultimo esborso.

Prima di proseguire con l'analisi dei due modelli stocastici oggetto del lavoro, si propone una suddivisione generale dei modelli stocastici ed i principali studi in letteratura.

## ***2.9 Una classificazione generale dei modelli stocastici***

In via generale se si considera la classificazione generale dei modelli stocastici di England e Verrall, che possono avere strutture di tipo *chain ladder* o alternative, si individuano due rami:

- Modelli “Non-ricorsivi”
- Modelli “Ricorsivi”

Al primo gruppo appartengono il modello di Poisson con sovradisersione, il modello Log-normale e Gamma; il secondo gruppo include il modello della Binomiale Negativa, il modello Normale, inteso come approssimazione della Binomiale Negativa ed infine il modello di Mack.

Per il modello di Poisson con sovradisersione con struttura di tipo *chain-ladder* la trattazione più completa è rintracciabile, insieme al modello Gamma, in Renshaw and Verrall 1998 “*A stochastic model underlying the chain-ladder technique*”. In questo articolo si dimostra come la *best estimate* del modello di Poisson con sovradisersione riproduce le stime del *chain-ladder* tradizionale.

Per quanto riguarda le strutture alternative al *chain-ladder*, tipo la *Hoerl Curve*, una trattazione esauriente la si può trovare in “*A flexible framework for stochastic claims reserving*”<sup>22</sup> dove si afferma che è possibile utilizzare con questi modelli serie storiche incomplete per generazione che sono il frutto del passaggio di classificazione dei sinistri da anno di denuncia ad anno di avvenimento.

Infine per il modello di Mack, uno dei primi ad essere implementati, si fa riferimento all’articolo del 1993 di Thomas Mack “*Distribution-free calculation of the standard error of chain-ladder reserve estimates*”.

Tuttavia si osserva che tali modelli hanno l’handicap di fornire una misura del valore atteso ed un indice di variabilità - Mean Square Error of Prediction (MSEP) - ma non la distribuzione della variabile aleatoria riserva sinistri e questo è un limite in virtù dei principi del progetto Solvency II.

---

<sup>22</sup> England e Verrall, PCAS 2001.

## ***2.10 I metodi stocastici***

Sebbene l'ultimo ventesimo secolo ha testimoniato l'aumento di interesse nell'ambito dei metodi stocastici per la valutazione della riserva sinistri, questi sono ancora poco utilizzati da un limitato numero di professionisti.

I motivi di ciò sono diversi: una generale mancanza di conoscenza di questi metodi, la mancanza di flessibilità nei metodi stessi, la mancanza di software adatti, ed altri ancora. Comunque la ragione principale è probabilmente la mancanza di necessità di questi metodi, dal momento che i metodi tradizionali sono sufficienti per il calcolo di una *best estimate* della riserva sinistri.

Gran parte degli studi della letteratura riguardano le metodologie di riservazione, ed alcuni di essi sono connessi con gli aspetti legati al *business* ed al *management*. In particolare il lavoro di Taylor (2000) fornisce un'utile sintesi delle tecniche deterministiche di riservazione insieme ai metodi stocastici e a risultati pratici.

Tuttavia diversi sono gli studiosi che hanno investigato sulla base statistica della tecnica del *chain-ladder* a partire dal 1982 con Kramer, Taylor e Ashe, Renshaw, intorno agli anni novanta con Verrall, Mack, Murphy, Schmidt e Schnaus, Renshaw e Verrall, Barnett e Zehnwirth, fino al 2000-2001 con Mack e Venter, e England e Verrall.

Lo scopo di tutti i modelli è proprio quello di dare la stessa stima della riserva sinistri fornita dalla tecnica del *chain-ladder*, considerando che le differenze tra di essi riguardano per di più l'implementazione. Tra i diversi modelli si ricorda quello della Binomiale Negativa, derivante dal modello di Poisson a cui è strettamente connesso ma che presenta una diversa parametrizzazione.

Dal modello della Binomiale Negativa si giunge a quello della Normale inteso come sua approssimazione; quest'ultimo modello ha il vantaggio di produrre stime per un ampio intervallo di dati e risulta essere meno affetto dalla presenza di valori negativi.

Inoltre Murphy, nel 1994, ha considerato la tecnica del *chain-ladder* nell'ambito di una regressione lineare Normale e diverse estensioni a riguardo sono state suggerite da Barnett e Zehnwirth successivamente, nel 1998.

Nello stesso anno Renshaw e Verrall non sono stati i primi ad individuare il legame tra il tradizionale *chain-ladder* e la distribuzione di Poisson, ma sono stati i primi ad implementare il modello usando metodologie standard ed ad individuare un legame con l'analisi delle tabelle di contingenza.

Nel 1990 Wright ha descritto un modello simile includendo un termine per modellizzare l'inflazione dei sinistri ma senza fornire dettagli sul modello considerato.

Mack nel 1991 ha invece notato che le stime del tradizionale *chain-ladder* potevano essere ottenute massimizzando la funzione di verosimiglianza di Poisson ricorrendo al cosiddetto metodo dei totali marginali. Ulteriori contributi in materia di metodi stocastici possono essere trovate in Mack (1994), Verrall (2000), Mack e Venter (2000) e Verrall e England (2000).

Il punto centrale della discussione è la relazione tra i diversi modelli e se questi possono essere giustificatamente usati per aggiungere valore alla tecnica deterministica del *chain-ladder*.

Tra tutti i modelli sopra elencati, nei prossimi due paragrafi ci si occuperà della descrizione del modello ODP e del modello di Mack.

### **2.10.1 Il modello ODP**

Il modello di Poisson con sovradisersione, proposto da Renshaw e Verrall nel 1998, differisce dalla distribuzione di Poisson per il fatto che la varianza non è uguale alla media ma è proporzionale ad essa attraverso un ulteriore parametro che determina la sovradisersione del modello.

L'ipotesi alla base del modello prevede l'indipendenza tra i pagamenti incrementali con media e varianza espresse rispettivamente dalle seguenti relazioni:

$$E[C_{ij}] = m_{ij} = x_i y_j \text{ e } \sigma(C_{ij}) = \phi m_{ij} = \phi x_i y_j$$

dove  $\phi$  è il parametro di sovradisersione.

La media è ottenuta come prodotto di un "parametro riga" e di un "parametro colonna" mentre la varianza, come detto prima è proporzionale alla media.

In questa formulazione, quindi, la media ha una struttura moltiplicativa dove i "parametri di riga" e i "parametri colonna" hanno un'interpretazione specifica; dove in particolare  $x_i$  rappresenta i sinistri attesi ultimi, dove ultimi è da intendersi nel senso di anno di sviluppo osservato nel triangolo e  $y_j$  è la parte di sinistri ultimi di ciascun anno di sviluppo

E' stato dimostrato che, con alcune appropriate condizioni addizionali, sotto le ipotesi del modello ODP, gli stimatori di massima verosimiglianza dei fattori di sviluppo individuali coincidono con gli stimatori del *chain-ladder* tradizionale. In tal senso, il modello di Poisson con sovradisersione può essere considerato un'estensione stocastica del metodo classico.

Il modello considerato può alternativamente essere formulato come un modello lineare generalizzato (*Generalized Linear Model*), in cui la variabile risposta, il "pagato" è individuata da una *funzione di collegamento* di tipo logaritmico con le variabili esplicative, come l'anno di avvenimento e l'anno di anzianità.

Adottando le formule, la riparametrizzazione prevista in tal caso, è la seguente:

$$\log(m_{ij}) = \mu_{ij} \text{ dove } \mu_{ij} = \alpha_i + \beta_j + c$$

da cui le stime dei pagamenti futuri sono:  $\hat{C}_{ij} = \hat{m}_{ij} = e^{\hat{\mu}_{ij}}$

In tale forma il modello può essere facilmente stimato mediante specifiche procedure numeriche che forniscono gli stimatori e le corrispondenti varianze dei parametri delle variabili esplicative.

Esistono vantaggi e svantaggi nel considerare il modello espresso attraverso questa forma. Uno dei vantaggi è rappresentato dalla facilità di stima attraverso opportuni software, allora le stime potrebbero ben funzionare ma uno degli svantaggi è che i valori dei parametri sono di difficile interpretazione.

Un ulteriore vantaggio importante del modello di Renshaw e Verrall è che la teoria associata ai modelli lineari generalizzati, suggerisce come possono essere ottenute le stime dei parametri, appropriate definizioni dei residui e le relative misure della bontà di adattamento del modello ai dati effettivi, anche nel caso di osservazioni storiche incomplete.

Al fine di ottenere una distribuzione completa, il modello può essere applicato con una procedura simulativa, ricavando la variabilità della stima con metodi *bootstrapping* che consistono nel generare, dai dati effettivamente osservati, un campione molto ampio di *pseudo-dati* ottenuti per simulazione. Si tratta di una tecnica potente ed allo stesso tempo semplice, applicata per ottenere una serie di informazioni da un campione di dati in alternativa all'utilizzo di tecniche analitiche.

La generazione degli *pseudo-dati* adeguata al modello ODP è ottenuta tramite un algoritmo, che è stato sistematizzato da vari lavori scientifici nell'ultimo decennio, e che è basato sul "rimiscolamento", dei residui ricavati dai valori storici attraverso il metodo *chain-ladder* usato a ritroso.

La volatilità relativa alla varianza del processo è generata aggiungendo alla proiezione dei pagati incrementali, ricavata da ogni "pseudo-triangolo" con il metodo del *chain-ladder*, un errore casuale, campionato da una distribuzione ODP (approssimata).

Il processo simulativo, allora, fornisce una distribuzione empirica per ciascun pagamento incrementale del triangolo futuro, pertanto, la distribuzione empirica previsiva delle riserve di generazione, di anno di bilancio e globale è immediatamente ottenuta aggregando i pagamenti simulati rispettivamente per riga, diagonale o sull'intero triangolo futuro.

In particolare, la metodologia permette di ricavare la stima centrale, *best estimate*, come media aritmetica, il coefficiente di variazione<sup>23</sup> ed il *risk margin*, calcolato, ad esempio, come 75-esimo percentile.

Infine, se usato come modello lineare generalizzato, il modello ODP fornisce, come il modello di Mack, solo i momenti di primo e secondo ordine, come medie, varianze e covarianze, delle riserve.

Sempre nell'ambito del modello ODP, England e Verrall, nella loro monografia, hanno dimostrato che la varianza di previsione è approssimata dalla seguente formula:

$$P \text{ var}(\hat{C}_{ij}) = \phi \hat{C}_{ij} + \hat{m}_{ij}^2 \text{ var}(\hat{\mu}_{ij})$$

Per determinare la varianza della previsione delle riserve di generazione e della riserva globale è necessario introdurre i termini di covarianza, espressi dalla seguente relazione:

$$\text{Cov}(\hat{C}_{i_1 j_1}, \hat{C}_{i_2 j_2}) = \hat{m}_{i_1 j_1} \hat{m}_{i_2 j_2} \text{ var}(\hat{\mu}_{i_1 j_1}, \hat{\mu}_{i_2 j_2})$$

Solitamente questi termini possono essere indirettamente calcolati se la matrice di covarianza dei parametri stimati è disponibile nei pacchetti software usati per la stima dei modelli lineari generalizzati.

---

<sup>23</sup> Rapporto tra deviazione standard e *best estimate*.

### 2.10.2 Il modello di Mack

Uno dei primi modelli stocastici che riproduce le stime del metodo della catena è il modello di Mack<sup>24</sup> o *DFCL - Distribution Free Chain-Ladder*. Il seguente paragrafo ha lo scopo di fornire le principali indicazioni del modello considerato lasciando ampio spazio alla parte formalistica e pratica nel terzo ed ultimo capitolo.

L'assunzione alla base del modello *DFCL* riguarda l'assenza di specifiche ipotesi sulla distribuzione dei pagamenti futuri, in più il modello prevede ulteriori assunzioni limitate relativamente alla distribuzione dei dati, specificando semplicemente soltanto i primi due momenti dell'intera distribuzione (media e varianza).

Due sono le ipotesi principali:

- 1) I pagamenti delle diverse generazioni sono indipendenti;
- 2) La media e la varianza dei pagamenti cumulati condizionate all'osservazione dei pagamenti cumulati nell'anno di sviluppo immediatamente precedente, sono proporzionali agli stessi.

Trattandosi di un modello, come dice stesso l'acronimo *DFCL*, a distribuzione libera, sono necessarie ipotesi aggiuntive se si richiedono requisiti di riserva basati su statistiche ulteriori, come i quantili.

Per quanto riguarda i fattori di proporzionalità, essi rappresentano i parametri caratteristici del modello e vanno stimati sulla base dei dati osservati. Inoltre, si è dimostrato che gli stimatori dei fattori di sviluppo sono identici a quelli ottenuti attraverso il metodo del *chain-ladder* per cui, la *best estimate* della riserva, sarà identica a quella prodotta dal metodo deterministico.

Indicando con  $D_{i,j}$  e  $C_{i,j}$ , rispettivamente l'importo sinistri pagati incrementali corrispondente all'ammontare annuo dei sinistri della generazione *i-esima* nel *j-esimo*

---

<sup>24</sup> Mack 1993.

anno di sviluppo e l'importo sinistri pagati cumulati corrispondente all'ammontare cumulato dei pagamenti per sinistri della generazione  $i$ -esima fino al  $j$ -esimo anno di sviluppo, si perviene alla seguente formulazione:

$$C_{i,j} = C_{i,j-1} + D_{i,j} = \sum_{K=1}^j D_{i,K}$$

con media e varianza espresse rispettivamente dalle seguenti relazioni

$$E[C_{i,j} / C_{i,j-1}] = \lambda_{j-1} C_{i,j-1} \quad \text{e} \quad \text{Var}[C_{i,j} / C_{i,j-1}] = \alpha_{j-1}^2 C_{i,j-1}$$

dove  $\lambda_j$  sono i parametri incogniti relativi agli anni di sviluppo  $j = 1, 2, \dots, n-1$ .

Mack ha visto che il generico  $\lambda_j$ , fattore proporzionale alla media, è esattamente pari alla somma dei risarcimenti cumulati (per colonna). In particolare, il suo valore è stato ottenuto attraverso il metodo della massima-verosimiglianza, dando così luogo a stime di varianza in cui compaiono i risarcimenti cumulati.

La stima di  $\hat{\lambda}$  è stata ottenuta rapportando il totale dei pagamenti di ogni singola

colonna a quello della colonna precedente: 
$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}},$$

con 
$$\hat{\alpha}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \left[ \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{\lambda}_j \right]^2$$
 per  $j=1, \dots, n-2$  
$$\hat{\alpha}_{l-1}^2 = \min \left\{ \frac{\hat{\alpha}_{l-2}^4}{\hat{\alpha}_{l-3}^2}, \min(\hat{\alpha}_{l-3}^2, \hat{\alpha}_{l-2}^2) \right\}$$

per  $j=n-1$ .

In tal modo il parametro di stima della media è uguale a quello ottenuto nel metodo deterministico del *chain-ladder* a meno di errori di approssimazione.

Per quanto riguarda le componenti di varianza, queste non vengono utilizzate per la stima dei fattori di sviluppo,  $\hat{\lambda}_j$ , ma sono richieste nella definizione dell'errore di previsione per i pagamenti futuri.

Una seconda possibilità di stima per  $\lambda$ , espressa dalla seguente formula,

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} w_{i,j} f_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} w_{i,j}}$$

è ottenuta considerando la media ponderata con pesi pari ai singoli risarcimenti cumulati;

$$\text{con } w_{i,j} = C_{i,j-1} \text{ e } \hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j} \sum w_{i,j} [f_{i,j} - \hat{\lambda}_j]^2$$

e dove i fattori di viluppo individuali sono pari a  $f_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}$ .

Inoltre Mack ha dimostrato che entrambe le medie, quella semplice e quella ponderata degli  $f_{i,j}$ , forniscono una stima corretta ma occorre tener conto del fatto che la media ponderata è da preferire a quella semplice in quanto costituisce uno stimatore corretto a varianza minima.

Infine, come per l'approssimazione Normale al modello Binomiale Negativo, nel modello *DFCL* c'è un'insufficienza di informazioni al fine di stimare l'ultima componente di varianza. Per determinare tale stima, Mack, in un suo lavoro, ha posto l'ultima componente di varianza,  $\hat{\alpha}_{10}^2$ , pari a  $\hat{\alpha}_8^2$ ; ciò ha mostrato che i risultati relativi agli anni più recenti sono maggiormente sensibili all'influenza di questo parametro.

### 2.10.3 Differenze metodologiche tra il modello ODP e il modello DFCL

Attraverso lo studio del lavoro “*I metodi stocastici per la misura della riserva sinistri: un approccio al comparto auto italiano*” è stato possibile osservare differenze dal punto di vista metodologico tra i due modelli stocastici analizzati.

In particolare si è evidenziato che:

- Il modello ODP è più prudentiale del modello di Mack, in quanto, a parità di *best estimate*, fornisce intervalli di confidenza più ampi e quindi riserve sinistri più elevate. In virtù di ciò, i *benchmark* di riserva proposti dal Solvency II<sup>25</sup> risultano avere, per le imprese, un costo maggiore se determinati attraverso il modello di Poisson con sovradisersione;
- Il modello ODP con *bootstrapping*, meglio specificato dal punto di vista statistico, richiede un maggior onere dal punto di vista computazionale; tuttavia il modello di Mack consente di effettuare calcoli in forma chiusa anche se, allo stato attuale non sono disponibili espressioni per tutte le quantità di interesse;
- Fornendo la distribuzione dell’aspettativa della riserva il metodo ODP rappresenta il metodo più completo per un corretto approccio al calcolo del requisito di capitale.

Tuttavia è opportuno specificare che nessuno dei due metodi è preferibile all’altro, la scelta dipende da tanti fattori e situazioni che verranno elencati nelle conclusioni di questo studio.

---

<sup>25</sup> *Best estimate + risk margin.*

## 2.11 Il Prediction Error ed il Prediction Error “Overall”

Prima di procedere, nel terzo ed ultimo capitolo, all'applicazione del modello di Mack è opportuno fare alcune considerazioni sull'errore di previsione (*prediction error*) sul cui calcolo, analitico o approssimato, sono stati effettuati numerosi studi e approfondimenti sia teorici sia dal punto di vista computazionale.

L'aspetto principale di cui bisogna tener conto è che in un modello stocastico che rappresenta un processo di previsione, in cui le stime dei risarcimenti futuri sono ricavate sulla base dei dati osservati, la variabilità totale deve includere la *varianza del processo*<sup>26</sup>, ossia la variabilità insita nei dati stimati e la *varianza delle stime*<sup>27</sup>, cioè l'incertezza nella stima dei parametri del modello.

Nella pratica attuariale un aspetto interessante è quello di ottenere un errore di previsione della riserva totale. Anche se i pagamenti cumulati corrispondenti a differenti generazioni sono indipendenti per ipotesi, la varianza di previsione non può essere determinata come somma delle varianze di previsione delle riserve delle singole generazioni, dato che la procedura di stima comporta correlazioni, sia tra le righe (anni di generazione) sia tra le diagonali (anni di bilancio).

Indicando con  $y$ , una variabile aleatoria e con  $\hat{y}$  il suo valore previsto, si è dimostrato che la *Prediction Variance (PRV)* è ottenuta come segue:

$$\text{Prediction Variance} = \text{Process Variance} + \text{Estimation Variance}$$

$$\text{PRV} = \text{PV} + \text{EV}$$

In termini di formule:

$$E[(y - \hat{y})^2] \approx E[(y - E(y))^2] + E[(\hat{y} - E(\hat{y}))^2]$$

---

<sup>26</sup> Quadrato dell'errore del processo o *Process Variance*.

<sup>27</sup> Quadrato dell'errore della stima o *Estimation Variance*.

dove la *Process Variance* e l'*Estimation Variance* sono riferite ad ogni singola generazione. Svolgendo la radice quadrata della *Prediction Variance*, si ottiene la seguente formulazione per il *Prediction Error*:

$$\sqrt{PRV} = \sqrt{PV} + \sqrt{EV} = \sqrt{E[(y - E(y))^2]} + \sqrt{E[(\hat{y} - E(\hat{y}))^2]}$$

In riferimento alla riserva sinistri di ogni singolo anno di generazione, Mack ha individuato sia la *Process Variance* sia l'*Estimation Variance* espresse rispettivamente dalle seguenti formule:

$$Var [R_i] \approx \hat{D}_{i,n}^2 \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\alpha}_k^2}{\hat{\lambda}_k^2 \hat{D}_{i,k}}; \quad Var [\hat{R}_i] \approx \hat{D}_{i,n}^2 \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\alpha}_k^2}{\hat{\lambda}_k^2 \sum_{q=1}^{n-k} D_{q,k}} \text{ da cui}$$

si ricava: 
$$Var [R_i] + Var [\hat{R}_i] \approx \hat{D}_{i,n}^2 \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\alpha}_k^2}{\hat{\lambda}_k^2} \left( \frac{1}{\hat{D}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{q=1}^{n-k} D_{q,k}} \right)$$

In definitiva il *Prediction Error* della riserva sinistri nel suo complesso - *Prediction Error "Overall"* - è ottenuto in base alla seguente espressione:

$$(s.e.(\hat{R}))^2 = \sum_{i=2}^I \left[ (s.e.(\hat{R}_i))^2 + \hat{C}_{il} \left( \sum_{j=i+1}^I \hat{C}_{jl} \right) \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{2\hat{\alpha}_k^2}{\hat{\lambda}_k^2 \sum_{n=1}^{I-k} C_{nk}} \right]$$

In alcuni lavori successivi<sup>28</sup> sono state sviluppate espressioni corrette della varianza di previsione totale e appropriate espressioni degli errori di previsione degli stimatori dei futuri anni di bilancio, che sono di interesse per il calcolo di valori scontati.

<sup>28</sup> Buchwalder, Bühlmann, Merz, Wüthrich 2005; Passalacqua, Vignati 2005.

## Capitolo 3

### ***3.1 Premessa***

Mentre nel paragrafo 2.10.2 del capitolo precedente ci si è occupati dell'analisi puramente descrittiva del modello di Mack, modello a distribuzione libera, l'intento del presente capitolo è quello di individuare le peculiarità del modello considerato, attraverso la definizione e la descrizione delle principali formule, al fine di giungere alla definizione della riserva sinistri e attraverso un confronto con il modello d'approssimazione Normale al modello della Binomiale Negativa.

In particolare, l'idea è quella di esporre, in maniera dettagliata ma sintetica, tutti i diversi *step* che, a partire dal metodo deterministico, giungono ad una completa visione del lavoro "*Measuring the variability of chain-ladder reserve estimates*" prodotto da Mack.

Successivamente si propone, invece, l'aspetto pratico del presente lavoro attraverso l'applicazione del modello *DFCL* ad una serie di dati. L'ultimo paragrafo ha l'intento di proporre una panoramica dell'utilità, importanza, dei motivi e degli aspetti da considerare nell'individuazione di metodologie di "*riservazione*".

### ***3.2 Analisi preliminare del metodo deterministico del chain ladder***

E' possibile quantificare la variabilità della stima della riserva del *chain-ladder* senza fare alcuna specifica assunzione sulla funzione di distribuzione per l'ammontare

dei sinistri. Ciò è possibile, stabilendo una formula per lo *standard error* che rappresenta una stima per la deviazione standard della riserva di sinistri.

Indicando con  $C_{ik}$  il risarcimento cumulato relativo all'anno di accadimento  $i$  per  $i=1,2,\dots,I$ , pagato con un differimento di  $k$  anni,  $k=1,2,\dots,I$ , l'obiettivo è quello di stimare il risarcimento cumulato relativo all'ultimo anno,  $C_{iI}$ , per ogni anno di generazione  $i=1,2,\dots,I$ , essendo noti i valori di  $C_{ik}$  per  $i+k \leq I+1$ , dati presenti nel triangolo *run-off*. Da qui poi è possibile stimare la riserva sinistri considerando la seguente relazione:  $R = C_{iI} - C_{i,I+1-i}$ .

Il metodo del *chain-ladder* prevede l'esistenza di fattori di sviluppo  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{I-1}$  tali che, considerando gli ulteriori sviluppi  $C_{i1}, \dots, C_{ik}$ , la realizzazione di  $C_{i,k+1}$  "è chiusa" al prodotto  $C_{ik} \lambda_k$ , ossia in altri termini il valore atteso condizionato dell'importo  $C_{i,k+1}$  è pari al prodotto definito precedentemente, infatti:

$$E(C_{i,k+1} / C_{i1}, \dots, C_{ik}) = C_{ik} \lambda_k, \text{ per } i=1,2,\dots,I \text{ e } k=1,2,\dots,I-1$$

dove  $\lambda_k$ , come detto in precedenza, sono ottenuti rapportando il totale dei pagamenti di ogni singola colonna a quello della colonna precedente. Tale affermazione non è imposta dal modello ma è praticamente alla base del metodo deterministico; ciò si basa essenzialmente su due aspetti legati alla formulazione dell'ultimo risarcimento cumulato, così definito nel metodo deterministico  $\hat{C}_{iI} = C_{i,I+1-i} \hat{\lambda}_{I+1-i} \hat{\lambda}_{I-1}$ .

Il primo aspetto riguarda l'uso, nella formulazione dell'ultimo risarcimento cumulato, degli stessi fattori di sviluppo per i diversi anni di accadimento  $i=I+1-k, \dots, I$ .

L'altro aspetto riguarda il fatto che, la formulazione dell'ultimo risarcimento cumulato, usa solo il più recente valore osservato  $C_{i,I+1-i}$  come base per la previsione dell'ultimo, ignorando da un lato tutti gli importi osservati precedentemente e dall'altro lato il fatto che  $C_{i,I+1-i}$  potrebbe sostanzialmente deviare dal suo valore atteso.

Esistono, comunque, diverse possibilità per la stima dell'ultimo risarcimento ma sono ignorate dal metodo della catena che utilizza l'importo  $C_{i,I+1-i}$  come la sola base per la proiezione dell'ultimo risarcimento. Ciò vuol dire che implicitamente, il metodo deterministico, fa un'assunzione secondo cui l'informazione contenuta in  $C_{i,I+1-i}$  non può essere migliorata dall'aggiunta di  $C_{i1}, \dots, C_{i,1-i}$  oppure di  $C_{i,I+1-i}, \dots, C_{i-1,I+1-i}$ , aspetto evidenziato già dal fatto che il valore atteso di  $C_{i,k+1}$  dipende solo da  $C_{i,k}$ . E' ovvio che questa è una forte assunzione che ha importanti conseguenze e che può non essere presa come data per ogni triangolo *run-off*.

La formulazione del valore atteso condizionato di  $C_{i,k+1}$ , può allora essere riscritta come segue:

$$E(C_{i,k+1} / C_{ik} | C_{i1}, \dots, C_{ik}) = \lambda_k .$$

Questo perché  $C_{ik}$  è uno scalare sotto la condizione che sono noti i seguenti importi  $C_{i1}, \dots, C_{ik}$ ; tale forma evidenzia che, il valore atteso dei fattori di sviluppo individuali  $\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}}$  equivale a  $\lambda_k$  indipendentemente dallo sviluppo precedente

$C_{i1}, \dots, C_{ik}$  e specialmente dal precedente fattore di sviluppo  $\frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}}$ . Da rilevare ancora

l'incorrelazione delle sottosequenze dei fattori di sviluppo  $\frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}}$  e  $\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}}$ ,

caratteristica secondo cui, dopo un valore piuttosto elevato del rapporto  $\frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}}$ , il valore

atteso del successivo fattore di sviluppo  $\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}}$  è lo stesso così come nel caso di un valore piuttosto basso di  $\frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}}$ .

### ***3.3 Analisi della formula Age-to-Age Factor: chiave per la misura della variabilità***

A causa dell'aleatorietà delle realizzazioni di  $C_{i,k}$  non è possibile giungere al vero valore dei fattori di sviluppo a partire dai dati, ma essi possono solo essere stimati, come visto in precedenza. Una delle principali proprietà di un buono stimatore è la non distorsione, ossia il valore atteso dello stimatore  $E[\lambda_k]$ , sotto l'assunzione che l'intero triangolo *run-off* non sia noto, è uguale al vero valore del parametro stesso  $\lambda_k$ .

In più, il metodo del *chain-ladder* si basa sulla costanza nel tempo della progressione con cui vengono liquidati i sinistri<sup>29</sup> ciò vuol dire escludere ogni possibile dipendenza tra gli anni di generazione, ossia che le variabili aleatorie  $\tilde{C}_{ij}$  sono indipendenti nei diversi anni di generazione  $i$ . Per cui:

$$\{C_{i1}, \dots, C_{in}\} \text{ e } \{C_{j1}, \dots, C_{jn}\} \text{ sono indipendenti per } i \neq j.$$

Ovviamente, tale assunzione di indipendenza risulta essere un pò forte in quanto, con il tempo, possono presentarsi fattori interni ed esterni all'impresa che modificano le attuali condizioni di pagamento dei sinistri.

La stima dei fattori di sviluppo può essere espressa come media pesata dei fattori di sviluppo individuali osservati con pesi proporzionali agli importi  $C_{jk}$ ,

---

<sup>29</sup> Si tratta della legge nota come "progressione di smontamento dei sinistri".

$$\hat{\lambda}_k = \frac{\sum_{j=1}^{I-k} C_{j,k+1}}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}} = \sum_{j=1}^{I-k} \frac{C_{jk}}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}} \frac{C_{j,k+1}}{C_{jk}}, \quad \text{per } 1 \leq j \leq I-k,$$

ricordando che si tratta sempre di una stima non distorta dei fattori di sviluppo  $\lambda_k$ .

Una delle obiezioni rivolte al metodo deterministico riguarda il perché lo stesso usi, per i fattori di sviluppo  $\lambda_k$ , la stima  $\hat{\lambda}_k$  e non la media semplice  $\frac{1}{I-k} \sum_{j=1}^{I-k} \frac{C_{j,k+1}}{C_{jk}}$

che potrebbe essere uno stimatore non distorto come accade con la media pesata dei

fattori di sviluppo osservati  $\sum_{j=1}^{I-k} \frac{w_{jk} C_{j,k+1}}{C_{jk}}$  con  $\sum_{j=1}^{I-k} w_{jk} = 1$ .

Il fatto di utilizzare pesi proporzionali a  $C_{jk}$  significa che  $C_{jk}$  è assunto in maniera inversamente proporzionale alla varianza, infatti:

$$\text{Var}(C_{j,k+1} / C_{jk} | C_{j1}, \dots, C_{jk}) = \alpha_k^2 / C_{jk}$$

con costante di proporzionalità  $\alpha_k^2$  che dipende da  $k$  ma non da  $j$  e che assume valori non negativi al fine di garantire la positività della varianza stessa.

Da qui  $C_{jk}$  è uno scalare e, poiché generalmente  $\text{Var}(X/c) = \text{Var}(X)/c^2$ , per ogni scalare  $c$ , è possibile testare la condizione di proporzionalità anche nella forma:

$$\text{Var}(C_{j,k+1} | C_{j1}, \dots, C_{jk}) = C_{jk} \alpha_k^2 \quad \text{per } 1 \leq j \leq I, \quad 1 \leq k \leq I-1,$$

con costanti di proporzionalità non note,  $\alpha_k^2$ , per  $1 \leq k \leq I-1$ .

Le assunzioni relative al valore atteso condizionato dell'importo  $C_{i,k+1}$ , all'indipendenza delle variabili aleatorie  $C_{ij}$  nei diversi anni di generazione  $i$ , e

quest'ultima assunzione sulla varianza condizionata di  $C_{i,k+1}$  sono considerate come condizioni base implicitamente presenti nel metodo deterministico del *chain-ladder*.

### 3.4 La variabilità dell'ultimo risarcimento cumulato $C_{it}$

Come è noto, lo scopo del metodo deterministico del *chain-ladder* e di ogni metodo di “riservazione” dei sinistri è la stima dell'ultimo risarcimento cumulato  $C_{it}$  per gli anni di generazione  $i=2, \dots, I$ . Secondo tale metodo la stima che si ricava per l'ultimo risarcimento cumulato è:

$$\hat{C}_{it} = C_{i,I+1-i} \hat{\lambda}_{I+1-i} \dots \hat{\lambda}_{I-1}.$$

Poiché tale formula fornisce solo una stima puntuale del valore dell'ultimo risarcimento cumulato, c'è solo una piccola probabilità che  $\hat{C}_{it}$  sia proprio pari  $C_{it}$ . Questa probabilità è anche nulla se  $C_{it}$  è considerata come variabile continua.

Premesso ciò è dunque possibile stimare l'errore standard della stima dell'ultimo risarcimento e del risarcimento stesso in tal modo  $mse(C_{it}) = E((C_{it} - \hat{C}_{it})^2 | D)$  dove  $D = \{C_{ik} | i+k \leq I+1\}$  è l'insieme di tutti i dati osservati.

In realtà ciò che si vuole conoscere è l'errore dovuto solo ad aleatorietà futura per cui si considera, in alternativa alla precedente, la seguente formula:

$$E\left((\hat{C}_{it} - C_{it})^2 | D\right),$$

ricordano che l'errore quadratico medio dell'ultimo risarcimento dipenderà dai parametri non noti  $\lambda_k$  e  $\alpha_k^2$ .

Occorre, inoltre, osservare che lo standard error dell'ultimo risarcimento cumulato  $C_{it}$ , stima della deviazione standard di  $C_{it}$ , nel caso in cui è stato stimato il valor medio, è proprio lo standard error della riserva stimata,  $R_i = C_{it} - C_{i,I+1-i}$ .

$$\text{In altre parole } \text{mse}(\hat{R}_i) = E\left(\left(\hat{R}_i - R_i\right)^2 \middle| D\right) = E\left(\left(\hat{C}_{it} - C_{it}\right)^2 \middle| D\right) = \text{mse}(\hat{C}_{it}).$$

Poiché secondo la regola generale  $E(X - a)^2 = \text{Var}(X) + (E(X) - a)^2$  allora,  $\text{mse}(\hat{C}_{it}) = \text{Var}(C_{it}|D) + (E(C_{it}|D) - \hat{C}_{it})^2$ .

Quest'ultima relazione evidenzia che l'errore quadratico medio è ottenuto come somma di due elementi la varianza del processo (*Process Variance*) e l'effettivo errore di stima. Inoltre, l'uguaglianza dell'errore quadratico medio implica l'uguaglianza degli *standard error*, quindi:  $\text{s.e.}(\hat{R}_i) = \text{s.e.}(\hat{C}_{it})$ .

Ricordando l'espressione della varianza condizionata, inversamente proporzionale al generico importo  $C_{ij}$ , o equivalentemente  $\text{Var}(C_{j,k+1} | C_{j1}, \dots, C_{jk}) = C_{jk} \alpha_k^2$  per  $1 \leq j \leq I$ ,  $1 \leq k \leq I-1$ , con parametro incognito  $\alpha_k^2$  per  $1 \leq k \leq I-1$ , è possibile ottenere una stima corretta del suddetto parametro nel seguente

$$\text{modo } \hat{\alpha}_k^2 = \frac{1}{I - k - 1} \sum_{j=1}^{I-k} C_{jk} \left( \frac{C_{j,k+1}}{C_{jk}} - \hat{\lambda}_k \right)^2 \text{ con } 1 \leq k \leq I-2.$$

Come si deduce dalla formula, si tratta di una media ponderata dei residui, in cui il denominatore è dato dal numero di residui, usati nel calcolo dello stimatore, meno uno, aspetto che fornisce una stima non distorta del parametro  $\alpha_k^2$ .

Tuttavia alcuna correzione tiene conto della distorsione dovuta al numero dei parametri e inoltre che, per contemplare la stima di  $\alpha_k^2$  per ogni  $k=1,2,\dots,I-1$ , occorre assegnare un valore a  $\alpha_{k-1}^2$ . Nel caso tutti i risarcimenti sono effettuati al più in  $k$  anni, si

può porre  $\alpha_{k-1}^2=0$ , altrimenti un possibile metodo alternativo è quello di attribuire a  $\hat{\alpha}_{k-1}^2$

$$\text{la quantità } \hat{\alpha}_{I-1}^2 = \min \left\{ \frac{\hat{\alpha}_{I-2}^4}{\hat{\alpha}_{I-3}^2}, \min(\hat{\alpha}_{I-3}^2, \hat{\alpha}_{I-2}^2) \right\}.$$

Sotto tutte queste ipotesi, è stato possibile dimostrare che l'errore quadratico medio della stima della riserva  $\hat{R}_i$  per  $i=2, \dots, I$  è dato da:

$$\left( s.e.(\hat{R}_i) \right)^2 = \hat{C}_{ii}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\alpha}_k^2}{\hat{\lambda}_k^2} \left( \frac{1}{\hat{C}_{ik}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}} \right)$$

dove  $\hat{C}_{ik} = C_{i,I+1-i} \hat{\lambda}_{I+1-i} \dots \hat{\lambda}_{k-1}$ , per  $k > I+1-i$  sono i valori stimati dei futuri importi  $C_{ik}$  e  $\hat{C}_{i,I+1-i} = C_{i,I+1-i}$ .

Per poter stabilire un intervallo di confidenza per la riserva è necessario conoscere la funzione di distribuzione della riserva stessa. Se il volume dei sinistri è sufficientemente ampio, secondo il teorema del limite centrale è possibile assumere una distribuzione Normale con un valore atteso uguale alla stima puntuale data da  $\hat{R}_i$  e una deviazione standard uguale a  $s.e.(\hat{R}_i)$ . Allora, date queste caratteristiche, un intervallo di confidenza per la riserva  $R_i$  sarà:

$$\left( \hat{R}_i - 2s.e.(\hat{R}_i), \hat{R}_i + 2s.e.(\hat{R}_i) \right).$$

Tuttavia la distribuzione simmetrica *Normale* non può essere una buona approssimazione della vera distribuzione della riserva se la distribuzione di quest'ultima è piuttosto asimmetrica. Questo è principalmente il caso in cui  $s.e.(\hat{R}_i)$  è più grande del 50% della riserva stessa. In questo caso è raccomandabile l'utilizzo di un approccio basato su una distribuzione di tipo *Log-Normale* con media e varianza rispettivamente pari a  $\mu_i$  e  $\sigma_i^2$ . A differenza della distribuzione *Normale*, la distribuzione *Log-Normale*

garantisce la positività del limite inferiore dell'intervallo di confidenza definito per la riserva  $R_i$ .

Una volta determinata  $\hat{R}_i$  è possibile ricavare per la riserva complessiva, somma di tutte le riserve nei vari anni di generazione,  $\hat{R} = \hat{R}_2 + \dots + \hat{R}_I$ , la stima del suo errore quadratico medio complessivo, definito dalla seguente relazione:

$$(s.e.(\hat{R}))^2 = \sum_{i=2}^I \left[ (s.e.(\hat{R}_i))^2 + \hat{C}_{iI} \left( \sum_{j=i+1}^I \hat{C}_{jI} \right) \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{2\hat{\alpha}_k^2}{\hat{\lambda}_k^2 \sum_{n=1}^{I-k} C_{nk}} \right]$$

Tale quantità non può essere ottenuta come semplice somma dei singoli errori quadratici medi poiché è opportuno considerare anche la correlazione esistente tra i fattori di sviluppo  $\hat{\lambda}_j$  e tra le quantità  $\alpha_k^2$ .

Concludendo, tale errore rivela le inesattezze della stima dovuta all'aleatorietà delle variabili coinvolte, non è in grado di cogliere l'errore, definito errore di specificazione, che si commette nell'ambito della specificazione del modello e infine, prevede che non vi siano discordanze da ciò che si è verificato nel passato in termini di liquidazione dei sinistri.

### 3.5 Verifica delle assunzioni del *chain-ladder* attraverso i dati

Come è stato affermato nei paragrafi precedenti, le tre assunzioni di base implicite nel metodo deterministico del *chain-ladder*:

- $E(C_{i,k+1} | C_{i1}, \dots, C_{ik}) = C_{ik} \lambda_k$  ;
- L'indipendenza nei diversi anni di generazione;

$$\triangleright \quad \text{Var}(C_{i,k+1} | C_{i1}, \dots, C_{ik}) = C_{ik} \alpha_k^2$$

non sono note in ogni situazione. La prima proprietà è nota come proprietà di Markovianità, secondo cui il valore atteso di  $C_{i,k+1}$  condizionato alla sua storia passata  $(C_{i1}, \dots, C_{ik})$  dipende esclusivamente da ciò che è accaduto nell'anno immediatamente precedente  $C_{i,k}$ ; la terza e ultima assunzione riguarda invece l'eterogeneità delle varianze per ogni valore di  $k$ .

L'intento di questo paragrafo è quello di indicare come queste assunzioni possano essere verificate per un dato triangolo *run-off*.

I valori di  $C_{ik}$  per  $1 \leq i \leq I$ , vengono considerati come valori non aleatori e l'equazione della prima assunzione può essere interpretata attraverso un modello di regressione lineare del tipo:

$$Y_i = c + x_i b + \varepsilon_i, \text{ con } 1 \leq i \leq I,$$

dove  $c$  e  $b$  sono rispettivamente l'intercetta e il coefficiente di regressione e  $\varepsilon_i$  il termine di errore con valore atteso nullo, per cui  $E(Y_i) = c + x_i b$ .

Nel caso particolare considerato da Mack nel suo articolo<sup>30</sup>, si ha  $c=0$  e  $b=\lambda_k$  e le osservazioni della variabile dipendente  $Y_i = C_{i,k+1}$  con il generico  $x_i = C_{ik}$  per  $i=1, \dots, I-k$ . Per ricavare la stima dei fattori di sviluppo è necessario risolvere tale

relazione  $\sum_{i=1}^{I-k} (C_{i,k+1} - C_{ik} \lambda_k)^2 = \min$ , la cui soluzione è  $\hat{\lambda}_{k0} = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}^2}$  che può

---

<sup>30</sup> "Measuring the variability of chain-ladder reserve estimates".

essere diversamente scritta come  $\hat{\lambda}_{k0} = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}^2}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}^2} \frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}}$  che mostra la stima dei

fattori di sviluppo come media ponderata dei singoli fattori di sviluppo  $\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}}$ .

Esistono formule alternative che possono essere utilizzate nel modello per gli *age-to-age factor*, come:

$$\hat{\lambda}_{k1} = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}} \quad \text{e} \quad \hat{\lambda}_{k2} = \frac{1}{I-k} \sum_{i=1}^{I-k} \frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}}$$

dove la seconda formula rappresenta la media non pesata dei fattori di sviluppo.

Per quanto riguarda la componente della varianza condizionata, in precedenza, si è assunto che i pesi sono inversamente proporzionali alla varianza, conseguentemente lo stimatore suppone che la varianza  $Var(C_{i,k+1} | C_{i1}, \dots, C_{ik})$  è la stessa per tutte le osservazioni  $i=1, \dots, I-k$ ; affermazione, quest'ultima, in disaccordo con il metodo del *chain-ladder*.

D'altra parte, l'assunzione in merito alla varianza corrispondente ai pesi usati è:

$$Var(C_{i,k+1} | C_{i1}, \dots, C_{ik}) \text{ proporzionale a } \frac{1}{C_{ik}^2}$$

oppure equivalentemente

$$Var(C_{i,k+1} / C_{ik} | C_{i1}, \dots, C_{ik}) \text{ proporzionale a } 1.$$

Il beneficio della trasformazione dei fattori in una struttura di regressione si riferiscono al fatto che sono disponibili strumenti di analisi statistica della regressione per verificare le assunzioni evidenziate finora, in particolar modo le assunzioni di linearità e sulla varianza. Tale verifica consiste principalmente in un'analisi grafica dei

dati e dei residui, lì dove si ha un numero sufficientemente elevato di osservazioni per poter svolgere un'analisi statistica sui residui.

### ***3.6 Il modello di Mack: similarità con l'approssimazione Normale al modello della Binomiale Negativa***

In questo paragrafo si è ritenuto opportuno analizzare ulteriormente il modello *DFCL* fornendo un confronto con l'approssimazione Normale al modello della Binomiale Negativa; i due modelli, come chiarito di seguito, presentano forti similarità ma non mancano le differenze presenti nell'ambito della stima.

Il modello di Mack presenta singolari similarità con l'approssimazione Normale al modello della Binomiale Negativa, infatti le stime ottenute per i fattori di sviluppo sono le stesse. Inoltre sia le stime ottenute per le rispettive componenti di varianza  $\hat{\sigma}_j^2$  e  $\hat{\phi}_j$  sia l'errore di previsione sono finite. Sebbene le similarità sono profonde, esistono forti differenze principalmente nella stima delle rispettive componenti di varianza.

In Mack, le stime non distorte di  $\hat{\sigma}_j^2$  sono calcolate come media dei residui dove il denominatore, come accennato in precedenza, è dato dal numero di residui meno 1, in quanto trattasi proprio di stime non distorte.

Nel caso dell'approssimazione Normale, le stime delle componenti di varianza  $\hat{\phi}_j$  sono semplicemente una media dei residui pesati ignorando la correzione della distorsione.

Inoltre, nel modello *DFCL*, in riferimento al numero di parametri usati nella stima del modello, non c'è alcun aggiustamento, aspetto che, invece, risulta essere naturalmente incluso nel parametro di dispersione.

Confrontando tra di loro le stime, le rispettive componenti di varianza e i risultati in termini di *Prediction Variance*, *Process Variance*, *Estimation Variance* e *Prediction Error*, i due modelli risultano essenzialmente gli stessi, fermo restando la presenza di differenze dovute all'accuratezza dei calcoli.

Per avere una prova dell'identità dei modelli è necessario dimostrare, solo algebricamente, l'uguaglianza degli stimatori per i diversi parametri,  $\lambda, \phi, \sigma^2$ . Ciò può essere confermato dal fatto che questi parametri dipendono dal solo anno di sviluppo e successivamente saranno ottenuti come media pesata delle rispettive quantità usate nella stima, con pesi uguali per entrambi i modelli.

Non è necessario dimostrare, d'altra parte non rientra nell'obiettivo di questo studio, che le formule ottenute per il *Prediction Error* sono algebricamente le stesse, esse, in particolare, coincideranno se verranno usate le stesse approssimazioni.

In realtà il modello *DFCL* non deve essere concepito come approssimazione di quello Normale in quanto Mack non ha fatto alcuna assunzione circa la distribuzione dei dati ma ha fornito esclusivamente i primi due momenti della distribuzione. Tuttavia è pensabile che qualche intuizione, in merito ai modelli considerati in tale sede, sia stata fornita dall'introduzione del modello *ODP*.

### 3.7 Applicazione

Il seguente paragrafo ha lo scopo di illustrare praticamente il metodo di Mack analizzando ogni singolo *step* trattato nel presente capitolo. I dati presi in considerazione nell'analisi, espressi in euro e relativi al ramo *RCG(Responsabilità Civile Generale)*, riguardano i pagamenti incrementali relativamente a 10 generazioni ( $i=1, \dots, 10$ ) e 10 anni di sviluppo.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	869.571	1.863.664	1.483.617	1.173.544	1.281.402	1.395.787	355.611	340.079	552.166	165.114
2	855.647	2.148.171	2.269.362	2.875.392	1.083.160	780.020	1.282.564	646.798	1.032.862	
3	705.932	2.434.372	2.250.712	2.470.469	1.824.483	357.023	1.205.261	681.384		
4	754.777	2.693.048	1.886.139	3.796.632	662.131	855.489	501.275			
5	1.076.879	1.684.452	2.410.519	1.869.856	1.226.788	1.143.653				
6	962.601	2.277.117	2.059.420	1.956.240	1.715.483					
7	1.071.222	2.059.743	2.749.297	2.583.744						
8	873.536	2.579.805	3.507.389							
9	915.347	2.397.457								
10	835.954									

Figura 7: Triangolo dei pagamenti incrementali.

A partire dai pagamenti incrementali, è stato ottenuto il triangolo dei corrispondenti pagamenti cumulati, presenti nella figura sottostante, secondo la relazione  $C_{i,j} = C_{i,j-1} + D_{i,j}$ .

	Ci1	Ci2	Ci3	Ci4	Ci5	Ci6	Ci7	Ci8	Ci9	Ci10
i=1	869571	2733235	4216852	5390396	6671798	8067585	8423196	8763275	9315441	9480555
i=2	855647	3003818	5273180	8148572	9231733	10011753	11294317	11941115	12973977	
i=3	705932	3140304	5391016	7861485	9685968	10042991	11248251	11929635		
i=4	754777	3447825	5333964	9130596	9792727	10648216	11149491			
i=5	1076879	2761331	5171849	7041705	8268493	9412146				
i=6	962601	3239717	5299137	7255377	8970860					
i=7	1071222	3130965	5880262	8464006						
i=8	873536	3453341	6960730							
i=9	915347	3312804								
i=10	835954									

Figura 8: Triangolo dei pagamenti cumulati.

Successivamente considerando l'equazione generale del modello di regressione lineare  $Y_i = c + x_i b + \varepsilon_i$ <sup>31</sup> attraverso il metodo dei minimi quadrati pesati sono state ottenute le stime dei fattori di sviluppo  $\lambda_{k1}$  per  $k=1, \dots, 9$ . Il metodo dei minimi quadrati pesati, considerato nella stima, consente di ottenere stimatori cosiddetti *BLUE*<sup>32</sup>, si tratta di stimatori lineari, non distorti, asintoticamente normali e consistenti in probabilità.

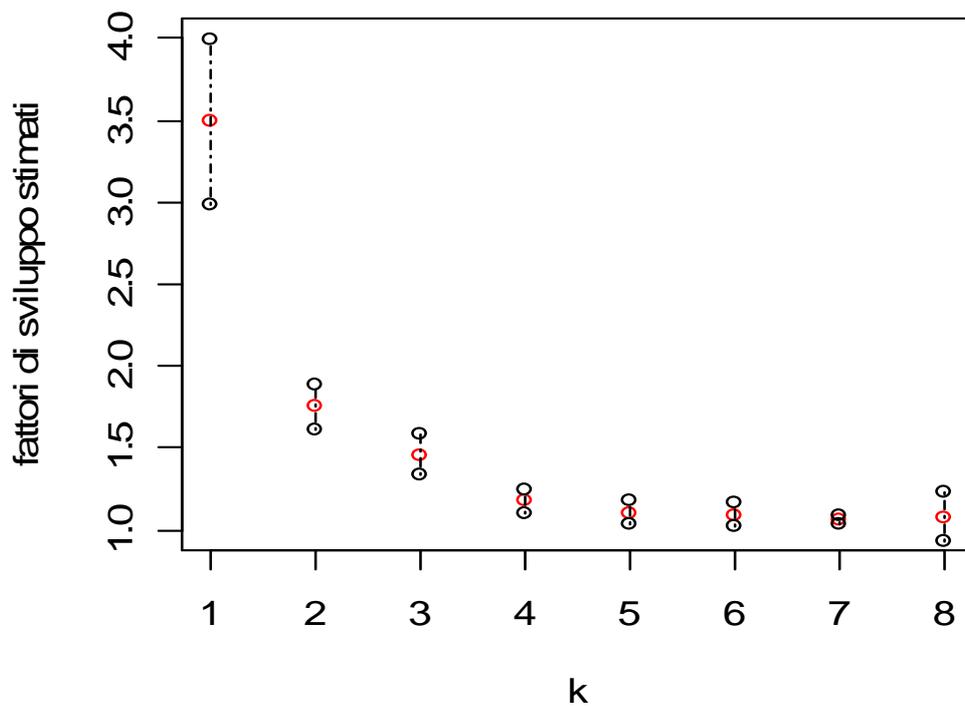
Attraverso l'uso del software statistico *Erre* è stato possibile calcolare per i valori stimati dei fattori di sviluppo l'intervallo di confidenza al 95% nei diversi anni di sviluppo per  $k=1, 2, \dots, 8$ <sup>33</sup>. In particolare ciò che emerge dal grafico sottostante è che il primo fattore di sviluppo si distingue fortemente dalle altre stime.

---

<sup>31</sup> Si ricorda che le ipotesi previste da Mack nel modello di regressione lineare considerato sono:  $c=0$  e  $b = \lambda_k$ ,  $Y_i = C_{i,k+1}$ , e  $x_i = C_{ik}$  per  $i=1, \dots, I-k$ .

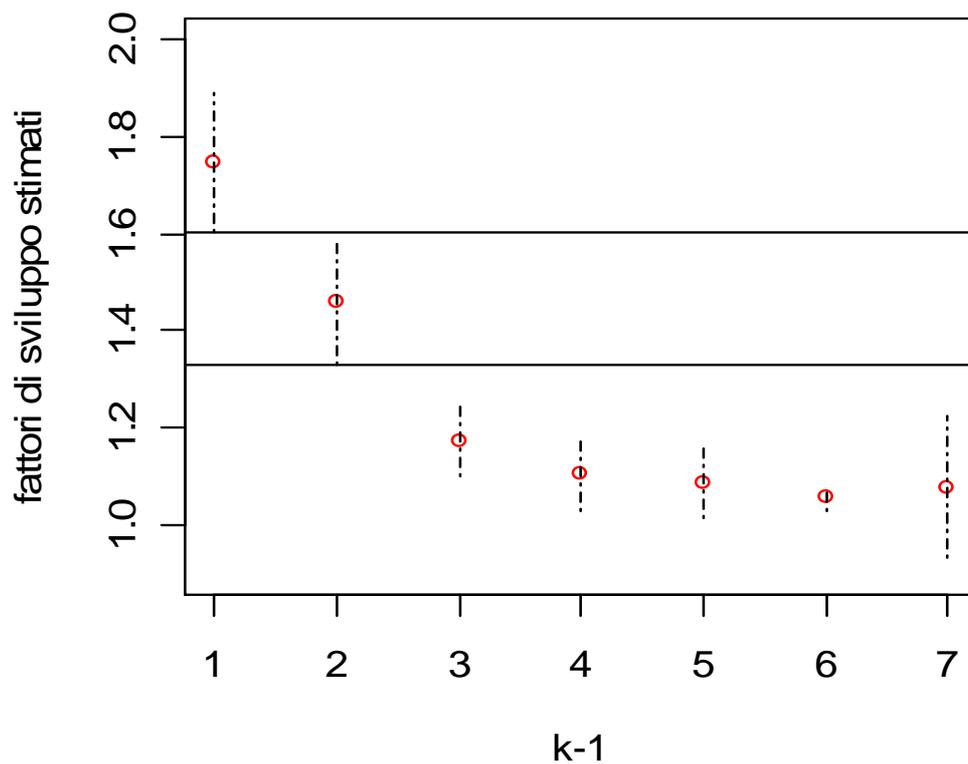
<sup>32</sup> Best Linear Unbiased Estimator.

<sup>33</sup> Trattandosi di un unico valore, l'ultimo anno di sviluppo,  $k=9$ , non è stato preso in considerazione nell'analisi grafica.



**Grafico 1: Intervalli di confidenza per i fattori di sviluppo stimati per  $k=1,2,\dots,8$ .**

Per evidenziare maggiormente le differenze tra i valori stimati è possibile osservare il grafico degli intervalli di confidenza per i fattori di sviluppo senza considerare l'osservazione “*anomala*” relativa all'anno  $k=1$ .



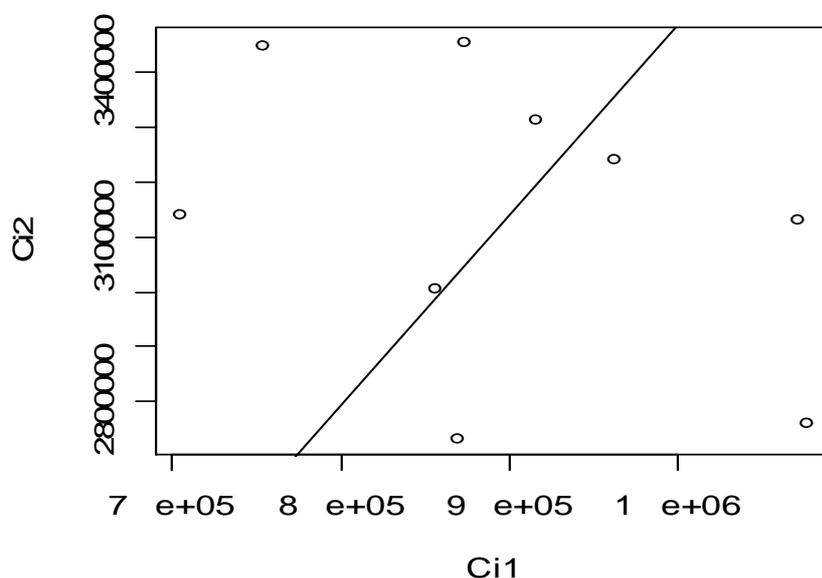
**Grafico 2: Intervalli di confidenza per i fattori di sviluppo stimati per  $k=2, \dots, 8$ .**

Come è possibile notare dal grafico, gli intervalli di confidenza dei singoli fattori di sviluppo per i primi due anni  $k-1=1$  e  $k-1=2$  non si sovrappongono, mentre con l'avanzare degli anni di sviluppo, gli intervalli tendono innanzitutto ad assottigliarsi e poi a sovrapporsi proprio perché le stime dei fattori sono molto simili negli ultimi anni.

Quindi, ad un'iniziale diversificazione dei fattori e dei relativi intervalli segue una forte somiglianza dei fattori ed una marcata sovrapposizione dei relativi intervalli. Infine è da sottolineare che l'ultimo intervallo di confidenza, in corrispondenza di dell'anno di sviluppo  $k-1=7$ , evidenzia una maggiore variabilità.

Una volta definito il modello di regressione lineare, sarebbe interessante effettuare un'analisi grafica per le coppie di importi  $C_{i,k}$   $C_{i,k+1}$ ; in realtà, dal punto di vista statistico non risulta significativo effettuare un'analisi di regressione o comunque dei residui su una base dati costituita inizialmente da 9 osservazioni, per la coppia di importi  $(C_{i,1}, C_{i,2})$ , che via via decrescono fino ad arrivare a 2 osservazioni per la coppia di importi  $(C_{i,8}, C_{i,9})$ .

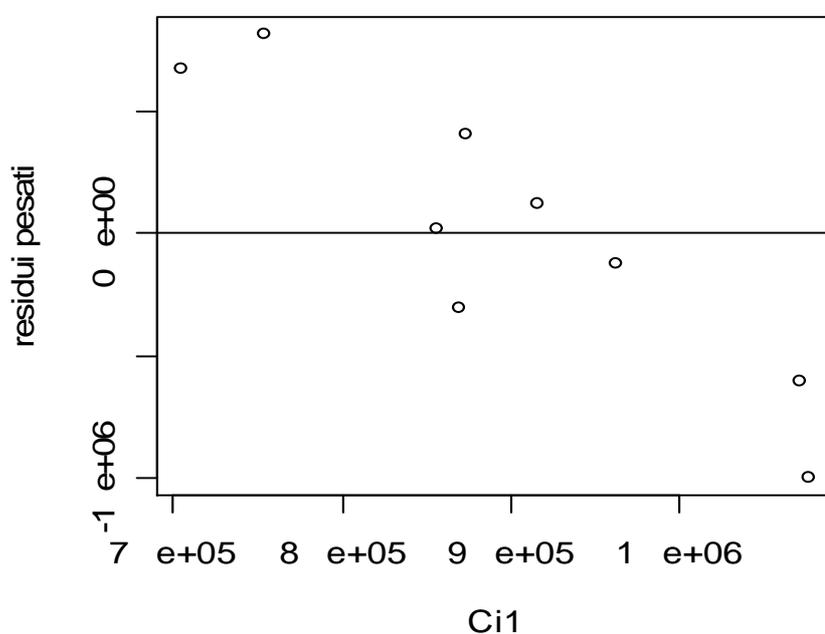
A scopo puramente illustrativo, in tale sede, è stata analizzata esclusivamente la prima coppia di importi  $(C_{i,1}, C_{i,2})$ ; il primo grafico, di seguito riportato, mostra un andamento del tutto non lineare, la regressione non sembra catturare molto bene la direzione dei punti.



**Grafico 3: Grafico a dispersione della coppia di importi  $(C_{i,1}, C_{i,2})$ .**

La retta di regressione sembra essere spinta verso il basso dalla presenza di alcune osservazioni, d'altra parte i punti sembrano disporsi in maniera del tutto casuale, lontani dalla retta di regressione, mostrando così una forte dispersione.

Il secondo grafico, di seguito riportato, mostra l'andamento dei residui rispetto alla variabile  $C_{i,1}$



**Grafico 4: Andamento dei residui per l'importo Ci1.**

Il problema principale da considerare in questa analisi è che il modello, come previsto da Mack, manca di intercetta; ciò comporta un trend decrescente nei residui.

Definiti i pagamenti cumulati, tenendo conto delle tre diverse formulazioni per i fattori di sviluppo sono stati ottenuti i seguenti risultati:

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	k=9
$\hat{\lambda}_{k0}$	3,417828	1,749006	1,461852	1,166857	1,097481	1,087341	1,054868	1,078275	1,017725
$\hat{\lambda}_{k1}$	<b>3,490607</b>	<b>1,747333</b>	<b>1,457413</b>	<b>1,173852</b>	<b>1,103824</b>	<b>1,086269</b>	<b>1,053874</b>	<b>1,076555</b>	<b>1,017725</b>
$\hat{\lambda}_{k2}$	3,566143	1,745557	1,451961	1,180984	1,111247	1,084818	1,052739	1,074753	1,017725

Considerando come fattori di sviluppo i valori ottenuti attraverso la seconda

formulazione  $\hat{\lambda}_{k1} = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}}$ , sono stati ottenuti le seguenti stime per pagamenti

cumulati:

	Ci1	Ci2	Ci3	Ci4	Ci5	Ci6	Ci7	Ci8	Ci9	Ci10
i=1										
i=2										<b>13203937</b>
i=3									<b>12842911</b>	<b>13070548</b>
i=4								<b>11750163</b>	<b>12649699</b>	<b>12873911</b>
i=5						<b>10224126</b>	<b>10774944</b>	<b>11599821</b>	<b>11805425</b>	
i=6					<b>9902247</b>	<b>10756507</b>	<b>11336007</b>	<b>12203837</b>	<b>12420147</b>	
i=7				<b>9935488</b>	<b>10967025</b>	<b>11913144</b>	<b>12554956</b>	<b>13516103</b>	<b>13755673</b>	
i=8			<b>10144657</b>	<b>11908323</b>	<b>13144688</b>	<b>14278672</b>	<b>15047926</b>	<b>16199922</b>	<b>16487062</b>	
i=9		<b>5788571</b>	<b>8436338</b>	<b>9903010</b>	<b>10931175</b>	<b>11874201</b>	<b>12513916</b>	<b>13471921</b>	<b>13710707</b>	
i=10	<b>2917987</b>	<b>5098693</b>	<b>7430901</b>	<b>8722776</b>	<b>9628405</b>	<b>10459042</b>	<b>11022516</b>	<b>11866346</b>	<b>12076674</b>	

Figura 9: Stime dei pagamenti cumulati attraverso i valori di  $\lambda_{k1}$ .

Una volta effettuata un'analisi preliminare sui dati è possibile passare al calcolo dei costi ultimi  $C_{il}$ , con  $C_{il} = C_{i,I+1-i} \lambda_{I+1-i} \dots \lambda_{I-1}$  per  $2 \leq i \leq I$ , della riserva per ogni

singola generazione secondo la formula  $R_{il} = C_{il} - C_{i,I+1-i}$  con i rispettivi *standard*

$$errors \text{ definiti dalla seguente formula } (s.e.(\hat{R}_i)) = \sqrt{\hat{C}_{il}^2 \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{\hat{\alpha}_k^2}{\hat{\lambda}_k^2} \left( \frac{1}{\hat{C}_{ik}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}} \right)}.$$

Stesso discorso per la riserva *Overall*  $R = R_2 + \dots + R_I$  con il rispettivo *standard*

$$error \ (s.e.(\hat{R})) = \sqrt{\sum_{i=2}^I \left[ (s.e.(\hat{R}_i))^2 + \hat{C}_{il} \left( \sum_{j=i+1}^I \hat{C}_{jl} \right) \sum_{k=I+1-i}^{I-1} \frac{2\hat{\alpha}_k^2}{\hat{\lambda}_k^2 \sum_{n=1}^{I-k} C_{nk}} \right]}.$$

Per definire gli *standard errors*, secondo la formula

$$\hat{\alpha}_k^2 = \frac{1}{I-k-1} \sum_{j=1}^{I-k} C_{jk} \left( \frac{C_{j,k+1}}{C_{jk}} - \hat{\lambda}_k \right)^2 \text{ con } 1 \leq k \leq I-2, \text{ definita in precedenza, sono state}$$

ottenute le seguenti stime per  $\alpha_k^2$  al variare di  $k$ :

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	k=9
$\alpha_k^2$	389481,20	91700,56	101975,47	36894,45	33367,12	19891,43	1085,28	2788,10	<b>1085,28</b>

Un'analisi grafica che confronta il  $\ln(\alpha_k^2)$  e  $k$  permette di individuare un andamento di tipo lineare che consente di estrapolare il valore di  $\ln(\alpha_9^2)$  evidenziato nel grafico sottostante.

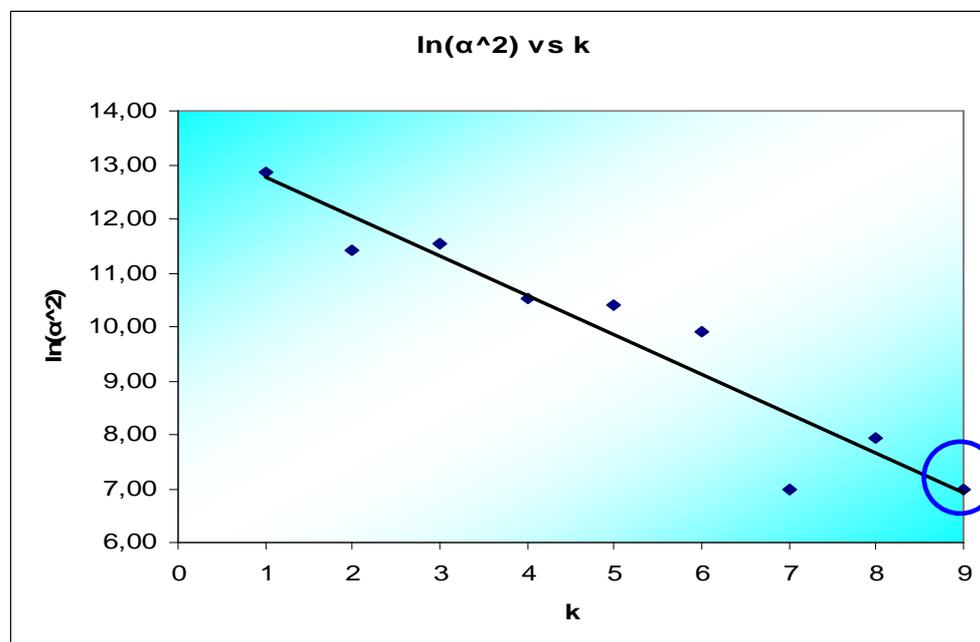


Grafico 5: Valori di  $\alpha_k^2$  al variare di k.

In realtà, per individuare il valore dell'ultimo parametro  $\alpha_9^2$  è più opportuno fare riferimento alla seguente relazione:  $\hat{\alpha}_{l-1}^2 = \min \left\{ \frac{\hat{\alpha}_{l-2}^4}{\hat{\alpha}_{l-3}^2}, \min (\hat{\alpha}_{l-3}^2, \hat{\alpha}_{l-2}^2) \right\}$ .

Ricavati tutti gli elementi di "base" è possibile giungere attraverso opportune formulazioni, esplicitate in precedenza nella descrizione dettagliata del metodo di Mack, alle stime del costo ultimo, delle riserve per singola generazione e totale e dei rispettivi *standard errors* di seguito riportate.

	Ci10	Ri	s.e.(Ri)=s.e.(Ci)	s.e.Ri/Ri
i=2	<b>13203937</b>	229960	183550	80%
i=3	<b>13070548</b>	1140912	295728	26%
i=4	<b>12873911</b>	1724420	324524	19%
i=5	<b>11805425</b>	2393279	635218	27%
i=6	<b>12420147</b>	3449286	998754	29%
i=7	<b>13755673</b>	5291667	1356710	26%
i=8	<b>16487062</b>	9526331	2127046	22%
i=9	<b>13710707</b>	10397903	2360156	23%
i=10	<b>12076674</b>	11240720	3312466	29%
<b>Overall</b>		<b>45394479</b>	<b>5946440</b>	<b>13%</b>

**Figura 10: Costi ultimi, riserva, standard errors e ratio.**

Guardando con attenzione i valori degli *standard errors* è possibile notare che l'ammontare posto a riserva è sufficientemente elevato per ogni generazione tant'è che si hanno *standard errors* non eccessivamente elevati fatta eccezione per il secondo anno di generazione  $i=2$ ; in particolare i valori del *ratio* ( $s.e.Ri/Ri$ ) risultano pressoché stabili nel tempo fatta eccezione per il secondo e quarto anno di generazione, che presentano rispettivamente il valore più alto ed il valore più basso.

Molto probabilmente, *standard errors* piuttosto elevati sarebbero stati dovuti all'alta incertezza relativa alle stime ottenute per i pagamenti cumulati (triangolo inferiore).

In precedenza si è accennato che per poter definire gli intervalli di confidenza per i valori della riserva per ogni singola generazione è necessario conoscere la distribuzione della stessa.

Ricordando che la distribuzione *Normale* è una distribuzione simmetrica, potrebbe non rappresentare una buona approssimazione per il vero valore della distribuzione della riserva  $R_i$  soprattutto se la distribuzione di quest'ultima è pressoché asimmetrica. In tal caso è raccomandabile un approccio basato su una distribuzione

*Log-Normale* definita dai parametri  $\mu_i$  e  $\sigma_i^2$  in modo che la media e la varianza delle due distribuzioni sono gli stessi e tali che:

$$\exp(\mu_i + \sigma_i^2 / 2) = R_i \quad \exp(2\mu_i + \sigma_i^2)(\exp(\sigma_i^2) - 1) = (s.e.(R_i))^2,$$

ciò conduce a  $\sigma_i^2 = \ln(1 + (s.e.(R_i))^2 / R_i^2)$  e  $\mu_i = \ln(R_i) - \sigma_i^2 / 2$

In particolare definendo, ora, un intervallo di confidenza al 90% per la riserva *overall* con distribuzione *Log-Normale*, in corrispondenza del limite superiore dell'intervallo si avrà:

$$\exp(\mu + 1.28\sigma) = \text{Re xp}(1.28\sigma - \sigma^2 / 2) = \mathbf{53188600},$$

dove 1.28 è il 90° percentile della distribuzione Normale Standardizzata.

Invece, in corrispondenza del limite inferiore si ha :

$$\exp(\mu - 1.28\sigma) = \text{Re xp}(-1.28\sigma - \sigma^2 / 2) = \mathbf{38088897}$$

Considerando questi due risultati e risolvendo rispettivamente le seguenti sommatorie

$$\sum_2^I R_i \exp(t\sigma_i - \sigma_i^2 / 2) = 53188600 \quad \text{e} \quad \sum_2^I R_i \exp(-t\sigma_i - \sigma_i^2 / 2) = 38088897$$

sono stati ottenuti rispettivamente come valori di **t 0.76**, corrispondente al 77° percentile e **-0.57** corrispondente al 28° percentile della distribuzione Normale.

Rispetto ai dati utilizzati nell'analisi, nelle seguenti tabelle si riportano i risultati ottenuti per il calcolo del limite inferiore e superiore dell'intervallo di confidenza per la riserva.

	Limite Inferiore	Limite Superiore
i=2	120175	306516,2
i=3	954209	1340716
i=4	1522780	1952942
i=5	1991820	2820772
i=6	2815793	4110957
i=7	4435550	6209925
i=8	8193030	10995032
i=9	8917262	12024038
i=10	9138278	13427701
<b>Overall</b>	<b>38088897</b>	<b>53188600</b>

**Figura 11: Intervalli di confidenza per  $t_{inf}=-0.57$   $t_{sup}=0.67$ .**

Ciò significa che l'intervallo di confidenza ottenuto  $77\%-28\%=49\%$  per ogni anno di accadimento conduce all'intervallo di confidenza del  $90\%-10\%=80\%$  per l'ammontare complessivo di riserva.

A partire dai risultati ottenuti è stato possibile individuare l'intervallo di confidenza per il costo ultimo all' $80\%$ , traslando, in un certo senso, i risultati ottenuti per l'intervallo di confidenza della riserva.

	Ci10	intervalli di confidenza 80 %		limiti empirici	
		inf	sup	inf	sup
2	13203937	13094151	13280493	13203937	13203937
3	13070548	12883844	13270352	12906084	13191243
4	12873911	12672271	13102433	12549080	13075424
5	11805425	11403965	12232918	11060604	12452003
6	12420147	11786654	13081817	10930608	14351104
7	13755673	12899556	14673931	11060907	16759050
8	16487062	15153760	17955762	11627916	23592681
9	13710707	12230066	15336843	8537963	22632557
10	12076674	9974232	14263655	5524493	26088344

**Figura 12: Limiti dell'intervallo di confidenza all'80% e limiti empirici per il costo ultimo.**

Nelle ultime due colonne della tabella precedente sono riportati i limiti empirici per il costo ultimo, ottenuti considerando i valori, presenti di seguito, del minimo e del massimo dei fattori di sviluppo per ogni anno  $k$ .

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lambda_{\min}$	2,564	1,543	1,278	1,073	1,037	1,044	1,040	1,063	1,018
$\lambda_{\max}$	4,568	2,016	1,712	1,238	1,209	1,128	1,061	1,086	1,018

Paragonando tra di loro l'intervallo di confidenza ed i limiti empirici ottenuti, si nota che quest'ultimi sono più stretti per  $i \leq 4$  e più ampi per gli anni più recenti  $i \geq 5$ .

Ciò doveva essere previsto in quanto negli ultimi anni non si registra una forte variazione dei valori minimi e massimi dei fattori di sviluppo.

Prima di giungere ad una valutazione della riserva secondo quanto imposto dalle normative vigenti e dal progetto Solvency II, attraverso opportuni test sulla correlazione dei fattori di sviluppo e sugli effetti dell'anno di calendario è stato dimostrato, per i dati presi in considerazione in questa analisi, che i fattori di sviluppo sono correlati e che non c'è alcun effetto dell'anno di calendario quindi non è opportuno cambiare i pesi considerati per gli stessi fattori<sup>34</sup>.

Infine, in linea con il progetto Solvency II, è stato possibile calcolare il nuovo requisito di riserva definito come somma della *best estimate* degli impegni in essere alla fine dell'esercizio e di un *risk margin* volto ad esplicitare il livello di incertezza dei *cash-flow* futuri.

In particolare per la prima componente, utile per catturare implicitamente la volatilità dei rischi cosiddetti diversificabili e definita dalla speranza matematica dei futuri esborsi, è stato considerato, a partire dal triangolo dei pagamenti cumulati stimati, il triangolo inferiore dei pagamenti incrementali, evidenziati in rosso nella tabella sottostante.

---

<sup>34</sup> Per i calcoli relativi alla dimostrazione dei due test considerati si rimanda all'appendice.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i=1									
i=2									229960
i=3								913275	227637
i=4							600672	899536	224212
i=5						811980	550818	824878	205604
i=6					931386	854260	579500	867830	216310
i=7				1471482	1031537	946118	641813	961147	239569
i=8			3183927	1763666	1236364	1133984	769254	1151997	287139
i=9		2475767	2647767	1466672	1028165	943025	639715	958005	238786
i=10	2082033	2180707	2332208	1291875	905629	830636	563474	843831	210328

Figura 13: Stime dei pagamenti incrementali.

Successivamente, i pagamenti per ogni anno di calendario ( $k+1$ ) sono stati scontati, considerando un tasso *risk free* annuo del 4%, e riportati all'epoca di valutazione  $t=0$ .

In definitiva il valore ottenuto per la *Best Estimate* è pari a **40.480.224**.

Per quanto riguarda la componente di *risk margin*, posto a copertura della volatilità dei rischi non diversificabili, aspetto non catturato nelle riserve *best estimate* e, quindi, con i modelli deterministici, è stata ottenuta considerando la seguente

relazione:

$$\delta = \eta' * Std(L)$$

Dove  $\eta'$  rappresentano, su indicazione IAA per il 75-esimo percentile, le quote della deviazione standard della riserva  $Std(L)$ .

I valori ottenuti per il *risk margin*, considerando una quota di 0.67 per una distribuzione *Normale* ed una quota di 0.64 per una distribuzione *Log-Normale*, sono rispettivamente **5.345.335** e **5.105.991**.

In definitiva, quindi, in questo caso, la riserva data dalla seguente relazione  $R^* = E(L) + \eta' Std(L)$ , è pari a: **45.825.558** nel caso si assuma una distribuzione di tipo *Normale* e **45.586.215** nel caso in cui si assuma una distribuzione di tipo *Log-Normale*.

I valori ottenuti risultano maggiori della riserva *Overall* calcolata in precedenza in virtù del fatto che, il requisito di *benchmark* armonizzato proposto dal CEIOPS permette di considerare nel calcolo della stessa l'incertezza dei cash-flow futuri, catturare implicitamente la volatilità dei rischi cosiddetti diversificabili.

### 3.8 Conclusioni

Il presente lavoro si inserisce nel vasto e attuale discorso della valutazione della riserva sinistri per le imprese di assicurazioni contro i danni.

In virtù di quanto emerso finora, secondo quanto proposto dal CEIOPS e di quanto avverrà nell'imminente futuro con l'attuazione del nuovo progetto Solvency II, sarà sempre più ammissibile la possibilità di ricorrere a tecniche di natura stocastica, da imporre alle imprese assicuratrici, per la valutazione della riserva sinistri.

Infatti, i modelli stocastici e le metodologie di riservazione hanno avuto una forte crescita negli ultimi anni, in particolare l'attenzione a tali modelli, che riproducono le stime del *chain-ladder* può apparire, in molti casi, un esercizio "futile", sebbene considerevoli intuizioni possano essere raggiunte con l'introduzione di questi modelli.

Le metodologie stocastiche analizzate risultano essere esclusivamente un riferimento dato che producono *best estimate* identiche a quelle prodotte dal metodo deterministico del *chain-ladder*. Ma la domanda principale è *qual è il modello migliore?*

In realtà non esiste una vera risposta, il tutto dipende dal problema che si sta affrontando o dal tipo di dati a disposizione. Aspetto, quest'ultimo, che deve essere opportunamente esaminato nel dettaglio per trovare il modello adatto.

Altro aspetto importante da considerare nella valutazione dei punti di forza e debolezza dei metodi stocastici, riguarda la soggettività che grava sulla scelta del modello stesso e di alcune ipotesi relative ad esempio ai fattori di coda (*tail factor*).

Tuttavia questa soggettività può comunque essere regolata attraverso la definizione di linee guida di comportamento per la scelta dei metodi di stima di determinati parametri, rendendo così controllabile il processo da parte dei diversi supervisori.

Nella determinazione della metodologia di “*riservazione*” opportuna diversi sono gli aspetti da considerare:

- Non esiste un metodo stocastico direttamente applicabile a tutte le situazioni e, più in generale, a tutti i rami assicurativi;
- Devono essere opportunamente selezionate le ipotesi sulla distribuzione di probabilità sottostante il metodo stocastico;
- Sono soggetti a scelta i dati cui applicare la metodologia stessa (ad esempio *run-off* dei singoli pagamenti, degli *incurred claims*, ecc.).

Infine, sempre in merito ai dati bisogna tener conto della loro stabilità della sufficienza del loro numero, caratteristica indispensabile per l’applicazione di metodi statistici nell’ambito della “*riservazione*”.

Ciò nonostante i metodi stocastici hanno diversi pregi, come:

- L’essere applicati in un *framework* coerente dal punto di vista scientifico;
- L’essere rigorosi nella procedura di calcolo che, una volta specificata, è ripetibile ai fini di controllo da parte di autorità di vigilanza, revisori, *stakeholders*;
- Il fornire una risposta matematica rigorosa alle domande inerenti probabilità e quantili, in particolar modo in vista delle nuove modalità di gestione del rischio e dell’approccio all’incertezza che queste richiedono;
- Il produrre, in virtù dell’approccio all’incertezza, distribuzioni empiriche delle *Outstanding Loss Liabilities* separate per anno di accadimento e per *maturity*, e le distribuzioni empiriche delle riserve a costo ultimo “*future*”; in particolare, forniscono la distribuzione di probabilità sufficiente per il calcolo del *reserve risk capital*;

ed infine

➤ L'associare automaticamente ai risultati aggregati, come la somma delle riserve sinistri delle singole generazioni, i corretti effetti di diversificazione.

Qualora si adottasse questa impostazione, le imprese, i revisori, gli attuari dovrebbero misurarsi prioritariamente con tali metodologie; inoltre, su di loro ricadrebbe l'eventuale onere di dimostrare alla vigilanza l'inapplicabilità delle metodologie, concordando, con essa, metodi e ipotesi di calcolo alternativi.

In sostanza, si tratta di una svolta nella gestione corretta del rischio di impresa, in linea con quanto richiesto dall'ISVAP alle imprese con la recente circolare 577/D del 30 dicembre 2005 relativamente al controllo interno.

## **Bibliografia**

- [1] ISVAP, *I metodi stocastici per la misura della riserva sinistri: un approccio al comparto auto*, Ottobre 2006.
- [2] T.Mack, *Measuring the variability of chain ladder reserve estimates*, Faculty and Institute of Actuaries Claims Reserving Manual vol.2 (09/1997), *Munich Re*.
- [3] T. Mack, *Distribution-Free Calculation of the standard error of Chain-Ladder reserve estimates*, *Munich Re*.
- [4] P.D. England e R.J. Verrall, *Stochastic claims reserving in general insurance*, [presented to the Institute of Actuaries, Gennaio 2002.
- [5] International Actuarial Association, *A Global Framework for Insurer Solvency Assessment*, *IAA Insurer Solvency Assessment Working Party*, Maggio 2003.
- [6] M. DeFelice e F. Moriconi, *Risk Based Capital in P&C Loss Reserving or Stressing the Triangle*, Dicembre 2003.
- [7] M. DeFelice e F. Moriconi, *Best estimate delle riserve tecniche e risk margin*, ANIA, 2006.
- [8] *Loss reserving methods*, Survey of Actuarial Studies n°1.
- [9] Attuari Domani , n°2, Settembre/Novembre 2004.
- [10] Attuari Domani, n°2, Marzo /Maggio 2005.
- [11] C.D. Daykin, T. Penttinen, M. Pesonen, *Practical Risk Theory for Actuaries*, 1994, Chapman and Hall, London.
- [12] N. Savelli, *Un modello di teoria del rischio*, Ed.Lint, Trieste.

[13] L. Daboni, *Lezioni di tecnica attuariale delle assicurazioni contro i danni*, 1989, Ed.Lint, Trieste.

[14] F. Gismondi, G. Curti, T. Di Gregorio, *Il bilancio delle imprese di assicurazione*, Il Sole 24Ore.

## Appendice

### ➤ Test sulla correlazione dei fattori

A partire dal triangolo dei pagamenti cumulati, si considera il seguente triangolo dei fattori di sviluppo ottenuti come rapporto tra  $C_{i,k+1}$  e  $C_{i,k}$ :

	$F_{k1}$	$F_{k2}$	$F_{k3}$	$F_{k4}$	$F_{k5}$	$F_{k6}$	$F_{k7}$	$F_{k8}$	$F_{k9}$
i=1	3,143	1,543	1,278	1,238	1,209	1,044	1,040	1,063	1,018
i=2	3,511	1,755	1,545	1,133	1,084	1,128	1,057	1,086	
i=3	4,448	1,717	1,458	1,232	1,037	1,120	1,061		
i=4	4,568	1,547	1,712	1,073	1,087	1,047			
i=5	2,564	1,873	1,362	1,174	1,138				
i=6	3,366	1,636	1,369	1,236					
i=7	2,923	1,878	1,439						
i=8	3,953	2,016							
i=9	3,619								

Successivamente si considerano i ranghi ( $r_{ik}$ ) dei suddetti fattori e con  $s_{ik}$  i ranghi relativi alla colonna di fattori precedenti, con  $1 \leq s_{ik} \leq I-k$ :

$r_{i1}$	$s_{i2}$	$r_{i2}$	$s_{i3}$	$r_{i3}$	$s_{i4}$	$r_{i4}$	$s_{i5}$	$r_{i5}$	$s_{i6}$	$r_{i6}$	$s_{i7}$	$r_{i7}$	$s_{i8}$	$r_{i8}$
3	3	1	1	1	1	6	5	5	4	1	1	1	1	1
5	5	5	5	6	5	2	2	2	2	4	3	2	2	2
8	7	4	4	5	4	4	4	1	1	3	2	3		
9	8	2	2	7	6	1	1	3	3	2				
1	1	6	6	2	2	3	3	4						
4	4	3	3	3	3	5								
2	2	7	7	4										
7	6	8												
6														

I valori ottenuti per il coefficiente di correlazione di Spearman

$$T_k = 1 - 6 \frac{\sum_{i=1}^{I-k} (r_{ik} - s_{ik})^2}{(I-k)^3 - I + k} \text{ sono:}$$

k	2	3	4	5	6	7	8
$T_k$	-0,238	0,071	-0,829	0,300	-0,800	0,500	1,000

$$\text{Si è ottenuto } T = \sum_{k=2}^{I-2} \frac{I-k-1}{(I-2)(I-3)/2} T_k = -0.164$$

Considerando che tale valore non è incluso nel seguente intervallo

$$T \pm \frac{0.67}{\sqrt{\frac{1}{\text{Var}(T)}}} = T \pm 0.127 \text{ dove } \text{Var}(T) = 0.036, \text{ si rifiuta l'ipotesi nulla di in}$$

correlazione tra i fattori.

➤ **Test sugli effetti dell'anno di calendario**

A partire dal triangolo di tutti i fattori di sviluppo osservati, suddividendo i fattori in *Small (S)* o *Large (L)* a seconda che siano minori o maggiori della mediana del rispettivo anno  $k$ , si ottiene il seguente triangolo:

	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8	j=9
j=1	S	S	S	L	L	S	S	S	*
j=2	*	L	L	S	S	L	*	L	
j=3	L	S	L	L	S	L	L		
j=4	L	S	L	S	*	S			
j=5	S	L	S	S	L				
j=6	S	S	S	L					
j=7	S	L	*						
j=8	L	L							
j=9	L								

Considerando la seguente tabella:

j	$s_j$	$l_j$	$z_j$	$n=(s_j+ l_j)$	$Prob(Z_j \leq z_j)$
2	1	0	0	1	>10%
3	1	2	1	3	>10%
4	1	3	1	4	>10%
5	3	2	2	5	>10%
6	3	3	3	6	>10%
7	6	1	1	7	>10%
8	3	3	3	6	>10%
9	1	6	1	7	>10%

Poiché tutte le probabilità, presenti nell'ultima colonna, sono tutte inferiori al 10%, allora non sono riscontrabili effetti dell'anno di calendario per cui non è necessario cambiare i pesi dei fattori di sviluppo.