

# **Ein multivariater Cox Prozess mit zeitgleichen Sprüngen und seine Anwendung in der aktuariellen Modellbildung**

**Dissertation an der Technischen Universität München**

Daniela Selch

Die Modellierung von Abhängigkeiten zwischen verschiedenen versicherungstechnischen Risiken hat aufgrund großer Schadensereignisse durch Hurrikane, großflächige Überschwemmungen und andere Naturkatastrophen in jüngster Vergangenheit stark an Bedeutung gewonnen. Werden vorhandene Abhängigkeiten und Großereignisse im Modellierungsansatz vernachlässigt, kann dies zu einer deutlichen Unterschätzung des Gesamtrisikos führen. In dieser Arbeit wird ein multivariater Prozess für Schadenszeitpunkte vorgestellt, der eine realistische Abbildung von Abhängigkeiten und gebündelt auftretenden Schäden ermöglicht und zudem mathematisch handhabbar ist.

## **Motivation**

Zahlreiche Problemstellungen in der Schadensversicherungsmathematik, wie beispielsweise die Berechnung von Prämien und Risikorückstellungen, erfordern eine adäquate Modellierung der Gesamtschadenssumme eines Versicherungsportfolios. Im klassischen kollektiven Risikomodell, das aufgrund seiner Handhabbarkeit sowie Anschaulichkeit noch verbreitet Anwendung findet, werden dabei die Schadenszeitpunkte mittels eines eindimensionalen Poisson-Prozesses dargestellt. Dieser erlaubt aber nicht die Abbildung von Überdispersion und schließt insbesondere das zeitgleiche Auftreten von Schäden aus, obgleich diese in Daten häufig beobachtbar sind. Zudem werden im klassischen Ansatz verschiedene Portfolios unabhängig voneinander behandelt, ein häufig unrealistischer Ansatz, insbesondere wenn die Schadenszahlen von gleichen Faktoren beeinflusst werden. Die Vernachlässigung von vorhandenen positiven Abhängigkeiten und gehäuftem Auftreten von Schäden in der Modellierung kann jedoch zu einer signifikanten Unterschätzung des aktuariellen Risikos führen. Es ergibt

sich daher der Bedarf für ein multivariates Modell für Schadenszeitpunkte, welches eine wirklichkeitsgetreue Abbildung dieser Effekte ermöglicht, aber gleichzeitig mathematisch handhabbar bleibt. Ein solches Modell wird in der vorliegenden Arbeit vorgestellt und dessen Eigenschaften sowie praktische Umsetzung im Detail untersucht.

## **Modell**

Ausgangspunkt ist der klassische Ansatz mit je einem unabhängigen Poisson-Prozess für jedes betrachtete (Teil-)Portfolio. Diese Prozesse werden jedoch nicht linear in der Zeit beobachtet, sondern anhand einer gemeinsamen stochastischen Uhr in der Form eines unabhängigen Lévy Subordinators. Während diese Uhr so normalisiert werden kann, dass sie im Durchschnitt dem Tempo der reale Zeit entspricht, verläuft sie doch zufällig schneller oder langsamer, entsprechend Zeiten von schwächerem und stärkerem Schadensaufkommen bis hin zu katastrophalen Ereignissen. Da alle Prozesse der gleichen Zeit folgen, wird zudem Abhängigkeit erzeugt. Der konstruktive Ansatz basierend auf dem Standardmodell erlaubt nicht nur eine gute Interpretierbarkeit des Modells, sondern ermöglicht auch mathematische Handhabbarkeit in sogar hochdimensionalen Anwendungen, eine kritische Anforderung für die praktische Umsetzung, die jedoch schwer zu erreichen und daher Gegenstand aktueller Forschungsbemühungen ist.

## **Modelleigenschaften**

Neben der Konstruktion als zeit-transformierter multivariater Poisson-Prozess (Cox Prozess) wird in der Arbeit auch die Darstellung als zusammengesetzter Poisson-Prozess hergeleitet. Diese ermöglicht einen tieferen Einblick in die zeitliche Entwicklung der Schadenszahlen sowie die entstehende Abhängigkeitsstruktur, wodurch die Eignung des Modells für spezifische Anwendungen besser beurteilt werden kann. Auch werden dadurch die Verbindungen zu etablierten Modellen deutlicher, welche in der Arbeit detailliert herausgearbeitet wurden, und der Wechsel zwischen den Darstellungen erlaubt die geschlossene Herleitung vieler analytischer Ergebnisse. So werden unter Anderem die multivariate Verteilung der Schadenszahlen sowie der Clustergrößen, ihre (gemischten) Momente und die Laplace Transformierten hergeleitet.

Besonderes Augenmerk wird dabei auf die belastbare Implementierung der gefundenen Formeln in Computersoftware gelegt. Zudem werden für gängige Subordinatoren die Ergebnisse explizit berechnet und die Unterschiede in den resultierenden Randverteilungen und Abhängigkeitsstrukturen herausgestellt.

## **Simulation und Approximation**

Ein effizienter Algorithmus für die Simulation des Modells wird in der Arbeit vorgestellt. Durch die bedingte Unabhängigkeit im Modell ist es möglich, zunächst unabhängig voneinander Pfade des Subordinators und der zugrunde liegenden Poisson-Prozesse zu ziehen, um erst anschließend die tatsächlichen Schadenszeitpunkte auszuwerten. Dies ermöglicht eine schnelle und stabile Simulation selbst in sehr hohen Dimensionen, wodurch auch komplexe Fragestellungen an das Modell ausgewertet werden können.

Des Weiteren wird das Verhalten des Modells für eine wachsende Anzahl von Komponenten untersucht. Es wird gezeigt, dass sich im Fall approximativ homogener Schadensintensitäten die Gesamtschadenszahl gemäß des mit der erwarteten Schadenszahl skalierten Subordinators entwickelt. Es lässt sich daher im hoch dimensionalen Fall die Verteilung der Gesamtschadenszahl durch die univariante Verteilung des gewählten Subordinators annähern. Das Ergebnis verdeutlicht auch einen entscheidenden Unterschied des vorgestellten Modells zum klassischen Ansatz unabhängiger Poisson-Prozesse: Während sich im klassischen Fall entsprechend des Gesetzes der großen Zahlen das Risiko vollständig diversifizieren lässt, bleibt im gegebenen Modell ein Restrisiko in Form des gemeinsamen treibenden Faktors bestehen.

## **Prämienberechnung**

Die Untersuchung der Auswirkungen des Modells auf aktuarielle Risikozahlen sowie Prämienberechnungen zeigt, dass die gebündelt auftretenden Schäden und die positive Abhängigkeit zu einem erhöhten Risiko und entsprechend gesteigertem Prämien- und Rückstellungsbedarf führt, um die Solvenz des Versicherers sicherzustellen. Es wird insbesondere gezeigt, dass das Basismodell (bestehend aus

unabhängigen Poisson-Prozessen), das Zwischen-Modell (mit zeit-transformierten unabhängigen Poisson-Prozessen) und das volle Modell (basierend auf einer gemeinsamen Zeittransformation) zunehmend riskanter werden nach konvexer Ordnung. Diese Ordnungsrelation entspricht der Wahl jedes risikoaversen Investors und gilt für zahlreiche bekannte Kenngrößen, wie beispielsweise den Tail-Value-at-Risk und Stop-Loss Rückversicherungsprämien. Da sich der Effekt verstärkt bei Nichtlinearität und Tail-Abhängigkeit der Verträge, ist eine Vernachlässigung im Modellierungsansatz insbesondere im Rückversicherungsbereich kritisch.

## **Parameterschätzung**

Der mehrdimensionale, zeitdynamische Modellierungsansatz mit mehreren Parameter stellt ein anspruchsvolles Schätzproblem für eben diese Parameter aus historischen Daten dar. Die spezielle Struktur des Modells sowie die verschiedenen expliziten Darstellungsweisen erlauben es aber, vier effiziente Methoden zu formulieren, die sich für verschiedene Datenlagen und Schwerpunkte anbieten – insbesondere abhängig davon, ob eine zeitstetige Beobachtung der Schadenszeitpunkte möglich ist oder nur diskrete (beispielsweise monatliche) Daten vorliegen. Eine Lösung der entsprechenden Optimierungsprobleme, basierend auf den multivariaten Verteilungen der Schadenszeitpunkte oder Schadenszahlen, ist zwar im Allgemeinen nur numerisch möglich, doch kann diese aufgrund der erarbeiteten effizienten Auswertungsmethoden zügig und stabil gefunden werden. Anhand einer ausgiebigen Monte Carlo Simulation, ermöglicht durch die effiziente Simulationsroutine, wurde die Qualität der Parameterschätzer und die Vorzüge der verschiedenen Methoden eingehend untersucht. Durch Anwendung auf einen realen Datensatz wurde zudem die praktische Umsetzbarkeit nachgewiesen.

## **Zusammenfassung**

Das vorgestellte Modell zeichnet sich dadurch aus, im Spannungsfeld zwischen wirklichkeitsnaher Abbildung, Anschaulichkeit und Handhabbarkeit sogar in hochdimensionalen Anwendungen zu bestehen. Die Erfassung von Abhängigkeiten und gehäuften Schäden

ermöglicht eine realistischere Quantifizierung des tatsächlichen Risikos und der zeitdynamische Ansatz bietet ein konsistentes Modell für beliebige Zeiträume. Modellerweiterungen, welche beispielsweise eine saisonale Komponente ermöglichen, werden in der Arbeit ebenfalls vorgestellt. Der konstruktive Aufbau sowie die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten geben ein intuitives Verständnis für die Modelldynamik und schlagen die Brücke zu etablierten Ansätzen. Die Handhabbarkeit ist sichergestellt durch analytische Auswertungen von Verteilungsgrößen, Approximationen für Tails und hohe Dimensionen sowie eine Simulationsroutine. Insbesondere ist damit eine Auswertung von Prämien und Risikokennzahlen sowie die Schätzung der Modellparameter möglich. Die vorgelegte Arbeit bietet somit eine ganzheitliche Betrachtung des Modells mit besonderem Blick auf die praktische Umsetzung im Schadensversicherungsbereich.