

UNIVERSITÁ CATTOLICA DEL SACRO CUORE DI
MILANO

Interfacoltà di Scienze Bancarie, Finanziarie e Assicurative,
Economia

Corso di laurea in Scienze Statistiche, Attuariali ed
Economiche

Il Life Underwriting Risk e l'utile demografico:
un'analisi stocastica comparativa tra i principi local
GAAP e la Market Consistent Valuation

Relatore: Chiar.mo Prof. Nino SAVELLI

Tesi di laurea di:
Francesco DELLA CORTE
MATR. 4502938

Anno Accademico 2017-2018

Indice

Introduzione.....	5
Capitolo I: L'evoluzione del requisito di capitale per le Imprese di Assicurazione Vita	7
1.1 Introduzione alla solvibilità delle imprese d'assicurazione sulla durata di vita.....	7
1.2 Il MMS di Solvency 0: analisi e studi preparatori	9
1.3 Dai limiti di Solvency I alla necessità di Solvency II	13
1.4 Il progetto Solvency II.....	16
1.4.1 La struttura a 3 Pilastri di Solvency II.....	18
1.4.2 Il primo pilastro.....	20
1.4.3 La valutazione di attività e passività nell'EBS.....	21
1.4.4 La valutazione delle riserve tecniche nell'Economic Balance Sheet	24
1.4.5 I Fondi Propri.....	33
1.4.6 Il Solvency Capital Requirement e le metodologie di calcolo	35
1.4.7 La Standard Formula	38
1.5 Il Life Underwriting Risk	47
1.5.1 La calibrazione dei parametri.....	59
1.5.2 L' implementazione della valutazione a fair value nel metodo Δ BOF	60
1.6 Il Life Underwriting Risk nel QIS2.....	63
1.7 Conclusioni.....	66
Capitolo II: La valutazione dei principali prodotti vita sulla base del tasso di premio e del tasso di riserva matematica	67
2.1 Introduzione.....	67
2.2 Gli elementi preliminari in un contesto deterministico	69
2.2.1 I principali prodotti nei rami Vita.....	69
2.2.2 Polizze adeguabili e polizze rivalutabili.....	80
2.2.3 L'equazione di Fouret: i tassi dei premi di rischio e risparmio	83
2.2.4 Dal valore attuariale all'utile demografico.....	87
2.3 Il cohort approach e la v.a. utile demografico	90
2.3.1 Il capitale sotto rischio	93
2.4 I momenti dell'utile demografico su un orizzonte temporale annuo	94
2.5 Un case study: l'utile demografico dei principali prodotti vita	96
2.5.1 Il capitale differito.....	97

2.5.2	La rendita differita.....	102
2.5.3	La TCM.....	109
2.5.4	La mista.....	113
2.6	L'aggregazione dei portafogli: cenni sulle funzioni copule.....	118
2.6.1	Copule ellittiche e copule archimedee.....	122
2.7	Il natural hedging: un case study utilizzando le funzioni copula.....	127
2.7.1	Il natural hedging: definizione, tipologie e aspetti principali.....	127
2.7.2	L'utilizzo di copule ellittiche e archimedee per riprodurre il natural hedging in $t=0$	129
2.7.3	Copula Gaussiana e copula di Clayton: un confronto in $t=0$, $t=10$ e a scadenza ($t=19$).....	135
Capitolo III: La modellizzazione stocastica e market consistent dell'utile demografico.....		145
3.1	Introduzione.....	145
3.2	La formulazione market consistent dell'utile industriale e delle sue componenti	146
3.3	Una formulazione compatta dell'utile demografico market consistent.....	147
3.4	Le ipotesi sottostanti la stima di $be1Rf1$, q e il modello di Vašíček.....	150
3.5	Una formula ricorrente riguardante la best estimate qualora in t si prevedano correttamente i tassi privi di rischio di $t+1$	156
3.6	Conclusioni.....	159
Capitolo IV: Un case study e una comparazione tra i due approcci.....		160
4.1	Introduzione.....	160
4.1.1	La MCV e l'utile demografico di un portafoglio di CD.....	161
4.1.2	La MCV e l'utile demografico di un portafoglio di miste.....	168
4.2	Un case study in $t = 10$ e $t = 19$: gli effetti della scelta del time horizon sul SCR	174
4.2.1	Il portafoglio di capitali differiti.....	174
4.2.2	Il portafoglio di Miste.....	178
4.3	Il valore atteso della somma di $1 y1LG$ e $1 y1MCV \sim BestEstimate/v0b$	181
4.3.1	L'equazione ricorsiva "mista" (j^* e q).....	182
4.3.2	Implicazioni e corollari dell'equazione ricorsiva "mista" (j^* e q).....	184
4.4	Riepilogo e conclusioni.....	187
Riflessioni finali.....		191
Appendice A – Tavole selezionate e tavole proiettate: il caso delle A62.....		195

A.1	Tavole selezionate e tavole proiettate.....	195
A.2	Le tavole A62 e il meccanismo dell'age-shifting.....	198
Appendice B – Approfondimenti di elementi di tecnica attuariale delle assicurazioni sulla durata di vita		202
B.1	Gli effetti derivanti dai cambiamenti delle basi tecniche sull'andamento del tasso di RM pura nei principali prodotti.....	202
B.2	La scomposizione dell'utile demografico.....	212
Bibliografia		215
Ringraziamenti.....		221

Introduzione

“È facile capire che la probabilità che qualcuno attribuisce alla verità – o al verificarsi – di un certo evento (fatto singolo univocamente descritto e precisato) altro non è che la misura del grado di fiducia nel suo verificarsi”

Bruno de Finetti

L’idea da cui è nato il presente elaborato, nonché il motivo per cui è stata scelto questo tema, non si può ricercare esclusivamente nel fascino della materia: è innegabile l’aspirazione di portare innovazione e coerenza con il cambiamento che ha interessato il settore assicurativo nazionale e internazionale in seguito all’introduzione dell’attuale sistema governativo denominato Solvency II.

Nonostante gli spunti di riflessione provengano da molteplici fonti, il testo che ha svolto il ruolo di obiettivo che quello di orientamento è “Un modello di teoria del rischio: per la valutazione della solvibilità di una Compagnia di assicurazioni sulla vita” pubblicato nel 1993 dal Prof. Nino Savelli. Proprio con il fine di riprendere il suddetto scritto e adattare i modelli proposti al sistema di regolamentazione vigente, il Capitolo 1 analizza l’evoluzione del requisito di capitale per un’impresa di assicurazione sulla durata di vita, soffermandosi su come il rischio più caratteristico legato alla sopravvivenza, il c.d. *longevity risk*, sia trattato dalla Direttiva 2009/138/CE.

I primi 5 paragrafi del Capitolo 2 invece, riprendono tutti quei concetti tradizionali della matematica e della tecnica attuariale vita, ponendo particolare riguardo sia all’importanza delle scelte dell’assicuratore in fase di tariffazione che alla determinazione dell’utile demografico in un contesto *local GAAP*. I Paragrafi 6 e 7 invece, introducono il tema delle dipendenze tra portafogli composti da rischi omogenei: in questo contesto si presentano i tratti più caratteristici di due funzioni

copula e si quantifica quanto una variazione dei parametri che descrivono la dipendenza, sia importante in termini di requisito di capitale.

Il terzo Capitolo riprende lo scopo essenziale della tesi, ovvero quello di riformulare l'utile demografico su un orizzonte temporale annuale, implementando però la *market consistent valuation*: le riserve matematiche non saranno più *locked* e prudenziali, ma saranno sostituite dall'ormai noto concetto di Best Estimate.

Il quarto Capitolo, posto a conclusione dell'elaborato, implementa il modello stocastico del precedente capitolo a due portafogli di polizze diverse, evidenziando i valori assunti dall'utile demografico e dalle sue componenti, mettendo in luce i *drivers* del modello e, soprattutto, dimostrando due equazioni ricorrenti che giustificano i risultati ottenuti.

Capitolo I: L'evoluzione del requisito di capitale per le Imprese di Assicurazione Vita

1.1 Introduzione alla solvibilità delle imprese d'assicurazione sulla durata di vita

L'obiettivo di questo primo capitolo sarà quello di analizzare l'attuale sistema normativo che regola il requisito di capitale per un'impresa di assicurazione sulla durata di vita. A tal fine si analizzerà l'evoluzione di tale requisito attraverso le varie normative, da Solvency 0 a Solvency II, tentando sempre di inquadrare quali fossero i rischi individuati alla base del calcolo. Dal Paragrafo 1.4 si pone particolare attenzione non solo ai requisiti di capitale, ma anche alla valutazione delle principali voci patrimoniali di un'impresa di assicurazione: tale diversione ha una duplice finalità. In primo luogo è propedeutica al resto dell'elaborato, in quanto la metodologia di valutazione delle riserve tecniche in un'ottica Solvency II porterà ad una formulazione dell'utile demografico diversa da quella dedotta con l'utilizzo di basi demografiche e finanziarie c.d. del I° ordine. In secondo luogo è necessaria per cogliere appieno l'approccio economico basato sul rischio adottato dalla normativa in vigore.

Prima di cominciare l'analisi e l'esposizione del requisito patrimoniale, si vuole definire e argomentare il concetto di "solvibilità", fine ultimo di ogni normativa al fine di proteggere la figura del contraente all'interno del contratto di assicurazione. La solvibilità di un'impresa di assicurazione è quella fattispecie in cui la compagnia è in grado di far fronte al pagamento degli importi verso gli assicurati, ossia è in grado di far fronte agli obblighi presi contrattualmente. Il

business assicurativo però è fortemente caratterizzato dall'alea e per questo richiedere alle compagnie di essere solvibili in senso assoluto (in ogni scenario immaginabile, seppur mai verificatosi) significa richiedere alle compagnie di detenere fondi propri illimitati. Più realizzabile quindi, è di richiedere lo *status* di solvibilità in senso probabilistico, ovverosia richiedere che fissato una certa “soglia di tolleranza” particolarmente bassa, la compagnia sia solvibile. In questo contesto, assumono particolare importanza i concetti di livello di confidenza e orizzonte temporale cosicché quando si definisce il *worst case scenario* fissato un determinato livello di confidenza $(1 - \alpha)$ si pensa a quello scenario rispetto al quale si ipotizza che la probabilità che le cose vadano meglio sia pari al valore $(1 - \alpha)$. La definizione di un orizzonte temporale è necessaria per analoghi motivi. Essendo il fine di questo elaborato quello di riflettere sulla natura dell'utile demografico e delle perdite in un contesto Solvency II, si incomincia ora l'analisi della normativa con particolare riferimento ad una compagnia di assicurazione sulla durata di vita. Il Paragrafo 1.6 coincide in quest'ottica il momento in cui, noti i rischi che gravano sulla solvibilità dell'impresa di assicurazione in esame, ci si concentra sui rischi la cui natura è prettamente collegata all'andamento delle variabili demografiche.

Il presente capitolo termina con il Paragrafo 1.6 dove si tratta come i rischi di longevità e mortalità sono trattati nel QIS2. Ciò ha un'importanza esclusiva perché tali risultati saranno dimostrati, sotto determinate ipotesi, nel Capitolo 2 dove si presenterà un modello di teoria del rischio sull'utile demografico in un'ottica local GAAP.

1.2 Il MMS di Solvency 0: analisi e studi preparatori

Prima della promulgazione della Legge 742 del 1986, l'esercizio dell'attività assicurativa da parte delle imprese di assicurazione italiane, dal punto di vista del requisito patrimoniale, era subordinato al possesso di un capitale sociale minimo in funzione dei rami esercitati.

In seguito all'approvazione della suddetta legge, in attuazione della direttiva 79/267/CEE del Consiglio (c.d. "Prima Direttiva" o "Solvency 0" del 5 marzo 1979), l'esercizio dell'attività assicurativa nei rami vita è stata subordinata al possesso di un Margine di Solvibilità che fosse maggiore o quantomeno uguale ad un valore "minimo". Questo margine era formato dai suoi cosiddetti "elementi costitutivi", ossia voci del patrimonio netto dell'impresa utili ad assorbire le perdite in caso di difficoltà della compagnia. Tra questi valori si possono citare il capitale sociale (per le società per azioni e società cooperative, per le mutue di assicurazione si fa riferimento al fondo di garanzia), la metà del capitale sociale eventualmente non ancora versato, alcune riserve legali e statutarie e gli utili riportati.

Come si diceva, la somma di tali Elementi Costitutivi del Margine di Solvibilità (ECMS) doveva essere almeno pari ad un valore minimo, calcolato come:

$$MMS = (3\% + 1\%) \cdot V \cdot c_1 + 3\% \cdot (C - V)^+ \cdot c_2$$

Dove:

- ❖ V = valore delle Riserve Matematiche al lordo della riassicurazione
- ❖ $c_1 = \max(\frac{v^{net}}{v^{gross}}, 85\%)$ da cui si deduce che la riassicurazione poteva portare al massimo una riduzione del requisito di capitale del 15% del 4% delle riserve matematiche.
- ❖ $(C - V)^+$ Sono i capitali sotto rischio non negativi

- ❖ $c_2 = \max\left(\frac{(C-V)^{+,net}}{(C-V)^{+,gross}}, 50\%\right)$ da cui si deduce che il beneficio dovuto alla riassicurazione è al massimo il 50% del 3‰ dei capitali sotto rischio

L'articolo 38 della Legge 742 spiega che i coefficienti 3%, 1% e 3‰ variano in funzione della presenza di rischi nella tariffa considerata: in particolare

- ❖ Il 3% è impiegato laddove l'impresa assume rischio d'investimento: di conseguenza $3\% \cdot V \cdot c_1$ diventa un requisito di capitale legato al *market risk*.
- ❖ Qualora l'impresa non assuma alcun rischio di investimento e, contemporaneamente, il contratto presenti spese di gestione per un periodo superiore a cinque anni, il coefficiente 3% si annulla; la conseguenza è che $1\% \cdot V \cdot c_1$ è un requisito di capitale legato all'*expense risk*.
- ❖ Il requisito aggiuntivo dello 0,30% del capitale sotto rischio, solo se positivo, riguarda le sole tariffe in cui è presente *mortality risk*. Nel caso in cui ci si riferiva a Temporanee Caso Morte con durata inferiore a 3 anni, l'aliquota era dello 0,10%; per le TCM con durata compresa tra 3 e 5 anni, era lo 0,15%.

Lo studio di Campagne (1961)¹

L'individuazione del requisito di capitale legato al rischio di mercato e al rischio di spese tramite la quantità “ $4\% \cdot V$ ” fu il punto di arrivo degli studi di Campagne (1961), pubblicati nel secondo rapporto per conto dell'OEEC (Organisation for European Economic Co-operation).

Al risultato sopracitato egli giunse definendo inizialmente due *ratio* di fondamentale importanza: il *Loss Ratio* e il *Free Reserve Ratio*, calcolati rispettivamente come:

$$LR_t = \text{Perdita}_t / \text{Riserve Tecniche}_t$$

¹ “Standard minimum de solvabilité applicable aux entreprises d'assurances”, Report of the OECE, March 11 Reprinted in Het Verzekerings-Archief deel XLVIII, 1971-1974

$$FR_t = Asset_t / Riserve Tecniche_t$$

Avendo ipotizzato che i *Loss Ratio* dei vari anni fossero indipendenti e identicamente distribuiti, il *Free Asset Ratio* doveva essere tale che:

$$Prob(\widetilde{LR} > FR) \leq \varepsilon$$

In altre parole, si stava cercando il minimo valore di FR tale che la probabilità che il Loss Ratio lo superasse, fosse esattamente uguale ad ε : l'analisi si incentrava dunque sulla ricerca del Value at Risk del Loss Ratio, il VaRLR, inteso come percentile della distribuzione del LR di ordine $1 - \varepsilon$.

Campagne ipotizzò che la distribuzione dei Loss Ratio fosse una Pearson del IV tipo la cui funzione di densità è:

$$f_{\tilde{x}}(x) = k \left[1 + \left(\frac{x - \lambda}{\alpha} \right)^2 \right]^{-m} \exp \left[-v \tan^{-1} \left(\frac{x - \lambda}{\alpha} \right) \right]$$

Stimando i parametri con il metodo dei momenti, Campagne ottenne:

$$f_{\tilde{x}}(x) = 31.73 \left[1 + \left(\frac{x}{5.442} \right)^2 \right]^{-4.850} \exp \left[-2.226 \tan^{-1} \left(\frac{x}{5.442} \right) \right]$$

Il lavoro di Campagne si concluse con la ricerca del VaRLR data la distribuzione ottenuta impiegando le convoluzioni di frequenza, ossia l'integrazione del prodotto tra due funzioni densità di cui una traslata.

Nella Tabella 1 si mostrano i risultati a cui giunse Campagne, dopo aver stimato il VaRLR con una metodologia basata sulle convoluzioni delle funzioni di frequenza di un anno. Scegliendo un ε pari al 5% e considerando un orizzonte temporale di breve-medio periodo, il coefficiente delle Riserve Matematiche che garantisce il rispetto della disequazione $Prob(\widetilde{LR} > FR) \leq \varepsilon$ era il 4%.

Tabella 1 – Margini Minimi di Solvibilità (come % delle Riserve Tecniche) per diverse durate

		Durate				
		1 anno	2 anni	3 anni	5 anni	10 anni
ε	0,001	9	10	10	12	14
	0,01	7	7	7,5	8	9
	0,05	3,5	4	4	4	3
	0,1	2,5	2,5	2	2	1

Il metodo di Buol (1969)²

Differentemente da quanto fatto da Campagne sfruttando il concetto di probabilità di rovina, Buol calcolò un possibile requisito di capitale attraverso l'impiego di basi tecniche particolari. Introdusse i due seguenti concetti:

- 1) Base finanziaria “non rafforzata”, i^{nR} : un tasso d'interesse calcolato come media ponderata tra il minimo dei tassi di rendimento ottenuti dall'assicuratore su un orizzonte temporale sufficiente (per esempio 20 anni) con il tasso più recente; i pesi sono rispettivamente 2/3 e 1/3.
- 2) Base finanziaria “rafforzata”, i^R , come l'85% di i^{nR} : è un tasso d'interesse più prudentiale.

Il MMS proposto è definito come la differenza tra $V^R - V^{nR}$ dove V^R è la riserva matematica calcolata con base rafforzata (i premi invece sono determinati con la base non rafforzata) e V^{nR} è la riserva matematica calcolata con la base non rafforzata. Buol dimostra che:

$$V^R - V^{nR} \approx \alpha V + \beta (C^+ - V^+)^3$$

Solo quando $\alpha = 0,09$ e $\beta = 0,06$.

² “Financial Guarantees required from Life Assurance Concerns” (Les garanties financières requises des entreprises d'assurance vie), Report of the O.E.C.D. Insurance Committee, Paris, 1971

³ C^+ e V^+ sono rispettivamente i capitali sotto rischio positivi e le riserve matematiche (non rafforzate) per i contratti con capitale sotto rischio positivo

Conclusioni

Il Requisito di Capitale previsto da Solvency 0 per le imprese di assicurazione sulla vita fu un risultato estremamente innovativo perché, in primo luogo, sorpassava la mera imposizione di un valore numerico legato ai rami esercitati; in secondo luogo perché si trattava di un requisito nato dalla teoria del rischio considerando una probabilità di rovina dello 5% su un orizzonte pluriennale.

Qualora l'impresa avesse un Margine di Solvibilità inferiore al MMS, essa era costretta a presentare all'autorità di vigilanza (ai tempi ISVAP) un piano di risanamento entro un termine congruo.

Oltre al MMS, la normativa introduceva una seconda soglia, la cosiddetta Quota di Garanzia; la QG era pari al massimo valore tra un terzo del MMS e una soglia predefinita pari a 800.000,00 unità monetarie. Qualora il Margine di Solvibilità della compagnia fosse addirittura inferiore alla QG, l'impresa era obbligata a presentare all'ISVAP un piano di finanziamento per ristabilire l'equilibrio della propria situazione finanziaria. In caso di inosservanza del suddetto piano di finanziamento, era compito dell'autorità di vigilanza disporre la Liquidazione Coatta Amministrativa dell'impresa (LCA).

1.3 Dai limiti di Solvency I alla necessità di Solvency II

La Direttiva 83/2002/CEE, con l'obiettivo di aumentare la chiarezza venuta meno dopo l'introduzione delle Seconde e Terze Direttive (nei rami Vita sono rispettivamente la 90/619 e la 92/96 che tuttavia non modificano il Requisito di Capitale) rifonda la disciplina delle imprese di assicurazione sulla durata di vita e si pone come preludio all'introduzione di un nuovo sistema che regoli interamente il settore assicurativo: Solvency I

Con il Dlgs. 307 del 3 novembre 2003, in attuazione delle direttive 2002/12/CE e 2002/13/CE, entra in vigore anche in Italia il sopracitato sistema normativo. Con riferimento esclusivamente al tema del requisito di capitale per le imprese di assicurazione sulla vita, il nuovo sistema non modifica la metodologia sopra analizzata; in compenso aumenta la soglia inferiore della Quota di Garanzia a 3 milioni di unità monetarie e puntualizza la definizione degli ECMS.

Risulta evidente per quanto detto fino ad ora che, nonostante la sua innovatività, la metodologia alla base del calcolo del requisito di capitale proposta prima da Solvency 0 e poi da Solvency I, non è sufficiente a garantire la solvibilità delle imprese di assicurazione in un ambiente finanziario diventato estremamente complesso. I concetti di “individuazione” e “quantificazione” dei rischi sono diventati imprescindibili per la misurazione dei requisiti di solvibilità.

Si elencano ora in forma più esplicita quali sono i limiti del sistema vigente fino all'introduzione di Solvency II *absit iniuria verbis*: con ciò non si vuole in nessun modo sminuire la portata storica di Solvency I ben noto quale sia il contesto e il periodo storico in cui è stata concepita.

Si specifica che, al fine di rimanere focalizzati sul tema della solvibilità per le imprese di assicurazione sulla durata di vita, i limiti esposti in seguito riguarderanno prevalentemente tematiche attinenti a queste ultime:

- ❖ I rischi assicurativi, elemento centrale ai fini della solvibilità, sono considerati in modo impreciso e la metodologia sottostante non consente di delineare il profilo di rischio della compagnia
- ❖ Alcuni rischi di fondamentale importanza, *in primis* i rischi di longevità, di morbilità e di estinzione anticipata, non vengono presi in considerazione
- ❖ Il MMS fa riferimento esclusivamente alle singole imprese e non considera l'eventuale partecipazione delle stesse ad un gruppo: trascurare questi rapporti e le dinamiche di un gruppo assicurativo, può portare ad una visione distorta sulla solvibilità della singola Compagnia

- ❖ Il MMS non fa distinzione circa il genere di riassicurazione passiva scelto della compagnia: indipendentemente dal tipo di trattato/riassicurazione singola la riduzione del Margine è funzione dei coefficienti c_1 e c_2 sopra descritti
- ❖ Non viene considerata nessuna forma di correlazione tra i rischi. Questo significa che la diversificazione non è possibile tra i vari rami né all'interno di un portafoglio omogeneo di contratti. Non è nemmeno possibile pianificare strategie di *natural hedging*, miranti a coprire il rischio di longevità mediante la sottoscrizione di contratti caso morte.
- ❖ I criteri di valutazione delle attività e delle passività sono disomogenei: in particolare, per quanto riguarda le assicurazioni sulla durata di vita le valutazioni includono margini di prudenza e le ipotesi demografiche e finanziarie sono bloccate. Così facendo, non viene presa in considerazione l'evoluzione degli scenari di mercato e la quantificazione del rischio, elemento di centrale importanza in un'ottica di solvibilità, non può fondarsi su valori economici.

I limiti sopra descritti sono in gran parte gli stessi per le imprese di assicurazione sui rami danni. In aggiunta a tali limiti, va segnalato che il contesto finanziario è cambiato radicalmente negli ultimi 20 anni (basti pensare alla posizione della *yield curve* oggi) e fu necessario una totale revisione del sistema legislativo assicurativo proprio al fine di salvaguardare gli assicurati e far sì che ogni impresa fosse in grado di individuare, misurare ed eventualmente ridurre ogni rischio che sopporti. Solvency II ha come obiettivo esattamente quello di proporre un approccio economico basato sul rischio dove i requisiti di capitale riflettono l'effettivo profilo di rischio della singola Compagnia.

1.4 Il progetto Solvency II

Il processo di concepimento e adozione di Solvency II è stato tanto lungo quanto travagliato proprio a causa della sua portata. Il culmine della procedura è identificabile con l'approvazione della Direttiva 2009/138/CE il 22 Aprile 2009 dal Parlamento Europeo, successivamente completata e perfezionata dalla Direttiva 2014/51/UE (c.d. "Omnibus II").

Solvency II, proprio come la direttiva sui mercati finanziari MiFID, ha una struttura normativa che segue il processo Lamfalussy; i quattro livelli su cui si fonda sono:

- a) La Direttiva 2009/138/CE così come integrata e modificata da Omnibus II. Solvency II definisce quali siano i principi alla base del nuovo regime e introduce il sistema a 3 pilastri, ossia le 3 macroaree su cui la vigilanza dovrà operare.
- b) Il secondo livello normativo è rappresentato dalle c.d. *implementing measures*, misure tecniche di esecuzione adottate dalla Commissione Europea sotto forma di *Delegated Act* (Regolamento 35/2015/UE). Tale Regolamento contiene sia i dettagli dei parametri della Standard Formula che le metodologie per concretizzare i principi della Direttiva. Gli Atti Delegati sono il prodotto finale degli Studi di Impatto Quantitativo (c.c. d.d. QIS), simulazioni a cui le imprese di assicurazione partecipavano su base volontaria andando ad applicare le varie "versioni" di Solvency II al fine di verificarne l'efficacia. Nel Paragrafo 1.6 si analizzerà in particolare il QIS 2 che, come vedremo, proponeva un Requisito di Capitale per le imprese di assicurazione sulla durata di vita, molto simile a quanto proporrebbe un modello di Teoria Del Rischio.

Complessivamente, dal 2005 al 2010, sono stati condotti 5 Studi di Impatto Quantitativo, di cui il quinto, il QIS5, ha ricevuto dati da 2520 Compagnie di (ri)Assicurazione e da 167 Gruppi; nel 2013 infine l'EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority) ha pubblicato il *final report* contenente i risultati del Long-term Guarantees Assessment (LTGA), studio incentrato sul contenimento della volatilità per i prodotti assicurativi di lungo periodo [20].

- c) La Direttiva Omnibus II ha introdotto un ulteriore livello tra il secondo e il terzo; tale livello intermedio riguarda delle misure di esecuzione tecniche proposte da EIOPA e adottate dalla Commissione Europea successivamente a revisione della versione “finale”. Tali standard tecnici riguardano regole il cui fine è l’armonizzazione internazionale (c.d. *regulatory technical standards*) e regole per l’applicazione uniforme delle norme a livello europeo (c.d. *implementing technical standards*).
- d) Il terzo livello è costituito dalle linee guida non vincolanti, *guidelines* rivolte alle Autorità di Vigilanza e alle Imprese di Assicurazione assoggettate a Solvency II, emanate da EIOPA, che vincolano coloro che non le rispettano a spiegarne la ragione. Tali linee guida non sono né obbliganti né coercitive: ogni *authority* ha la facoltà di accettare di seguirle o meno, condizionatamente al fatto che in caso negativo, ne venga data una giustificazione. IVASS le ha accettate tutte e le sta introducendo nel sistema legislativo italiano tramite l’emanazione di regolamenti⁴.
- e) Il quarto e ultimo livello riguarda la verifica dell’applicazione della direttiva da parte dei singoli stati e l’adozione di eventuali sanzioni verso coloro che non si sono conformati alla normativa comunitaria.

⁴ In alcuni casi si sono verificate situazioni di ritardo, ad esempio nel caso del ring-fencing.

Tale struttura normativa limita volontariamente la libertà di manovra dei legislatori nazionali, proprio al fine di uniformare il più possibile l'attività (ri)assicurativa di tutte le Compagnie soggette a Solvency II; questo concetto viene chiamato “convergenza internazionale nelle norme di vigilanza prudenziale”.

1.4.1 La struttura a 3 Pilastri di Solvency II

L'approccio economico basato sul rischio proposto da Solvency II si concretizza in un approccio a 3 Pilastri, dove ogni Pilastro costituisce una macroarea di interesse.

Figura 1 - La struttura a 3 Pilastri di Solvency II

Struttura a 3 Pilastri		
Pillar 1	Pillar 2	Pillar 3
<ul style="list-style-type: none"> - Valutazione attivi e passivi - Determinazione e classificazione degli <i>own funds</i> - Calcolo di SCR e MCR 	<ul style="list-style-type: none"> - Presidi di Governance - Own Risk and Solvency Assessment - Supervisory Review Process 	<ul style="list-style-type: none"> - Report to Supervisors - Quantitative Report Templates - Market discipline - Solvency and Financial Condition Report

Come rappresentato graficamente nella Figura 1, il Primo Pilastro presenta le disposizioni per la valutazione delle attività, delle passività e delle riserve tecniche; introduce l'aggiustamento per la volatilità, enuncia i criteri di determinazione dei fondi propri di base e accessori e i relativi criteri di classificazione. Infine, si

sofferma sul concetto di Requisito Patrimoniale di Solvibilità, il c.d. Solvency Capital Requirement, la cui funzione è simile al MMS: qualora un'impresa di assicurazione posseda fondi propri ammissibili in maniera sufficiente a coprire l'SCR, la sua gestione è definita "non problematica". In ultima analisi, la normativa definisce il concetto di Requisito Patrimoniale Minimo (*Minimal Capital Requirement*) che assume la funzione che era della Quota di Garanzia: laddove i fondi propri ammissibili siano inferiori al MMS, l'Autorità di Vigilanza dovrebbe revocare l'autorizzazione all'esercizio dell'attività assicurativa salvo recupero immediato dei fondi.

Il Secondo Pilastro riguarda la regolamentazione della *corporate governance*, le regole della gestione e della direzione; stabilisce quali siano i requisiti qualitativi che deve rispettare un'Impresa di Assicurazione affinché possa ridurre tutti quei rischi non facilmente quantificabili, che sono attinenti al *Pillar I* (un esempio classico è quello del rischio reputazionale). Sono richiesti inoltre comportamenti e procedure di gestione corretta dei rischi conseguibili solo mediante la presenza di una funzione di *risk management*, attuariale e di controllo interno efficace.

Il secondo Pilastro concerne anche l'auto-valutazione del profilo di rischio della Compagnia, la c.d. *Own Risk Ad Solvency Assessment*, che ha il fine di stabilire se il Requisito di Capitale emerso dal Pillar I rifletta effettivamente il Profilo della Compagnia proprio per evitare un utilizzo pedissequo se non addirittura volutamente scorretto della normativa. Il Pillar II si completa con il processo di riesame da parte dell'autorità di vigilanza, c.d. *supervisory review process*, circa l'ORSA della Compagnia: la suddetta autorità ha il compito di richiedere un eventuale *capital add-on* che non un fine punitivo ma migliorativo per la situazione di solvibilità della Compagnia.

Il Terzo e ultimo Pilastro disciplina le informazioni che l'Impresa di Assicurazione deve fornire al mercato e all'Autorità di Vigilanza in merito alla propria solvibilità. Tali informazioni si raggruppano in due categorie: quelle

periodiche e quelle non periodiche. Tra le prime si annoverano quelle di carattere prettamente qualitativo (*Report to Supervisors*) e quelle di carattere invece quantitativo (*Quantitative Report Templates*). Le informazioni da fornire non periodicamente sono dovute successivamente al verificarsi di eventi particolari o successivamente ad ispezioni della Vigilanza. Ciò che però concretizza la vera innovazione del terzo pilastro è la c.d. *market discipline*, ossia l'obbligo di pubblicare report annuali (o infrannuali nel caso di eventi significativi) al mercato con informazioni sul proprio profilo di rischio: pertanto viene incentivata la miglior gestione dei rischi, proprio al fine di evitare penalizzazioni da parte del mercato.

In conclusione, si è dimostrato quanto Solvency II non si limiti a modificare alcuni aspetti imprescindibili dell'attività assicurativa, come potrebbe essere la solvibilità, ma rivoluziona interamente tutto il sistema che concerne le Imprese di Assicurazione per incentivare ogni operatore del settore a misurare e gestire correttamente i propri rischi affinché vengano protetti sia gli assicurati che il sistema finanziario nel suo insieme⁵.

1.4.2 Il primo pilastro

Il Primo Pilastro di Solvency II riguarda:

- ❖ I criteri di calcolo delle attività e delle passività, comprese le riserve tecniche
- ❖ L'aggiustamento di congruità e l'aggiustamento per la volatilità della pertinente struttura per scadenza dei tassi di interesse privi di rischio
- ❖ La determinazione, la classificazione e l'ammissibilità dei Fondi Propri
- ❖ Il Requisito Patrimoniale di Solvibilità
- ❖ Il Requisito Minimo di Solvibilità
- ❖ Gli interventi della Vigilanza nei casi di difficoltà/situazione irregolare

⁵ Il riferimento è al concetto di rischio sistemico come dimostrato nel testo J. Fouque, J.A. Langsam "Handbook on Systemic Risk", Cambridge University Press 2013.

Essendo lo scopo di questo Primo Capitolo quello di analizzare l'attuale SCR per le imprese di assicurazione sulla durata di vita, in seguito verranno approfondite le metodologie per il calcolo del SCR e la tecnica Δ BOF, metodologia prevista dalla Standard Formula per la quantificazione del *life underwriting risk*, il rischio di sottoscrizione per i contratti Vita. Si presenta nel seguito la valutazione generale delle attività, delle passività e in particolare delle riserve tecniche nell'Economic Balance Sheet; nel Capitolo 3 verranno ripresi i concetti relativi la valutazione delle riserve tecniche dei rami Vita al fine di sviluppare ulteriori analisi sulla distribuzione dell'utile demografico.

1.4.3 La valutazione di attività e passività nell'EBS

La valutazione delle attività e delle passività è un tema centrale per Solvency II per il semplice fatto che creare uno Stato Patrimoniale redatto secondo gli stessi principi valutativi è propedeutico al calcolo dello scarto tra attività e passività, i fondi propri di base, che a loro volta sono la base per quantificare i fondi propri ammissibili alla copertura del Requisito di Solvibilità. La valutazione quindi assume il doppio ruolo sia di strumento per arrivare alla definizione di fondi propri di base, che quello di mezzo per garantire comparabilità e convergenza internazionale.

Il punto di partenza per capire come Solvency II intende affrontare il tema della valutazione, è l'articolo 75 della Direttiva, insieme all'articolo 9 degli Atti Delegati.

Il principio cardine della valutazione, da cui non è possibile derogare, è il c.d. *principio del fair value*, principio secondo il quale:

- ❖ “Le attività sono valutate all'importo al quale potrebbero essere scambiate tra parti consapevoli e consenzienti in un'operazione svolta alle normali condizioni di mercato”

- ❖ “Le passività sono valutate all’importo al quale potrebbero essere trasferite, o regolate, tra parti consapevoli e consenzienti in un’operazione svolta alle normali condizioni di mercato”

A patto che siano conformi al suddetto principio, le Compagnie dovranno anche attenersi al Regolamento 1606/2002/CE recante disposizioni in merito all’utilizzo dei Principi Contabili Internazionali, Regolamento emanato con il fine di agevolare le transazioni e portare trasparenza e omogeneità nelle valutazioni bilancistiche internazionali. Laddove i metodi di valutazione del Regolamento non siano in linea con il principio del fair value, sarà compito dell’Impresa di Assicurazione considerare altre metodologie che siano conformi all’Articolo 75.

Nella scelta della metodologia per effettuare la valutazione delle attività e delle passività, l’Articolo 10 degli Atti Delegati propone una gerarchia di valutazione conforme al principio del fair value, ossia più criteri di valutazione che consentono di coprire tutte le voci del bilancio, facendo sì che l’intero documento, l’*Economic Balance Sheet*, non presenti criteri di valutazione differenti al suo interno. I Criteri presi in considerazione fanno riferimento a due gruppi: quelli “Mark to market” (criteri utilizzabili qualora si possano utilizzare i prezzi di mercato) e quelli “Mark to model” (metodi alternativi di valutazione che comunque valorizzano maggiormente i dati derivanti dal mercato rispetto agli input specifici dell’impresa). Si analizzano in seguito le metodologie proposte, seguendo l’ordine gerarchico delle misure tecniche di implementazione.

- I) Il “metodo della valutazione per difetto”, appartenente al gruppo delle metodologie di valutazione c.d. Mark to market. Con esso “le imprese di assicurazione e di riassicurazione valutano le attività e le passività utilizzando prezzi di mercato quotati in mercati attivi per le stesse attività o passività”. Più semplicemente, laddove l’attività o passività è direttamente negoziata sul mercato, la si valuta al suo prezzo corrente.

II) Il “criterio del portafoglio replicante”. Qualora attività e passività non siano direttamente negoziate su mercati attivi ma è possibile ricostruire un portafoglio che replichi (portafoglio replicante) i flussi di cassa dello strumento finanziario in esame, il prezzo dello strumento è pari alla somma dei prezzi di mercato quotati degli elementi che compongono il portafoglio replicante.

Questo metodo è usato in particolare per la valutazione delle riserve tecniche delle polizze index-linked e unit-linked [24].

In formule:

$$P(\tilde{F}) = \sum_{i=1}^k x_i \cdot P(\tilde{S}_i) \Leftrightarrow \tilde{F} = \sum_{i=1}^k x_i \cdot \tilde{S}_i$$

Dove P è la funzione prezzo, \tilde{F} e \tilde{S} tilde sono rispettivamente le variabili aleatorie dei flussi dello strumento finanziario in esame e degli strumenti che compongono il portafoglio replicante.

III) Se non è possibile sfruttare in alcun modo i prezzi di mercato direttamente osservabili o altri input di mercato rilevanti (come i tassi d’interesse, le curve di rendimento, spread di credito, ecc.), gli atti Delegati consentono di utilizzare “input non osservabili che riflettono le ipotesi che gli operatori di mercato utilizzerebbero nel determinare il prezzo dell’attività o della passività”.

Ciò si concretizza nell’utilizzo di tecniche riconducibili a tre metodologie elencate al comma 7 dell’articolo 10. Esse sono:

- ❖ Il metodo di mercato, che comprende la determinazione dei prezzi a matrice;
- ❖ Il metodo reddituale, che comprende “le tecniche del valore attuale, i modelli di determinazione del prezzo delle opzioni e metodo degli utili in eccesso per esercizi multipli”;

- ❖ Il metodo del costo corrente di sostituzione, che “riflette l'importo che sarebbe attualmente richiesto per sostituire la capacità di servizio di un'attività”.

1.4.4 La valutazione delle riserve tecniche nell'Economic Balance Sheet

Coerentemente con il principio del fair value, anche le riserve tecniche devono essere soggette ad una valutazione *market consistent*, ossia basata sull'utilizzo di un criterio che si fondi sul valore di mercato. In un'ottica Solvency II assume interesse non solo il valore puntuale della stima, ma anche un'indicazione sui cumulanti di ordine superiore al primo; ovviamente la situazione ideale sarebbe quella di disporre dell'intera distribuzione di probabilità delle riserve. Il problema che sorge è che, se nel caso delle attività reperire valori di mercato è un'operazione semplice, nel caso della maggior parte delle riserve tecniche si ha una totale assenza di un mercato specifico.

Ovviamente rimane valido quanto detto fino ad ora per passività di tipo *hedgable*: nel caso, per esempio, di riserve matematiche di Prodotti Vita di Ramo III senza garanzie, è possibile utilizzare il metodo del portafoglio replicante; la prestazione nei confronti dell'assicurato è pienamente determinata dall'andamento del titolo finanziario a cui è collegata la polizza. Conseguentemente, per il calcolo della riserva matematica associata alle polizze *linked*, è possibile sfruttare il valore di mercato del titolo finanziario a cui è associato il passivo. Per una Temporanea Caso Morte, di cui si dirà ampiamente nel seguito, il problema è decisamente più evidente, anche se il metodo del portafoglio replicante potrebbe essere utilizzato se esistesse un particolare *longevity bond* (o uno strumento finanziario simile) con payoff associato all'andamento della mortalità a cui è associata la polizza. Anticipando quanto verrà detto nelle righe successive a fini di completezza, come dichiarato

nell'Articolo 77 della Direttiva, nel caso in cui si utilizza il metodo del portafoglio replicante non è necessario calcolare distintamente Best Estimate e Risk Margin, per il semplice fatto che si ritiene che il prezzo di mercato contienga già al suo interno il margine di rischio adeguato.

Riprendendo il caso di passività *non-hedgeable*, Solvency II introduce il concetto di *current exit value*: le riserve tecniche devono essere pari “all’importo attuale che le imprese di assicurazione dovrebbero pagare se dovessero trasferire immediatamente le loro obbligazioni di assicurazione ad un’altra impresa”⁶.

A tal fine, l’articolo 77 della Direttiva 138/2009/CE, spiega che il *current exit value* può essere calcolato come la somma di due componenti:

- 1) La Best Estimate: “corrisponde alla media dei flussi di cassa futuri ponderata con la probabilità, tenendo conto del valore temporale del denaro (valore attuale atteso dei flussi di cassa futuri) sulla base della pertinente struttura per scadenza dei tassi di interesse privi di rischio”.
- 2) Il Risk Margin: “è tale da garantire che il valore delle riserve tecniche sia equivalente all’importo di cui le imprese di assicurazione e di riassicurazione avrebbero bisogno per assumersi e onorare le obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione”.

In formule:

$$RT(\tilde{F}) = BE(\tilde{F}) + RM(\tilde{F})$$

La Best Estimate:

La Best Estimate è, come precedentemente definita, il valore attuale atteso dei flussi di cassa futuri (“La proiezione dei flussi di cassa utilizzata nel calcolo della migliore stima tiene conto di tutte le entrate e uscite di cassa [...] per tutta la loro durata di vita.”) e non può contenere alcun margine di prudenzialità: è un calcolo fatto sulla base delle informazioni correnti alla data di valutazione. Tali

⁶ Commissione Europea (2009). Direttiva 2009/138/CE "Solvency II", novembre 2009. Art. 76

informazioni devono essere quindi aggiornate, credibili e fondate su ipotesi realistiche.

Il primo tema da approfondire riguarda gli elementi che entrano nel calcolo della BE: oltre ai già citati flussi, essa deve contenere il valore attuale delle spese che si sosterranno con il fine di far fronte alle obbligazioni assunte e dovrà tener conto dell'inflazione. Sono escluse dal calcolo alcune delle spese di gestione future, ossia tutte quelle associate alla nuova produzione⁷ e quelle c.d. "di marketing".

Nella valutazione della BE inoltre, non potranno essere trascurate due voci di fondamentale importanza: le partecipazioni agli utili a carattere discrezionale e le garanzie finanziarie/opzioni contrattuali.

La prima voce si riferisce a quei casi in cui le azioni del management (c.c.d.d. *management actions*) influenzano in qualche modo la prestazione che spetta all'assicurato come, per esempio, nel caso delle polizze rivalutabili italiane "with-profit" o delle polizze rivalutabili. Dato che i *future discretionary benefits* e la gestione delle plusvalenze e delle minusvalenze della gestione separata rischiano di rendere discrezionale la valutazione delle riserve tecniche, l'Articolo 23 degli Atti Delegati regola interamente le future misure di gestione che, sinteticamente, devono essere individuate anticipatamente e devono essere coerenti fra loro e con le strategie operative dell'impresa; le Imprese d'Assicurazione devono inoltre stabilire ex-ante un piano completo di future misure di gestione che contiene informazioni su quanto detto.

Per quanto riguarda invece le garanzie finanziarie, le opzioni contrattuali e tutto ciò che può essere identificabile come "elementi riconducibili al comportamento dei contraenti" (si considerano anche riscatti e estinzioni anticipate), l'articolo 79 della Direttiva e l'articolo 26 nelle norme di secondo livello, spiegano che la Compagnia di Assicurazione deve adoperare un modello stocastico finalizzato a

⁷ Per esempio, coerentemente con quanto detto, una parte dello stipendio futuro degli attuari del pricing non contribuisce alla BE del portafoglio in vigore

ottenere una valutazione prospettica del comportamento degli assicurati, sulla base di comportamenti passati. L'utilizzo di tali dati deve essere utilizzato in un'ottica analitica, considerando i vantaggi che i soggetti in questione hanno percepito, le condizioni economiche e ogni circostanza che abbia influenzato i comportamenti in esame.

Il secondo tema di particolare rilevanza riguarda invece le probabilità utilizzate in fase di ponderazione: esse devono essere fondate su ipotesi considerate realistiche e le imprese devono essere in grado di "spiegare e giustificare" ognuna delle ipotesi sottostanti. Quest'ultime devono quindi riflettere fedelmente l'incertezza sottostante.

L'ultimo tema da affrontare circa la BE riguarda il tasso di attualizzazione impiegato. Come si evince dalla definizione di Best Estimate, il tasso d'interesse utilizzato sulla singola *maturity* deve essere quello *risk-free*: la ragione risiede nel fatto dell'aggiustamento per il rischio si tiene conto con l'aggiunta successiva del risk margin. Il tasso di interesse privo di rischio scelto è quello degli *interest rate swap* aggiustati per il rischio di credito; tale deduzione deve essere compresa tra i 10 e i 35 bps.⁸

La scelta dei tassi swap è avvenuta a discapito dei *government bonds*. L'utilizzo di tali strumenti finanziari avrebbe garantito maggior agio nella stima del tasso risk free, dato che un titolo di stato con tripla A ha un credit risk quasi nullo. Poiché i tassi calcolati dai titoli scelti sarebbero utilizzati per scontare le passività e per ottenere un matching perfetto tra attivo e passivo è necessario investire nelle attività utilizzate per calcolare la curva dei tassi risk free, i problemi maggiori che si avrebbero avuti in caso di scelta dei *government bonds* sarebbero stati la scarsa liquidità di titoli con rating così alto e, contemporaneamente, un crollo dell'appeal dei titoli con rating inferiore.

⁸ L'aggiustamento per il rischio di credito, come spiegato dall'Articolo 45 degli Atti Delegati, è determinato sulla base del 50% della differenza tra il tasso variabile dei contratti swap e il tasso su contratti swap indicizzati overnight.

Quindi, per ogni valuta si stimano i tassi *risk free* fino ad una certa *maturity* (il c.d. *Last Liquidity Point*); da quella data in poi è necessario utilizzare una procedura di estrapolazione affinché il tasso *forward* di lungo periodo (*Ultimate forward rate*) coincida con il tasso *forward* prestabilito. Tale calcolo viene svolto mensilmente da EIOPA, la quale poi pubblica l'intera curva dei tassi privi di rischio per ogni valuta.

In ultima istanza, si sottolinea la presenza di due aggiustamenti al tasso di interesse:

- I) Il Matching Adjustment, applicabile solo qualora si abbia l'intenzione di detenere le attività a copertura delle riserve tecniche fino a scadenza (le passività sono quindi quelle più illiquide, non esposte a riscatti/estinzioni anticipate). Il suo utilizzo è condizionato all'approvazione dell'autorità di vigilanza nazionale.
- II) Il Volatility Adjustment, fornito da EIOPA e applicabile sui tassi fino al LLP, che ha lo scopo di ridurre l'impatto della volatilità di mercato nel breve periodo qualora il mercato sia "stressato". Anche il *volatility adjustment* andrebbe approvato dall'autorità di vigilanza nazionale, tuttavia la maggior parte delle *authorities* (tra cui quella italiana) ha deciso di non richiedere un'approvazione preventiva, ma la semplice comunicazione.

In formule quindi, la Best Estimate equivale a:

$$BE(\tilde{F}) = \sum_{t=1}^{BotC} \frac{\sum_{k=1}^{n_t} p_{t,k}^* \cdot F_{t,k}}{(1 + i_t^{Rf})^t}$$

Dove,

- ❖ La prima sommatoria indica che si considerano tutti i flussi di cassa entro il c.d. *boundary of the contract*, ovvero la Best Estimate si calcola fino al momento in cui "l'impresa di assicurazione ha il diritto unilaterale di terminare il contratto,

rifiutare il premio o la capacità incondizionata di modificare i premi e le prestazioni future”⁹.

- ❖ Il numeratore della frazione indica il valore atteso (nel discreto) di tutti i flussi di cassa di un periodo temporale; le probabilità utilizzate sono quelle che la Compagnia di Assicurazione ritiene realistiche.
- ❖ Il denominatore coincide con il tasso di attualizzazione privo di rischio, elevato al numero di anni che intercorrono tra l’eventuale cash flow e l’istante di valutazione.

Il Risk Margin

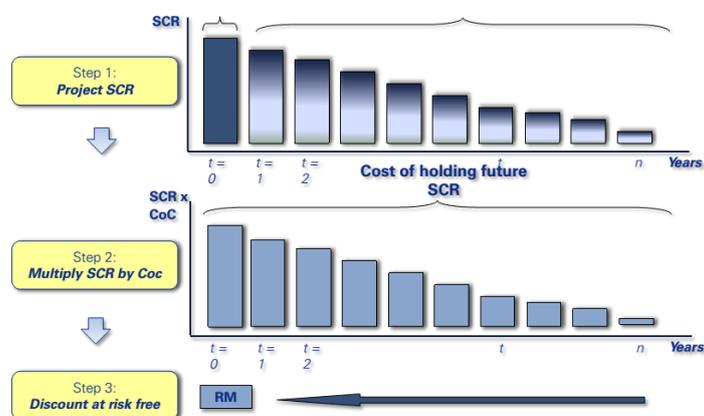
Come accennato nel paragrafo precedente, se il *current exit value* delle riserve tecniche coincidesse con la Best Estimate, si starebbe implicitamente ipotizzando che gli operatori agiscano come se fossero indifferenti al rischio e l’unico tasso di attualizzazione fosse quello *risk free*. Essendo però la realtà ben diversa, il Risk Margin è proprio quell’aggiustamento per il rischio che, sommato, porta la Best Estimate ad essere un importo che una qualsiasi Impresa di Assicurazione pagherebbe per trasferire la riserva tecnica.

Durante il processo che ha portato alla versione finale della Direttiva 138/2009/CE, sono stati considerati principalmente due approcci per il calcolo del Risk Margin: il *Quantile Approach* del mercato australiano e il *Cost-of-Capital Approach* dello Swiss Solvency Test. Il primo definisce il RM come lo scarto tra un determinato quantile della distribuzione della Riserva e il suo valore atteso (tipicamente il quantile di partenza è il 75esimo percentile): questa metodologia implica la stima dell’intera distribuzione della riserva, questione non sempre agevole e la necessità di dover scegliere un quantile adeguato.

⁹ FloreaniA. (2013). "Finanza delle imprese di assicurazione", corso di Economia delle aziende di assicurazione II, Università Cattolica del Sacro Cuore, Milano, pag. 16.

Il CoC Approach invece considera il Risk Margin come il costo di allocazione del capitale necessario¹⁰ per gestire le passività; di seguito si rappresenta con la Figura 2 il RM con il metodo del Coc e lo si ripresenta in formula.

Figura 2 -Il calcolo del Risk Margin con il CoC Approach



$$RM(\tilde{F}) = 6\% \cdot \sum_{t \geq 0} \frac{SCR(t)}{(1 + r_{t+1})^{t+1}}$$

Dove:

- ❖ 6% è il c.d. *Cost-of-Capital rate*, ed è “pari alla maggiorazione rispetto al tasso d’interesse privo di rischio pertinente in cui un’impresa di assicurazione o di riassicurazione incorrerebbe detenendo un importo di fondi propri ammissibili”¹¹, interpretabile come lo spread tra il rendimento ipotetico e il tasso privo di rischio. Esso è uguale per tutte le Imprese di Assicurazione.
- ❖ Il numeratore della frazione all’interno della sommatoria è il requisito di capitale (calcolato con Standard Formula o con Modello Interno a seconda della Compagnia) che tenga in considerazione solo i seguenti rischi:

¹⁰ Tutto il capitale necessario su ogni maturity

¹¹ Commissione Europea (2009). Direttiva 2009/138/CE "Solvency II", novembre 2009. Art. 77.5

- Rischio di sottoscrizione solo sull'*existing business*.
 - Il rischio di mercato diverso dal rischio del tasso di interesse, solo se rilevante.
 - Il rischio di credito relativo a contratti di assicurazione, alle società veicolo, agli intermediari e ai contraenti.
 - Il rischio di controparte rispetto ai contratti di riassicurazione passiva
- ❖ Il denominatore della suddetta frazione indica invece l'attualizzazione degli SCR al tasso privo di rischio. Si osserva che tra il pedice di ogni SCR e quello del rispettivo tasso di attualizzazione c'è una differenza costante di una unità: la ratio sta nel fatto che il SCR va detenuto su base continua fino al calcolo del SCR successivo, dunque su tutto l'orizzonte temporale.

Il livello di aggregazione della stima

Il tema del livello di aggregazione acquista particolare importanza nella misura in cui i modelli utilizzati non siano tutti di tipo additivo.

Per la Best Estimate non vi è alcun tipo di problema: è una somma di valori attesi attualizzati, quindi la BE di due passività coincide con la BE della somma delle due passività. In formule:

$$BE(\tilde{A}) + BE(\tilde{B}) = BE(\tilde{A} + \tilde{B})$$

Per quanto riguarda il Risk Margin il discorso è ben diverso, essendo un modello che non gode della proprietà dell'additività: esso è calcolato sul SCR che, come si vedrà nel Paragrafo 1.4.6, è calibrato a sua volta sul Value At Risk. Ciò implica che il RM sia subadditivo, ossia risente dell'effetto della diversificazione qualora vengano aggregate variabili aleatorie diverse. In formule:

$$RM(\tilde{A}) + RM(\tilde{B}) \geq RM(\tilde{A} + \tilde{B})$$

Se dal lato della BE c'è stata indifferenza riguardo il tema della segmentazione, cioè il livello di aggregazione a cui effettuare i calcoli, sul RM il discorso è stato ben diverso: il risultato finale a cui si è giunti, accontentando la richiesta delle Imprese di Assicurazione, è che il RM deve essere calcolato sull'intero portafoglio della Compagnia, così da poter beneficiare sia della diversificazione tra i rami (*between*), che della diversificazione nei rami (*within*). Le Technical Specification di EIOPA richiedono comunque che le riserve tecniche, al fine di essere valutate con il massimo grado di precisione, vengano calcolate per gruppi di rischi omogenei, che siano al massimo *Lines of Business*. Si sottolinea che EIOPA consiglia di allocare ogni contratto di (ri)assicurazione alla LoB che meglio rifletta la natura del rischio sottostante, indipendentemente dalla distinzione legale dei Rami Vita, Danni e Health. Questo principio viene detto “principio della prevalenza della sostanza sulla forma”.

Riprendendo il discorso della segmentazione, EIOPA richiede di calcolare il Risk Margin dell'intero portafoglio, ossia di calcolarlo a livello di entità complessiva e solo successivamente procedere alla sua allocazione alle singole LoB con una metodologia pro quota. In formule, sfruttando la simbologia delle TS:

$$COCM_{lob} = \frac{SCR_{RU,lob}(0)}{\sum_{lob} SCR_{RU,lob}(0)} \cdot COCM$$

Dove:

- $COCM_{lob}$ è il Risk Margin della singola LoB
- $SCR_{RU,lob}(0)$ è il Solvency Capital Requirement della singola LoB calcolato al tempo 0.
- $COCM$ è il Risk Margin (effettivo e complessivo) dell'Impresa di Assicurazione calcolato al tempo 0.

Si osserva che tale *proxy* ripartisce una grandezza calcolata a livello aggregato, il COCM, in funzione di valori che non tengono conto della diversificazione

1.4.5 I Fondi Propri

I Fondi Propri, o *Own Funds* usando la terminologia anglosassone, sono un elemento chiave sia di Solvency II che, più genericamente, di una qualsiasi impresa di assicurazione perché, opportunamente aggiustati, rappresentano il principale *buffer* di una compagnia per assorbire le perdite che eccedono l'ammontare dei premi raccolti. In un'ottica SII, i fondi propri sono costituiti da:

- Fondi Propri di Base
- Fondi Propri Accessori

I Basic Own Funds, per cui si fa riferimento all'art. 88 delle norme di primo livello, possono essere calcolati sia con un metodo diretto che con un metodo indiretto. Con quest'ultimo metodo si parte dall'eccedenza delle attività rispetto alle passività¹² e successivamente si applicano degli aggiustamenti; con il metodo diretto invece si calcolano direttamente sommando gli elementi indicati nella Sezione 2 del Capo IV degli Atti Delegati.¹³

I fondi accessori comprendono altri elementi utilizzabili per assorbire le perdite; essi non devono in alcun modo essere già tati conteggiati tra quelli "di base" e sono soggetti all'approvazione dell'autorità di vigilanza. L'operazione di approvazione è necessaria in quanto gli *ancillary own funds* sono risorse che, al momento della valutazione, non sono fisicamente presenti tra le disponibilità della compagnia. Gli AOF sono composti da:

- "il capitale sociale [...] non versato che non è stato richiamato;
- Le lettere di credito e le garanzie;
- Qualsiasi altro impegno giuridicamente vincolante ricevuto dalle imprese di assicurazione [...]."¹⁴

¹² Entrambi valutati con lo stesso criterio del fair value

¹³ Senza entrare nel merito della questione che esula dall'obiettivo del presente elaborato, si cita l'Articolo 88 della Direttiva, che definisce in prima battuta i BOF come la somma di a) eccedenza delle attività rispetto alle passività b) le passività subordinate. A tale importo va dedotto l'importo delle azioni proprie detenute dalla Compagnia.

¹⁴ Commissione Europea (2009). Direttiva 2009/138/CE "Solvency II", novembre 2009. Art. 89

La classificazione

Si conclude l'analisi dei Fondi Propri affrontando il tema del *tiering*, ossia della classificazione dei fondi nei 3 livelli (*tiers*) previsti dalla normativa. Si specifica innanzitutto che tale classificazione è necessaria per distinguere i fondi migliori da quelli peggiori, dato che la loro diversa natura implica un modo differente di assorbire le perdite. Coerentemente con quanto enunciato nell'Articolo 93 della Direttiva, le discriminanti sono:

- ❖ La disponibilità dell'elemento, ossia il fatto che in un'ottica di continuità aziendale piuttosto che in caso di liquidazione coatta amministrativa, l'elemento possa o meno essere richiamato istantaneamente dall'azienda
- ❖ La subordinazione: “in caso di liquidazione, l'importo totale dell'elemento è disponibile per assorbire le perdite e il rimborso dell'elemento al possessore avviene solo dopo che sono state onorate tutte le altre obbligazioni, comprese quelle di assicurazione e di riassicurazione [...]”
- ❖ L'appartenenza dell'elemento ai Fondi Propri di Base o a quelli Accessori

Per completezza, altre caratteristiche che influenzano la qualità di un Fondo Proprio sono il fatto che abbia o meno una scadenza, l'assenza di incentivi a rimborsare, l'assenza di costi obbligatori di servizio e l'assenza di gravami. Detto ciò, si considerano ora i 3 livelli proposti dalla normativa.

Il tier 1, livello in cui compaiono gli elementi patrimoniali con la miglior capacità di assorbire le perdite: comprende quegli elementi dei Fondi Propri di Base che soddisfano sia il principio della disponibilità, che quello della liquidazione;

Il tier 2 invece comprende quegli elementi dei Fondi Propri di Base che soddisfano solo il principio della sussidiarietà e gli elementi degli ancillary own funds che possiedono entrambe le caratteristiche discriminatorie precedentemente citate; tutti gli elementi sia dei FPdB che dei FPA che non rientrano nel tier 1 e nel tier 2, entrano automaticamente nel tier 3.

Il *tiering* assume un'importanza quantitativamente importante in quanto un'impresa di Assicurazione deve rispettare i limiti quantitativi imposti dalla normativa di secondo livello: gli elementi a copertura del SCR devono essere almeno per il 50% elementi del tier 1 e al massimo per il 15% del tier 3. Per quanto riguarda invece la copertura del MCR, gli elementi del tier 1 devono essere almeno l'80% del totale e la restante parte deve essere esclusivamente costituita da elementi del tier 2.

1.4.6 Il Solvency Capital Requirement e le metodologie di calcolo

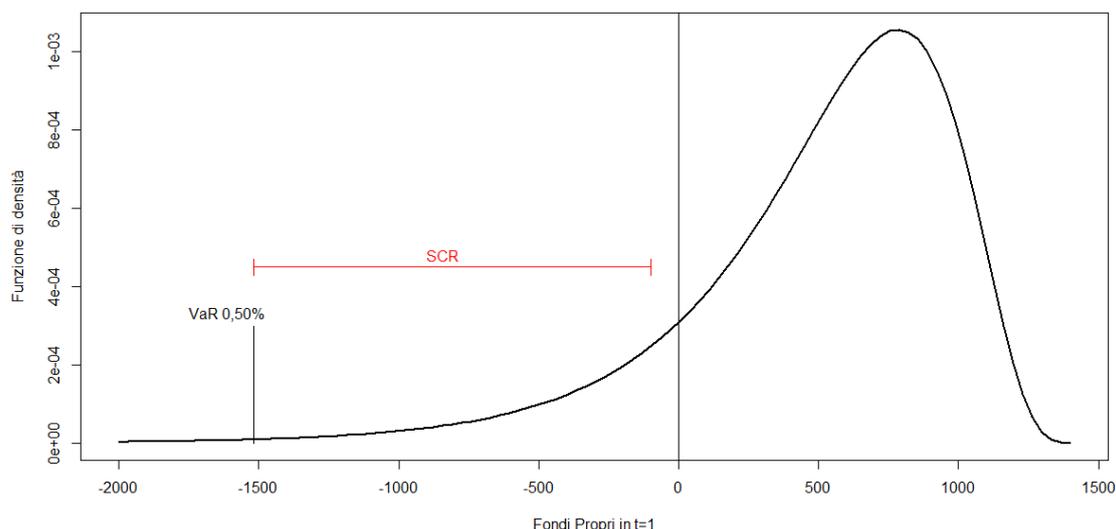
Secondo la Sezione 4 della Direttiva 138/2009/CEE, le Imprese di Assicurazione devono detenere fondi propri ammissibili sufficienti a coprire il Requisito Patrimoniale di Solvibilità. Esso va calcolato almeno una volta all'anno, va comunicato all'Autorità di Vigilanza e il calcolo deve essere eseguito ogni volta che il profilo di rischio della Compagnia si discosta significativamente dalle ipotesi fatte in partenza.

Il Requisito Patrimoniale di Solvibilità, che deve essere calcolato “in base al presupposto della continuità aziendale”¹⁵, deve considerare tutti i rischi quantificabili che gravano sull'Impresa di Assicurazione e copre sia l'attività esistente che la stima delle nuove attività che verrebbero iscritte a bilancio nel corso dei 12 mesi successivi al calcolo. Uno dei temi più dibattuti di Solvency II è stato proprio la scelta della misura di rischio da utilizzare, ossia la scelta dell'indicatore sintetico volto a quantificare la variazione dei fondi propri, con un determinato livello di confidenza e su un dato orizzonte temporale. Come affermato dall'articolo 101 della Direttiva, la misura di rischio scelta è il “Valore a Rischio” (noto in letteratura con l'acronimo VaR, *Value at Risk*): il requisito di

¹⁵ Commissione Europea (2009). Direttiva 2009/138/CE "Solvency II", novembre 2009. Art. 101

capitale deve essere tale che l'impresa sia solvibile anche in un *worst-case scenario* laddove il livello di confidenza prefissato sia del 99.5% e l'orizzonte temporale sia quello di un anno.

Figura 3 - Rappresentazione grafica del requisito di capitale¹⁶



Nella Figura 3 si rappresenta graficamente quanto detto: la variabile aleatoria rappresentata è la v.c. “Fondi propri in $t = 1$ ”, il percentile che ha alla sua destra il 99,50% della distribuzione è il $VaR_{0,50\%}$ (rappresenta i Fondi Propri che si avrebbero nel peggior caso possibile, con un livello di confidenza del 99,50%). Il requisito di capitale è lo scarto tra il VaR e lo 0. Uno scarto positivo indica la necessità di un aumento dei Fondi Propri: qualora tale aumento sia uguale al requisito di capitale come definito precedentemente, si ha una traslazione della curva dei Fondi in $t = 1$ verso destra con la conseguenza che il suo VaR non è più negativo e, ovviamente, la compagnia risulterebbe solvibile nel 99,50% dei casi nel corso dell'anno successivo.

¹⁶ Nella Figura si ha la simmetria assiale (l'asse di simmetria è l'asse delle ordinate) della v.c. Lognormale ($\mu=6.7961, \sigma=0.4723$), successivamente traslata di 1500 unità verso destra. In formule

$$\widehat{FP}_{t=1} = -\tilde{X} + 1500 \text{ con } \tilde{X} \sim LN(\mu = 6.7961, \sigma = 0.4723)$$

Essendo il SCR calcolato sulla base delle TP, al fine di evitare un *loop* in fase di calcolo, le *Technical Specifications* ne impongono la misurazione al netto del RM. Definito a cosa corrisponde concettualmente il Requisito Patrimoniale di Solvibilità, la Direttiva concede alle Imprese di Assicurazione 4 metodi per il calcolo dello stesso; si elencano ora, partendo dal metodo di più semplice implementazione a quello più complesso:

- I) Formula Standard
- II) USP
- III) Modello Interno Parziale
- IV) Modello Interno Totale

Mentre l'*Internal Model* consente di modellizzare appositamente uno o più moduli (o sottomoduli) di rischio, l'approccio Undertaking Specific Parameter consente di calibrare specifici parametri della compagnia al fine di cogliere con più precisione l'effettivo profilo di rischio della Compagnia. Tali parametri sono gli scostamenti standard del rischio di tariffazione e riservazione per l'assicurazione non vita e gli incrementi dell'importo delle prestazioni di rendite nel sottomodulo del rischio di revisione per l'assicurazione vita e per l'assicurazione malattia.

La Standard Formula invece, oggetto del prossimo paragrafo, è il punto di partenza per il calcolo del SCR ed è utile soprattutto per individuare quelli che sono i rischi imprescindibili secondo il sistema di Solvency II. Al suo interno, per calcolare i requisiti dei singoli sottomoduli, sono utilizzati due approcci:

- L'approccio *factor based*;
- L'approccio *scenario based*;

Con il primo si vanno ad applicare dei coefficienti (proposti dalla normativa) a delle variabili aziendali specifiche; un esempio classico è quello del calcolo del SCR sui rischi operativi descritto nel paragrafo successivo.

Si osserva infine che il Requisito di Solvibilità complessivo di una Compagnia con Solvency I, era proprio calibrato con una logica *factor based*.

Con l'approccio per scenari invece si vanno a confrontare i Fondi Propri di Base¹⁷ in due situazioni: quella di normalità e quella in cui sono “stressati” in seguito al verificarsi di eventi individuati dalla normativa. Ovviamente la magnitudo con cui tali eventi si verificano, è calibrata con un livello di confidenza del 99,50% su base annuale. Coerentemente con l'articolo 83 degli Atti Delegati, il calcolo basato su scenario è basato sulle seguenti ipotesi:

- 1) Lo scenario non modifica in alcun modo la quota di Risk Margin delle riserve tecniche
- 2) “Lo scenario non modifica il valore delle attività e passività fiscali differite”;
- 3) “Lo scenario non modifica il valore delle future partecipazioni agli utili [...]”;
- 4) L'impresa non adotta misure straordinarie durante lo scenario e, salvo casi straordinari, lo scenario non modifica il valore dei *future discretionary benefits*.

Si specifica infine che nello scenario stressato, i “tassi stressati” saranno da applicare alle sole polizze dove un aumento/diminuzione del tasso utilizzato per riprodurre lo shock implica un aumento del valore delle riserve tecniche.

1.4.7 La Standard Formula

Come mostrato in Figura 2, il requisito di capitale di una qualsiasi impresa d'assicurazione, il *Solvency Capital Requirement*, calcolato tramite l'utilizzo della Standard Formula, è pari alla somma di tre componenti:

$$SCR = BSCR + SCR_{Op} + Aggiustamento$$

Dove il SCR_{Op} è il requisito di capitale necessario per coprire i rischi operativi, qualora questi non vengano già coperti dal BSCR. Esso è definito come “il rischio di perdite derivanti dall'inadeguatezza o dalla disfunzione di procedure interne,

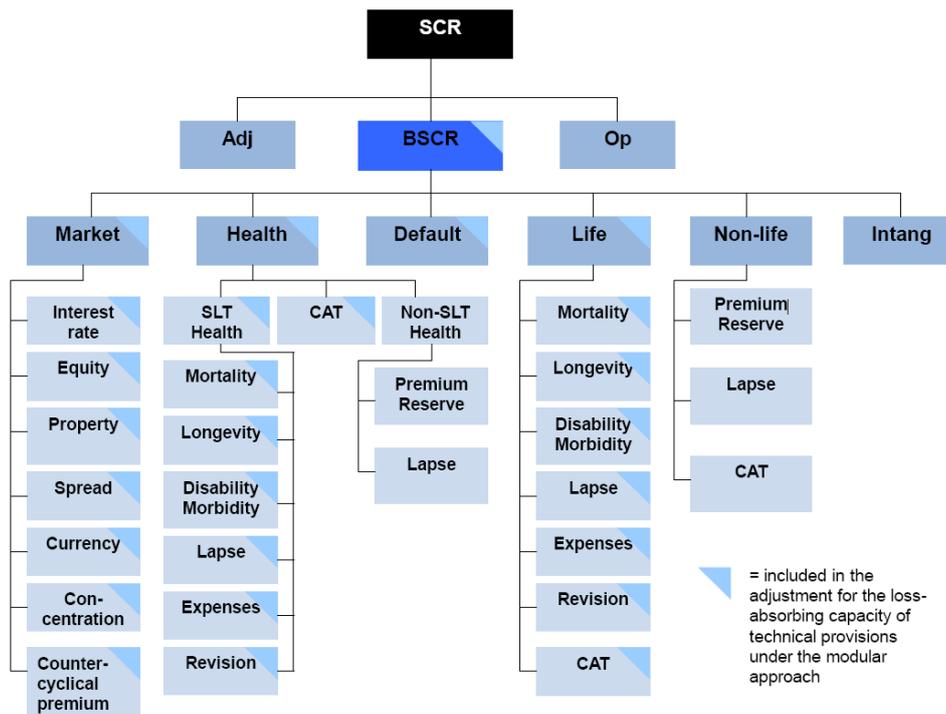
¹⁷ I BOF utilizzati nel calcolo basato su scenari, come specificato dalla Section 2, SCR.1.6 delle Technical Specifications di EIOPA, corrispondono all'eccedenza delle attività rispetto alle passività; queste ultime devono essere calcolate al netto delle passività subordinate.

risorse umane, oppure da eventi esogeni” e sinteticamente riguarda il rischio di subire perdite a causa di frodi interne e/o esterne, pratiche commerciali scorrette o più generalmente, malfunzionamenti nei processi interni aziendali. Il SCR_{Op} è calcolato con un approccio *factor based* e corrisponde alla somma di due componenti: il 25% “dell’importo delle spese sostenute nei 12 mesi precedenti per i contratti di assicurazione vita in cui il rischio di investimento è sopportato dai contraenti” e il requisito patrimoniale di base per il rischio operativo. La prima componente quindi si riferisce a tutti i contratti dove non ci siano garanzie finanziarie e il tasso tecnico sia pari a 0. La seconda componente, che non può comunque essere maggiore del 30% del BSCR, è calcolata in funzione dei premi acquisiti sia per i rami vita che per i rami danni. Tale seconda componente, che quantitativamente è quella più significativa, riflette il fatto che il rischio operativo cresce al crescere della dimensione dell’impresa proprio perché esso nasce dall’inadeguatezza e dai problemi dei processi interni e da eventi esogeni.

Anche l’aggiustamento in formula è la somma di due componenti: l’aggiustamento per la capacità di assorbimento delle riserve tecniche e l’aggiustamento per la capacità di assorbimento delle imposte differite.

La ratio di queste due componenti risiede nel fatto che i *future discretionary benefits* citati nel Paragrafo 1.4.4, così come le imposte differite, hanno la caratteristica di “comprimersi” qualora la situazione vada via via peggiorando con l’effetto conseguente di diminuire il valore delle riserve tecniche/compensare parzialmente le perdite. La stessa logica viene applicata anche alle imposte proprio perché anch’esse sono correlate al *momentum*, essendo principalmente calcolate sull’utile d’esercizio.

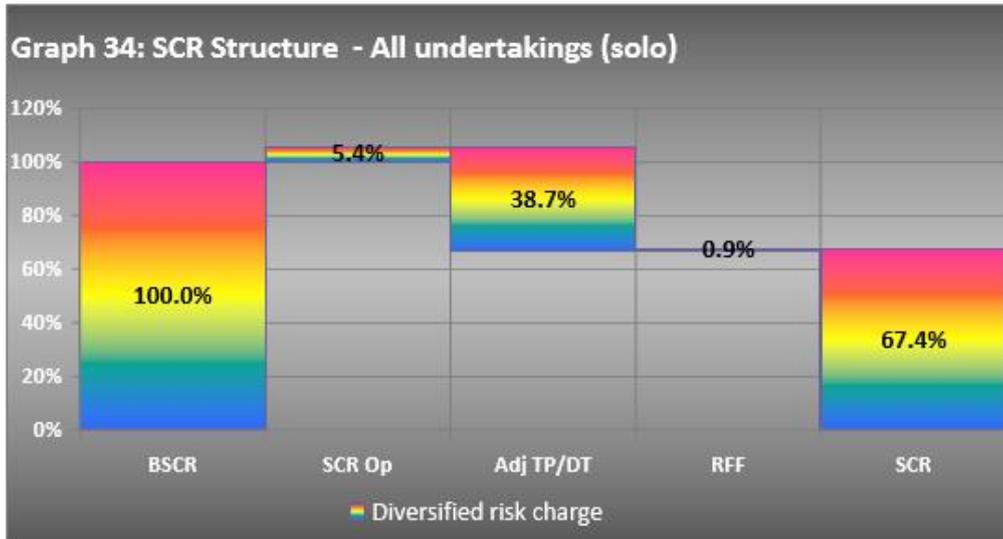
Figura 4 - la struttura piramidale della Formula Standard



Nella Figura 4 si illustra graficamente, oltre al *quomodo* si arrivi al SCR dal BSCR, come si arrivi al Basic Solvency Capital Requirement, ossia quali sono i rischi che vengono considerati e aggregati per giungere al Requisito di Solvibilità di Base per ogni compagnia di assicurazione.

Prima di passare all'analisi di quali rischi il legislatore ha ritenuto imprescindibili in un'ottica di quantificazione del requisito patrimoniale di solvibilità per una compagnia d'assicurazione, si riporta nella Figura 5 un grafico tratto dal report finale di EIOPA sul QIS5 in cui si mostra che, mediamente, il SCR corrisponde al 67.4% del BSCR proprio grazie all'effetto degli aggiustamenti sopra descritti

Figura 5 - La quota SCR/BSCR



Il Requisito Patrimoniale di Base è così determinato:

$$BasicSCR = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j} + SCR_{intangibles}$$

Dove $Corr_{i,j}$ sono gli elementi della matrice di correlazione, riportata in seguito, definita dal legislatore nell'allegato IV della Direttiva.

Tabella 2 – La matrice di correlazione

i	j				
	Mercato	Controparte	Vita	Malattia	Non Vita
Mercato	1				
Controparte	0,25	1			
Vita	0,25	0,25	1		
Malattia	0,25	0,25	0,25	1	
Non Vita	0,25	0,5	0	0	1

Mentre SCR_i sono i requisiti di capitale dei singoli moduli.

In primo luogo si osserva che al fine di cogliere la proprietà dei rischi di diversificarsi tra loro, Solvency II aggrega gli SCR (che per quanto visto precedentemente, almeno concettualmente sono dei Value at Risk) come se fossero

degli scarti quadratici medi di variabili aleatorie legate fra loro da una correlazione di tipo lineare: l'utilizzo di tale metodologia sarebbe perfetto qualora i macro-rischi in esame avessero una distribuzione appartenente alla famiglia ellittica¹⁸. Il metodo in esame quindi è tanto più una *proxy* tanto più gli *shape* delle distribuzioni delle variabili aleatorie sottostanti sono fortemente distanti dall'essere "normali"¹⁹ e tanto più la relazione tra le due variabili aleatorie è di tipo non lineare. EIOPA, nelle sue *Underlying Assumptions*, dichiara di aver calibrato i parametri in esame con il fine di rappresentare le dipendenze delle code delle distribuzioni. Nonostante la possibilità di formulare delle obiezioni a questo passaggio della normativa, si ricordi che la Standard Formula ha la funzione di punto di riferimento per le imprese di assicurazione: qualora l'analisi del profilo di rischio specifico della compagnia evidenzia differenze non trascurabili rispetto alla standard formula, la possibilità di utilizzare un modello interno parziale o totale diventa la soluzione al problema. In aggiunta si osserva che, essendo la matrice di correlazione proposta dalla Direttiva, essa è rigida: ogni compagnia di assicurazione deve utilizzare la stessa matrice che, verosimilmente, differirebbe da compagnia a compagnia in quanto le correlazioni tra i rischi dipendono fortemente dalla tipologia della singola esposizione²⁰.

Si specifica infine che il termine al di fuori dell'operazione di estrazione di radice quadrata, $SCR_{intangibles}$ è il requisito di capitale volto a coprire il rischio relativo alle attività immateriali; esso si calcola come l'80% delle attività immateriali diverse dall'avviamento²¹. Il fatto che tale requisito patrimoniale venga

¹⁸ In tale contesto, il VaR sarebbe espresso come moltiplicatore della standard deviation.

¹⁹ Per esempio nel caso di distribuzioni asimmetriche

²⁰ Come osservato in FloreaniA. (2013). "Finanza delle imprese di assicurazione", corso di Economia delle aziende di assicurazione II, Università Cattolica del Sacro Cuore, Milano, capitolo "La formula standard e i modelli interni: elementi essenziali", pag. 7, una compagnia operante in rami poco ciclici e poco correlati con gli scenari economici, probabilmente avrebbe un coefficiente di correlazione tra il modulo non-life e il modulo mercato molto basso.

²¹ In formule:

$$SCR_{intangibles} = 0.8 \cdot V_{intangibles}$$

semplicemente sommato alla restante parte del requisito patrimoniale di base, è dovuto alla volontà del legislatore di non ritenere il rischio in esame diversificabile. Come mostrato dalla Figura 2, i rischi che rientrano nel calcolo del BSCR al netto del rischio relativo alle attività immateriali sono:

❖ Il rischio di mercato: come definito all'articolo 105 della Direttiva “Il modulo del rischio di mercato riflette il rischio derivante dal livello o dalla volatilità dei prezzi di mercato degli strumenti finanziari che hanno un impatto sul valore delle attività e delle passività dell'impresa. Esso riflette adeguatamente il disallineamento strutturale tra attività e passività, in particolare rispetto alla loro durata”. La quota di SCR imputabile al rischio di mercato ha lo scopo di fungere quindi da copertura laddove la compagnia subisca delle perdite legate al livello e alla volatilità dei prezzi di mercato di strumenti finanziari. Noto il concetto di “inversione del ciclo monetario”, i rischi di mercato sono direttamente proporzionali alla somma dei capitali investiti dalla compagnia per conto proprio²²; si sottolinea il fatto che tali rischi spesso intaccano simultaneamente sia i valori degli attivi che quelli dei passivi: in tal caso si parla di *asset-liability risk*. I sottomoduli di tale rischio sono:

- Il rischio di tasso di interesse: “la sensibilità del valore delle attività, delle passività e degli strumenti finanziari a variazioni della struttura per scadenza dei tassi d'interesse o della volatilità dei tassi di interesse”.
- Il rischio azionario: “la sensibilità del valore delle attività, delle passività e degli strumenti finanziari a variazioni del livello o della volatilità dei prezzi di mercato degli strumenti di capitale”.

²² Tale fattispecie è speculare al caso in cui l'impresa svolge il ruolo di gestore degli investimenti per conto di terzi.

- Il rischio immobiliare: “la sensibilità del valore delle attività, delle passività e degli strumenti finanziari a variazioni del livello o della volatilità dei prezzi di mercato dei beni immobili”.
 - Il rischio di spread: “la sensibilità del valore delle attività, delle passività e degli strumenti finanziari a variazioni del livello o della volatilità degli spread di credito rispetto alla struttura per scadenze dei tassi di interesse privi di rischio”.
 - Il rischio di concentrazioni: “i rischi aggiuntivi per l’impresa di assicurazione o di riassicurazione derivanti o dalla mancanza di diversificazione del portafoglio delle attività o da grandi esposizioni al rischio di controparte da parte di un unico emittente di titoli o di un gruppo di emittenti collegati”.
 - Il rischio valutario: “la sensibilità del valore delle attività, delle passività e degli strumenti finanziari a variazioni del livello o della volatilità dei tassi di cambio delle valute”.
- ❖ Il rischio di controparte (detto più comunemente *credit risk*) “riflette le possibili perdite dovute all’inadempimento imprevisto o al deterioramento del merito di credito delle controparti e dei debitori delle imprese di assicurazione e di riassicurazione nel corso dei successivi dodici mesi” (Art. 105.6). Il *counterpart risk* coincide con il rischio di credito relativo alle attività che non siano negoziate sui mercati finanziari²³, *in primis* i crediti che la società vanta nei confronti degli assicuratori e nei confronti degli intermediari di assicurazione. Tale modulo deve considerare anche le relative garanzie collaterali.
- ❖ Il rischio di sottoscrizione vita, che sarà oggetto del prossimo paragrafo.

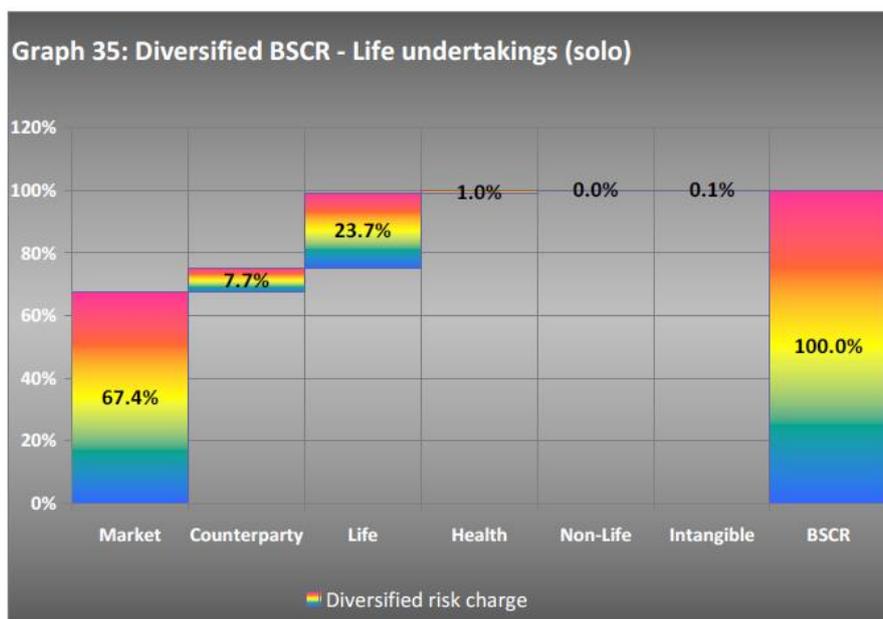
²³ Qualora il rischio di credito sia su strumenti finanziari, viene considerato nel sottomodulo “rischio di spread” del rischio di mercato.

- ❖ Il rischio di sottoscrizione non vita: “Il modulo del rischio di sottoscrizione per l’assicurazione non vita riflette il rischio derivante da obbligazioni di assicurazione non vita, tenuto conto dei pericoli coperti e delle procedure utilizzate nell’esercizio dell’attività”. Esso quindi è il rischio tipico delle imprese di assicurazione danni e nasce dall’aggregazione dei seguenti sottomoduli
 - Il rischio di tariffazione e riservazione: esso comprende sia il rischio che i costi per i sinistri non ancora verificatisi saranno superiore a quanto previsto in sede di tariffazione (rischio di tariffazione) e il rischio che quanto accantonato per i sinistri già verificatisi sia insufficiente ad onorare gli impegni presi (rischio di riservazione).
 - Il rischio catastrofale non-vita: “il rischio di perdita o di variazione sfavorevole del valore delle passività assicurative, derivante da un’incertezza significativa delle ipotesi in materia di fissazione dei prezzi e di costituzione delle riserve in rapporto ad eventi estremi o eccezionali”.
 - Il rischio di estinzione anticipata non-vita, rischio pressoché ininfluenza per le compagnie danni.
- ❖ Il rischio di sottoscrizione per l’assicurazione malattia: “riflette il rischio derivante dalla sottoscrizione di obbligazioni di assicurazione malattia, quando questa sia o meno praticata su una base tecnica simile a quella dell’assicurazione vita, tenuto conto sia dei pericoli coperti che dei processi utilizzati nell’esercizio dell’attività”. Oltre al sottomodulo CAT, i restanti due sottomoduli sono legati alla natura dicotomica delle polizze malattia: il primo tipo riguarda le polizze che hanno caratteristiche più affini alle assicurazioni non-vita e quindi comportino rischi di natura rassomigliante e comparabile; il secondo gruppo è relativo invece alle polizze più simili ai prodotti vita. Elementi discriminanti per l’appartenenza di una polizza ad

uno dei due gruppi sopra descritti sono la durata (tipicamente le polizze non vita sono monoannuali o con una durata breve, mentre le polizze vita sono pluriannuali) e l'essere un'"assicurazione di valuta" piuttosto che un'"assicurazione di valore": le prime presentano un importo economico assicurato prefissato (fattispecie tipica delle assicurazioni vita), le seconde sono funzione di massimali e valore dell'elemento assicurato.

Prima di analizzare il c.d. SCR_{life} si dà un'indicazione del peso delle componenti di rischio in media per una compagnia di assicurazione sulla durata di vita. A tal fine si propone in figura 4 un grafico tratto dal report di EIOPA al QIS5.

Figura 6 - I pesi delle componenti di rischio per un'assicurazione sulla durata di vita



Si osserva che, mediamente, il 67.4% del requisito di capitale di base (calcolato considerando già gli effetti della diversificazione tra i moduli) deriva dal rischio di mercato, proprio a causa del ciclo monetario invertito e quindi del fatto che una compagnia di assicurazione sulla durata di vita si trova nella situazione di dove investire un'enorme massa di capitali derivante dall'incasso dei premi

relativi a polizze pluriennali riscossi dagli assicurati e dall'investimento degli stessi.

1.5 Il Life Underwriting Risk

Il rischio di sottoscrizione vita, che come osservabile dalla figura 4 comporta un assorbimento di capitale decisamente inferiore a quello derivante dai rischi di natura finanziaria, ha un'importanza chiave per un'impresa di assicurazione sulla durata di vita, perché è il rischio c.d. specifico. Come per gli altri macro-moduli, anche il rischio di sottoscrizione vita nasce dall'aggregazione di sottomoduli, quindi anche in questo caso è necessario calcolare prima i requisiti di capitale dei 7 sottomoduli e successivamente aggregarli con la matrice correlazione proposta dalle norme di secondo livello.

In formule:

$$SCR_{life} = \sqrt{\sum_{i,j} CorrNL_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j}$$

Dove la matrice di correlazione tra i 7 sottomoduli è la seguente:

Tabella 3 – La matrice di correlazione tra i rami Life

i	Mortalità	Longevità	Invalidità	Spese Vita	Revisione	Estinzione anticipata	Catastrofe vita
Mortalità	1						
Longevità	-0,25	1					
Invalidità	0,25	0	1				
Spese Vita	0,25	0,25	0,5	1			
Revisione	0	0,25	0	0,5	1		
Estinzione anticipata	0	0,25	0	0,5	0	1	
Catastrofe vita	0,25	0	0,25	0,25	0	0,25	1

Nonostante l'analisi dei 7 sotto-moduli approfondirà molti temi, si osserva fin da subito che il coefficiente di correlazione lineare tra il rischio di mortalità e quello di longevità è pari a -0,25. Tale valore negativo è un *unicum* nelle norme di secondo livello e riflette il fatto che i due rischi in questione sono opposti, ma non

nel senso pieno del termine: risulta intuitivo che ad un aumento della mortalità corrisponde una diminuzione della longevità e viceversa (c.d. *natural hedging*), ma i due rischi agiscono solitamente su portafogli assicurativi profondamente diversi in termini di composizione. Il rischio di mortalità, tipico delle Temporanee Caso Morte, deriva da assicurati esposti al rischio di subire il decesso, quindi assicurati tendenzialmente con un'età media maggiore; il rischio di longevità invece, tipico delle rendite, è relativo a soggetti che si aspettano di sopravvivere ancora per molto tempo. Il tema dell'autoselezione e dell'antiselezione trattato nel Capitolo 2 approfondirà ulteriormente questo concetto.

Si esaminano ora quali siano i singoli rischi che costituiscono il *Life Underwriting Risk*:

Il rischio di mortalità:

Esso viene definito come “il rischio di perdita o di variazione sfavorevole del valore delle passività assicurative, derivante da variazioni del livello, della tendenza o della volatilità dei tassi di mortalità, laddove un incremento del tasso di mortalità dà luogo ad un incremento del valore delle passività assicurative”.

Tale rischio quindi affligge quelle polizze che comportano un pagamento al beneficiario (subordinato al verificarsi dell'evento morte del soggetto assicurato nel corso della durata della polizza) che sia maggiore delle riserve tecniche: in tal caso un aumento dei tassi di mortalità rispetto alle aspettative comporta un aumento delle riserve. Le polizze che portano questo tipo di rischio sono le Temporanee Caso Morte e le Miste, anche se nel caso di queste ultime le *Technical Specifications* di EIOPA escludono il c.d. *unbundling*, ossia si consente la compensazione “naturale” tra la componente della prestazione in caso di morte e

la componente della prestazione in caso di sopravvivenza²⁴. Il requisito di capitale del sotto-modulo “rischio di mortalità” si calcola come:

$$SCR_{life,mort} = \Delta BOF | (shock_{mort} + 15\%)$$

Ossia come la perdita di fondi propri di base qualora si avesse un incremento istantaneo e permanente del 15% dei tassi di mortalità utilizzati per il calcolo delle riserve tecniche. Si ipotizza che nello scenario “stressato” i *future discretionary benefits* rimangano immutati.

Le norme di secondo livello consentono una semplificazione del calcolo di $SCR_{life,mort}$ laddove il computo con la metodologia standard risultasse sproporzionato e eccessivo rispetto alla dimensione del portafoglio in esame.

In formule:

$$SCR_{life, mort} = 0,15 \cdot CAR \cdot q \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{1 - q}{1 + i_k} \right)^{k-0,5}$$

Dove

- CAR sono i capitali sotto rischio positivi
- q è la stima del tasso di mortalità medio per il prossimo anno (è la media ponderata dei tasi di mortalità, dove i pesi sono le somme assicurate)
- n è la *duration* modificata espressa in anni relativa ai possibili pagamenti caso morte inclusi nel calcolo della BE
- i_k è il tasso a pronti privo di rischio, annualizzato per la *maturity* k.

La compagnia, al fine di utilizzare il calcolo semplificato, deve dapprima effettuare una valutazione interna del rischio dove emerge la necessità dell’applicazione del principio della “proporzionalità”; in secondo luogo deve verificare che le ipotesi sottostanti il calcolo semplificato siano verificate: durante i successivi n anni dal momento del calcolo i capitali sotto rischio non devono diminuire drasticamente

²⁴ Si specifica che nel caso in cui il risultato netto dello scenario è favorevole all’assicuratore, va applicato un limite inferiore pari a 0.

e la media dei tassi di mortalità degli assicurati (calcolato con pesi uguali alle somme assicurate) non deve crescere drasticamente nel tempo.

Il rischio di longevità:

È definito come “il rischio di perdita o di variazione sfavorevole del valore delle passività assicurative, derivante da variazioni del livello, della tendenza o della volatilità dei tassi di mortalità, laddove un calo del tasso di mortalità dà luogo ad un incremento del valore delle passività assicurative”. Il rischio di longevità è associato quindi alle obbligazioni di assicurazione che prevedono la corresponsione di una serie di pagamenti fino alla morte dell’assicurato (per esempio le rendite) o la corresponsione di un pagamento ad una certa data solo nel caso in cui l’assicurato sia in vita a quella data (c.d. capitale differito). In questi casi, una diminuzione dei tassi di mortalità comporta un aumento del valore attuale atteso dei pagamenti da versare agli assicurati, con conseguente aumento delle riserve tecniche.

Il requisito di capitale si calcola come:

$$SCR_{life,long} = \Delta BOF | (shock_{mort} - 20\%)$$

Ovvero esso corrisponde alla perdita che l’impresa di assicurazione sopporterebbe qualora i tassi di mortalità subissero una diminuzione istantanea e permanente di 20 punti percentuali. Anche in questo sotto-modulo non è previsto l’*unbundling* laddove i contratti prevedano una prestazione sia in caso di sopravvivenza che in caso di decesso, con la condizione che qualora la compensazione “naturale” porti ad uno scenario favorevole all’impresa di assicurazione, venga applicato un limite inferiore pari a 0 al calcolo.

In osservanza al principio della proporzionalità, è previsto un calcolo semplificato considerato in funzione della natura, della portata e della complessità dei rischi. Se seguito di una valutazione interna della compagnia risulta quanto appena detto e sono rispettate le ipotesi che si descriveranno in seguito, è possibile utilizzare il calcolo semplificato.

In questo caso:

$$SCR_{life, long} = 0,2 \cdot q \cdot n \cdot 1,1^{\frac{n-1}{2}} \cdot BE_{long}$$

Dove:

- q è il “tasso medio di mortalità atteso degli assicurati nel corso dei 12 mesi successivi ponderato per la somma assicurata”;
- n “è la durata modificata in anni delle prestazioni da erogare ai beneficiari incluse nella migliore stima”;
- BE_{long} è la Best Estimate delle obbligazioni soggette al rischio di longevità.

Le ipotesi che devono essere validate affinché il calcolo sia utilizzabile riguardano l’età media degli assicurati e la media dei tassi di mortalità degli stessi: la prima deve essere in un intorno dei 60 anni e la seconda non deve crescere (in valore atteso) oltre del 10% ogni anno.

Il rischio di invalidità - morbidità:

Il *disability – morbidity risk* è definito come: “il rischio di perdita o di variazione sfavorevole del valore delle passività assicurative, derivante da variazioni del livello, della tendenza o della volatilità dei tassi di invalidità, malattia e morbidità”. Si specifica innanzitutto che la maggior parte dei contratti che portano il rischio in questione, saranno associati al macro-modulo SCR_{Health} : qualora non risulti appropriato applicare una procedura di *unbundling* al contratto, è possibile utilizzare il sotto-modulo in esame che riconduce il relativo requisito al *life underwriting risk*. I contratti in esame, tipicamente, prevedono la corresponsione di un capitale o di una rendita in seguito ad una diagnosi dove si accerta che, a

causa di una malattia o di un evento recante disabilità, l'assicurato è impossibilitato a svolgere la propria attività professionale.

Il requisito di capitale richiesto dalla Standard Formula è il seguente:

$$SCR_{life, dis} = \Delta BOF | (Dis_shock)$$

Dove *Dis_shock* corrisponde alla combinazione dei cambiamenti dei seguenti tassi istantanei:

- a) Un aumento del 35% dei tassi di invalidità e morbilità utilizzati nel calcolo delle riserve tecniche per i prossimi 12 mesi.
- b) Un aumento del tasso citato al punto a) per ogni periodo successivo ai primi 12 mesi.
- c) Una diminuzione del 20% dei tassi di recupero per l'invalidità e la morbilità utilizzati nel calcolo delle riserve tecniche, per ogni periodo futuro.

In questo caso, il principio di proporzionalità consente un calcolo semplificato dove:

$$SCR_{life, dis-morb} = \left\{ \begin{array}{l} 0.35 \cdot CAR_1 \cdot d_1 + \\ + 0.25 \cdot 1.1^{\frac{(n-3)}{2}} \cdot (n-1) \cdot CAR_2 \cdot d_2 + \\ + 0.2 \cdot 1.1^{\frac{(n-1)}{2}} \cdot t \cdot n \cdot BE_{dis} \end{array} \right\}$$

Dove

- CAR_1 sono i capitali sotto rischio;
- CAR_2 sono i capitali sotto rischio dopo 12 mesi;
- d_1 "è il tasso medio di invalidità-morbilità atteso nel corso dei 12 mesi successivi ponderato per la somma assicurata";
- d_2 è lo stesso tasso considerato al punto precedente, ma con riferimento al periodo che va dal 12 mese al 24 mese successivo alla data di valutazione;
- n è la *duration* modificata delle prestazioni da erogare in caso di invalidità-morbilità incluse nella Best Estimate;
- t sono i tassi di recesso attesi nel corso dei 12 mesi successivi;
- BE_{dis} è la BE delle obbligazioni soggette al rischio di invalidità-morbilità.

Il rischio di spesa per l'assicurazione vita:

Il c.d. *expense risk* è definito come: “il rischio di perdita o di variazione sfavorevole del valore delle passività assicurative, derivante da variazioni del livello, della tendenza o della volatilità delle spese incorse in relazione ai contratti di assicurazione o di riassicurazione”. Nonostante il rischio di spesa sia un rischio pressoché ininfluenza nei rami non vita, avendo i prodotti life una durata pluriennale, l'ipotesi di spese deterministiche su una *maturity* particolarmente avanzata può risultare poco adatta e un incremento dell'inflazione rispetto alle ipotesi fatte, ovvero un aumento nei costi di gestione, possono portare un aumento consistente delle passività.

Il requisito di capitale legato al rischio di spesa per l'assicurazione vita si calcola come:

$$SCR_{life, exp} = \Delta BOF | (Exp_shock)$$

Dove *Exp_shock* è la combinazione di:

- Un aumento del 10% delle spese considerate nel calcolo delle riserve tecniche
- L'aumento di un punto percentuale del tasso d'inflazione utilizzato per il calcolo delle riserve tecniche.

Si specifica che qualora le polizze abbiano caricamenti per spese adeguabili, l'analisi dello scenario deve considerare azioni del management realistiche in relazione a tali caricamenti.

In caso di osservanza dell'articolo 88 delle norme di secondo livello, ovvero del principio della proporzionalità, il requisito patrimoniale è calcolabile nel seguente modo:

$$SCR_{life, spese} = 0,1 \cdot nEI + EI \left(\left(\frac{1}{i + 0,01} \right) \cdot ((1 + i + 0,01)^n - 1) - \frac{1}{i} ((1 + i)^n - 1) \right)$$

Dove:

- EI è l'importo delle spese dell'ultimo anno, relative ai rami vita escluso il sotto-ramo invalidità e morbilità.
- n è la *duration* modificata dei flussi di casa della BE
- i è il tasso d'inflazione medio ponderato incluso nel calcolo della BE delle obbligazioni, dove i pesi corrispondono ai valori attualizzati delle spese.

Il rischio di estinzione anticipata:

Esso è definito come: “il rischio di perdita o di variazione sfavorevole del valore delle passività assicurative, derivante da variazioni del livello o della volatilità dei tassi delle estinzioni anticipate, dei recessi, dei rinnovi e dei riscatti delle polizze”. Esso quindi non è tanto relativo ai riscatti in genere, elemento già considerato dalla compagnia all'interno del calcolo della Best Estimate, ma al fatto che i riscatti abbiano o valore atteso o volatilità diversi da quanto stimato.

Il requisito patrimoniale è calcolato nel seguente modo:

$$SCR_{life, lapse} = \max(\Delta BOF | ShockUp / ShockDown / EstinzioneMassa)$$

Ossia viene calcolato come il massimo valore ΔBOF , rispetto a 3 scenari differenti:

- Un aumento del 50% dei tassi di esercizio delle opzioni su tutte le polizze con valore di estinzione positivo;
- Una diminuzione del 50% dello stesso tasso su tutte le polizze con valore di estinzione negativo;
- Scenario di estinzione di massa: estinzione del 70% delle polizze legate a fondi pensione collettivi con o senza garanzie assicurative relative alla conservazione del capitale e/o ad un interesse minimo congiuntamente all'estinzione del 40% delle polizze *retail*²⁵.

Precedentemente, il calcolo del rischio di estinzione anticipata faceva riferimento al c.d. *surrender strain*: al fine di calcolare i BOF condizionati ai primi due

²⁵ Si intendono principalmente polizze caso vita, caso morte, miste, con controassicurazione e rendite

scenari, era necessario partizionare l'insieme delle polizze in funzione del rispettivo valore di estinzione.

Quest'ultimo è definito come lo scarto tra il valore di riscatto e la Best Estimate; in formule:

$$Val. Estinzione = Val. Riscatto - BE$$

Nelle polizze con valore di estinzione positivo, la compagnia di assicurazione subisce una perdita connessa all'aumento delle riserve tecniche qualora si verifichi un aumento dei tassi di riscatto rispetto alle aspettative. Un esempio proposto da Floreani²⁶[24] è quello inerente alle polizze unit-linked dove il valore di estinzione è leggermente positivo in quanto il valore di riscatto coincide con la somma dei valori delle singole quote, mentre la BE deduce dal valore relativo alle quote le future commissioni di gestione nette costi che genererebbero un utile per la compagnia: in altre parole l'eventuale riscatto, comporta la "perdita" dei suddetti utili potenziali.

Lo scenario di estinzione di massa è relativo alla fattispecie dove gli assicurati ritengano che riscattare la propria polizza e investire i fondi altrove sia una scelta efficiente. Tale situazione si può verificare qualora il mutamento delle condizioni di mercato (per esempio un improvviso aumento dei tassi d'interesse) renda più appetibili altri prodotti finanziari.

L'utilizzo del *surrender strain* però è stato abbandonato in quanto soffre di un problema logico-concettuale: si considerino i contratti più profittevoli. Tali contratti hanno delle penali elevate volte a disincentivare il riscatto, ciò implica che la BE sia maggiore del valore di riscatto e il valore di estinzione sia negativo. Questi contratti però, coincidono con la fattispecie di una perdita (aumento delle riserve tecniche) qualora il tasso di riscatto effettivo sia maggiore di quello ipotizzato.

²⁶ FloreaniA. (2013). "Finanza delle imprese di assicurazione", corso di Economia delle aziende di assicurazione II, Università Cattolica del Sacro Cuore, Milano, capitolo "La formula standard e i modelli interni: elementi essenziali", pag. 37.

L'abbandono di tale metodologia di calcolo ha condotto alla seguente metodica:

- a) Per ogni polizza si individua lo scenario sfavorevole e si calcola la variazione negativa, ossia la variazione della BE al netto di quanto eventualmente ceduto;
- b) Per la polizza in questione, i valori relativi agli altri scenari sono 0;
- c) Si sommano i risultati di tutte le polizze e si sceglie lo scenario che porta perdite più consistenti;
- d) $SCR_{life, lapse} = \max(\Delta BOF | Scenario_Individuato_al_punto_c)$

Il calcolo semplificato coerente con il principio di proporzionalità prevede che:

$$SCR_{life, lapse} = 0.5 \cdot l_i \cdot n_{up} \cdot S_{up} \text{ per } i = 1, 2;$$

Dove:

- $l_1 = l_{up} = \max(\text{Tasso medio di estinzione anticipata}^{27}; 67\%)$;
- $l_2 = l_{down} = \max(\text{Tasso medio di estinzione anticipata}^{28}; 40\%)$
- n_{up} è il periodo medio in anni del quale le polizze citate al punto precedente si estinguono;
- S_{up} è il valore del flusso di cassa del riscatto;

Il rischio di revisione:

È definito come: “il rischio di perdita o di variazione sfavorevole del valore delle passività assicurative, derivante da oscillazioni del livello, della tendenza o della volatilità dei tassi di revisione delle rendite, dovute a variazioni del quadro giuridico o dello stato di salute della persona assicurata”.

Tale sotto-modulo ha come fine quello di catturare il rischio inerente ad una variazione sfavorevole degli importi delle rendite rivalutabili conseguentemente ad un processo di revisione non atteso.

Come si vedrà nel prossimo paragrafo, l'influenza del $SCR_{life, rev}$ sul SCR_{life} è prossimo allo 0%.

²⁷ Solo per le polizze con valore di estinzione positivo

²⁸ Solo per le polizze con valore di estinzione negativo

Ai fini di completezza, si mostra il calcolo del requisito patrimoniale di tale sotto-modulo:

$$SCR_{life, rev} = \Delta BOF |(Rev_shock)$$

Dove Rev_shock è l'incremento istantaneo e permanente del 3% dell'ammontare annuale pagabile per rendite esposte al *revision risk*.

Il rischio catastrofale vita

Il c.d. *life CAT risk* è definito dalla Direttiva come: “il rischio di perdita o di variazione sfavorevole del valore delle passività assicurative, derivante dall'incertezza significativa delle ipotesi in materia di fissazione dei prezzi e di costituzione delle riserve in rapporto ad eventi estremi o sporadici”.

Questo sotto-modulo intende quindi cogliere quegli aspetti inerenti a eventi estremi e irregolari che non sono adeguatamente considerati negli altri sotto-moduli.

Il requisito di capitale si calcola come:

$$SCR_{life, cat} = \Delta BOF |(Cat_shock)$$

Dove Cat_shock indica un incremento istantaneo, permanente e assoluto di tutti i tassi di mortalità utilizzati nel calcolo delle riserve tecniche di 0.15 punti percentuali.

In caso di utilizzo del principio di proporzionalità, è possibile calcolare $SCR_{life, cat}$ come:

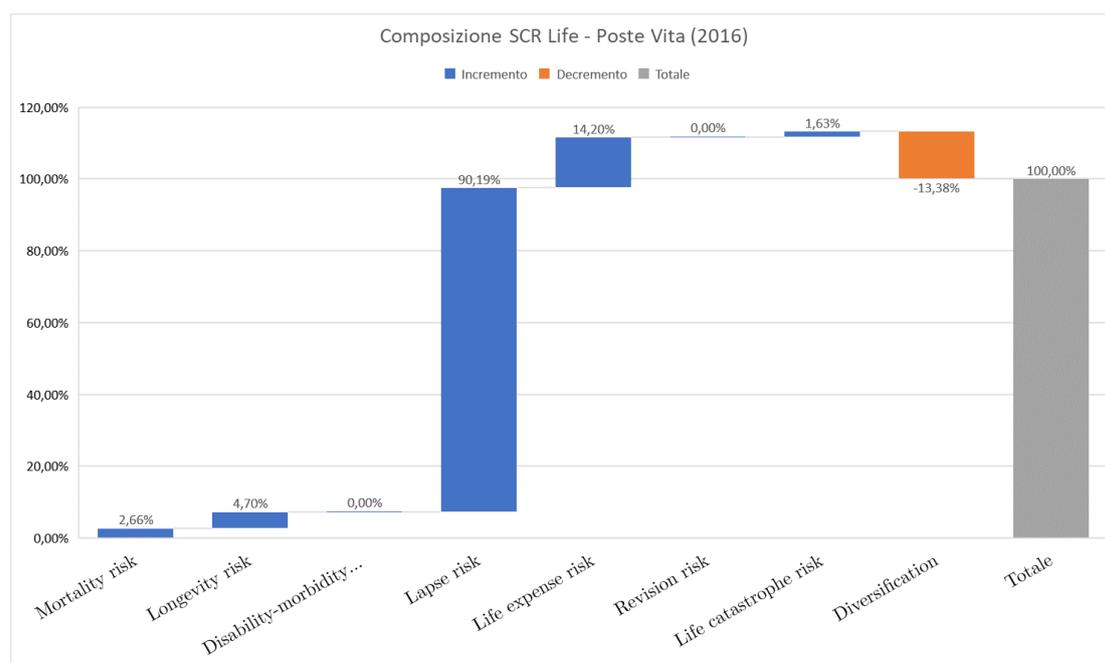
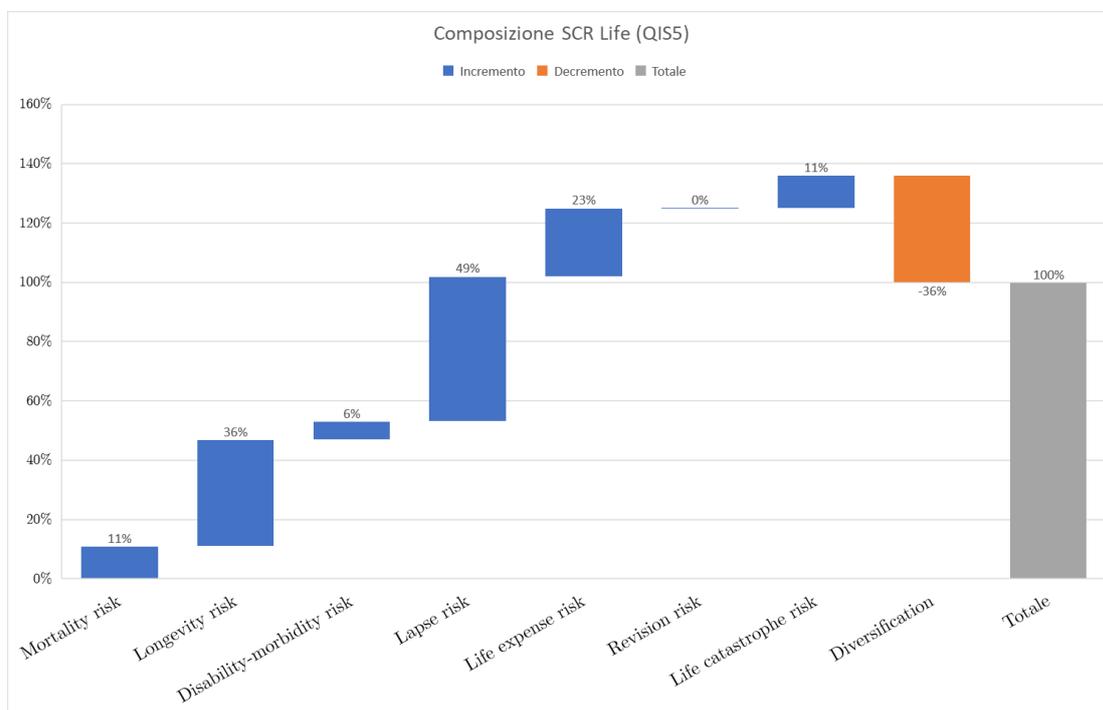
$$SCR_{life, cat} = 0.0015 \cdot \sum_i CAR_i$$

Conclusioni

Si conclude l'analisi dei sotto-moduli del *Life Underwriting Risk* dando un'indicazione del peso relativo medio di ogni sottomodulo. A tal fine si

considerano le Figura 7a e 7b tratte rispettivamente dal QIS5 e dal *Solvency and Financial Condition Report* di Poste Vita del 2016.

Figure 7a e 7b - La composizione del Life Underwriting Risk



Si osserva che una parte particolarmente consistente del LUR deriva dal rischio di longevità, dal rischio di estinzione anticipata e dall' *expense risk*; sono

consistenti i benefici della diversificazione che riducono il requisito aggregato del circa 35%.

1.5.1 La calibrazione dei parametri

Al fine di completare il discorso sul requisito di capitale per il Life Underwriting Risk proposto dalla Standard Formula, si elencano brevemente quali sono stati gli studi che hanno portato all'individuazione degli shock descritti fino ad ora. Le informazioni essenziali sono disponibili nelle *Underlying Assumptions* che a loro volta rimandano ai *Calibrations Paper* del QIS3: nonostante nel corso del tempo i valori dei parametri siano stati cambiati per svariati motivi, gli studi utilizzati come punto di partenza, sono rimasti gli stessi.

Per i sotto-moduli del Life Underwriting Risk, come approfondito in Sandström A. [40], le analisi principali sono state condotte e pubblicate dalla società internazionale di consulenza Watson Wyatt [47]. Per esempio, con riferimento al rischio di longevità, costoro stabilirono che lo shock doveva essere individuato tra un minimo del 5% e un massimo del 35%, con la preferenza per un valore prossimo alla media: il 18%. Recenti studi, primo tra tutti "*Longevity in the 21st century*" di R.C. Willets, ritengono più veritiero uno shock estremo del 25%; si osserva che tale studio è stato condotto su dati provenienti dal Regno Unito con una profondità storica di circa 25 anni. Le principali cause di shock così forti sono legate ai progressi della medicina nelle malattie cardiocircolatorie e tumorali, nella diminuzione del numero di fumatori e, più in generale, di un aumento della qualità della vita.

Per quanto riguarda invece il rischio di mortalità gli studi precedentemente citati di Watson Wyatt individuarono un range dello shock pari a 10% - 35% con valore proposto del 23%

1.5.2 L' implementazione della valutazione a fair value nel metodo ΔBOF ²⁹

Si vuole ora riscrivere una formulazione del requisito di capitale di assicurazione sulla durata di vita sfruttando i nuovi criteri di valutazione, in particolare la metodologia BE + RM relativa alle riserve tecniche.

A tal fine si considera un'impresa di assicurazione con un solo portafoglio di rendite. Tutti gli assicurati appartengono alla stessa coorte, ovvero hanno la stessa età, sono dello stesso sesso, la forma tariffaria è la stessa per tutti e l'antidurata contrattuale è la medesima; in altre parole, le varie polizze all'interno della coorte differiscono solo per i capitali assicurati. Le rendite erogate dalla compagnia sono interamente prefissate, ovvero non sono previsti extra-rendimenti e la compagnia non ha la facoltà di ridurre gli importi erogati qualora la situazione diventi problematica.

Tali ipotesi sono forti, ma consentono di isolare il rischio relativo alla diminuzione dei tassi di mortalità, essendo l'unico che grava sulle sorti della Compagnia.

In questo contesto, è intuitivo osservare che se gli assicurati sopravvivessero molto più di quanto la compagnia ha ipotizzato, essa si troverebbe a erogare rendite per periodi più lunghi, subendo delle perdite tecniche. Questa è la manifestazione del rischio di longevità. Come mostrato nel paragrafo precedente, il requisito di capitale per il solo *longevity risk* è pari a:

$$SCR_{life, long} = \Delta BOF | (shock_{mort} - 20\%)$$

In questo contesto quindi, l'unica fonte di rischio è relativa alla variabilità intorno alla stima dei parametri del modello: si considera solo il rischio sistematico.

Si introducono ora:

- A_t sono gli attivi dell'impresa al tempo t ;

²⁹ Le riflessioni di questo paragrafo nascono dal paper di Pitacco E., Olivieri A. "Stochastic mortality, the impact on a target capital"

- $V_t^{(\pi)[BE]}$ la BE delle riserve tecniche;
- RM_t il Risk Margin al tempo t;
- $V_t^{(\pi)}$ la totalità delle riserve tecniche;

Essendo $BOF_t = A_t - V_t^{(\pi)}$

$$\Delta BOF = A_t - V_t^{(\pi)} - (A_t - V_t^{(\pi)} | Shock)$$

Da cui

$$\Delta BOF = (A_t - A_t | shock) - (V_t^{(\pi)} - V_t^{(\pi)} | shock)$$

Ipotizzando ora che gli *assets* della compagnia non siano correlati con l'andamento della mortalità³⁰ e considerando che il RM non venga influenzato dallo shock (come specificato nel Paragrafo 1.4.6),

$$\Delta BOF = SCR_{life-long,t} = \left(V_t^{(\pi)[BE]} | Shock \right) - V_t^{(\pi)[BE]}$$

Il requisito di capitale per il solo sotto-modulo longevità equivale quindi allo scarto tra il valore attuale delle riserve tecniche calcolata con tassi di mortalità ridotti del 20% e la BE effettiva calcolata dalla compagnia.

Riprendendo ora il metodo di calcolo del Risk Margin con il *Cost of Capital Approach*,

in questo specifico caso

$$RM_t = 6\% \cdot \sum_{t \geq 0} \frac{SCR_{life-long,t}}{(1 + r_{t+1})^{t+1}}$$

Risulta interessante osservare che la dimensione del RM, valore attuale dei costi del capitale allocato per l'anno in corso e che sarà allocato negli anni futuri, è direttamente proporzionale al rischio dell'impresa, in questo caso al rischio di longevità.

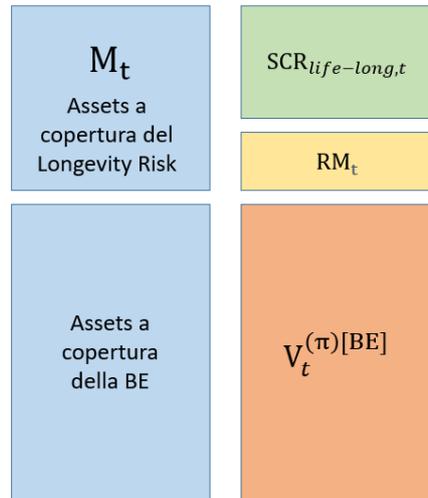
Il quantitativo di *assets* M_t necessari al tempo t a copertura del solo *longevity risk* sono uguali a

$$M_t = SCR_{life-long,t} + RM_t$$

³⁰ Si sta quindi ipotizzando che la compagnia in esame non abbia tra i suoi assets né longevity bonds né catastrophe bonds. Ci si riferisce al caso in cui, per esempio, gli investimenti siano tutti in titoli di stato.

$$M_t = \left(V_t^{(\pi)[BE]} | Shock \right) - V_t^{(\pi)[BE]} + RM_t$$

Figura 8 - L'EBS dell'impresa in esame con Assets minimi



In Figura 8 si rappresenta l'Economic Balance Sheet della compagnia ipotizzata; risulta interessante osservare che la totalità degli assets della compagnia deve essere uguale al RM_t e alla BE delle riserve tecniche calcolate con tassi di mortalità ridotti del 20%.

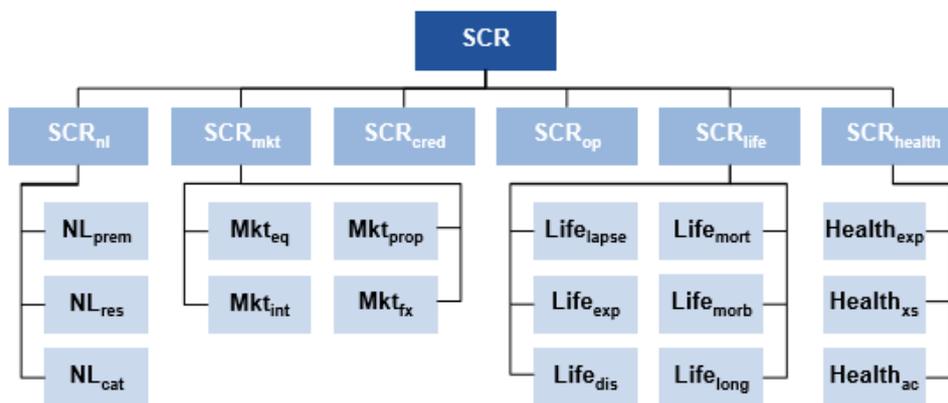
Questi risultati verranno utilizzati in successivamente perché, a condizione che alcune ipotesi siano rispettate almeno in parte, riescono a dare una prima *proxy* sia del requisito di capitale che degli assets da detenere a copertura del rischio di longevità.

1.6 Il Life Underwriting Risk nel QIS2

Come precedentemente accennato, il secondo Quantitative Impact Study, è uno studio guidato dal CEIOPS (Committee of European Insurance and Occupational Pension Supervisors, dal 1 Gennaio 2011 EIOPA) propedeutico a Solvency II. In seguito verrà descritto il requisito di capitale per un'impresa di assicurazione sulla durata di vita in tale QIS perché, come si vedrà nel Capitolo 3, porta dei risultati molto simili a quelli che suggerisce la teoria del rischio.

In Figura 9 si mostra la struttura piramidale del SCR nel QIS2: si osservano in primo luogo alcune differenze relative a SCR_{Op} , $SCR_{Intangibles}$ e SCR_{Market} ; per quanto riguarda il Life Underwriting Risk, i sotto-moduli presenti sono gli stessi.

Figura 9 - La struttura del SCR nel QIS 2



Si descrivono ora i metodi di calcolo del requisito patrimoniale per il rischio di longevità e per il rischio di mortalità, con il fine di osservare le principali differenze con la normativa vigente.

Si specifica che qualora il requisito di capitale venisse calcolato con una metodologia *scenario-based*, anziché far riferimento allo scarto c.d. ΔBOF si utilizzava la terminologia ΔNAV dove NAV è l'acronimo di Net Asset Value ossia

il valore tra attività e passività dell'EBS senza considerare l'SCR. ΔNAV e ΔBOF portano agli stessi risultati.

Il rischio di longevità

Erano previste due metodologie per il calcolo, una *scenario-based* e una *factor-based*. La formula di calcolo prevedeva che:

$$Life_{long} = Life_{long,vol} + Life_{long,trend}$$

Con l'approccio *scenario-based*, le due componenti venivano calcolate nel seguente modo:

- $Life_{long,vol2}$ era il requisito calcolato con la metodologia ΔNAV laddove lo shock è rappresentato ad una diminuzione del 10% dei tassi di mortalità per ogni età, relativo al solo anno successivo. È un requisito che fa riferimento all'aleatorietà sulla durata di vita degli assicurati, riguarda il c.d. *volatility risk*.
- $Life_{long,trend2}$ era anch'esso un requisito calcolato con la metodologia ΔNAV , dove lo shock invece prevede una riduzione permanente del 20% dei tassi di mortalità per ogni età, per sempre. Tale requisito è relativo quindi al rischio di parametro e al rischio di trend.

Con la metodologia *factor-based* invece, le due componenti del requisito di capitale erano calcolate come:

$$- Life_{long1} = 2,58 \cdot \sqrt{\frac{q_x \cdot (1 - q_x)}{N}} \cdot Potential Release$$

Dove "Potential Release" indica l'ammontare delle riserve tecniche relative ai contratti connessi al rischio di longevità al netto di ogni beneficio pagabile al momento del decesso. Tale approccio, come si dimostrerà nel capitolo 3, è legato alla deviazione standard dell'utile demografico sotto due ipotesi: quella di normalità e quella di assenza di volatilità nei capitali eliminati.

$$- Life_{long,trend2} = 0,005 \cdot Technical Provisions$$

Il rischio di mortalità

Anche il rischio di mortalità era calcolabile sia con un approccio *factor based*, che con uno *scenario based*; la formula di calcolo prevedeva:

$$Life_{mort} = Life_{mort,vol} + Life_{mort,trend} + Life_{mort,CAT}$$

Si analizzano ora le componenti calcolate con la metodologia *scenario based*:

- $Life_{mort,vol1}$ era il requisito di capitale per il rischio di volatilità calcolato come ΔNAV , dove lo shock era rappresentato da un aumento del 10% dei tassi di mortalità per ogni età, per tutto l'anno successivo all'istante di valutazione.
- $Life_{mort,trend1}$ era il requisito di capitale per il rischio di trend e parametro calcolato come ΔNAV ; in questo caso lo shock era rappresentato da un aumento istantaneo e permanente del 20% dei tassi di mortalità per ogni età.
- $Life_{mort,CAT}$ era il requisito di capitale per il rischio catastrofe; esso veniva calcolato solo con un approccio *factor based*. In formule:

$$Life_{mort,CAT} = \sum_i \left(0.003 \cdot \max \left(\begin{matrix} TP_i \\ Death_i \end{matrix} \right) \right)$$

Dove TP è l'acronimo di *Technical Provisions* e *Death* indicava l'ammontare pagabile in caso di decesso.

Utilizzando invece l'approccio *factor based*

- $Life_{mort,vol2} = 2.58 \cdot \sqrt{\frac{q_x \cdot (1 - q_x)}{N}} \cdot CapitaliSottoRischio$
- $Life_{mort,trend2} = 0.002 \cdot TP_{mort}$ dove l'ultimo termine indica la somma delle riserve tecniche dei contratti in cui un aumento dei tassi di mortalità porterebbe un aumento del valore della riserva.

1.7 Conclusioni

Con l'analisi del rischio di longevità e del rischio di mortalità così come trattati dal QIS2 termina il primo capitolo di questo elaborato. Riassumendo, si è visto come il requisito patrimoniale di un'impresa di assicurazione sulla vita si è evoluto: con Solvency 0 il requisito finale copriva in modo piuttosto approssimativo il rischio di mercato, il rischio di spese e il rischio di mortalità; il rischio di longevità non era in alcun modo considerato dato che nella formula utilizzata per quantificare il requisito si consideravano solo i capitali di sottorischio qualora fossero positivi. Con Solvency II invece il processo di individuazione di ogni singolo rischio che grava sull'impresa di assicurazione porta alla quantificazione di un SCR legato al rispettivo sotto-modulo e il SCR complessivo nasce dall'aggregazione di tali valori. Tale struttura porta ad un requisito finale che rispecchia decisamente meglio il profilo di rischio dell'impresa, anche se l'utilizzo di dati numerosi dati di input forniti dalla normativa di secondo livello (in primo luogo le matrici di correlazione) può ledere l'indagine degli aspetti più caratteristici della compagnia. Proprio con il fine di descrivere e quantificare l'utile e la perdita demografica di una compagnia di assicurazione sulla durata di vita, si introducono nel capitolo successivo la struttura dei prodotti più comuni nel mercato vita e, con il Capitolo 3, si sagomerà l'utile demografico utilizzando un modello stocastico *market consistent*.

Capitolo II: La valutazione dei principali prodotti vita sulla base del tasso di premio e del tasso di riserva matematica

2.1 Introduzione

Obiettivo di questo Capitolo sarà quello di valutare il requisito di capitale di una compagnia di assicurazione sulla durata di vita: a tal fine si utilizzerà un modello stocastico [41] [42] e, in un secondo momento, si aggregheranno più portafogli per studiare gli effetti del c.d. *natural hedging*.

Il capitolo è così sviluppato: il Paragrafo 2.2 presenterà gli elementi propedeutici all'introduzione del modello stocastico presentato nel paragrafo successivo. Tra questi si evidenziano i concetti di tasso di riserva matematica pura calcolato con le basi tecniche del I° ordine, i tassi di premio di rischio e premio di risparmio (oggetto del sotto paragrafo 2.2.2) e quello di utile demografico. Dopo la presentazione del modello e l'applicazione dello stesso a portafogli omogenei di polizze assicurative, si procederà all'aggregazione degli stessi sfruttando le funzioni copula per osservare come varia il requisito di capitale in un'ottica Solvency II *ex ante* ed *ex post* aggregazione (Paragrafo 2.7).

Si precisa che nella presentazione dell'argomentazione preparatoria al resto del capitolo si ipotizza che i capitali assicurati sia in caso di sopravvivenza che in caso di premorienza di tutte le polizze assicurative considerate, saranno unitari. La ragione risiede nel fatto che gli ammontari monetari saranno trattati distintamente dal Paragrafo 2.4; l'implicazione che ne deriva è che sia le riserve matematiche che i premi saranno espressi come tassi: si indica con v_t^* il tasso di

riserva matematica pura per l'antidurata t , con pu il tasso di premio unico e con p il tasso di premio annuo costante.

Essendo in un contesto *local GAAP*, il tasso di RM pura è calcolato coerentemente con quanto imposto dal Regolamento 29 del 6 Settembre 2016.

Prima di iniziare l'effettiva trattazione del capitolo, si specifica che la riserva matematica, *initium* generale da cui partire, è definita dalla suddetta normativa nazionale come “il valore dell'ammontare complessivo delle somme che risultino necessarie per far fronte al pagamento dei capitali e delle rendite maturate, dei riscatti e dei sinistri da pagare”³¹. La RM inoltre, deve essere calcolata con un “metodo attuariale prospettico sufficientemente prudente”³² ossia come il valore attuariale dei premi da incassare al netto del valore attuariale delle prestazioni; essendo tale riserva calcolata con ipotesi *locked* e prudenziali, a causa del c.d. principio di equità, essa ha un valore pari a zero al momento della stipula del contratto e si evolve nel tempo in funzione della tipologia della polizza e delle basi tecniche del I° ordine adottate (quella finanziaria verrà indicata con j^* mentre q_{x+t}^* sarà il tasso di mortalità tra l'età $x+t$ e $x+t+1$). La RM ha anche un'importanza determinante dato che essa è l'elemento chiave per attribuire un valore alla polizza, valore che varia quindi ad ogni anniversario della polizza e che acquisisce un'ulteriore rilevanza laddove l'assicurato, per qualsiasi ragione, decida di non versare più premi e/o recedere dal contratto.

³¹ IVASS. Regolamento 29 del 6 settembre 2016. Regolamento recante disposizioni relative alle imprese di assicurazione locali ai sensi degli articoli 51-bis, 51-ter, 51-quater del titolo IV, Capi I e II, del Decreto Legislativo 7 Settembre 2005 N. 209- Codice delle Assicurazioni Private come novellato dal Decreto Legislativo 12 Maggio 2015, N. 74

³² Art. 85 Regolamento IVASS 9/2016

2.2 Gli elementi preliminari in un contesto deterministico

Si procede ora con la trattazione di concetti centrali nella tecnica attuariale vita, fondamentali per poter presentare il modello stocastico del paragrafo successivo. Si incomincia con la descrizione di 4 forme assicurative particolarmente comuni nel mercato vita italiano per poi presentare due scomposizioni note in letteratura (quella relativa al premio annuo costante e quella relativa all'utile annuo atteso del singolo contratto), riadattandole con il fine di renderle coerenti con la notazione relativa ai tassi. Per qualsiasi approfondimento sulle modifiche dell'andamento dei tassi di RM pura al variare delle basi tecniche si rimanda alla sezione 1 dell'Appendice B. Sia in questo Capitolo che nell'Appendice appena citata, se non diversamente specificato, si ipotizzano $x = 40$, sesso= "M" e $n = 20$.

2.2.1 I principali prodotti nei rami Vita

Il capitale differito

Il capitale differito è una tipologia di assicurazione sulla vita in cui l'assicuratore, a fronte del pagamento di un premio, si impegna a corrispondere un capitale al beneficiario solo nel caso in cui il soggetto assicurato raggiunga in vita l'età $x + n$.

Il tasso di premio unico pu richiesto all'assicurato, sfruttando il principio di equità, è uguale a:

$$pu = {}_nE_x = {}_np_x^* \cdot (v^*)^n$$

Sfruttando un corollario del principio di equità, il legame tra tasso di PU e tasso di premio annuo costante p è:

$$p \cdot \ddot{a}_{x:n|} = pu$$

Da cui è agevole calcolare p dato il tasso di PU di una rendita anticipata pagata dal soggetto di età x fino all'età $x + n$. Nel caso del capitale differito, l'unico esborso aleatorio che grava sull'assicuratore è quello relativo al pagamento del capitale assicurato a scadenza: per questa ragione, i tassi dei premi naturali, per la cui definizione si rimanda al riferimento bibliografico [34] sono tutti pari a 0 a eccezione dell'ultimo. In formule,

$$\begin{cases} p_{h+1}^{(N)} = 0, \text{ per } h = 0, 1, \dots, n-2 \\ p_n^{(N)} = {}_1E_{x+n-1} \end{cases}$$

Il tasso di riserva matematica pura in presenza di un unico tasso di PU che dovrà costituire l'impresa di assicurazione in un contesto local GAAP dopo t periodi è quindi uguale a:

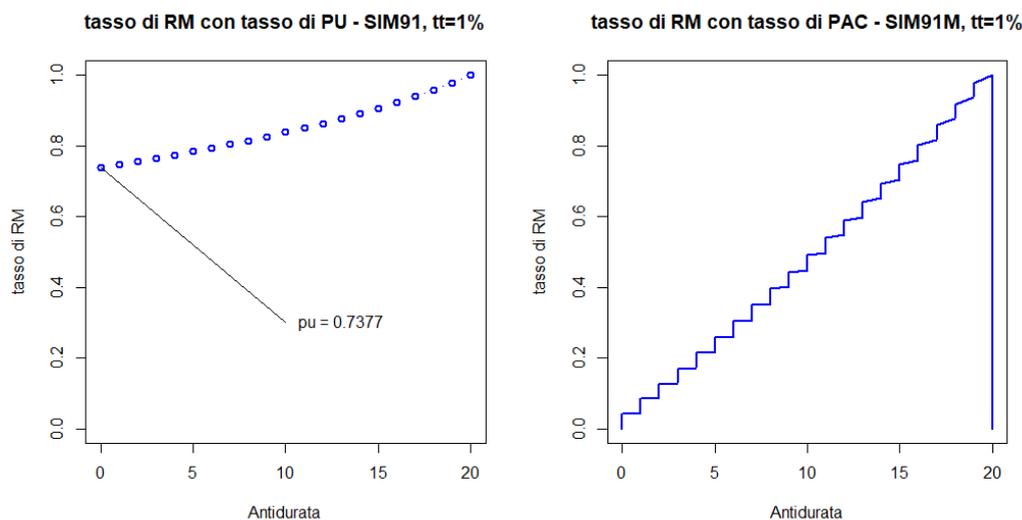
$$v_t^* = {}_{n-t}E_{x+t} = {}_{n-t}p_{x+t}^* \cdot (v^*)^{(n-t)}$$

Qualora, invece che versare un unico tasso di PU, l'assicurato versi annualmente un tasso di PAC p , l'equazione del tasso di RM pura diventa:

$$v_t^* = {}_{n-t}E_{x+t} - p \cdot \ddot{a}_{x+t:n-t}$$

Si presenta in Figura 10 l'andamento della RM di un capitale differito differenziando in funzione della metodologia di versamento dei premi:

Figura 10 - Il tasso di riserva matematica di un capitale differito



Si premette che l'unico caso in cui l'andamento di v_t^* con versamento di un unico pu sarebbe di tipo lineare è qualora non venga garantito nessun rendimento finanziario (tasso tecnico nullo) e, contemporaneamente, la base demografica utilizzata ipotizzi l'immortalità di ogni soggetto. Diversamente, come nel caso rappresentato, l'andamento generale è monotono non decrescente di tipo esponenziale a causa dei rendimenti finanziari e demografici, con punto di partenza pu in corrispondenza del primo valore sull'asse delle ascisse 0^+ .

La seconda figura rappresenta invece v_t^* nel caso in cui ogni anno venga versato un p con un accorgimento: anziché calcolarne i valori solo $t = 0, 1, \dots, n$, si calcolano gli stessi anche in $t = 0 + \varepsilon, 1 + \varepsilon, \dots, n + \varepsilon$ con ε valore infinitesimale strettamente maggiore di 0. In questo modo, non solo si osserva l'andamento del tasso in esame, ma si osserva anche come ad ogni versamento del premio, il tasso di RM subisce un c.d. “salto di riserva” esattamente pari al tasso di PAC.

In formule:³³

$$v_{t+\varepsilon}^* = {}_{n-t}p_{x+t}^* \cdot (v^*)^{(n-t)} - p \cdot a_{(x+t):(n-t-1)}$$

La rendita in pagamento e la rendita differita

In un'ottica di *Longevity Risk*, la rendita è sicuramente un prodotto assicurativo che gioca un ruolo chiave. Al fine di evidenziare e distinguere la fase di accantonamento dalla fase di erogazione, si procede ora all'analisi del prodotto assicurativo distinguendo due sottocategorie: “la rendita in pagamento” e “la rendita differita” ove, come si vedrà, la prima coincide concettualmente con una parte della seconda.

³³ Nella seguente formula, l'ultimo termine è il valore attuale atteso di una rendita immediata, posticipata, unitaria erogata ad un soggetto di età $x + t$ fino al raggiungimento dell'età $x + n - 1$ (all'età $x + n$ l'assicurato, se sopravvissuto, non paga più alcun premio ed incassa il capitale). Alternativamente, questo valore è riscrivibile come il v.a.a. di una rendita anticipata unitaria erogata ad un soggetto di età $x + t$ fino al raggiungimento dell'età $x + n - 1$, differita però di un anno. Utilizzando la formulazione estesa, tale v.a.a. coincide con:

$$\sum_{h=1}^{n-1} {}_h p_x^* \cdot (1 + j^*)^{-h}$$

I - La rendita in pagamento

Si considera un prodotto assicurativo stipulato in $t = 0$ che dia diritto all'assicurato di ricevere un capitale unitario ad ogni anniversario di polizza, fino a quando egli è in vita. Tale prodotto prende il nome di rendita vitalizia unitaria anticipata e immediata.

Il valore attuariale di tale polizza, e quindi il tasso di premio unico pu , è calcolabile sfruttando il “principio di composizione”, ovvero considerando tale rendita come la somma di tanti capitali differiti unitari. In formule:

$$pu = \ddot{a}_x = \sum_{h=0}^{\omega-x-1} {}_hE_x$$

L'unica osservazione da fare è circa l'estremo superiore della sommatoria: con ω si intende la c.d. *maximum reported age at death* ovvero l'età massima raggiungibile per un essere umano.

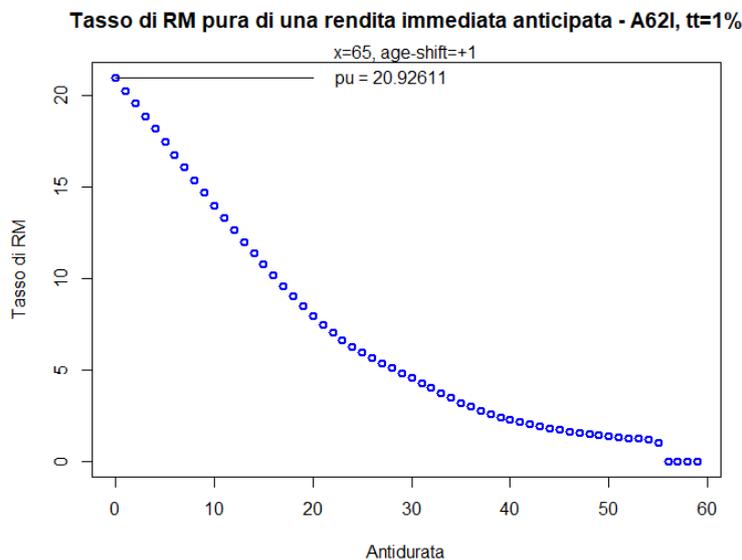
Il tasso di riserva matematica pura, calcolato in presenza di un unico versamento pari al tasso di premio unico pu è uguale a:

$$v_t^* = \ddot{a}_{x+t} = \sum_{h=0}^{\omega-(x+t)-1} {}_hE_{x+t}$$

Si mostra in Figura 9 l'andamento di tale tasso al variare dell'antidurata: in questo caso l'età dell'assicurato sarà ipotizzata pari a 65 anziché a 40 (come ipotizzato in ogni altro caso salvo dove specificato) perché la rendita, per sua natura, è un prodotto rivolto a soggetti la cui età è prossima a quella di pensionamento. Come si vedrà successivamente, gli anni precedenti al momento di inizio dell'erogazione delle rate servono ad accantonare il capitale necessario per costituire il montante finale dell'accumulo (che corrisponde al PU della rendita immediata). La base demografica utilizzata è l'A62I (dove I sta per “percettori di rendite immediate”) che, come descritto nel Appendice A.1 è una

tavola selezionata e proiettata; per ulteriori approfondimenti sul meccanismo di *age-shifting* si rimanda all'Appendice A.2³⁴.

Figura 11 - Il tasso di RM pura di una rendita per un individuo di 65 anni



Il primo valore del tasso di RM pura, quello calcolato in 0^+ anziché in 0, è il tasso di premio unico *pu*: tale valore è così elevato perché serve a finanziare più capitali. La causa di questo fenomeno risiede nel fatto che, qualora il soggetto sopravviva un lasso di tempo esattamente uguale alla sua speranza di vita, l'impresa di assicurazione è costretta a pagare circa 20 capitali assicurati; se il soggetto diventasse un centenario, il numero dei capitali in questione aumenterebbe a 40. Successivamente alla prima antidurata, ad ogni anniversario di polizza compare un termine in meno nella sommatoria del tasso di RM pura; inoltre, ciascun valore eliminato ogni anno è quello con probabilità di sopravvivenza maggiori e, di conseguenza, il tasso assume un andamento decrescente con concavità generalmente rivolta verso l'alto.

³⁴ In questo caso necessario, in quanto la tavola "base" è per individui nati nel 1962 e un individuo con 40 anni il 31/12/2017 appartiene alla generazione del 1952. Lo *shift* applicabile sub A62 è pari a +1.

II - La rendita differita

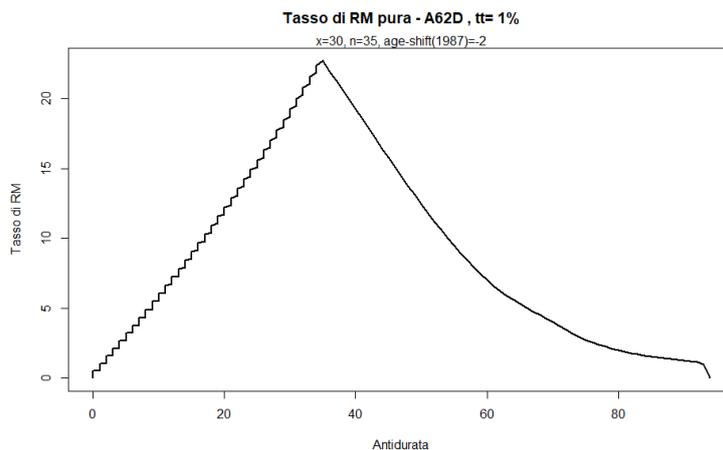
La rendita differita è una forma assicurativa che ricalca le finalità della “rendita in pagamento” risolvendo quello che è il suo più grosso limite: la necessità di versare in un’unica soluzione un premio che è circa 22 volte il valore del capitale assicurato. A tal fine si introduce un’ulteriore fase, ovvero l’accumulo del capitale antecedentemente all’erogazione: in questo modo, il pu viene dilazionato in tanti tassi di PAC.

In quest’ottica si ipotizzi che l’assicurato cominci a versare i premi nel momento in cui raggiunga i 30 anni di età³⁵; rimanga in fase di accumulo fino ai 65 anni ($n = 35$) e successivamente cominci a riscuotere il capitale sotto forma di rendita. Il tasso di PAC, p , è calcolabile sfruttando la relazione:

$$p \cdot \ddot{a}_{x:n|} = {}_nE_x \ddot{a}_{x+n}$$

Dove ${}_nE_x \ddot{a}_{x+n}$ è il valore attuale atteso di una rendita unitaria, anticipata, vitalizia e differita di n anni.

Figura 12 - Il tasso di RM pura di una rendita differita



In Figura 12 si distinguono la fase dell’accumulo dalla fase dell’erogazione: nella prima l’obiettivo è quello di costituire un montante pari a pu a scadenza e ciò viene realizzato tramite il versamento dei tassi di PAC ad ogni anniversario di

³⁵ Un soggetto che ha 30 anni il 21/12/2017, si considera come appartenente alla generazione 1987. Tale generazione verrà utilizzata nel calcolo dell’ *age-shifting*.

polizza (rappresentati dai salti del tasso di RM pura) e dai rendimenti finanziari e demografici; questi hanno un peso assoluto più consistente al crescere del montante come si vede in prossimità della fase di erogazione. Tale seconda fase, inerente all'individuo qualora raggiunga l'età di 65 anni, coincide con la "rendita in pagamento" precedentemente descritta.

La temporanea caso morte (TCM)

La temporanea caso morte, comunemente abbreviata con l'acronimo TCM, è una polizza che prevede il pagamento da parte dell'assicuratore di un capitale (ipotizzato unitario) alla fine dell'anno in cui è avvenuto il decesso del soggetto assicurato. L'aggettivo "temporanea" si riferisce al fatto che la polizza non copra il rischio di premorienza su un orizzonte temporale illimitato, bensì su un arco temporale definito pari a n anni.

Il tasso di premio unico, pu , è calcolato nel seguente modo:

$$pu = {}_nA_x = \sum_{h=0}^{n-1} {}_{h|1}A_x = \sum_{h=0}^{n-1} v^{h+1} \cdot {}_{h|1}q_x^*$$

Il pu è calcolato quindi come la sommatoria su tutto l'orizzonte temporale ($0 \rightarrow n$) del prodotto tra:

- I fattori di attualizzazione aumentati di 1 (il capitale viene corrisposto alla fine dell'anno in cui è avvenuto il decesso)
- Le probabilità, per un individuo di età x , di decedere tra l'età $x + h$ e $x + h + 1$.

In altre parole, il tasso di PU di una TCM è calcolato come la sommatoria dei tassi di pu di tante TCM annuali, dove l'estremo superiore della somma coincide con la durata della polizza meno uno.

In modo del tutto analogo al caso del capitale differito, il tasso di premio annuo costante p si ricava sfruttando la relazione:

$$p \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}} = {}_nA_x$$

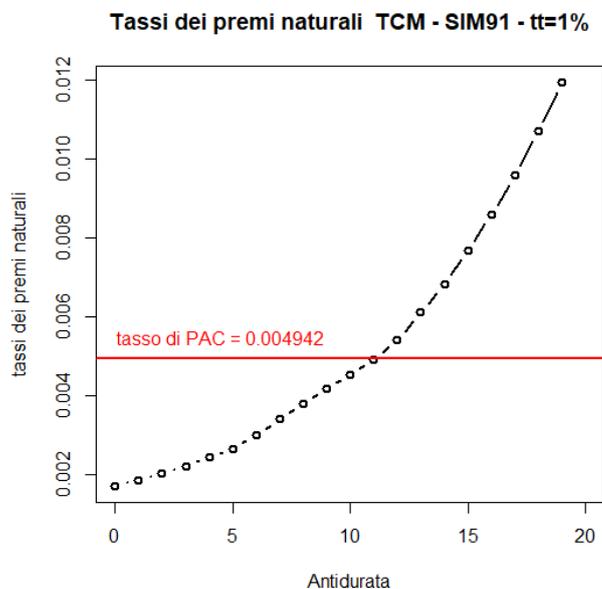
Rispetto al caso del capitale differito, il tema dei tassi dei premi naturali è più complesso, per il semplice fatto che essi non sono pari a 0 per quasi tutte le antidurate: laddove l'assicurato deceda, a fine periodo l'assicuratore ha l'obbligo di rimborsare il capitale assicurato.

Di conseguenza, i tassi dei premi naturali corrispondono a:

$$p_{h+1}^{(N)} = {}_1A_{x+h} = (1 + j^*)^{-1} \cdot q_{x+h}^* \text{ per } h = 0, 1, \dots, n - 1$$

Nella Figura 13 si rappresenta l'andamento dei tassi dei premi naturali rapportati alla loro media ponderata, ovvero al tasso di premio annuo costante³⁶

Figura 13 - I tassi dei premi naturali per una TCM



Si osserva che i tassi dei premi naturali crescono al crescere dell'antidurata essendo le probabilità di decesso sempre maggiori. Una prima, ma sostanziale, indicazione sull'andamento del tasso di riserva matematica pura in caso di versamenti di tassi di PAC, può essere dedotto dalla differenza:

$$p_h^{(AS)} = p - p_h^{(N)}$$

³⁶ Per la dimostrazione di tale relazione si veda Pitacco [34]

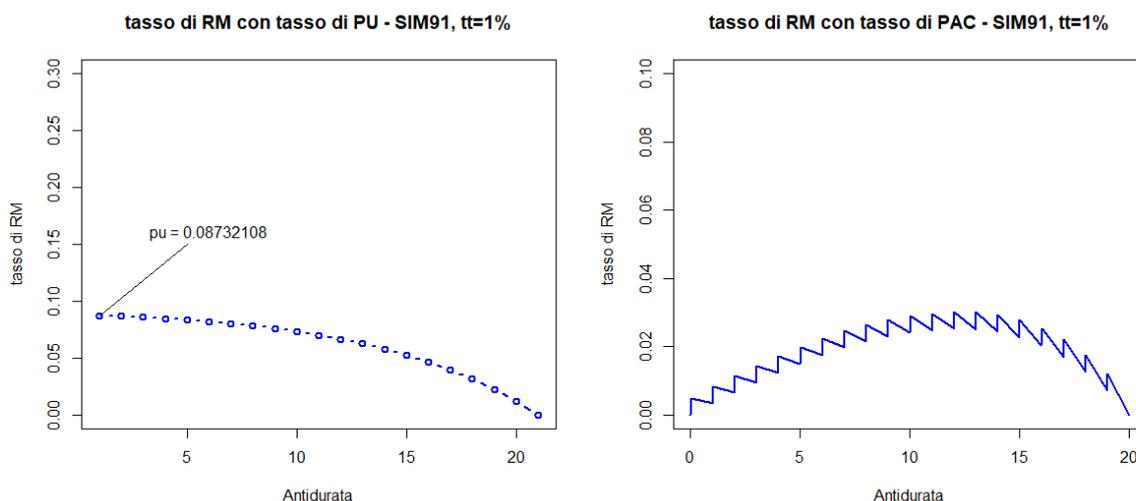
Dove $p_h^{(AS)}$ prende il nome di “tasso di premio di riserva” (o *actuarial saving* utilizzando la terminologia anglosassone). Laddove il premio di riserva è positivo, come nelle prime antidurate dove il tasso di PAC è superiore ad ogni tasso di premio naturale, è necessario un accantonamento di una quota di tasso di PAC; dall’antidurata 12 in poi si smonterà la riserva accantonata per far fronte ai costi attesi maggiori dei premi attesi. Esposte le relazioni inerenti ai tassi di premio, si concentra ora l’attenzione sui tassi di riserva matematica pura, esaminando prima il caso in cui l’assicuratore incassi in $t = 0$ un unico tasso di pu e, successivamente, il caso in cui l’assicuratore incassi un tasso di premio annuo costante ad ogni anniversario di polizza.

Nel primo caso, il tasso di riserva matematica pura v_t^* è esprimibile mediante la seguente relazione:

$$v_t^* = {}_{/n-t}A_{x+t} = \sum_{h=0}^{n-t-1} v^{h+1} \cdot {}_{h/1}q_{x+t}^*$$

L’andamento del tasso di riserva matematica pura è mostrato nella Figura 12, considerando il caso in cui l’individuo abbia un’età pari a 40 anni, $n = 20$ e le basi tecniche del I° ordine siano la SIM91 e l’1%.

Figura 14 - L’andamento del tasso di RM pura di una TCM



Con particolare riferimento al caso del versamento di un unico pu , al crescere dell'antidurata si ha un doppio effetto sull'andamento di v_t^*

- I) Ad ogni anniversario di polizza, nel calcolo del tasso di RM pura compare un termine in meno. L'effetto dei tassi di mortalità fa sì che ad ogni anno di sopravvivenza dell'assicurato, sia meno probabile che il beneficiario incassi il capitale unitario assicurato: questo elemento determina l'andamento decrescente del tasso di RM pura in esame che, infatti, a scadenza sarà uguale a 0.
- II) Il tasso tecnico funge da garanzia finanziaria e quindi come fattore di capitalizzazione. Al crescere del tasso tecnico riconosciuto, l'assicurato deve versare un premio minore che però viene capitalizzato in maniera più consistente; questo elemento spiega perché nel caso in cui tale tasso sia particolarmente elevato, l'andamento del tasso di RM pura è addirittura crescente nelle prime antidurate. Questo fenomeno è approfondito nell'Appendice B.1 dove si mostra inoltre che il passaggio da $j^* = 1\%$ a $j^* = 4\%$ porta una riduzione di pu di circa il 30%.

Nel caso in cui vengano versati i p l'andamento di v_t^* è crescente fino a quando il tasso di premio annuo costante è maggiore dei tassi dei premi naturali (quindi laddove i tassi dei premi di riserva $p_h^{(AS)}$ sono positivi) e successivamente decresce fino a raggiungere il valore di 0 a scadenza. Il tasso di riserva matematica pura presentato in Figura 14 segue la stessa logica del corrispondente grafico nel caso del capitale differito: anche in questo caso i tassi sono calcolati sia appena prima dell'incasso del tasso di premio annuo costante che dopo, cosicché siano evidenti gli effetti dei versamenti e, quindi, dei salti di riserva.

La mista

L'assicurazione mista semplice, o mista ordinaria, è una combinazione tra un capitale differito e una temporanea caso morte, dove entrambe hanno sia la stessa durata pari a n e lo stesso capitale assicurato, in questo caso unitario. Dovendo essere il tasso di PU, pu , il valore attuale atteso degli oneri a carico dell'assicuratore, esso è facilmente calcolabile come la somma del pu del capitale differito e del pu della TCM.

In formule:

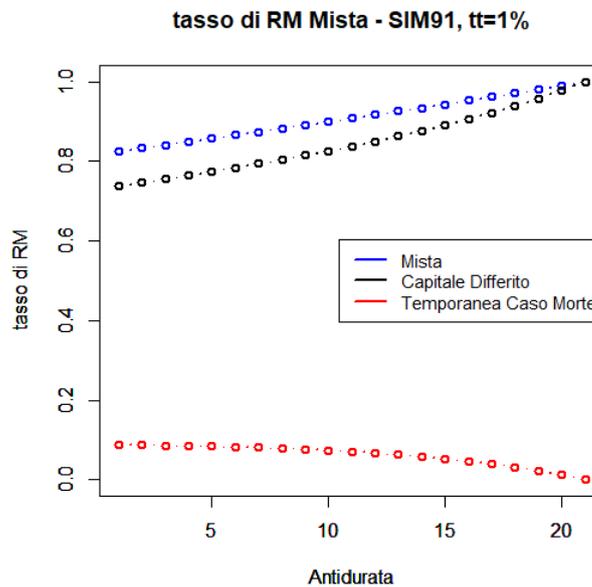
$$pu = A_{x:n|} = {}_nE_x + {}_nA_x = {}_np_x^* \cdot (v^*)^n + \sum_{h=0}^{n-1} v^{h+1} \cdot {}_h|q_x$$

Tale proprietà dell'additività è estendibile dal tema dei tassi di premio al tema dei tassi di riserva matematica pura. Ne segue che, nel caso di versamento di un unico tasso di premio puro:

$$v_t^* = A_{x+t:n-t|} = {}_{n-t}E_{x+t} + {}_{n-t}A_{x+t}$$

In Figura 13 si riprendono i tassi di riserva matematica pura sia del capitale differito che della temporanea caso morte, relazionandoli alla mista che generano con la loro somma.

Figura 15 - Il tasso di riserva matematica pura di una Mista nel caso di pu



2.2.2 Polizze adeguabili e polizze rivalutabili

Nel corso degli ultimi decenni alcuni fenomeni e alcune necessità hanno spinto le imprese di assicurazione sulla durata di vita ad ampliare l'offerta dei propri prodotti, affiancando polizze a prestazioni flessibili alle tradizionali a prestazioni predeterminate. Tali fenomeni sono illustrati nel seguente elenco:

- I) Il capitale assicurato di un prodotto con una durata considerevole soffre del rischio di erosione. Nel caso in cui si registrino tassi d'inflazione rilevanti nel corso degli anni. La causa di questo effetto risiede nella caratteristica intrinseca delle assicurazioni di vita: il debito dell'assicuratore non è "di valore", ma è "di valuta".
- II) Noto che il tasso tecnico funziona come una garanzia finanziaria per l'assicurato da parte dell'assicuratore, nonostante sia oggetto del prossimo Capitolo, è intuitivo pensare che un assicuratore ottenga un profitto di tipo finanziario qualora il rendimento degli investimenti sia maggiore della base finanziaria di I° ordine. Dal punto di vista commerciale, c'è quindi un trade-off tra il tasso tecnico e il rischio di subite perdite finanziarie. Una soluzione risiede nel promettere anticipatamente all'assicurato di retrocedergli una quota dei rendimenti finanziari.
- III) Riprendendo il discorso del punto II, un prodotto vita è più attraente per un assicurato qualora gli sia concesso di partecipare ad altri utili dell'assicuratore, primo tra tutti quello di tipo demografico.
- IV) Essendo l'impresa di assicurazione sulla durata di vita un *competitor* nel mercato del risparmio (si pensi a banche, SGR, SIM, ecc.), è necessario che essa venda dei prodotti simili a quelli dei concorrenti, per esempio prodotti che lascino la libertà all'assicurato di versare premi non costanti, piuttosto che di collegare le proprie prestazioni a fondi o indici.

Si presenta ora un modello noto in letteratura, adattandolo al contesto di questo elaborato (sfruttando quindi la notazione di tasso) e rendendolo compatibile con il modello del prossimo Capitolo.

Riprendendo la definizione di tasso di RM pura:

$$v_t^* = Prest[t, n] - Premi[t, n]$$

Considerando un prodotto particolarmente interessato al problema dell'adeguamento, ovvero la mista ordinaria, con capitale assicurato unitario, la precedente equazione è riscrivibile come:

$$v_t^* + p \cdot \ddot{a}_{(x+t):(n-t)\rceil} = A_{x+t, n-t\lceil}$$

Si ipotizza ora che l'assicurato, desideri aumentare il suo capitale assicurato da 1 a $1(1 + j^{(1)})$ dove $j^{(1)}$ assume il significato di tasso di adeguamento del capitale. Senza considerare il cambio di basi tecniche, l'assicuratore può garantire l'aumento della prestazione calcolando un'integrazione delle controprestazioni³⁷ e facendo sì che l'equilibrio attuariale sussista ancora. In formule:

$$(v_t^* + p \cdot \ddot{a}_{(x+t):(n-t)\rceil})(1 + j^{(1)}) = A_{x+t, n-t\lceil}(1 + j^{(1)})$$

Considerando quindi distinto l'effetto dell'adeguamento sui tassi di PAC e sui tassi di RM pura, l'equazione diventa:

$$v_t^*(1 + j^{(2)}) + (p \cdot \ddot{a}_{(x+t):(n-t)\rceil})(1 + j^{(3)}) = A_{x+t, n-t\lceil}(1 + j^{(1)})$$

Al fine ora di evidenziare che rapporto intercorre tra il tasso di adeguamento dei tassi di PAC $j^{(2)}$, il tasso di adeguamento dei tassi della RM pura $j^{(3)}$ e $j^{(1)}$, si sottrae dall'ultima equazione quella iniziale, $v_t^* + p \cdot \ddot{a}_{(x+t):(n-t)\rceil} = A_{x+t, n-t\lceil}$. In questo modo, si ottiene che:

$$v_t^* \cdot j^{(2)} + p \cdot \ddot{a}_{(x+t):(n-t)\rceil} \cdot j^{(3)} = A_{x+t, n-t\lceil} \cdot j^{(1)}$$

Esplicitando $j^{(1)}$ e riscrivendo $A_{x+t, n-t\lceil}$ come $v_t^* + p \cdot \ddot{a}_{(x+t):(n-t)\rceil}$ (dalla prima equazione), si ottiene che:

$$j^{(1)} = \frac{v_t^* \cdot j^{(2)} + p \cdot \ddot{a}_{(x+t):(n-t)\rceil} \cdot j^{(3)}}{v_t^* + p \cdot \ddot{a}_{(x+t):(n-t)\rceil}}$$

³⁷ Con controprestazioni si intendo i tassi dei premi futuri e/o i tassi della RM

Il tasso con cui vengono rivalutate le prestazioni unitarie quindi è una media aritmetica ponderata dei tassi con cui vengono rivalutati p e v_t^* .

Nella Tabella 2 si evidenziano alcuni meccanismi con cui si può arrivare all'adeguamento delle prestazioni:

Tabella 4 – Le diverse modalità per l'adeguamento delle prestazioni

Modalità	j(1)	j(2)	j(3)
I	j'	j''	0
II	j'	0	j'''
II	j'	j'	j'''

La modalità I evidenzia che a fronte un tasso di adeguamento delle prestazioni, l'integrazione coincide con un salto di riserva finanziato mediante il versamento di un tasso di PU *una tantum* immediatamente posto a riserva.

In questo contesto:

$$j'' = \frac{A_{x+t, n-t} \cdot j'}{v_t^*}$$

Tale metodo è particolarmente tipico quando dei casi in cui l'unica fonte di adeguamento sia quella dell'utile da sovrainteresse che l'impresa destina per aumentare la prestazione dell'assicurato

La modalità II comporta la rateizzazione dell'integrazione sulla durata contrattuale residua in termini di un aumento del tasso di PAC p . In formule:

$$p \cdot j''' = \frac{A_{x+t, n-t} \cdot j'}{\ddot{a}_{(x+t):(n-t)}}$$

La modalità III invece suddivide l'integrazione tra un aumento del tasso di RM (quindi il versamento di un tasso di PU integrativo tipicamente da parte dell'impresa di assicurazione) e sulla rateizzazione inerente alla modalità II da parte dell'assicurato.

Le assicurazioni rivalutabili

Si considera una polizza adeguabile come quelle appena descritte. Anziché avere un solo adeguamento, si ipotizza che l'adeguamento venga applicato in via ricorrente cosicché le tre modalità descritte precedentemente si possano considerare come tre logiche diverse di adeguamento delle prestazioni.

Una polizza rivalutabile ha questo tipo di caratteristiche, con le seguenti peculiarità aggiuntive: il livello delle prestazioni dell'assicuratore (in questo elaborato anche quello dei tassi di PAC volendo far sì che $j^{(1)} = j^{(2)} = j^{(3)}$; è il caso dei premi c.d.d. pienamente rivalutabili) è legato al rendimento che l'assicuratore ottiene investendo i premi nella c.d. Gestione Separata, ovvero un fondo gestito separatamente rispetto all'insieme delle attività di cui dispone l'impresa di assicurazione. Si specifica che solo una quota del rendimento ottenuto dalla Gestione Separata viene retrocesso all'assicurato e questo rendimento prende il nome di "rendimento retrocesso": esso deve considerare il tasso tecnico già attribuito all'assicurato in fase di tariffazione.

2.2.3 L'equazione di Fouret: i tassi dei premi di rischio e risparmio

Si presenta ora un'equazione fondamentale nella tecnica attuariale vita: l'equazione di Fouret. Essa deve la sua importanza al fatto che esprime in modo ricorsivo la riserva matematica e quindi il tasso di riserva matematica. Da essa si possono trarre delle osservazioni sugli andamenti dei tassi precedentemente descritti e si può scomporre il premio (e quindi il tasso di premio) con una metodologia che verrà ripresa nel prossimo capitolo.

Partendo dalla definizione di riserva matematica:

$$V_t^* = Prest[t, n] - Premi[t, n]$$

$$V_t^* = \sum_{h=0}^{n-t-1} C_{t+h+1} \cdot {}_h/1A_{x+t} + S_n \cdot {}_{n-t}E_{x+t} - \sum_{h=0}^{n-t-1} P_{t+h} \cdot {}_hE_{x+t}$$

La riserva matematica V_t^* è calcolata come lo scarto tra il valore attuale atteso degli oneri futuri (prestazioni caso morto e prestazione in caso di sopravvivenza a scadenza) e il valore attuale atteso dei premi.

Estraendo i termini per $h=0$, si ottiene

$$V_t^* = \sum_{h=1}^{n-t-1} C_{t+h+1} \cdot {}_h/1A_{x+t} + S_n$$

$$\cdot {}_{n-t}E_{x+t} - \sum_{h=1}^{n-t-1} P_{t+h+1} \cdot {}_hE_{x+t} + C_{t+1} \cdot {}_1A_{x+t} - P_t$$

Osservando che le due sommatorie indicano il valore attuale atteso della riserva matematica calcolata anziché in t in $t+1$, è possibile riscrivere

$$V_t^* + P_t = C_{t+1} \cdot {}_1A_{x+t} + V_{t+1}^* \cdot {}_1E_{x+t}$$

Quindi, con la riserva matematica al tempo t (c.d. riserva iniziale) e il premio incassato, l'assicuratore è in grado di erogare in $t+1$ una prestazione con importo pari a C_{t+1} in caso di premorienza dell'assicurato e, in caso di sopravvivenza, deve costituire una nuova riserva matematica V_{t+1}^* (c.d. riserva finale)

Sfruttando la notazione estesa di ${}_1E_{x+t}$ e ${}_1A_{x+t}$

$$V_t^* + P_t = C_{t+1} \cdot v \cdot q_{x+t}^* + V_{t+1}^* \cdot v \cdot (1 - q_{x+t}^*)$$

Da cui

$$V_t^* + P_t = (C_{t+1} - V_{t+1}^*) \cdot v \cdot q_{x+t} + V_{t+1}^* \cdot v$$

$$P_t = (C_{t+1} - V_{t+1}^*) \cdot v \cdot q_{x+t} + (V_{t+1}^* \cdot v - V_t^*)$$

In questo modo si è scomposto il premio in due componenti:

- a) $P_t^{(R)} = (C_{t+1} - V_{t+1}^*) \cdot v \cdot q_{x+t}$ è il c.d. premio di rischio, ovvero quella quota di premio che viene interamente “consumato” tra l'anno t e l'anno $t+1$ per finanziare lo scarto tra il capitale assicurato a fine anno in caso di premorienza e la riserva da costituire.

b) Tale valore prende il nome di “capitale sotto rischio”. Come fa osservare Pitacco in “Matematica e Tecnica Attuariale delle assicurazioni sulla durata di vita” [35], i premi di rischio coincidono con “i premi naturali relativi ad un’assicurazione TCM con capitale variabile” dove tali capitali coincidono appunto con i capitali sotto rischio.

Con riferimento al tasso di riserva matematica pura, il tasso di premio di rischio per l’anno t è scrivibile come:

$$p_t^{(R)} = (1 - v_{t+1}^*) \cdot v \cdot q_{x+t}^*$$

c) $P_t^{(S)} = (V_{t+1}^* \cdot v - V_t^*)$ è il c.d. premio di risparmio. Il suo unico scopo è quello di andare ad alimentare la riserva matematica pura, infatti:

$$V_{t+1}^* = (V_t^* + P_t^{(S)}) \cdot (1 + i^*)$$

In quest’ottica quindi, la riserva matematica risulta il montate finanziario dei premi di risparmio.

Sfruttando la notazione dei tassi, si ha che:

$$p_t^{(S)} = \frac{v_{t+1}^*}{1 + i^*} - v_t^*$$

Un esempio numerico, la TCM

Con il fine di mostrare quanto appena dimostrato al fine di poterlo utilizzare correttamente nel paragrafo successivo, si riprende il caso di una TCM per un individuo maschio di 40 anni, di durata 20 anni; gli altri dati di partenza sono esposti in Tabella 3.

Tabella 5 – I dati di input

Dati di partenza	
Base demografica	SIM1991M
Base finanziaria	1%
Tasso di PU	0,08732108
Tasso di PAC	0,004942

Per il principio di equità attuariale, $v_0^* = 0$. In 0 però, l'assicuratore incassa il primo p così scomponibile:

$$p_0^{(R)} = (1 - 0,003250801) \cdot (1 + 1\%)^{-1} \cdot 0,0017 = 0,0017463 \quad (\text{ovvero il } 65\% \text{ } p)$$

$$p_t^{(S)} = 0,003250801 \cdot (1 + 1\%)^{-1} - 0 = 0,003218615$$

In tabella 2, si riportano i valori così calcolati per ogni antidurata

Tabella 6 – I tassi di premio di rischio e risparmio per una TCM

Antidurata	tasso di PAC	tasso di P(R)	tasso di P(S)	tasso di RM
0	0,004942	0,001723385	0,003218615	0
1	0,004942	0,001854909	0,003087091	0,003250801
2	0,004942	0,002027773	0,002914227	0,006401271
3	0,004942	0,002200944	0,002741056	0,009408653
4	0,004942	0,002415818	0,002526182	0,012271206
5	0,004942	0,002621277	0,002320723	0,014945362
6	0,004942	0,002941299	0,002000701	0,017438746
7	0,004942	0,003346362	0,001595638	0,019633842
8	0,004942	0,003724413	0,001217586	0,021441775
9	0,004942	0,004086362	0,000855638	0,022885955
10	0,004942	0,004422311	0,000519688	0,023979009
11	0,004942	0,004795291	0,000146709	0,024743684
12	0,004942	0,00529123	-0,00034923	0,025139297
13	0,004942	0,00596786	-0,00102586	0,025037968
14	0,004942	0,006673023	-0,001731024	0,024252229
15	0,004942	0,007540285	-0,002598285	0,022746417
16	0,004942	0,008449617	-0,003507617	0,020349614
17	0,004942	0,009462971	-0,004520971	0,017010417
18	0,004942	0,010625466	-0,005683466	0,01261434
19	0,004942	0,011942183	-0,007000183	0,007000183
20	0	0	0	0

In questo modo, oltre ad osservare come i tassi dei premi di rischio ricalchino l'andamento dei premi naturali, coglie in maniera chiara il motivo dell'andamento crescente-decrescente del tasso di RM pura della TCM in caso di tassi di PAC: i valori verdi dei tassi dei premi di risparmio, qualora positivi (valori verdi)

indicano un aumento del tasso di RM; dalla 12 antidurata in poi, essi diventano negativi, coerentemente con lo smontamento del tasso di RM che in $t=20$ è nullo.

2.2.4 Dal valore attuariale all'utile demografico

Obiettivo di questo ultimo paragrafo che conclude il Capitolo 2, è quello di mostrare come venga generato l'utile d'esercizio nel contesto local-deterministico in esame: il Capitolo 3, che presenterà un modello stocastico per analizzare la solvibilità di un'impresa d'assicurazione in un'ottica *one year* partirà dalla definizione di utile presentata nel seguito.

A tal fine, si riprende il concetto di basi tecniche, ovvero j^* e q_t^* . Come spiegato nel Paragrafo 2.2, la scelta della base tecnica è di tipo prudenziale perché l'obiettivo è quello di sovrastimare il valore delle prestazioni cosicché i maggiori premi incassati possano generare utile d'esercizio. Si definiscono ora j e q_x , basi tecniche realistiche (dette anche b.t. del II° ordine) la cui finalità è quella di valutare la redditività attesa da un contratto assicurativo: tali basi tecniche sono i valori che, sulla base di ipotesi razionali e credibili, riflettono le migliori stime che la compagnia è in grado di fare.

Chiarita la suddetta distinzione, il punto di partenza necessario per mostrare, in un'ottica deterministica, quali siano le fonti di utile per un'impresa di assicurazione sulla durata di vita, è la distinzione tra flussi industriali e flussi patrimoniali. I primi riguardano i valori attuali attesi di premi, prestazioni e spese; i secondi i valori attuali attesi relativi ai flussi di capitale proprio. Nella letteratura internazionale, una valutazione che interessi esclusivamente i flussi industriali di un portafoglio assicurativo, porta ad un risultato interpretabile come valore dello stesso il cui nome è PVFP (*Present value of future profits*). La contemplazione dei flussi patrimoniali, porta dal PVFP al VIF, *value of in-force portfolio*.

Ipotizzando che spese e premi vengono rispettivamente pagate/incassati ad inizio anno mentre a fine anno avvengono sia le liquidazioni dei capitali assicurati in caso di decesso che eventuali riscatti/abbandoni (si indica con ${}_t\zeta_x^*$ la probabilità realistica di permanenza in portafoglio dall'età x all'età $x + t$), si sottolinea inoltre che in questo contesto vengono trascurati gli effetti sia della riassicurazione che della fiscalità.

Si definisce N_0 il numero iniziale di contratti nel portafoglio. Ne segue che:

$$E(\tilde{N}_t) = N_0 \cdot {}_t\zeta_x^*$$

Utilizzando ora una metodologia direttamente collegata al c.d. criterio di cassa³⁸, il *cash flow* annuo atteso per il singolo contratto in essere in $t - 1$, qualora sia le prestazioni assicurate in caso di premorienza che quelle assicurate in caso di sopravvivenza siano unitarie, corrisponde a:

$$f_t = (pr_{t-1}^T - e_{t-1})(1 + j) - q_{x+t-1} - ris_t \cdot p_{x+t-1} \cdot r_t \text{ per } t = 1, 2, \dots, n - 1$$

Dove:

- $pr_{t-1} - e_{t-1}$ indica lo scarto tra il tasso di premio relativo all'anno $t-1$ e il tasso di spese relativo allo stesso periodo
- ris_t è il tasso di pagamento per riscatto
- r_t probabilità realistica di riscatto per una polizza in essere in t

$$f_n = (pr_{n-1}^T - e_{n-1})(1 + j) - q_{x+n-1} - p_{x+n-1}$$

Considerando ora una generazione costituita da un numero stimato di contratti uguale a N_{t-1} , si definisce *emerging cost* e si indica con F_t^I

$$F_t^I = N_{t-1} \cdot f_t$$

F_t^I è anche chiamato *cash flow* industriale, in quanto la nuova liquidità generata nell'anno è esprimibile in funzione di premi (o tassi), spese e prestazioni.

Il passaggio necessario a questo punto per muoversi dal *cash flow* industriale all'utile annuo atteso, è quello di passare dal criterio di cassa sopra descritto al

³⁸ Criterio relativo ai flussi monetari, ovvero ad entrate e a uscite

criterio di competenza: quest'ultimo prevede che nella valutazione vengano anche considerati il valore finale e il valore iniziale del tasso di RM.

L'utile annuo atteso derivante dal singolo contratto è quindi esprimibile come:

$$u_t^* = (v_{t-1}^* + pr_{t-1}^T - e_{t-1})(1 + j) - q_{x+t-1} - ris_t \cdot p_{x+t-1} \cdot r_t - v_t^* \cdot p_{x+t-1} \\ \cdot (1 - r_t) \text{ per } t = 1, 2, \dots, n - 1 \\ u_n^* = (v_{n-1}^* + pr_{n-1}^T - e_{n-1})(1 + j) - q_{x+n-1} - p_{x+n-1}$$

Si osserva che esso nasce dalle differenze tra le ipotesi adottate in fase di *pricing* e le ipotesi che la compagnia ritiene realistiche, non prudenziali, circa l'erogazione delle prestazioni.

Con il fine di non appesantire troppo il discorso, gli aspetti matematici della scomposizione dell'utile annuo atteso nelle sue componenti vengono riportati nell'Appendice B.

Il risultato è la scomposizione dell'utile nelle seguenti 4 componenti:

$$u_t^* = {}_f u_t^* + {}_e u_t^* + {}_m u_t^* + {}_r u_t^*$$

Le componenti sono:

$$- \quad {}_f u_t^* = (v_{t-1}^* + pr_{t-1}^T)(j - j^*) - v_{t-1}^* \cdot j_t^v \cdot p_{x+t-1}$$

Esso è l'utile finanziario atteso e nasce dallo spread tra tasso d'interesse realistico atteso j rispetto al tasso tecnico j^* moltiplicato per la somma del tasso di RM pura sommato al tasso di premio puro, calcolato al netto di quanto retrocesso all'assicurato in termini di rivalutazione del tasso di RM pura, se sopravvissuto.

$$- \quad {}_e u_t^* = (\gamma_{t-1} - e_{t-1})(1 + j)$$

Tale seconda componente è denominata margine per spese ed è calcolata come lo scarto tra il tasso di caricamento per spese ed il tasso di spese effettivamente sostenuto, capitalizzato per un anno.

$$- \quad {}_m u_t^* = (1 - v_{t-1}^*)(q_{x+t-1}^* - q_{x+t-1})$$

${}_m u_t^*$ è il c.d. margine per mortalità. Esso nasce dal prodotto dello spread tra il tasso di mortalità ipotizzato in fase di tariffazione ed il tasso di mortalità ritenuto plausibile con la differenza $1 - v_{t-1}^*$. Tale moltiplicatore

è il capitale sotto rischio per un'assicurazione mista ordinaria a prestazioni unitarie.

$$- \quad {}_r u_t^* = (v_t^* - ris_t) p_{x+t-1} \cdot r_t$$

Quest'ultima componente è il margine per riscatti e abbandoni e cresce qualora cresca la penalizzazione (definita come lo scarto tra tasso di RM pura e tasso di pagamento per riscatto).

2.3 Il cohort approach e la v.a. utile demografico

Si riportano in questo paragrafo le ipotesi alla base del modello sviluppato da Savelli e Clemente [42] dato che sarà proprio il suddetto modello il sostegno di qualsiasi riflessione che verrà fatta sull'utile demografico.

Prima di mostrare la variabile aleatoria di maggior rilevanza, si specifica che da questo Paragrafo in poi, verrà utilizzato il c.d. *cohort approach*, ovvero l'approccio per generazione: si ipotizza che il portafoglio dell'impresa sia costituito dalla somma composita di varie generazioni, dove ogni generazione è rappresentabile come un *cluster* di polizze reciprocamente indipendenti³⁹ aventi le stesse caratteristiche ad eccezione delle somme assicurate.

In particolare, tutte le polizze condividono:

- La forma assicurativa;
- L'anno di sottoscrizione della polizza;
- L'età dell'assicurato alla stipula (x);
- La durata contrattuale (n);
- Il periodo del pagamento dei premi (m);

³⁹ Tale concetto di indipendenza coincide con quella da un punto di vista stocastico.

In questo contesto, il risultato complessivo del portafoglio su un determinato orizzonte temporale è dato dalla somma algebrica dei risultati delle singole generazioni.

Si denomina $\widetilde{Y}L_{t+1}$ l'utile lordo nell'istante temporale $t + 1$ definito come:

$$\widetilde{Y}L_{t+1} = (\widetilde{V}B_t + \widetilde{B}_{t+1} + \widetilde{J}T_{t+1}) - (\widetilde{E}_{t+1} + \widetilde{S}_{t+1} + \widetilde{X}_{t+1} + \widetilde{V}B_{t+1})$$

Nella prima parentesi compaiono le fonti d'entrata, ovvero:

- $\widetilde{V}B_t$, ammontare totale delle riserve matematiche complete al lordo delle rivalutazioni da cedere agli assicurati alla fine dell'anno t .

$\widetilde{V}B_t$ è riscrivibile come

$$\widetilde{V}B_t = v_t^b \cdot \widetilde{w}_t \cdot \widetilde{Q}_t$$

Con v_t^b tasso di RM completa all'epoca t , \widetilde{w}_t v.a. capitali assicurati al tempo t e \widetilde{Q}_t v.a. fattore di rivalutazione dalla stipula del contratto fino al tempo t . In questo contesto si ipotizza che i premi siano pienamente rivalutabili, cosicché sfruttando la notazione del Paragrafo 2.2.2,

$$\widetilde{Q}_t = \prod_{h=1}^t (1 + \tilde{j}_h^{(1)}) = \prod_{h=1}^t (1 + \tilde{j}_h^{(2)}) = \prod_{h=1}^t (1 + \tilde{j}_h^{(3)})$$

- \widetilde{B}_{t+1} è la v.a. premi di tariffa pagata dagli assicurati all'inizio dell'esercizio t
- $\widetilde{J}T_{t+1}$ è la v.a. interessi finanziari ottenuti dall'investimento sia di riserve e premi, che dal patrimonio

Nella seconda parentesi compaiono tutte le fonti d'uscita:

- \widetilde{E}_{t+1} è la v.a. che indica la totalità delle spese assicurative ipotizzate sostenute all'inizio dell'anno
- \widetilde{S}_{t+1} è la v.a. ammontare valori riscattati; tale opzione è esercitabile solo all'inizio dell'anno
- \widetilde{X}_{t+1} è la v.a. ammontare dei sinistri avvenuti nell'esercizio; si ipotizza che la regolazione di tali ammontari avvenga a fine anno

- \widetilde{VB}_{t+1} ammontare totale delle riserve matematiche complete al lordo delle rivalutazioni da cedere agli assicurati alla fine dell'anno $t + 1$

Com'è dimostrato alle pagine 3 e 4 di [42] la formula in esame è riscrivibile in funzione della v.a. utile assicurativo \tilde{Y}_{t+1} così definito:

$$\tilde{Y}_{t+1} = (\widetilde{VB}_t + \tilde{B}_{t+1} - \tilde{E}_{t+1} - \tilde{S}_{t+1})(1 + \tilde{j}_{t+1}) - (\tilde{X}_{t+1} + \widetilde{VB}_{t+1})$$

\tilde{Y}_{t+1} come presentato e dimostrato seppur in un ambito deterministico nel Paragrafo 2.2. 4 e nell'Appendice B.2, è scomponibile in 5 componenti.

Considerando solo la componente "pura" (omettendo quindi \tilde{Q}_t), l'utile demografico su un *time horizon* pari ad un anno, è scrivibile come:

$$\tilde{y}_{t+1} = [v_t^b + b_{t+1}(1 - \alpha^* - \beta^*) - \gamma^*] \cdot (\tilde{w}_t - \tilde{s}_t) \cdot (1 + j^*) - (\tilde{x}_{t+1} + \tilde{w}_{t+1} \cdot v_{t+1}^b)$$

Dove:

- v_t^b è il tasso di RM completa al tempo t
- $b_{t+1}(1 - \alpha^* - \beta^*) - \gamma^*$ è il tasso di premio puro dell'anno t , essendo α^* , β^* e γ^* i tassi di spese rispettivamente di acquisizione del contratto, incasso dei premi e generali di gestione.
- w_t sono i capitali assicurati in essere al tempo t e $\tilde{w}_{t+1} = \tilde{w}_t - \tilde{s}_{t+1} - \tilde{z}_{t+1}$
- \tilde{z}_{t+1} sono i capitali eliminati per decesso al tempo $t + 1$
- \tilde{s}_{t+1} sono i capitali assicurati eliminati per abbandono nell'anno $t + 1$
- \tilde{x}_{t+1} sono i capitali assicurati eliminati nell'anno $t + 1$

Essi sono così definiti:

$$\tilde{x}_{t+1} = \begin{cases} \tilde{z}_{t+1} & \text{Nel caso di TCM e miste} \\ 0 & \text{Nel caso di rendite differite durante il periodo di accantonamento} \\ \tilde{w}_{t+1} & \text{Per rendite durante la fase di erogazione} \end{cases}$$

Sfruttando i concetti dei tassi di premio di rischio e risparmio studiati nel Paragrafo 2.2.3 secondo cui

$$p_t^{(S)} = \frac{v_{t+1}^*}{1 + i^*} - v_t^*$$

$$p_t^{(R)} = (1 - v_{t+1}^*) \cdot v \cdot q_{x+t}^*$$

L'utile demografico è riscrivibile come:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{t+1} = & q_{x+t}^*(I - v_{t+1}^*)(\tilde{w}_t - \tilde{s}_{t+1}) - \tilde{x}_{t+1} + v_{t+1}^*\tilde{z}_{t+1} \\ & - v_{t+1}^e(q_{x+t}^*(\tilde{w}_t - \tilde{s}_{t+1}) - \tilde{z}_{t+1})\end{aligned}$$

Con:

- $I = \begin{cases} 1 & \text{nel caso di TCM e miste} \\ 0 & \text{per CD e rendite in fase di accumulo} \end{cases}$
- v_{t+1}^e è il tasso di RM per spese, approssimabile con $\gamma^* \cdot /_{n-t-1}\ddot{a}_{x+t+1}$

Si conclude questo Paragrafo riportando la formula chiusa finale dell'utile demografico sfruttando la notazione inerente al capitale sotto rischio D_{t+1} il cui grafico viene presentato nel sotto paragrafo successivo.

$$\tilde{y}_{t+1} = D_{t+1}^b [q_{x+t}^*(\tilde{w}_t - \tilde{s}_{t+1}) - \tilde{z}_{t+1}]$$

Dove:

- D_{t+1}^b è la quantità totale sotto rischio uguale a $D_{t+1} - v_{t+1}^e$

2.3.1 Il capitale sotto rischio

Nel Paragrafo precedente è stato mostrato come nella formulazione dell'utile demografico, il capitale sotto rischio D_{t+1} assume un ruolo centrale che non può essere trascurato nella prosecuzione dell'elaborato.

Esso è calcolato come il capitale (ipotizzato unitario) pagabile dall'assicuratore in caso di decesso dell'assicurato qualora sia previsto dalle clausole contrattuali al netto della riserva matematica costituita all'epoca della valutazione.

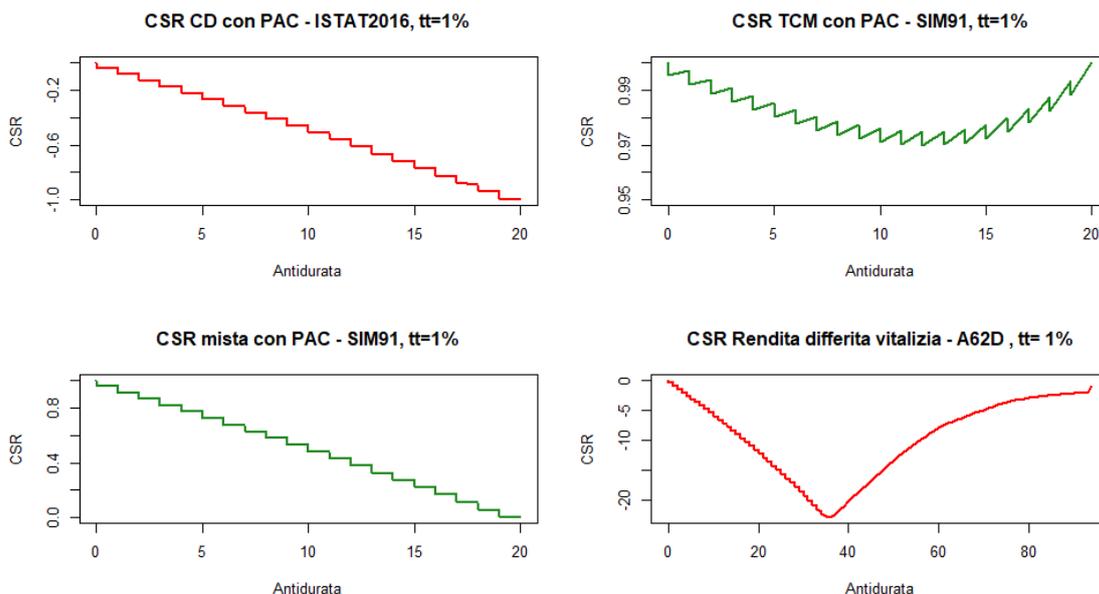
In virtù della sopracitata definizione, in formule, D_{t+1} è calcolato nel seguente modo:

$$D_{t+1} = \begin{cases} 1 - v_{t+1}^* & \text{nel caso di TCM o miste} \\ -v_{t+1}^* & \text{nel caso di CD} \\ -(1 + v_{t+1}^*) & \text{nel caso di Rendita vitalizia differita}^{40} \end{cases}$$

⁴⁰ Nel caso di Rendita vitalizia differita durante la fase di accumulo, il capitale sotto rischio è calcolato come quello di un CD

Mantenendo le stesse basi tecniche utilizzate per mostrare l'andamento dei tassi di RM pura del Paragrafo 2.2.1, si mostra in Figura 16 l'andamento del capitale sotto rischio calcolato come semplice trasformazione di v_{t+1}^* ; al fine di agevolare il lettore, in rosso vengono mostrati gli andamenti negativi e in verde quelli positivi.

Figura 16 - Il CSR per i principali prodotti Vita



2.4 I momenti dell'utile demografico su un orizzonte temporale annuo

Mostrato qual è l'andamento di D_{t+1} per i 4 prodotti presi in esame, si riprende ora la formulazione dell'utile demografico considerando di fare una valutazione in $t=0$ su un orizzonte temporale annuale.

La formula vista precedentemente diventa quindi:

$$\tilde{y}_1 = D_1^b \cdot [q_x^*(w_0 - \tilde{s}_1) - \tilde{z}_1]$$

Si utilizza ora un approccio c.d. individuale esatto (ovvero su ogni singola testa) fondato sulle seguenti ipotesi:

- Si considera noto il vettore degli ammontari monetari delle somme assicurate relative ad ogni individuo presente nel portafoglio
- Si considera l'eventuale riscatto/abbandono di ogni individuo come il risultato di una v.a. Bernoulliana con parametro δ
- Per ogni individuo che non abbia riscattato si considera l'eventuale decesso con un'ulteriore v.a. Bernoulliana con parametro q_x

Così facendo, per ogni anno si potrà aggiornare il vettore dei capitali assicurati eliminando gli elementi relativi ai soggetti che abbiano riscattato/siano deceduti. Introducendo la notazione relativa al caricamento di sicurezza implicito λ in funzione delle basi di I° e secondo ordine

$$\lambda_x = \frac{q_x^* - q_x}{q_x}$$

si dimostra [41] che, in assenza di abbandoni, i momenti della v.c. \tilde{y}_1 sono:

$$E(\tilde{y}_1) = \lambda \cdot D_1^b \cdot E(\tilde{d}) \cdot \bar{C}$$

Con $E(\tilde{d})$ numero atteso di decessi pari al prodotto tra l e q_0 .

Si osserva che l'utile atteso è positivo qualora il caricamento di sicurezza abbia lo stesso segno del capitale sotto rischio: qualora D_1^b sia positivo (TCM e miste) i tassi di mortalità utilizzati in fase di *pricing* dovranno essere maggiori di quelli che la compagnia ritiene realistici. In termini di magnitudo invece, i drivers sono il numero atteso di decessi $E(\tilde{d})$ e la media dei capitali assicurati \bar{C} .

Lo scarto quadratico medio si calcola come:

$$\sigma(\tilde{y}_1) = |D_1^b| \cdot \bar{C} \cdot l \cdot \sqrt{\frac{l \cdot q_x \cdot (1 - q_x) \cdot r_{2C}}{l^2}}$$

Con $r_{2C} = 1 + CoV_C^2$

La *standard deviation* dell'utile demografico cresce al crescere del capitale sotto rischio, della variabilità dei capitali assicurati e del tendere a 0,5 dei tassi di mortalità: $q_x \cdot (1 - q_x)$ è una funzione concava con massimo assoluto in prossimità di $q_x = 0.5$.

Viceversa, lo s.q.m. decresce all'aumentare del numero degli assicurati; ciò è dovuto all'effetto della diversificazione all'interno di un portafoglio di rischi omogenei.

L'indice di asimmetria invece risulta pari a

$$\gamma(\tilde{y}_1) = -\frac{(D_1^b)^3}{|D_1^b|^3} \cdot \frac{(1 - 2q_x)}{\sqrt{l \cdot q_x \cdot (1 - q_x)}} \cdot \frac{r_{3c}}{(r_{2c})^{3/2}}$$

Si osserva che il segno di $\gamma(\tilde{y}_1)$ è dato esclusivamente dal segno del capitale sotto rischio (ne è l'opposto) perché il secondo termine è negativo solo qualora q_x sia maggiore di 0.5 e ciò accade solo per età prossime a $\omega - 1$.

L'ultimo termine, funzione esclusivamente della variabilità dei capitali assicurati, è sempre positivo.

Si procede ora all'analisi di 4 differenti portafogli mono prodotto al fine di osservare la distribuzione dell'utile demografico al variare delle basi tecniche e, soprattutto, stimare il requisito di capitale che renderebbe solvibile il detentore del portafoglio su un *time horizon* di 1 anno, nel 99,50% dei casi.

2.5 Un case study: l'utile demografico dei principali prodotti vita

Si riprendono ora i 4 principali prodotti dei rami vita descritti nel sotto paragrafo 2.2.1 e si studia la distribuzione di probabilità dell'utile demografico ottenuta tramite 10 milioni di simulazioni.

Ottenendo per ogni tipologia di polizza una distribuzione con media, varianza e indice di asimmetria pressoché uguale al valore ricavabile dalla formula chiusa, risulta interessante andare a calcolare il capitale necessario all'impresa di assicurazione per essere solvibile nel 99,50% dei casi su un orizzonte temporale annuo ovvero il $VaR_{99,50\%}$. Al fine di rendere più completa la trattazione del requisito di capitale, esso verrà calcolato anche al variare del livello di confidenza

e verrà rapportato al capitale sotto rischio, esattamente come si faceva in un'ottica Solvency I.

Per ogni prodotto, si considereranno 15.000 soggetti appartenenti alla stessa coorte all'interno del portafoglio⁴¹. I capitali assicurati, noti a priori, sono valori estratti da una LogNormale con valore atteso pari a 100.000 e $CoV = 2$.

2.5.1 Il capitale differito

Si considera il caso in cui l'impresa di assicurazione detiene un portafoglio di 15.000 polizze di tipo CD. Le basi tecniche del I° ordine che verranno utilizzate nascono con l'idea di riprendere una metodologia atta ad ottenere tavole prudenziali, laddove il rischio principale non sia quello della premorienza, ma quello della sopravvivenza.

Definite le basi tecniche del II° ordine come $j^* = 1\%$ e $q_x^* = q(\text{ISTAT2016})$, le basi tecniche del I° ordine sono $j^* = 1\%$ e $q_x^* = \alpha_x \cdot q(\text{ISTAT2016})$.

In Tabella 7 si mostrano i valori assunti da α_x al variare dell'età; in questo modo il caricamento di sicurezza λ_x definito come $\frac{q_x^* - q_x}{q_x}$ è negativo ad ogni antidurata del contratto ed essendo il tasso di CSR negativo, la compagnia si aspetta un utile atteso positivo ad ogni anniversario di polizza.

Tabella 7 - La base demografica del I° ordine

età	I° ordine $\alpha(x)$	II° ordine
[0,10]	0,85	q(ISTAT2016)
[11,40]	0,9	q(ISTAT2016)
[41,70]	0,85	q(ISTAT2016)
[71,119]	0,82	q(ISTAT2016)

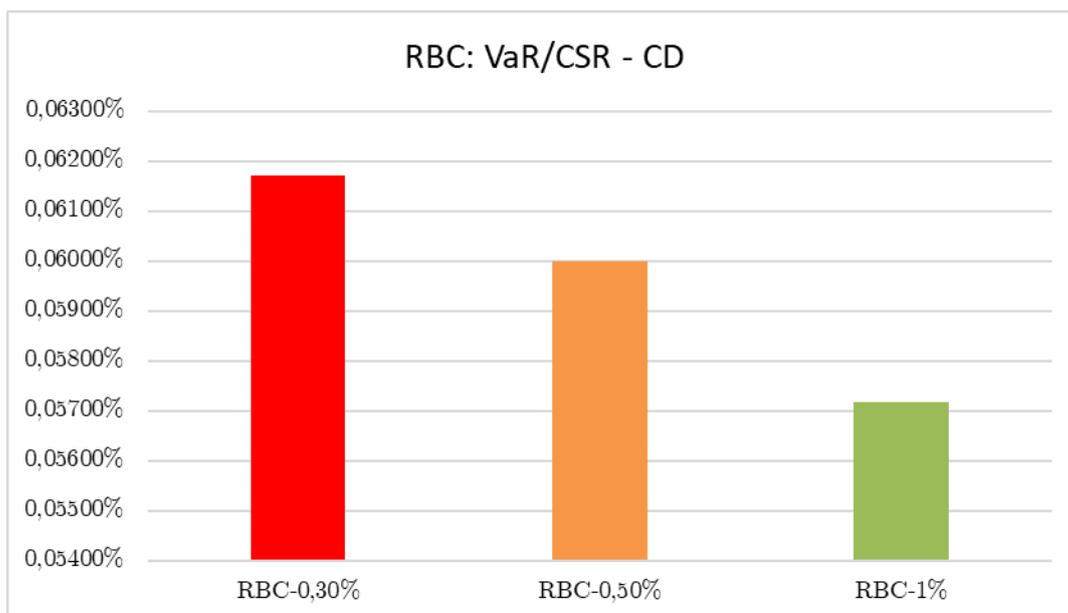
⁴¹ Età, durata della polizza e durata pagamento premi sono, come preannunciato, gli stessi esposti nell'Introduzione del capitolo.

Si mostrano in Tabella 8 e nelle Figure 17 e 18 rispettivamente quali siano le grandezze fondamentali dedotte dalle 10 milioni di simulazioni e lo *shape* della distribuzione simulata dell'utile demografico in $t = 0$:

Tabella 8 – L'utile demografico di 15.000 CD

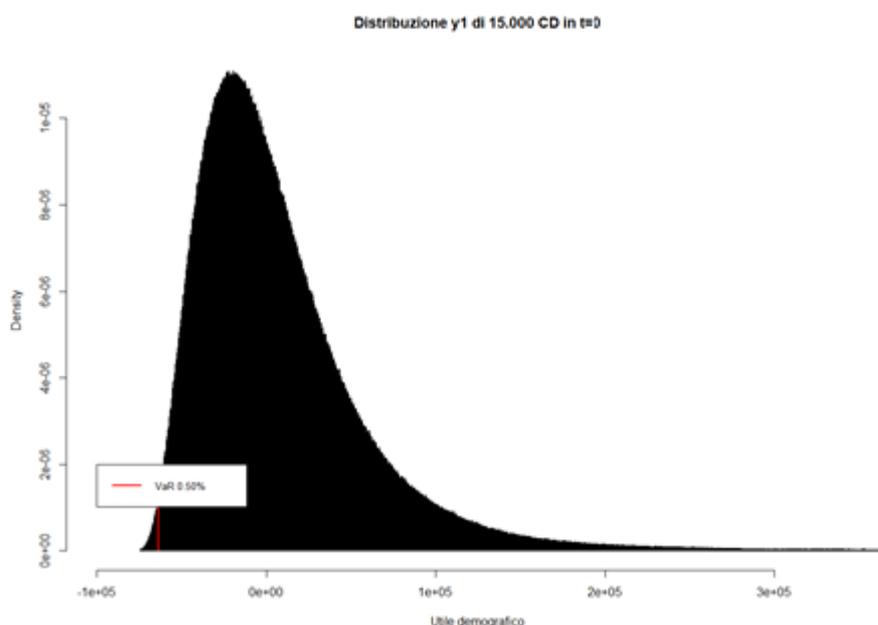
	Valori simulati	Valori teorici
Media	8.257,58	8.258,24
Deviazione standard	53.717,42	53.744,37
Asimmetria	2,4057	2,4087
lambda	-10,00%	
VaR 0.30%	-65.282,90	
RBC-0,30%	0,06171%	
VaR 0.50%	-63.465,12	
RBC-0,50%	0,05999%	
VaR 1%	-60.482,93	
RBC-1%	0,05718%	

Figura 17 - RBC calcolati sulle 15.000 CD



Si riprende in primo luogo il fatto che il caricamento di sicurezza implicito λ uguale a circa il -10%, implica un utile atteso positivo per la compagnia in quanto il capitale sotto rischio è negativo. La media, insieme alla deviazione standard della distribuzione, è particolarmente contenuta in confronto agli stessi valori delle altre tipologie di polizze. Tale effetto è dovuto al valore del capitale sotto rischio particolarmente basso in termini assoluti: -0,0700259.

Figura 18 - La distribuzione di y_1 - CD



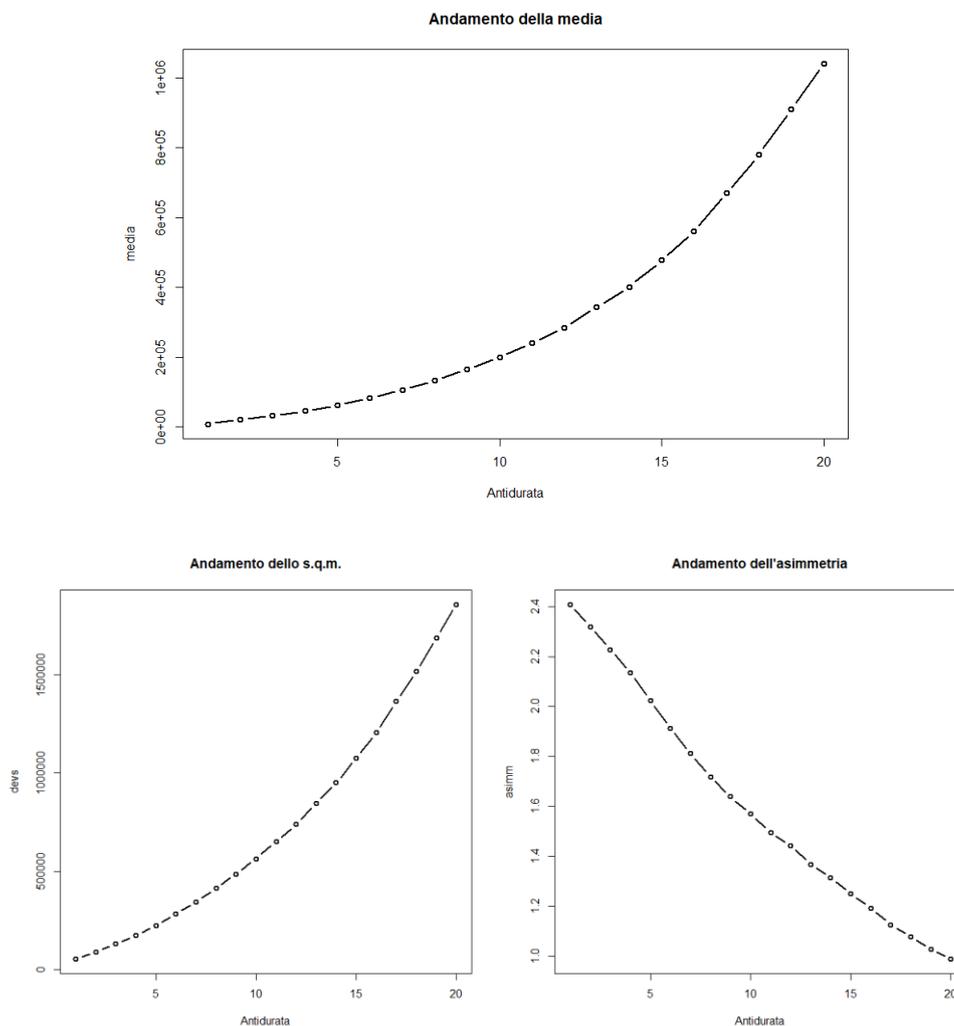
Si osserva la marcata asimmetria positiva della distribuzione: essendo le probabilità di decesso di un uomo 40enne largamente inferiori al 50%, essa è

dovuta interamente al termine $-\frac{(D_1^b)^3}{|D_1^b|^3} \geq 0$.

Il requisito di capitale, rapportato al CSR in Figura 17, è calcolato sulla coda sinistra della distribuzione dell'utile demografico e con un LDC del 99,5% è approssimabile come $1,181463 \cdot \sigma(\tilde{y}_1)$ o come lo 0,06% del capitale sotto rischio. La marcata asimmetria positiva rende i requisiti di capitale, calcolati al variare del livello di confidenza, particolarmente simili tra loro.

Considerando invece un *time horizon* pluriennale, si mostra in Figura 19 l'andamento di media, scarto quadratico medio e indice di asimmetria su tutta la durata ventennale dei 15.000 contratti.

Figura 19 – L'andamento di μ, σ e γ



Si osserva che la media in $t = 0$ vale approssimativamente 8250, mentre in $t = 19$ circa 1,05 milioni. L'effetto è dovuto al prodotto tra λ e il capitale sotto rischio: entrambi sono sempre negativi ed entrambi aumentano esponenzialmente al crescere dell'antidurata cosicché l'assicuratore ha un caricamento implicito sempre maggiore che sposta verso destra la media della distribuzione dell'utile demografico.

L'aumento in valore assoluto del capitale sotto rischio, oltre che sulla media, funge da *driver* della *standard deviation*: riprendendo la formula della stessa

$$\sigma(\tilde{y}_{t+1}) = |D_{t+1}^b| \cdot \bar{C} \cdot l_{x+t} \cdot \sqrt{\frac{l_{x+t} \cdot q_{x+t} \cdot (1 - q_{x+t}) \cdot r_{2c}}{l_{x+t}^2}}$$

si può affermare che il radicando aumenta di valori pressoché nulli (a causa della diminuzione di l) mentre l'aumento di $|D_{t+1}^b|$ implica l'andamento crescente ed esponenziale di $\sigma(\tilde{y}_{t+1})$.

Per quanto riguarda l'andamento dell'indice di asimmetria, il capitale sotto rischio dà il segno costante positivo per ogni antidurata, mentre l'andamento decrescente è dato dal termine $\frac{(1-2q_x)}{\sqrt{l \cdot q_x \cdot (1-q_x)}}$ in quanto:

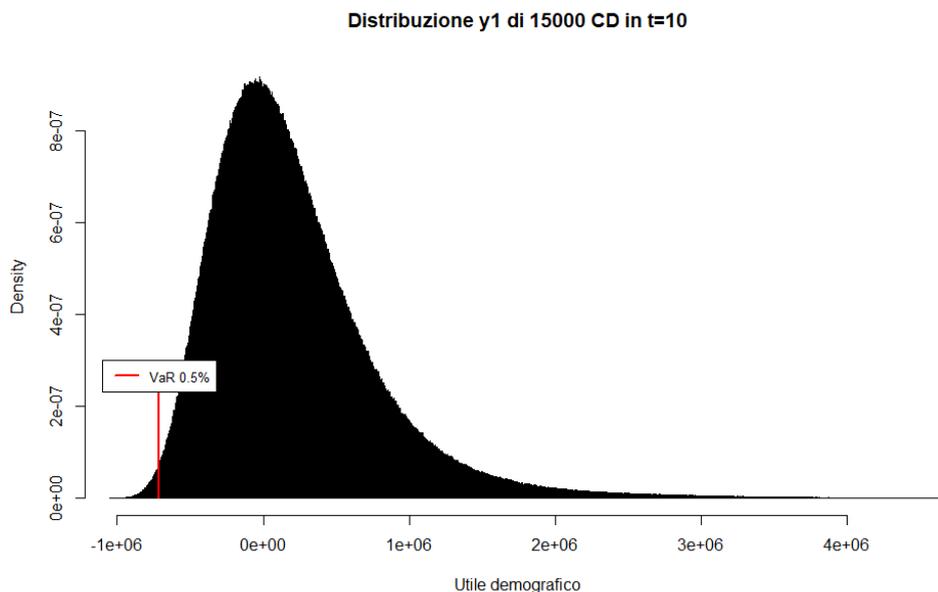
$$\lim_{q_x \rightarrow 0,5} \frac{(1 - 2q_x)}{\sqrt{l \cdot q_x \cdot (1 - q_x)}} = 0$$

Si conclude la trattazione dei 15.000 CD mostrando la distribuzione dell'utile demografico in $t = 10$ riprodotta a seguito di 10 milioni di simulazioni, con momenti deducibili dai 3 grafici di Figura 20 e riportati in Tabella 9.

Tabella 9 – L'utile demografico di 15.000 CD in $t=10$

	Valori simulati	Valori teorici
Media	199.389,50	199.629,30
Deviazione standard	564.529,90	564.613
Asimmetria	1,5697	1,5685
lambda	-15,00%	
VaR 0.30%	-750.064,20	
RBC-0,30%	0,10452%	
VaR 0.50%	-716.475,30	
RBC-0,50%	0,09984%	
VaR 1%	-663.881,80	
RBC-1%	0,09251%	

Figura 20 - La distribuzione di y_1 in $t=10$



2.5.2 La rendita differita

Si tratta ora un portafoglio di 15.000 rendite differite vitalizie, mantenendo le ipotesi del *cohort approach* sugli assicurati presentate nel Paragrafo 2.3, con la differenza che in questo contesto $x = 30$ e il differimento (che coincide con il periodo di corresponsione dei premi) è pari a 35 anni. La media dei capitali assicurati è ridotta a 10.000 mentre il CoV rimane, come per gli altri casi, pari a 2.

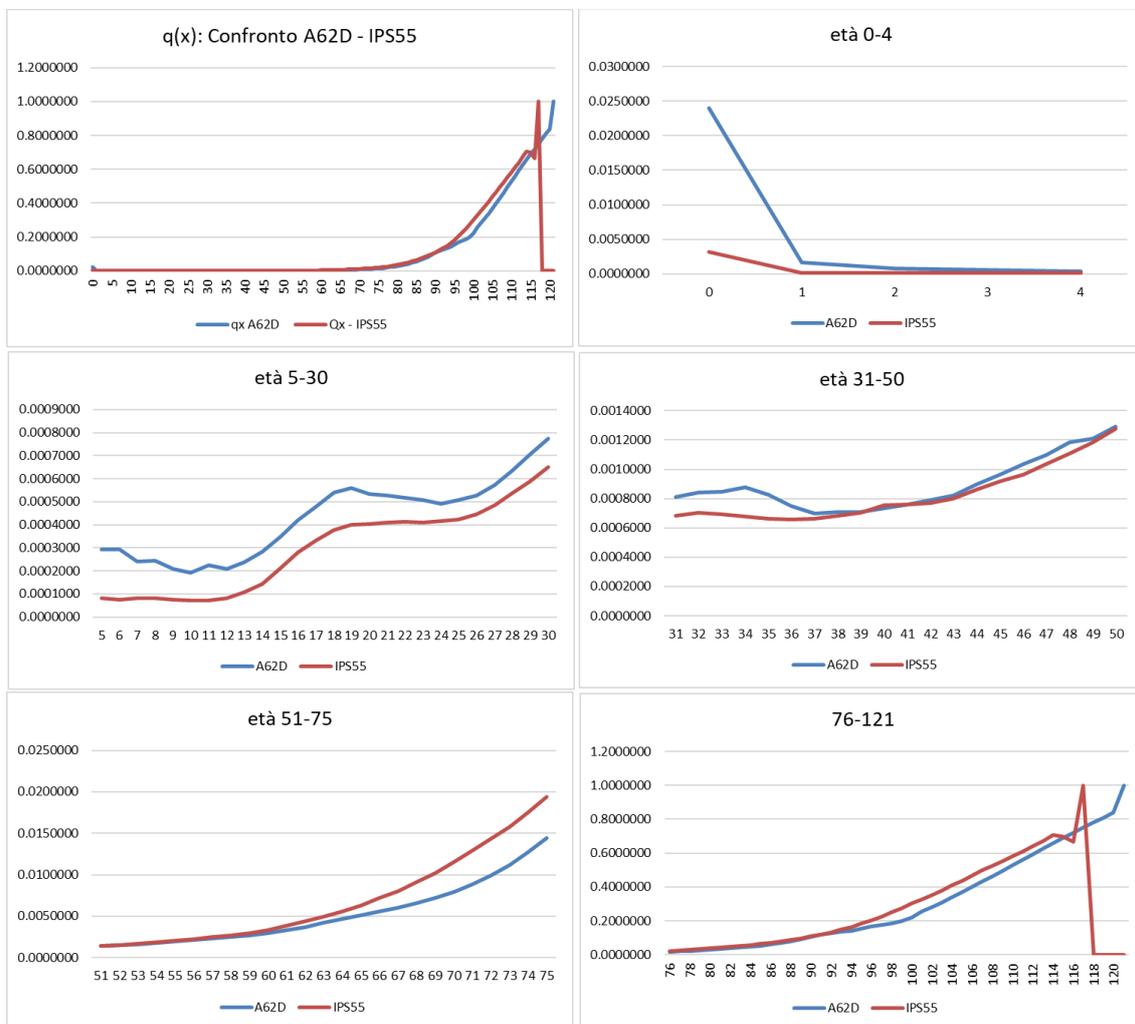
Nel caso in esame, le basi tecniche utilizzate sono le seguenti:

- I° ordine: $j^* = 1\%$ e $q_x^* = q(\text{IPS55})$:
- II° ordine: $j = 1\%$ e $q_x = q(\text{A62D})$:

Si sottolinea che questa situazione rispecchia uno scenario particolarmente realistico in quanto fino alla redazione delle A62, le IPS55 erano le tavole selezionate maggiormente utilizzate nel mercato delle rendite. Un elemento cardine di questo sotto paragrafo riguarda il rapporto tra i tassi di mortalità

deducibili dalle suddette tavole: si presenta la Figura 21 che mostra per quali età una tavola ipotizza una mortalità maggiore dell'altra.

Figura 21 - Il rapporto tra i tassi di mortalità IPS55 e A62D



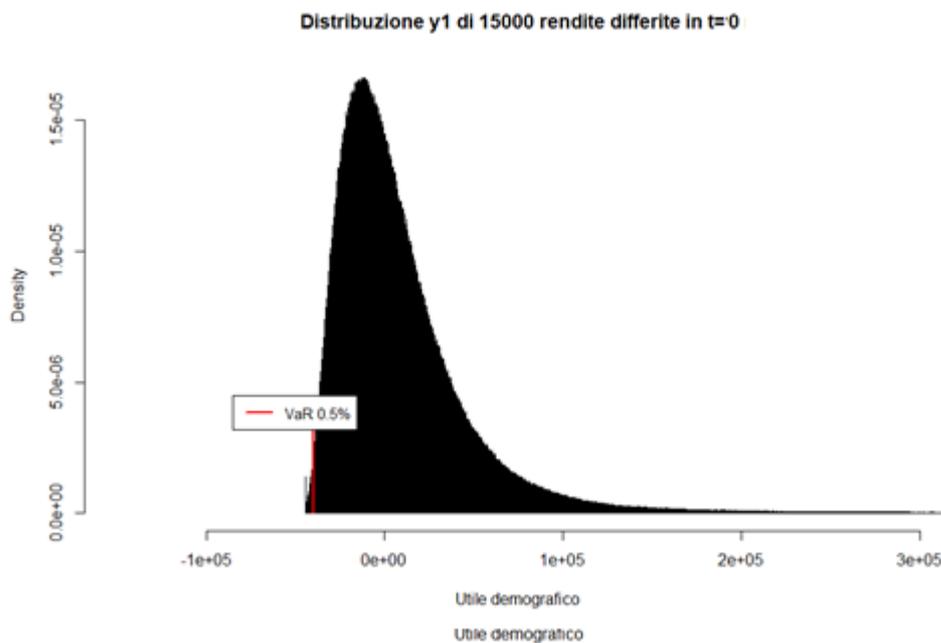
Si osserva che, qualora il soggetto sia particolarmente giovane, la mortalità ipotizzata dall'A62D è maggiore a quella della IPS55. Ciò implica che il caricamento di sicurezza λ sia negativo e a fronte di un tasso di capitale sotto rischio negativo, produca un utile atteso positivo. Già dalla 36esima antidurata si può intravedere un'inversione di tendenza in termini di aspettative sulla mortalità; inversione altalenante che diventa definitiva e con un'intensità maggiore dalla 58esima antidurata in poi. Inoltre, come già dichiarato nell'Appendice B, l'età $\omega - 1$ per le due tavole, differisce di 4 anni.

Mostrato il rapporto che intercorre tra le due tavole demografiche utilizzate come basi tecniche, si presentano rispettivamente in Tabella 10 e in Figura 22 i momenti esatti e quelli dedotti da 10 milioni di simulazioni della v.a. \tilde{y}_1 .

Tabella 10 - L'utile demografico di 15.000 rendite differite in $t=0$

	Valori simulati	Valori teorici
Media	8.055,44	8.061,49
Deviazione standard	38.018,71	37.971,12
Asimmetria	2,6818	2,6728
lambda	-15,32%	
VaR 0.30%	-40.734,15	
RBC-0,30%	0,04913%	
VaR 0.50%	-39.709,12	
RBC-0,50%	0,04790%	
VaR 1%	-37.941,37	
RBC-1%	0,04576%	

Figura 22 -La distribuzione di y_1 in $t=0$

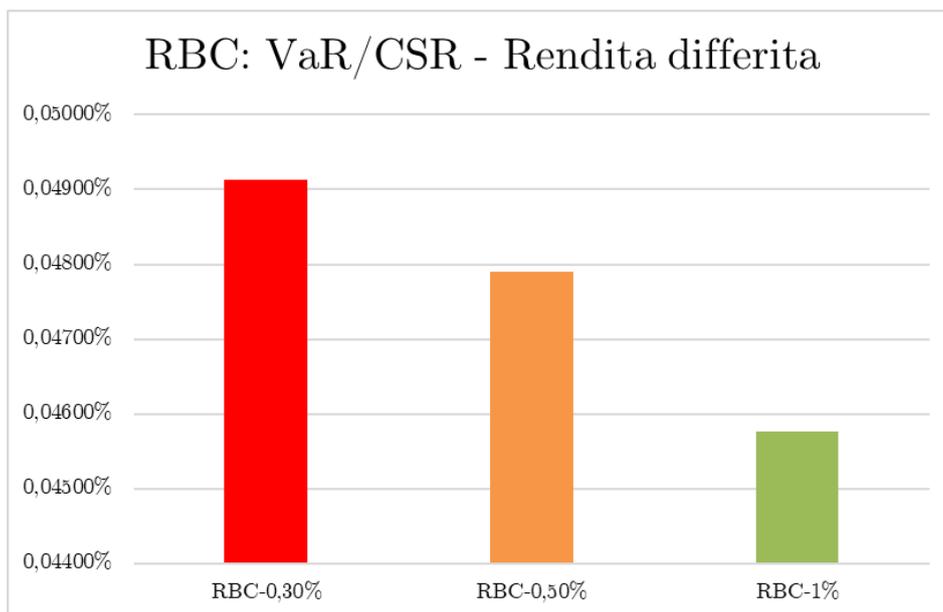


Per quanto detto precedentemente, in $t = 0$ il caricamento di sicurezza è negativo e conseguentemente la media è positiva; tale scelta circa la base demografica del

I° ordine, si mostrerà nel seguito essere estremamente errata nelle antidurate successive. Un elemento d'interesse è il primo rettangolo dell'istogramma: esso evidenzia che ipotizzando una sopravvivenza realistica della popolazione con tassi di mortalità particolarmente ridotti, esiste una probabilità, esigua, ma maggiore dei casi più simili, che tutti gli individui sopravvivano generando lo scenario peggiore per l'assicuratore: la probabilità di tale evento è all'incirca 1 su 14.300. In secondo luogo, si osserva che il tasso di capitale sotto rischio negativo, garantisce un'asimmetria positiva allo *shape* della distribuzione che consente di individuare i tre VaR con LDC 0.3%, 0,5% e 1% nello stesso rettangolo dell'istogramma.

Tale fenomeno viene rappresentato con la Figura 23.

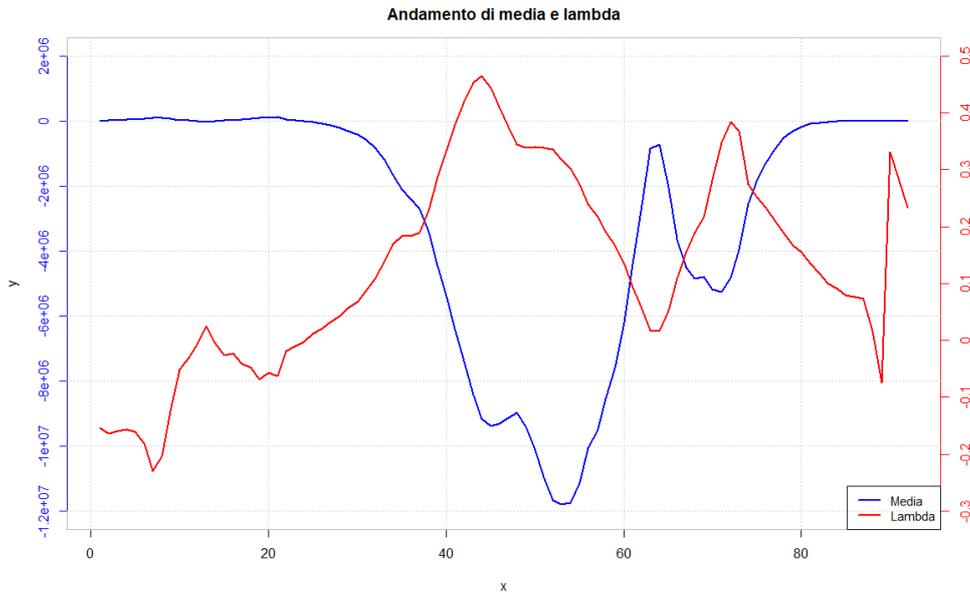
Figura 23 - RBC calcolati sulle 15.000 rendite differite



Si riprende ora il tema legato al rapporto tra la base demografica di I° ordine e quella di II° ordine: in Figura 24-1 si mostra l'andamento del valore atteso dell'utile demografico rapportato all'andamento del caricamento di sicurezza. L'andamento rispecchia esattamente quanto deducibile dalla Figura 21:

ricordando che $\lambda = (q_x^* - q_x)/q_x$, esso è negativo fino alla 24esima antidurata, successivamente rimane sopra lo 0 eccezion fatta per un *outlier* sulla coda. Coerentemente con ciò, $E(\tilde{y}_{t+1})$ è positivo fino alla 24esima antidurata, per poi rimaner negativo fino all'eccezione appena citata. Si osserva che le due curve non sono perfettamente speculari perché λ è influenzato da $E(\tilde{d}) \cdot \bar{C}$ nonché dal valore di D_1^b .

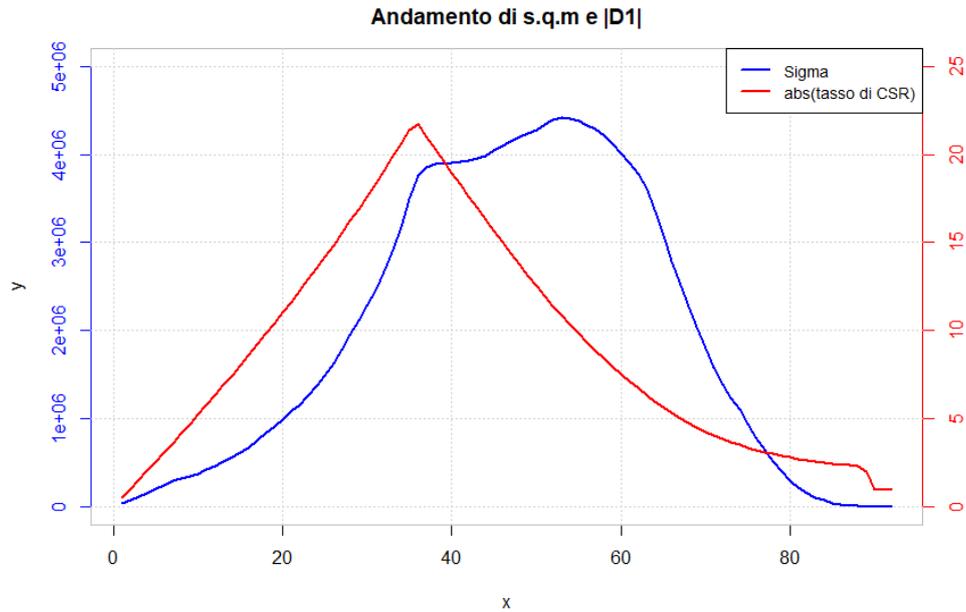
Figura 24 – L'andamento di della media e del caricamento di sicurezza al variare dell'antidurata



42

⁴² Per quanto riguarda l'andamento dell'indice di asimmetria, sono stati tralasciati gli ultimi 8 valori relativi alle ultime 8 antidurate: essi sono valori fortemente negativi (proprio come intuibile dal trend) che, mostrati, avrebbero sfumato il trend decrescente complessivo

Figura 25 - L'andamento della s.d. e del valore assoluto del CSR al variare dell'antidurata

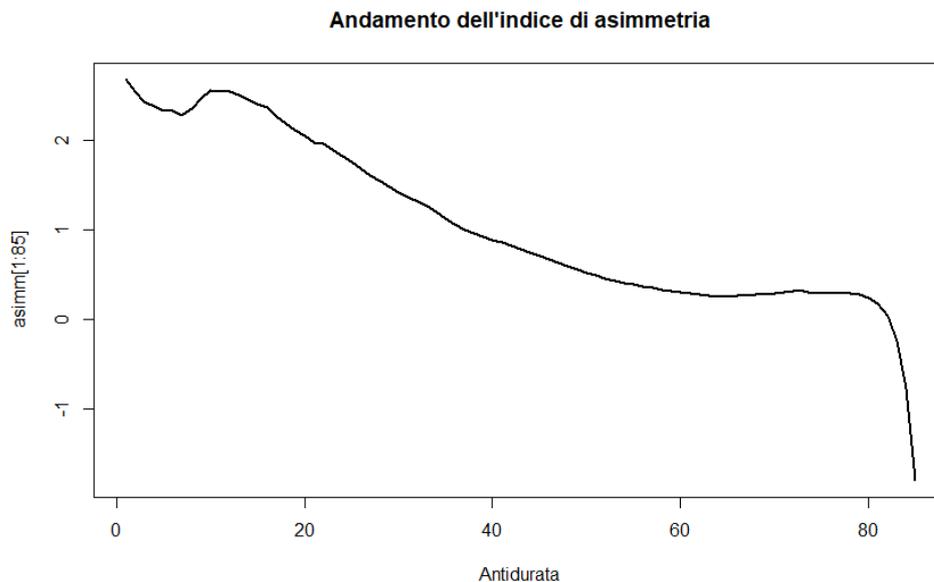


Con riferimento all'andamento dello scarto quadratico medio rappresentato dalla curva blu di Figura 25, i suoi due *drivers* sono il modulo del tasso di capitale sotto rischio (rappresentato dalla curva rossa) e il fattore

$$\sqrt{\frac{l_{x+t} \cdot q_{x+t} \cdot (1 - q_{x+t}) \cdot r_{2C}}{l_{x+t}^2}}$$

Noto l'andamento del valore assoluto del primo, il secondo assume un'evoluzione esponenziale al crescere dell'antidurata: è una funzione monotona non decrescente convessa. Tale trend è compensato però (specie sulla coda destra) proprio dalla diminuzione della trasformazione del tasso di CSR rendendo così σ decrescente poco dopo la 50esima antidurata. I tassi di mortalità inoltre, sono la chiave di volta dello sviluppo decrescente dell'indice di asimmetria che addirittura raggiunge prima lo 0 e infine valori fortemente negativi: nonostante tutti i valori del tasso di CSR siano negativi, le probabilità di decesso per le ultime 10 antidurate secondo l'A62D sono maggiori del 50%. Si mostra in Figura 26 l'andamento di γ .

Figura 26 - L'andamento dell'indice di asimmetria -Rendita differita vitalizia

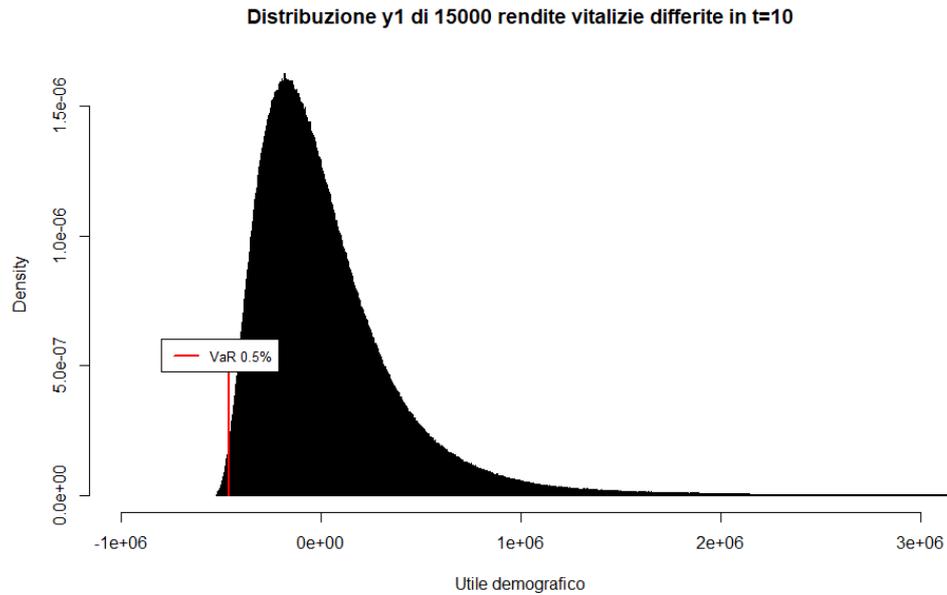


Si conclude la trattazione della rendita differita, mostrando valori e *shape* della distribuzione dell'utile demografico in $t = 10$.

Tabella 11 – I momenti e i RBC delle 15.000 rendite differite in $t=10$

	Valori simulati	Valori teorici
Media	28.104,51	28.119,91
Deviazione standard	379.145,70	379.404,90
Asimmetria	2,5467	2,5565
lambda	-5,12%	
VaR 0.30%	-473.076,50	
RBC-0,30%	0,060118%	
VaR 0.50%	-461.660,80	
RBC-0,50%	0,05867%	
VaR 1%	-442.596,10	
RBC-1%	5,62447%	

Figura 27 -La distribuzione di y_1 per le 15.000 rendite differite in $t=10$



2.5.3 La TCM

Nel caso di un portafoglio costituito da 15.000 temporanee caso morte con capitali assicurati aventi stesse le caratteristiche di base presentate nell'introduzione, si utilizzano come basi tecniche del primo e del secondo ordine rispettivamente ($j^* = 1\%$, $q_x^* = q(SIM1991)$) e ($j = 1\%$, $q_x = q(ISTAT2016)$).

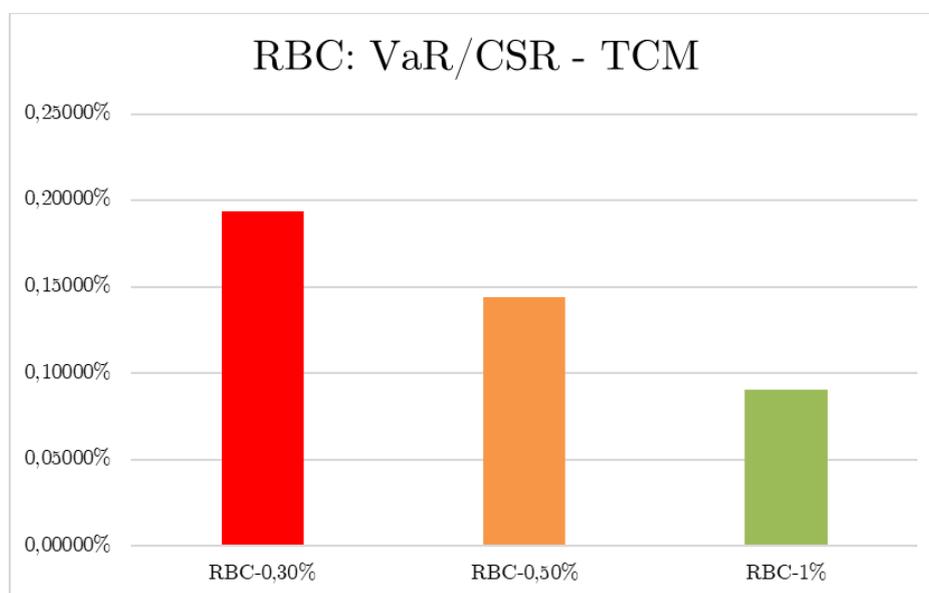
In questo caso, la scelta della tavola demografica è particolarmente prudentiale e gli effetti si trasmettono sull'utile demografico: rendendo il caricamento di sicurezza fortemente positivo e allo stesso tempo essendo il tasso di capitale sotto rischio positivo e prossimo a 1, il valore atteso dell'utile demografico è consistentemente positivo per ogni antidurata. Ottenere uno *shift* verso destra della distribuzione dell'utile demografico per le TCM, non è solo fondamentale in un'ottica di redditività, ma lo è anche in una visione di solvibilità in quanto il tasso di CSR negativo rende l'asimmetria dell'utile demografico ad ogni antidurata (se non laddove $q_x > 50\%$) negativa e il tasso di CSR rende lo scarto quadratico medio particolarmente significativo.

In Tabella 12 si mostrano i valori ottenuti da 10 milioni di simulazioni relative al portafoglio contenente 15.000 TCM su un orizzonte temporale annuale; con la Figura 28 invece si evidenzia la variazione del RBC al variare dell'orizzonte temporale. A differenza dei prodotti esaminati fino ad ora caratterizzati da un'asimmetria fortemente positiva, si osserva ora lo *spread* tra i RBC ratio dovuti alla precedentemente citata asimmetria negativa.

Tabella 12 – L'utile demografico di 15.000 TCM

	Valori simulati	Valori teorici
Media	1.417.148	1.417.212
Deviazione standard	746.263,60	746.515,60
Asimmetria	-2,4085	-2,4087
lambda	123,69%	
VaR 0,30%	-2.841.040	
RBC-0,30%	0,19358%	
VaR 0,50%	-2.109.986	
RBC-0,50%	0,14377%	
VaR 1%	-1.329.575	
RBC-1%	0,09059%	

Figura 28 - RBC calcolati sulle 15.000 TCM



A conclusione del caso *one year*, si riporta in Figura 29 la distribuzione simulata dell'utile demografico che ben evidenzia le caratteristiche di media positiva e asimmetria negativa citate.

Figura 29 – La distribuzione di y_1 – TCM

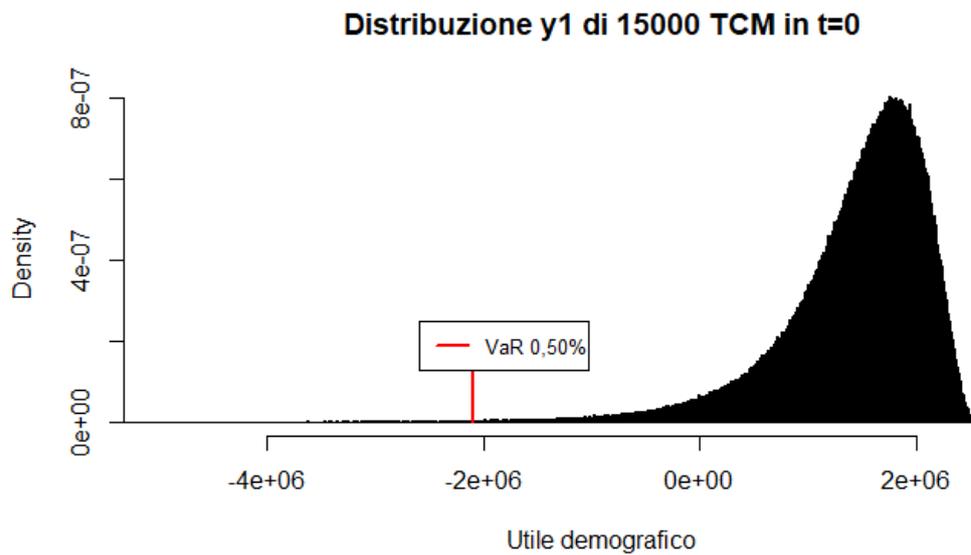


Figura 30a - L'andamento di μ al crescere dell'antidurata

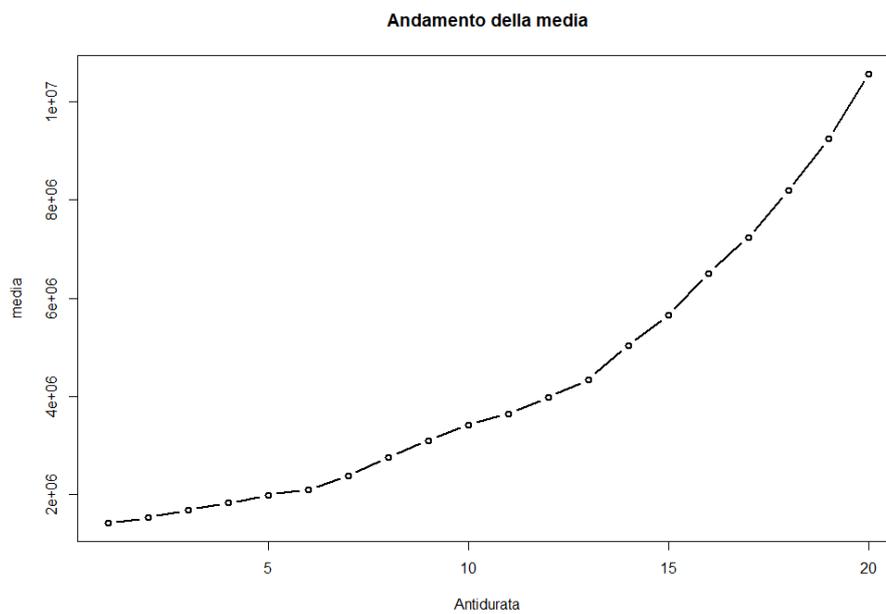
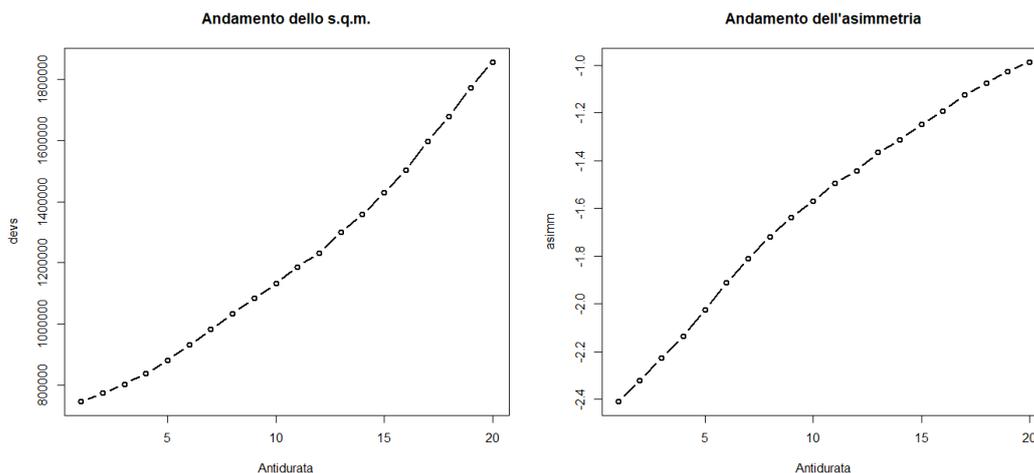


Figure 31a e 31b - L'andamento di σ, γ al crescere dell'antidurata



Con le Figure 30, 31a e 31b si mostrano gli andamenti di media, *standard deviation* e indice di asimmetria della v.a. utile demografico al variare dell'antidurata. Per quanto concerne l'evoluzione della media, essa è influenzata prettamente dall'aumento del caricamento di sicurezza implicito λ , crescente all'aumentare dell'antidurata. Con riferimento invece a σ , esso non è particolarmente influenzato dal tasso di CSR in quanto poco variabile e prossimo all'unità, è condizionato invece dal fattore $q_x(1 - q_x)$, crescente al tendere a 0,5 di q_x .

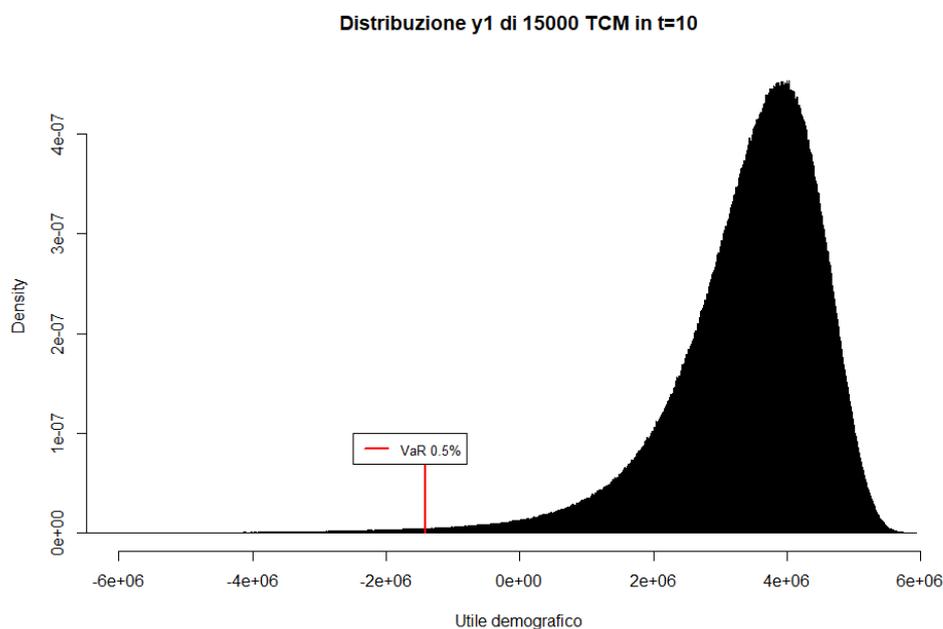
Per quanto riguarda l'asimmetria, anche l'effetto di convergenza verso una distribuzione asimmetrica è dato dall'aumento dei tassi di mortalità di prim'ordine al crescere dell'antidurata.

Come per il portafoglio di CD e quello di rendite vitalizie differite, si conclude la trattazione del portafoglio di TCM mostrando in tabella 13 e in Figura 32 i momenti e lo *shape* della v.a. utile demografico in $t=10$.

Tabella 13 – I momenti dell'utile demografico in t=10

	Valori simulati	Valori teorici
Media	3.414.394	3.414.486
Deviazione standard	1.131.531	1.131.469
Asimmetria	-1,5700	-1,5685
lambda	128,02%	
VaR 0,30%	-1.994.871	
RBC-0,30%	0,13871%	
VaR 0,50%	-1.405.474	
RBC-0,50%	0,09773%	
VaR 1%	-513.176,20	
RBC-1%	0,03568%	

Figura 32 - La distribuzione di y1 in t=10 – TCM



2.5.4 La mista

Si conclude la trattazione dell'utile demografico relativo ai principali prodotti assicurativi dei rami vita, mostrando il caso del portafoglio composto da 15.000 polizze miste stipulate da 40enni maschi, con durata ventennale e $E(C) = 10.000$.

In questo contesto, si utilizzano basi demografiche simili al caso del portafoglio delle TCM, variando però il caricamento di sicurezza implicito rendendolo più realistico.

Le basi tecniche sono le seguenti:

- I° ordine: $j^* = 1\%$ e $q_x^* = q(\text{ISTAT2014})$
- II° ordine: $j = 1\%$ e $q_x = q(\text{ISTAT2016})$

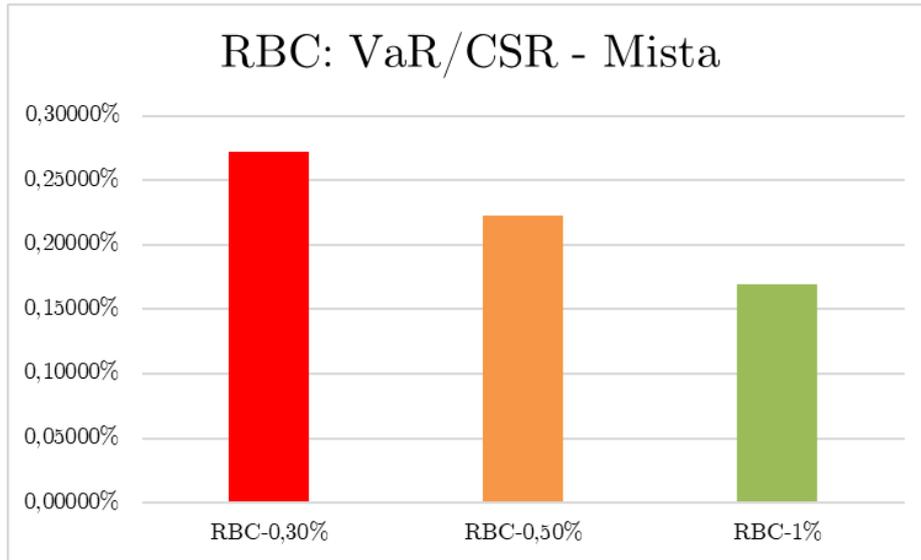
In Tabella 14 si mostrano i principali risultati tratti dalle 10 milioni di simulazioni:

Tabella 14 – I risultati relativi al portafoglio di 15.000 miste

	Valori simulati	Valori teorici
Media	24.766,15	24.755,37
Deviazione standard	71.297,47	71.294,27
Asimmetria	-2,4087	-2,4087
lambda	22,597%	
VaR 0,30%	-381.373,70	
RBC-0,30%	0,27177%	
VaR 0,50%	-312.359,10	
RBC-0,50%	0,22259%	
VaR 1%	-238.042,70	
RBC-1%	0,16963%	

Si osserva in primo luogo che il caricamento di sicurezza è positivo ma più contenuto rispetto al caso precedente: questo fa sì che il prodotto con il tasso di CSR positivo renda il valore atteso dell'utile demografico positivo; $|D_1^b|$, oltre all'effetto sulla media, è anche la causa per cui l'indice di asimmetria è negativo sia in $t = 1$ che per ogni antidurata laddove $q_x > 50\%$.

Figura 33 - RBC calcolati sulle 15.000 MISTE in t=0



Le Figure 33 e 34, poste a conclusione del caso *one year*, mostrano rispettivamente una raffigurazione del rapporto VaR su CSR al variare del LDC e la distribuzione simulata dell'utile demografico. L'aspetto da sottolineare a conclusione di questo caso è relativo al fatto che, nonostante il tasso di CSR prossimo all'unità, il RBC ratio assume i valori più alti nel paragone tra le varie polizze. Essendo ben noto che il tasso di CSR è decrescente al crescere dell'antidurata, già ora si può cogliere che come il $VaR_{0,5\%}$ rapportato a $|D_1^b|$ avrà probabilmente un *trend* crescente.

Figura 34 - la distribuzione simulata di y1 in t=0 - miste

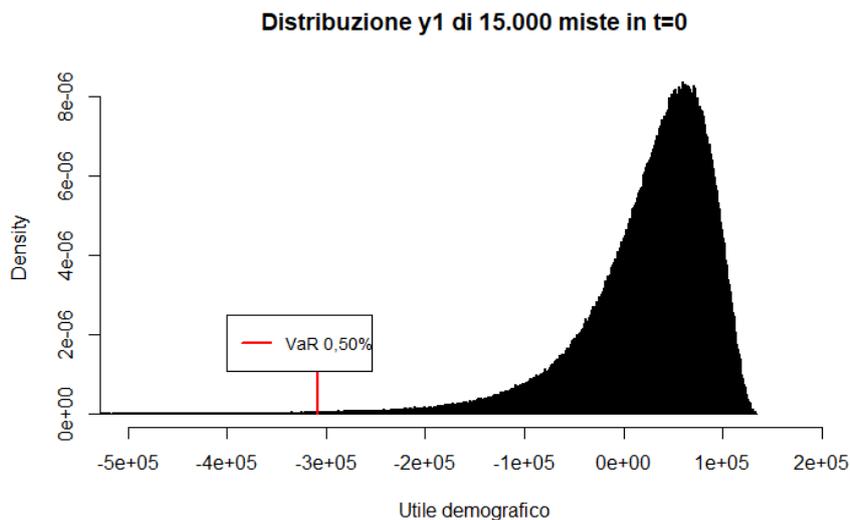
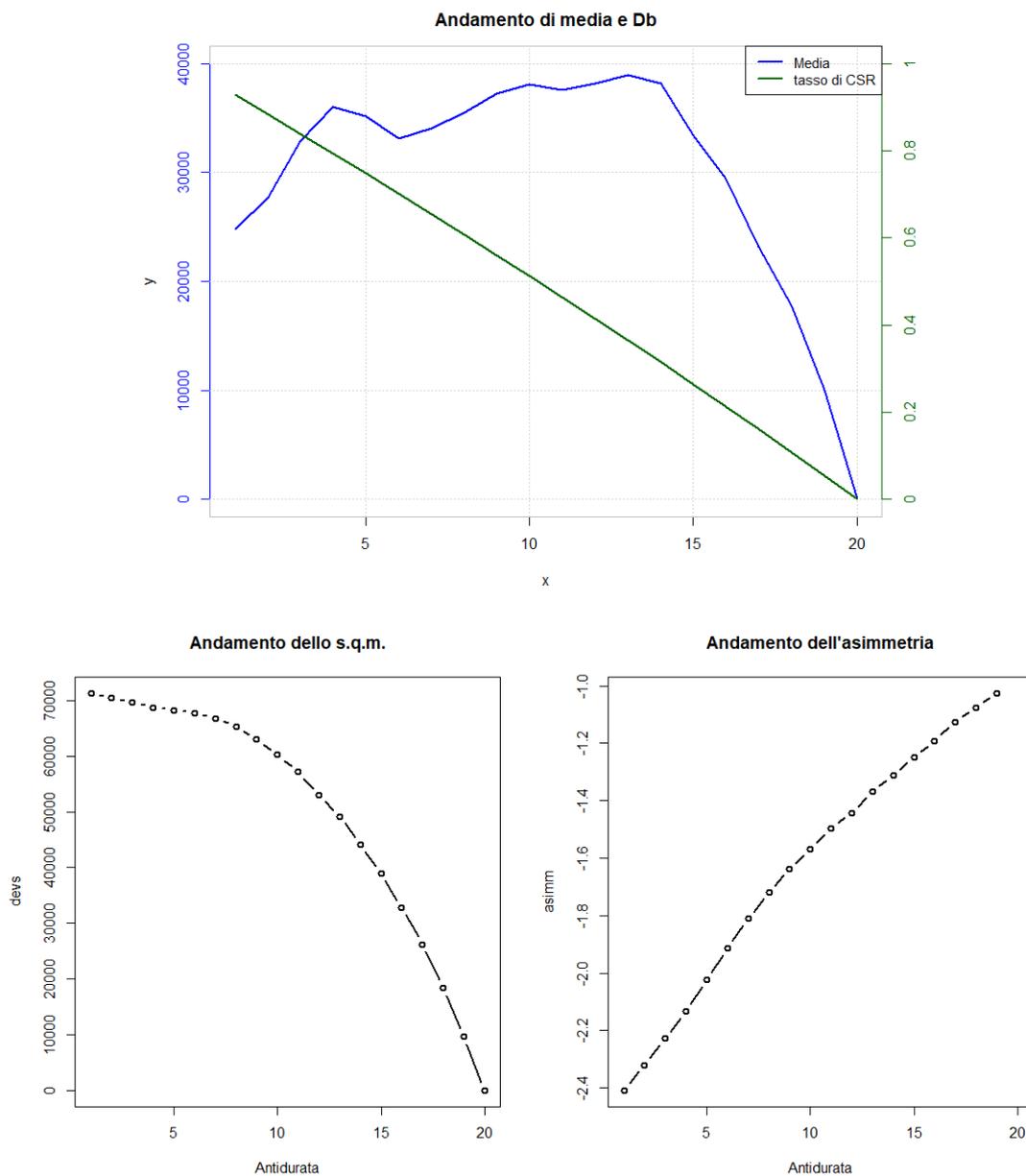


Figura 35 - l'andamento di μ , σ e γ nel caso delle 15.000 miste in t=10



Nel caso delle miste, i momenti dell'utile demografico su un *time horizon* pluriennale sono fortemente influenzati dall'andamento decrescente del tasso di CSR. Nonostante la scelta prudenziale delle basi tecniche che comporta un λ crescente, la media è decrescente e raggiunge il valore di 0 a scadenza, esattamente nel momento in cui sulla compagnia non grava più alcuna forma di rischio; per lo

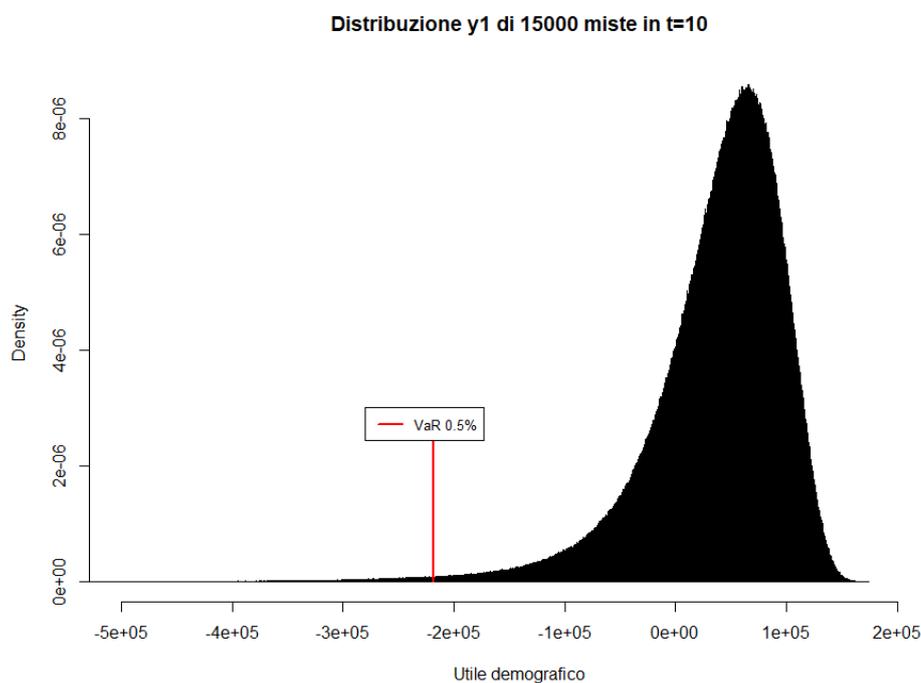
stesso motivo, anche la volatilità di \tilde{y}_t decresce nel tempo raggiungendo il valore nullo in $t = 19$.

Si conclude tale *excursus* sull'utile demografico dei principali prodotti vita, riportando in Tabella 15 e in Figura 36 i valori e la distribuzione di \tilde{y}_{11} .

Tabella 15 – L'utile demografico di 15.000 miste in $t=10$

	Valori simulati	Valori teorici
Media	38.090,60	38.111,55
Deviazione standard	60.243,53	60.214,18
Asimmetria	-1,5686	-1,5685
lambda	26,852%	
VaR 0.30%	-249.132,20	
RBC-0,30%	0,32551%	
VaR 0.50%	-217.965,90	
RBC-0,50%	0,28479%	
VaR 1%	-171.054,50	
RBC-1%	0,22350%	

Figura 36 - la distribuzione simulata di y_1 in $t = 10$ - miste



2.6 L'aggregazione dei portafogli: cenni sulle funzioni copule

Mostrata la distribuzione simulata dell'utile demografico per i 4 principali prodotti dei rami vita, si presentano ora le funzioni copule: strumenti noti in letteratura per rappresentare la dipendenza non sempre lineare tra due variabili aleatorie.

Da un punto di vista meramente operativo, detenere più portafogli implica la detenzione di un requisito di capitale maggiore, in quanto l'impresa di assicurazione deve essere in grado di essere solvibile per ogni contratto inerente ad ogni portafoglio. Considerando il caso di due portafogli, il requisito di capitale utilizzando la metodologia VaR con livello di confidenza 99.5% e orizzonte temporale annuale, è denotato con $VaR(\tilde{P})_{05\%}$.

Si osserva che

$$VaR(\tilde{P})_{05\%} = \sum_{h=1}^n VaR(\tilde{P}_h)$$

se e solo se \tilde{P}_h con $h=1, \dots, n$ sono perfettamente dipendenti e comonotone, ovvero se esistono funzioni crescenti f_h e una v.a. \tilde{X} tale per cui $\tilde{P}_h = f_h(\tilde{X})$. Tale ipotesi è molto fragile nel contesto di questo elaborato (intuitivamente, la dipendenza da tra l'utile demografico di un portafoglio di TCM è correlato negativamente con l'utile demografico di un portafoglio di rendite); si presentano di seguito le funzioni copule che, utilizzate congiuntamente al metodo Monte Carlo, consentono di rappresentare la dipendenza sottostante le v.a. in esame e, conseguentemente, poter calcolare il requisito di capitale per un portafoglio composto sia da contratti che erogano capitali in caso di sopravvivenza, che da contratti che erogano un capitale in caso di premorienza.

Per ogni $d \geq 2$, si definisce copula d-dimensionale (o d-copula) una funzione di ripartizione congiunta definita sullo spazio d-dimensionale \mathbb{I}^d (dove con \mathbb{I} si

indica l'intervallo unitario chiuso $[0,1]$, le cui marginali sono variabili aleatorie uniformi definite su \mathbb{I} . L'insieme delle d -copule con $d \geq 2$ si indica con \mathcal{C}_d .

Denominate le d marginali U_1, U_2, \dots, U_d , la copula \mathcal{C} è quindi scrivibile come:

$$\mathcal{C}: [0,1]^d \rightarrow [0,1]$$

$$\mathcal{C}(u_1, u_2, \dots, u_d) = \Pr(U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d)$$

Il teorema di Sklar

A causa delle sue implicazioni e dei suoi corollari, nella teoria delle Copule un ruolo essenziale è occupato dal Teorema di Sklar. Per una sua dimostrazione minuziosa si rimanda a [18], in questa sede si considerano gli aspetti salienti e le conseguenze dello stesso.⁴³

Si esaminano d v.c. $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_d$ con funzioni di ripartizione F_1, F_2, \dots, F_d .

Si dimostra che:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_d) = \mathcal{C}[F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)] \text{ per } \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Ovvero, data una distribuzione multivariata con marginali F_1, F_2, \dots, F_d esiste un'unica rappresentazione tramite la funzione copula \mathcal{C} affinché la precedente equazione sia verificata. In altre parole, dato un set di qualsiasi marginali è possibile creare una determinata distribuzione multivariata.

Ciò che ne consegue è che, data una distribuzione multivariata, è possibile separare la struttura delle dipendenze (con un'opportuna funzione \mathcal{C}) dalle distribuzioni marginali, qualunque esse siano: la dipendenza è catturata dalla \mathcal{C} ed è indipendente dalle marginali.

Nel contesto di questo elaborato, dove l'obiettivo è quello di ricreare e studiare un portafoglio date le sue componenti, è quindi possibile identificare e modellizzare separatamente le marginali e, solo in un secondo momento, aggregarle.

⁴³ Tratto da "Klugman S., Panjer H., Willmot G. (2012) "Loss models from data to decisions". Third edition. Wiley."

Quello che verrà fatto nel paragrafo successivo infatti, sarà riprendere le distribuzioni dell'utile demografico dei vari portafogli omogenei di polizze e aggregarli tra loro con il fine di valutare l'impatto di diverse ipotesi di dipendenza (tramite le funzioni copula) sul requisito di capitale dovuto alla detenzione di un portafoglio costituito da polizze diverse.

Misure di dipendenza

Prima di mostrare quali copule verranno utilizzate in fase di aggregazione, si presentano alcune misure di dipendenza tra le variabili aleatorie: essendo interessati a dipendenze non lineari, si presenta in primo luogo il coefficiente di correlazione lineare di Bravais-Pearson, i suoi limiti e, in secondo luogo il coefficiente di Kendall.

Una misura sintetica atta a considerare la dipendenza tra due variabili aleatorie, qualora esse siano legate da un vincolo lineare, ovvero sia possibile scrivere:

$$\tilde{Y} = \alpha + \beta\tilde{X}$$

è il sopracitato coefficiente ρ_{XY} . Esso è definito come:

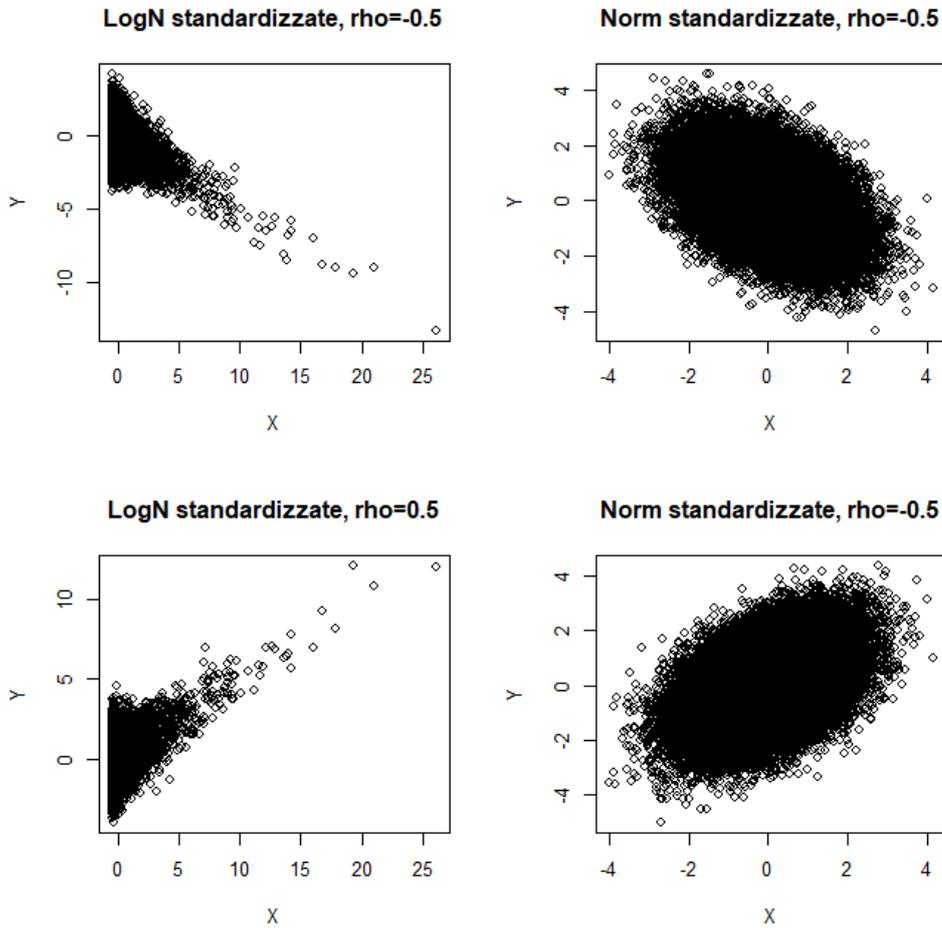
$$\rho_{XY} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

Ed equivali al rapporto tra la covarianza delle due variabili aleatorie e i loro scarti quadratici medi. Il coefficiente di correlazione lineare è quindi funzione delle distribuzioni marginali e, conseguentemente, un cambiamento in quest'ultime implica una variazione nel ρ_{XY} stesso.

Nel contesto delle copule, oltre a dover cogliere legami di tipo non lineari, è preferibile avere misure di dipendenza che dipendono solo da \mathcal{C} e non dalle distribuzioni marginali proprio per il fatto che la copula è indipendente dalle marginali ed è tesa esclusivamente a descrivere la dipendenza tra le due variabili aleatorie.

Prima di proporre una misura di dipendenza che sorpassi questo ostacolo, si presenta in Figura 37 come varia lo *scatter plot* di variabili aleatorie standardizzate al variare del coefficiente di correlazione lineare.

Figura 37 - V.a. standardizzate con diversi rho



La seconda misura di dipendenza di interesse è il tau di Kendall, indicato con il simbolo τ_K . Esso è calcolato come

$$\tau_K = \frac{\sum_{i < j} \text{sign}(x_j - x_i) \cdot \text{sign}(y_j - y_i)}{n(n - 1)/2}$$

Dove il numeratore è funzione delle coppie concordi e discordi, mentre il denominatore assume il valore massimo dei $\sum_{i < j} \text{sign}(x_j - x_i) \cdot \text{sign}(y_j - y_i)$. Per questo motivo, esattamente come il rho di Pearson, $-1 \leq \tau_K \leq 1$.

Il tau di Kendall, con riferimento a due v.a. bivariate \tilde{X} e \tilde{Y} può essere quindi visto come:

$$\tau_K = \Pr[(X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) > 0] - \Pr[(X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) < 0]$$

dove il primo termine misura la concordanza e il secondo la discordanza.

Essendo τ_K una misura di dipendenza che dipende esclusivamente dalla copula, nel prosieguo di questo elaborato verranno calcolati due τ_K : il primo coerente con il coefficiente di correlazione lineare proposto da EIOPA per l'aggregazione degli SCR ($\rho_{XY} = -0.25$) e il secondo con $\rho_{XY} = -0.5$.

2.6.1 Copule ellittiche e copule archimedee

Prima di implementare le copule nell'aggregazione di due portafogli, si presentano le due funzioni \mathcal{C} .

La prima funzione copula che verrà utilizzata è la copula gaussiana ed essendo la v.c. Normale appartenente alla classe delle distribuzioni ellittiche, anche la copula associata appartiene alla suddetta categoria. La copula gaussiana è data da:

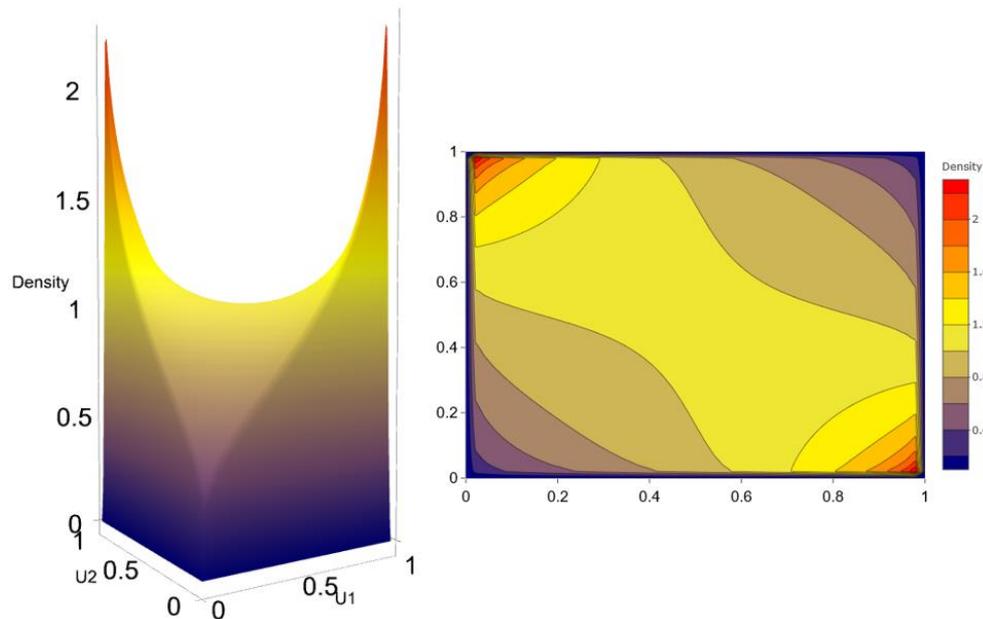
$$\mathcal{C}(u_1, \dots, u_d) = \Phi_p(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d))$$

Dove $\Phi(x)$ è la funzione di ripartizione di una normale standard e $\Phi_p(x_1, \dots, x_d)$ è la funzione di ripartizione congiunta di una normale standard d-variata.

Considerando il caso bivariato con parametro ρ_{XY} ,

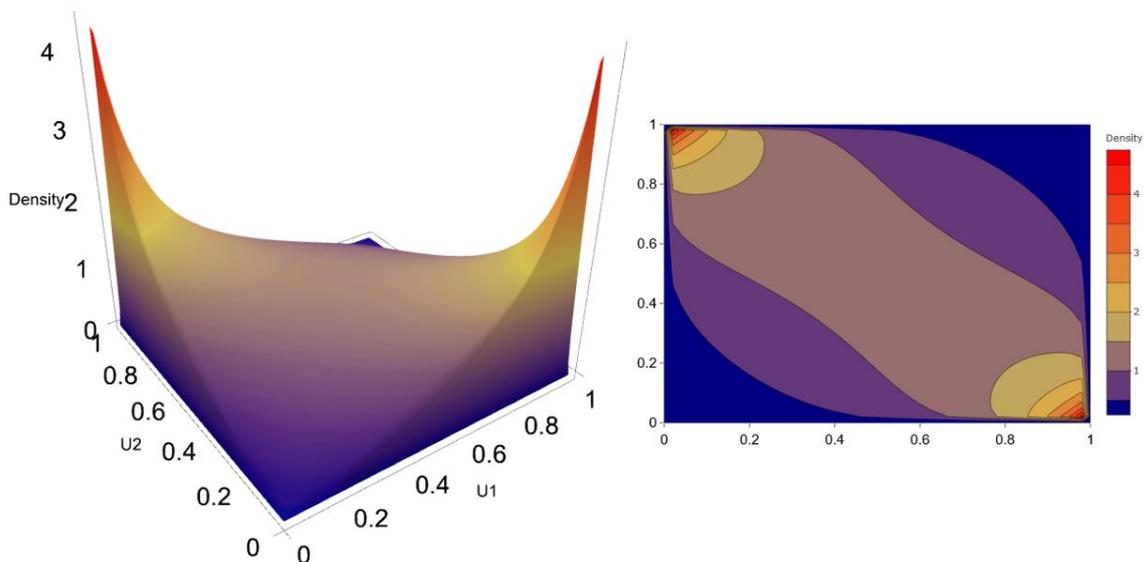
$$\mathcal{C}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{\sqrt{2(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right) dy dx$$

Figura 38 – 3D plot e Contour line – C.Gauss rho=-0,25



In Figura 38 vengono rappresentati il *3D plot* e il *contour line* della copula gaussiana bivariata con $\rho_{XY} = -0,25$; è interessante osservare come i punti dove la funzione di densità raggiunge i valori maggiori, sono gli estremi (0,1) e (1,0). Questo significa che, seppur debolmente rispetto ai casi che verranno presentati nel seguito, utilizzare la \mathcal{C} gaussiana con coefficiente di correlazione lineare leggermente negativo significa ipotizzare una dipendenza debole e negativa sulle code. Infatti, accentuando ρ_{XY} e ponendolo uguale a -0,50, *3D plot e contour line* (Figura 39) rappresentano in maniera più marcata la dipendenza negativa. In quest'ultimo caso infatti, i valori assunti dalla copula in corrispondenza dei punti (0,1) e (1,0) sono più del doppio dei corrispettivi valori assunti nel precedente caso, dove il coefficiente di correlazione lineare era pari a -0,25.

Figura 39 - 3D plot e Contour line – C.Gauss rho=-0,5



In questo secondo caso, si osserva che la dipendenza negativa è molto più accentuata: aggregare due v.a. \tilde{X} e \tilde{Y} con una copula gaussiana ($\rho_{XY} = -0,5$) significa ipotizzare che qualora la v.a. \tilde{X} assuma un valore particolarmente negativo, la seconda molto probabilmente assumerà un valore fortemente positivo e, soprattutto, viceversa.

Si conclude la descrizione della copula gaussiana, ricordando che con riferimento ad essa e dato un generico tau di Kendall τ_K , è possibile calcolare il rho di Pearson nel seguente modo:

$$\rho_{XY} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau_K\right)$$

Nel seguito quindi, si utilizzerà la copula gaussiana con i parametri $\rho_{XY} = -0,25$ e $\rho_{XY} = -0,5$, ovvero $\tau_K = -0,1608612$ e $\tau_K = -\frac{1}{3}$; al fine di garantire la coerenza tra i diversi risultati, tali ultimi due valori del tau di Kendall saranno utilizzati come parametri per le archimedee.

Queste ultime sono copule \mathcal{C} tendenzialmente utilizzate per delineare una forte dipendenza sulle code delle distribuzioni.

La Clayton copula, appartenente a questa famiglia, è definita come:

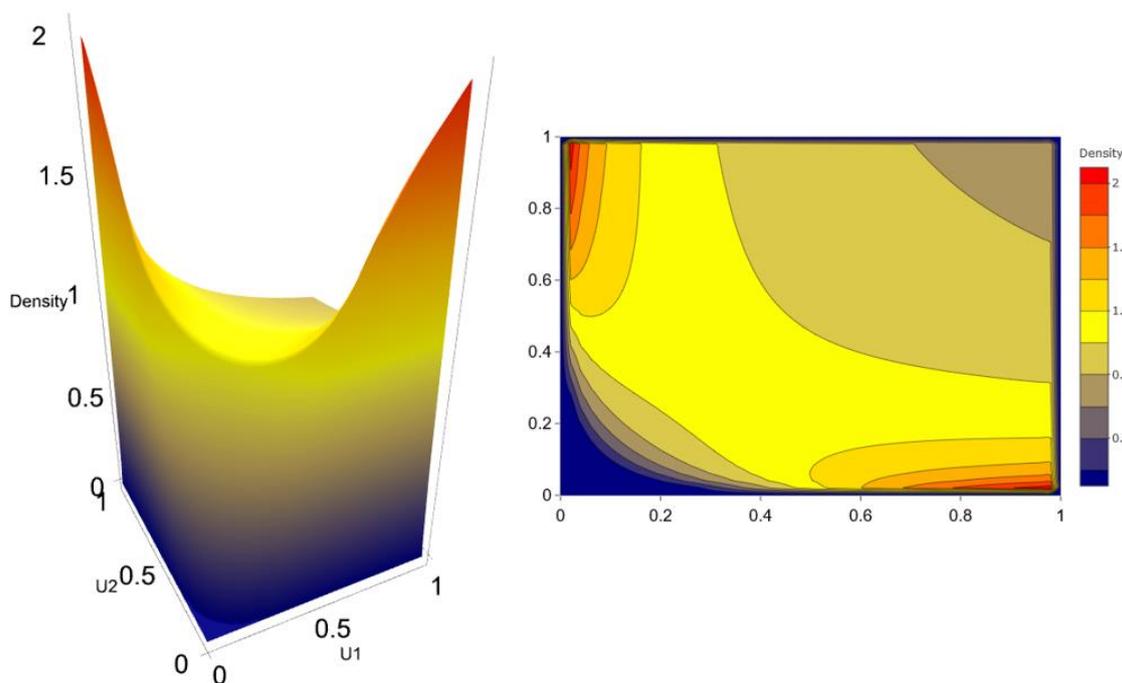
$$\mathcal{C}(u_1, u_2) = \max[(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1), 0]^{-\frac{1}{\theta}}$$

Anche se spesso viene approssimata con la formulazione semplificata

$$c(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$$

Con $\theta = \frac{2\tau_K}{1-\tau_K}$.

Figura 40 - 3D plot e Contour line - C.Clayton tau=-0,1608

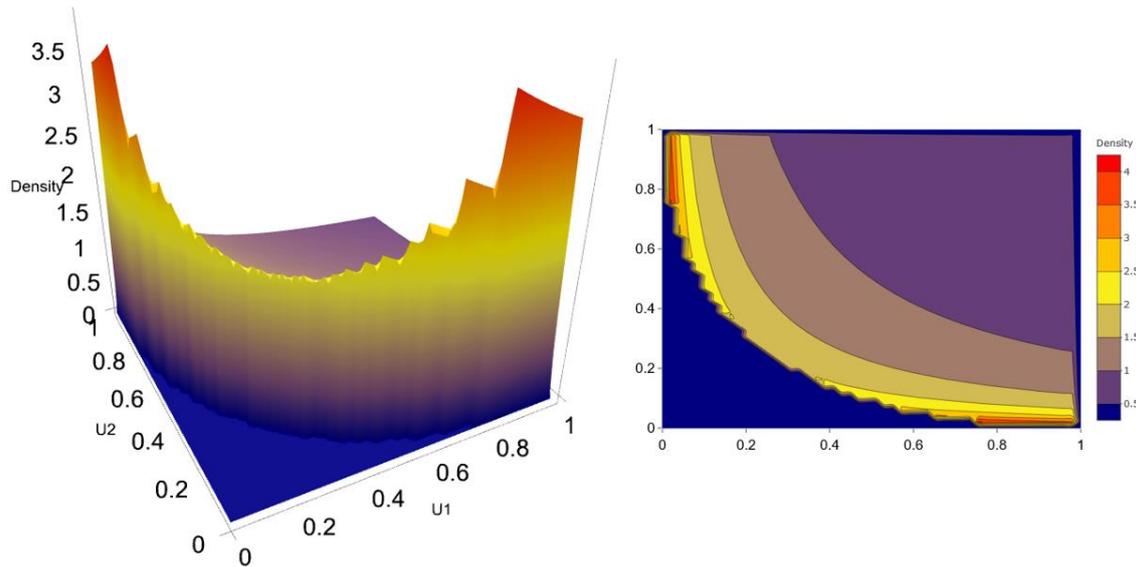


Con la Figura 40 si considera il *contour line* della copula di Clayton il cui parametro la rende confrontabile con la copula gaussiana. Si osserva che l'elemento di maggior differenza rispetto alla copula gaussiana, è nell'intorno di $(0,0)$ in \mathbb{I}^2 : qualora \tilde{X} assuma un valore particolarmente basso, \tilde{Y} sicuramente non assumerà un valore simile, ma probabilmente tenderà verso uno particolarmente alto. Qualora \tilde{X} assuma valori estremi sulla coda destra invece, il discorso è pressoché analogo ed è molto più probabile che \tilde{Y} assuma a sua volta un valore basso che un valore alto.

Accentuando la correlazione negativa e portando il tau di Kendall da $-0,16$ a $-1/3$ (Figura 41), si accentua l'effetto di dipendenza negativa sulla coda sinistra delle distribuzioni: qualora la realizzazione di \tilde{X} sia un valore particolarmente

basso (entro il primo decile), non solo \tilde{Y} non assumerà certamente un valore inferiore al suo 60esimo percentile ma molto probabilmente assumerà un valore superiore all'80esimo percentile.

Figura 41 - 3D plot e Contour line – C.Clayton rho=-1/3



La suddetta correlazione negativa, a differenza del caso precedente, si riflette anche sulla dipendenza tra i valori in un intorno della mediana: con riferimento a \tilde{X} , la presenza di un valore prossimo al suo quinto decile, implica che \tilde{Y} non assumerà un valore inferiore al suo primo decile e, con un ragionevole livello di confidenza, compreso tra il quindicesimo e il sessantesimo percentile.

2.7 Il natural hedging: un case study utilizzando le funzioni copula

Obiettivo di questo paragrafo conclusivo del Capitolo 2 è quello di implementare le copule descritte precedentemente, per riprodurre la dipendenza tra variabili aleatorie: in questo modo è possibile valutare gli effetti del *natural hedging* all'interno di un portafoglio in cui sono presenti sia prodotti che garantiscono all'assicurato un capitale in caso di sopravvivenza che prodotti che garantiscono un capitale in caso di premorienza; si specifica che l'interesse è orientato esclusivamente alla componente demografica dell'utile assicurativo. A tal fine si utilizzerà il sotto paragrafo 2.7.1 per introdurre il tema del NH, mentre il sotto paragrafo successivo esporrà i risultati dell'applicazione delle funzioni copula a due portafogli opportunamente descritti in seguito.

2.7.1 Il natural hedging: definizione, tipologie e aspetti principali

Nell'ambito delle assicurazioni sulla durata di vita, con *natural hedging* si fa riferimento ad una strategia di diversificazione che consiste nel combinare prodotti che sono caratterizzati da prestazioni opposte rispetto alla durata di vita. L'idea alla base del NH è che qualora i tassi di mortalità dovessero diminuire, il valore attuale atteso di un'ipotetica rendita vitalizia aumenterebbe e, contestualmente, i costi legati alle prestazioni di una TCM diminuirebbero e viceversa.

Tale effetto di diversificazione può essere realizzato attraverso due modalità :

- A livello individuale, dove il NH realizza la copertura sulla totale durata del contratto (c.d. *hedging across time*)

- A livello globale, dove il portafoglio è costituito appositamente da prodotti differenti ovvero si attua un mix di varie LoB che hanno risposte ai tassi di mortalità opposte che, quindi, si compensano.

Con riferimento alla prima metodologia il problema centrale che rende la stessa meno attuabile, e quindi di minor interesse, è che non è possibile ipotizzare *ex ante* la disponibilità di un generico soggetto all'acquisto di un prodotto opposto a quello appena acquistato: il problema è quindi di tipo commerciale.

Di maggiore interesse è il c.d. *natural hedging across LoBs* come precedentemente definito. Due sono gli elementi cardine da sottolineare:

- Totale assenza di correlazione: tipicamente un portafoglio di rendite non è esposto al rischio di longevità se non durante la fase di erogazione, ossia quando i soggetti assicurati sono anziani; le assicurazioni in caso di morte invece sono rivolte ad una clientela giovane. Essendo quindi i due principali prodotti assicurativi rivolti a soggetti appartenenti a *range* di età profondamente differenti, il *matching* non è imperfetto. Inoltre, come si mostrerà nel capitolo successivo, i trend che impattano sulla mortalità lo fanno con un'intensità differente al variare dell'età.
- Problemi in termini di costo: il *natural hedging* ne ha uno implicito, ovvero se l'obiettivo dovesse essere quello di massimizzare gli effetti della diversificazione, è possibile che il massimo assoluto non coincida con il mix di portafoglio effettivamente detenuto dall'assicuratore. Ciò obbliga l'impresa di assicurazione che segue questa strategia o ad aumentare la propria quota di mercato di prodotti dove è più debole (rischiando la sottotariffazione) oppure ad abbandonare una quota di mercato nei prodotti dove è "troppo forte".

Nel presente elaborato si analizza il caso del *natural hedging across LoBs* ipotizzando che la compagnia di assicurazione in esame aggregi portafogli preesistenti e successivamente calcoli il beneficio della diversificazione.

2.7.2 L'utilizzo di copule ellittiche e archimedee per riprodurre il natural hedging in $t=0$

Si considera un portafoglio composto dai seguenti portafogli:

- I) P_{CD} : 15.000 CD sottoscritte da una coorte di individui maschi di età 40 anni, con durata $n = 20$; le basi tecniche del I° e del II° ordine sono rispettivamente ($j^* = 1\%$ e $q_x^* = q(\text{ISTAT2016Adjusted})$) e ($j = 1\%$ e $q_x = q(\text{ISTAT2016})$).
- II) P_{TCM} : 15.000 TCM sottoscritte con le stesse caratteristiche e sottoscritte da altrettanti individui omogenei. Le basi tecniche sono ($j^* = 1\%$ e $q_x^* = q(\text{SIM2001})$) e ($j = 1\%$ e $q_x = q(\text{ISTAT2016})$).

In Tabella 16 si riportano i risultati del “caso base” ottenuto da 10 milioni di simulazioni, commentati immediatamente in seguito:

Tabella 16 – I valori del Portafoglio – Aggregazione di SII

	CD	TCM	Portafoglio aggregato
Media	8.239,29	987.629,30	995.868,59
Sd	53.654,34	767.010,90	820.665,24
SCR - 0,50%	63.474,65	2.587.143,00	2.650.617,65
Asimm.	2,40	-3,02	

Nella precedente tabella si possono in primo luogo cogliere gli elementi caratteristici delle due marginali: il rapporto tra le medie dei due portafogli è circa lo 0,8% e la deviazione standard del portafoglio di TCM è circa 15 volte quella del portafoglio dei capitali differiti. L'indice di asimmetria del portafoglio dei CD è pari a 2,40, mentre lo stesso indice del portafoglio di temporanee caso morte è pari a -3,02: tali ultimi due valori spiegano perché il moltiplicatore della standard deviation per approssimare il SCR varia da 1,18 nel caso dei capitali differiti a 3,37 nel caso delle temporanee caso morte. Ricordando inoltre che il valore assoluto del tasso di capitale sotto rischio è pari a 0,07 nel caso dei capitali differiti

e 0,97 nel caso delle TCM, è intuibile ancor prima di osservare i risultati, che il secondo portafoglio ha un ruolo dominante in termini sia di requisito di capitale che di *shape* della distribuzione aggregata in $t = 1$. Infatti aggregando i due SCR utilizzando il coefficiente di correlazione lineare di Solvency II (-0,25) l'effetto del beneficio di diversificazione è molto ridotto, infatti si ottiene un requisito totale molto vicino a quello del portafoglio di TCM. Già in questa situazione di partenza, si osserva un effetto della detenzione di due portafogli “caso vita” e “caso morte”: un'impresa che li detiene entrambi ha un requisito di capitale minore non solo della somma dei requisiti di capitale di due ipotetiche imprese dove una si occupa di CD e la seconda di TCM, ma addirittura minore del requisito derivante da P_{TCM} .

Ipotesi di normalità

Il primo caso che si vuole analizzare è quello di ipotizzare la dipendenza lineare tra gli utili dei due portafogli P_{CD} e P_{TCM} e, contemporaneamente, ipotizzare che la distribuzione del portafoglio aggregato sia gaussiana.

Come evidenziato in Tabella 17, tale ipotesi è molto grossolana in quanto gli indici di asimmetria di entrambe le distribuzioni sono fortemente lontani dallo 0 e con qualsiasi altro metodo di aggregazione, anche l'indice di asimmetria del portafoglio aggregato si discosta significativamente da 0.

In termini di requisito di capitale, la conseguenza è che, rispetto ai valori ottenuti con l'aggregazione proposta da Solvency II presentati in Tabella 16, si ottengono delle riduzioni superiori al 60%

Tabella 17 – I valori del portafoglio con ipotesi di normalità

CorrLin(-0,25) + NormalDistrib

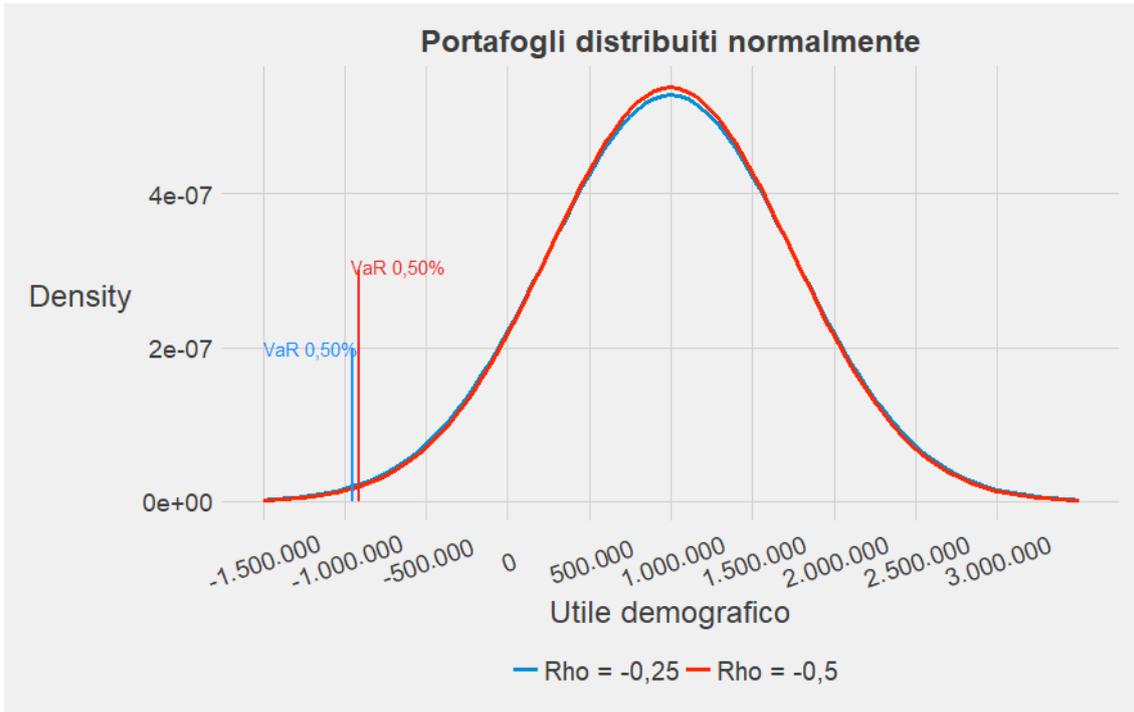
	CD	TCM	Portafoglio aggregato	Variazione rispetto all'aggregazione secondo SII
Media	8.239,29	987.629,30	995.868,60	
Sd	53.654,34	767.010,90	755.385,80	0,00%
SCR - 0.50%	63.474,65	2.587.143,00	949.876,30	-63,07%
Asimm.	2,40	-3,02	0,00	

CorrLin(-0,50) + NormalDistrib

	CD	TCM	Portafoglio aggregato	Variazione rispetto all'aggregazione secondo SII
Media	8.239,29	987.629,30	995.868,60	
Sd	53.654,34	767.010,90	741.640,80	-1,82%
SCR - 0.50%	63.474,65	2.587.143,00	914.471,40	-64,45%
Asimm.	2,40	-3,02	0,00	

I risultati, come si diceva, sono fortemente influenzati dall'approssimazione normale in quanto l'asimmetria del portafoglio aggregato è 0 e il suo SCR presenta una riduzione di circa il 63% rispetto al caso di base. Aumentando l'intensità della correlazione negativa, i risultati ne risentono mostrando una diminuzione di volatilità e una diminuzione in termini di requisito di capitale. Con il fine di rappresentare graficamente questa situazione, si presenta la Figura 42 che, confrontata con lo *shape* delle distribuzioni simulate dei sotto paragrafi 2.5.2 e 2.5.3, mostra quanto l'ipotesi di normalità è tanto incoerente con i risultati del modello simulativo, quanto favorevole in termini di requisito di capitale.

Figura 42 - L'ipotesi di normalità il portafoglio aggregato



Conclusa la riflessione alla cui base c'era l'ipotesi di dipendenza di tipo lineare, si presentano ora i risultati tratti dall'aggregazione delle marginali qualora la dipendenza sia descritta da una funzione copula.

La copula gaussiana

I primi due casi proposti, prevedono l'implementazione della copula gaussiana rispettivamente con parametro $-0,25$ e $-0,5$; si ricorda che, come descritto nel paragrafo precedente, questa scelta è verificata qualora tra le due marginali ci sia una situazione di dipendenza negativa su entrambe le code e di incorrelazione nell'intorno delle mediane.

Si presentano i risultati dell'aggregazione in Tabella 18 e Figura 43. Tralasciando i valori dovuti al metodo simulativo (le medie delle distribuzioni e σ qualora $\rho = -0,25$ dovrebbero coincidere con i valori di partenza), si osserva che l'utilizzo della copula gaussiana porta una riduzione del requisito di capitale rispetto al caso base di Solvency II di circa un punto percentuale. Utilizzando un parametro in valore assoluto maggiore, si ha una riduzione sia della *standard deviation* che

del SCR. Per quanto riguarda i valori dell'indice di asimmetria, essi sono poco interessanti in quanto poco significativi: la stretta relazione tra copula gaussiana e v.c. normale bivariata rende l'utilizzo della prima poco adatta in questo contesto.

Tabella 18 – I risultati dell'aggregazione con copula gaussiana

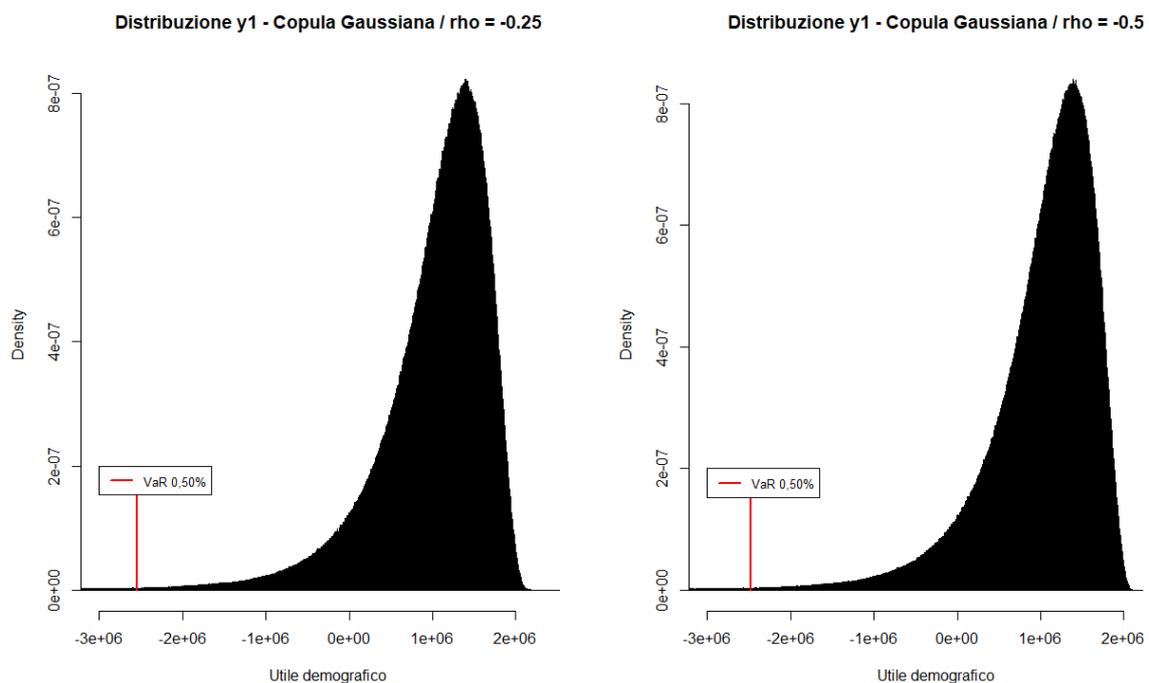
Copula Gaussiana, rho= -0,25

	CD	TCM	Portafoglio aggregato	Variazione rispetto all'aggregazione secondo SII
Media	8.239,29	987.629,30	995.683,30	
Sd	53.654,34	767.010,90	757.594,20	0,29%
SCR - 0.50%	63.474,65	2.587.143,00	2.550.512,00	-0,84%
Asimm.	2,40	-3,02	-3,06	

Copula Gaussiana, rho= -0,50

	CD	TCM	Portafoglio aggregato	Variazione rispetto all'aggregazione secondo SII
Media	8.239,29	987.629,30	996.148,60	
Sd	53.654,34	767.010,90	743.600,40	-1,56%
SCR - 0.50%	63.474,65	2.587.143,00	2.481.430,00	-3,52%
Asimm.	2,40	-3,02	-3,10	

Figura 43 - La distribuzione simulata di P - Copula gaussiana



La copula Clayton

La seconda copula esposta precedentemente e utilizzata in questa sede al fine di descrivere la dipendenza tra le due marginali e poterle aggregare in un unico portafoglio, è la copula Clayton. Utilizzando la formula

$$\tau_K = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho_{XY})$$

sono stati ottenuti i due parametri del tau di Kendall coerenti con $\rho_{XY} = -0,25$ e $\rho_{XY} = -0,5$. Si espongono ora i risultati, ipotizzando che le due distribuzioni degli utili demografici di P_{CD} e P_{TCM} abbiano una correlazione negativa particolarmente accentuata sulla coda sinistra delle distribuzioni, descritta dalla copula in esame. Dalla Tabella 19 e dalla Figura 44 è possibile osservare che tale copula, a parità di parametro, porta una maggiore riduzione in termini di volatilità del portafoglio aggregato.

Tale riduzione di σ si riflette anche sull'indice di asimmetria, questa volta minore rispetto a γ_{TCM} , e soprattutto in un requisito di capitale più contenuto.

Tabella 19 – I risultati dell'aggregazione con copula Clayton

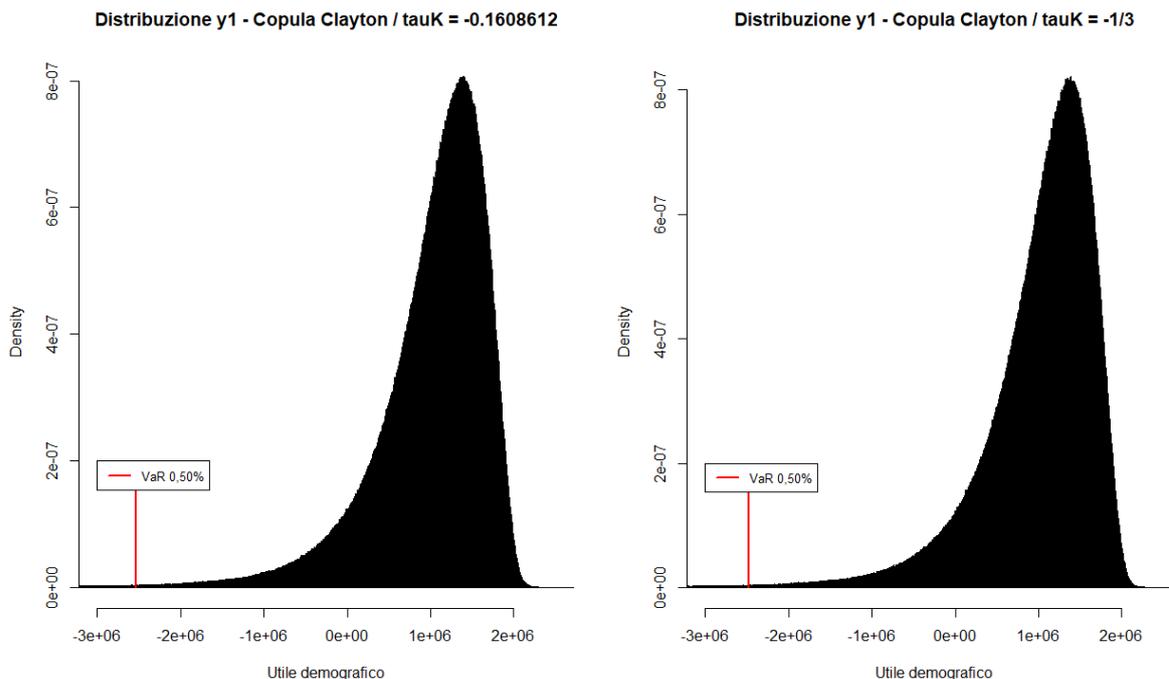
Cop Clay, tau= -0,16

	CD	TCM	Portafoglio aggregato	Variazione rispetto all'aggregazione secondo SII
Media	8.239,29	987.629,30	995.722,80	
Sd	53.654,34	767.010,90	757.500,80	0,28%
SCR - 0.50%	63.474,65	2.587.143,00	2.531.115,00	-1,59%
Asimm.	2,40	-3,02	-3,02	

Cop Clay, tau=-1/3

	CD	TCM	Portafoglio aggregato	Variazione rispetto all'aggregazione secondo SII
Media	8.239,29	987.629,30	995.742,90	
Sd	53.654,34	767.010,90	746.263,40	-1,21%
SCR - 0.50%	63.474,65	2.587.143,00	2.474.496,00	-3,79%
Asimm.	2,40	-3,02	-3,04	

Figura 44 - La distribuzione simulata di P - Copula Clayton



Confermata l'intuizione della reazione del SCR ad una variazione del parametro, risulta interessante ora confrontare i risultati ottenuti dall'aggregazione con la copula gaussiana con i risultati ottenuti dall'utilizzo della Clayton. A tal fine, si simulano le distribuzioni dell'utile demografico del portafoglio aggregato in $t=10$ e a scadenza, per osservare come al variare dell'antidurata, il *natural hedging* impatta sul requisito di capitale.

2.7.3 Copula Gaussiana e copula di Clayton: un confronto in $t=0$, $t=10$ e a scadenza ($t=19$).

Le Tabelle 20, 21 e 22 e le Figure 45, 46 e 47 che verranno proposte in seguito hanno lo scopo di evidenziare come il *natural hedging* impatta sul SCR al variare dell'orizzonte temporale, dove i tassi di CSR variano e rendono il portafoglio aggregato sempre meno simile a P_{TCM} . Con questo fine, si riprendono e si approfondiscono i risultati ottenuti per il primo anno, elaborando 10 milioni di simulazioni e utilizzando le due copule descritte nel paragrafo precedente

variandone i parametri: il parametro della copula gaussiana ρ assumerà i valori $\{0, -0,25, -0,5, -0,75, -1\}$ e il tau di Kendall ne verrà calcolato come trasformazione, al fine di mantenere coerenza tra i risultati. Un primo elemento che non può essere trascurato è il caso in cui $\rho = 0$ e $\tau = 0$: tale parametrizzazione fa sì che sia la copula gaussiana che la copula Clayton possano essere ricondotte alla c.d. \mathcal{C} Indipendenza, copula che prevede l'indipendenza stocastica tra tutte le variabili a cui è applicata. Questa definizione mette in luce che tutti i risultati connessi a questa particolare casistica sia in $t = 0$ che in $t = 10$ sono maggiori sia in termini di *standard deviation* che in termini di SCR rispetto all'aggregazione proposta dalla Standard Formula, dato che quest'ultima ipotizza una dipendenza lineare negativa.

Figura 45 - $t=1$, σ_P, γ_P e il SCR al variare dei parametri delle copule

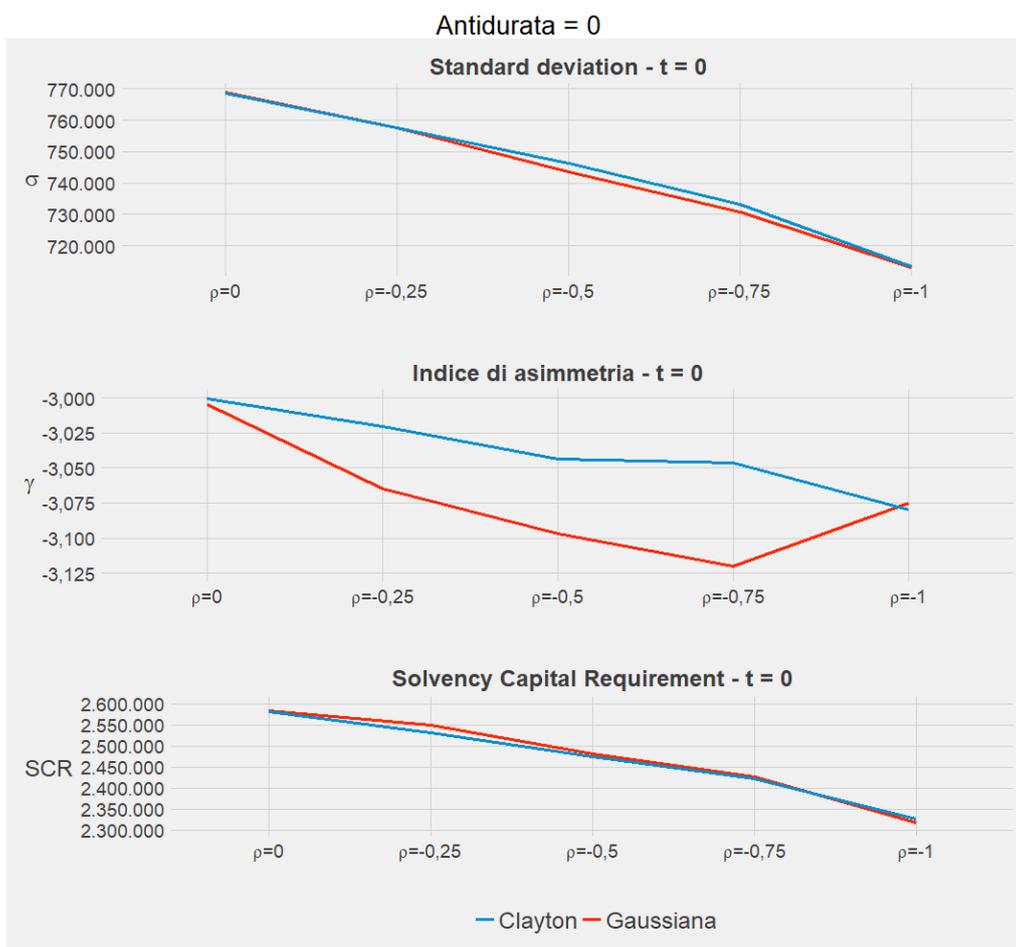


Tabella 20 – $t=0$. L'utilizzo della copula gaussiana e della copula di Clayton variandone i parametri

Aggregazione SII -0.25

	CD	TCM	Portafoglio aggregato
Media	8.239,29	987.629,30	995.868,59
Sd	53.654,34	767.010,90	755.385,85
SCR - 0,50%	63.474,65	2.587.143	2.572.008,73

Cop Gauss, rho= 0 - Copula indipendenza

	CD	TCM	P. aggregato	Variazione rispetto all'aggregazione secondo SII
Media	8.239,29	987.629,30	996.041,80	
Sd	53.654,34	767.010,90	768.908,50	1,79%
SCR - 0,50%	63.474,65	2.587.143,00	2.583.650,00	0,45%
Asimm.	2,40	-3,02	-3,00	

Cop Clay, tau= 0 - Copula indipendenza

	CD	TCM	P. aggregato	Variazione rispetto all'aggregazione secondo SII
Media	8.239,29	987.629,30	995.952,40	
Sd	53.654,34	767.010,90	768.574,40	1,75%
SCR - 0,50%	63.474,65	2.587.143,00	2.582.712,00	0,42%
Asimm.	2,40	-3,02	-3,00	

Cop Gauss, rho= -0.25

	CD	TCM	P. aggregato	Variazione
Media	8.239,29	987.629,30	995.683,30	
Sd	53.654,34	767.010,90	757.594,20	0,29%
SCR - 0,50%	63.474,65	2.587.143,00	2.550.512,00	-0,84%
Asimm.	2,40	-3,02	-3,06	

Cop Clay, tau= -0.16

	CD	TCM	P. aggregato	Variazione
Media	8.239,29	987.629,30	995.722,80	
Sd	53.654,34	767.010,90	757.500,80	0,28%
SCR - 0,50%	63.474,65	2.587.143,00	2.531.115,00	-1,59%
Asimm.	2,40	-3,02	-3,02	

Cop Gauss, rho= -0.5

	CD	TCM	P. aggregato	Variazione
Media	8.239,29	987.629,30	996.148,60	
Sd	53.654,34	767.010,90	743.600,40	-1,56%
SCR - 0,50%	63.474,65	2.587.143,00	2.481.430,00	-3,52%
Asimm.	2,40	-3,02	-3,10	

Cop Clay, tau= -1/3

	CD	TCM	P. aggregato	Variazione
Media	8.239,29	987.629,30	995.742,90	
Sd	53.654,34	767.010,90	746.263,40	-1,21%
SCR - 0,50%	63.474,65	2.587.143,00	2.474.496,00	-3,79%
Asimm.	2,40	-3,02	-3,04	

Cop Gauss, rho= -0.75

	CD	TCM	P. aggregato	Variazione
Media	8.239,29	987.629,30	995.629,10	
Sd	53.654,34	767.010,90	730.742,80	-3,26%
SCR - 0,50%	63.474,65	2.587.143,00	2.426.590,00	-5,65%
Asimm.	2,40	-3,02	-3,12	

Cop Clay, tau= -0,5398931

	CD	TCM	P. aggregato	Variazione
Media	8.239,29	987.629,30	996.065,20	
Sd	53.654,34	767.010,90	733.259,70	-2,93%
SCR - 0,50%	63.474,65	2.587.143,00	2.423.294,00	-5,78%
Asimm.	2,40	-3,02	-3,05	

Cop Gauss, rho= -1

	CD	TCM	Portafoglio agg.	Variazione
Media	8.239,29	987.629,30	995.826,40	
Sd	53.654,34	767.010,90	713.086,40	-5,60%
SCR - 0,50%	63.474,65	2.587.143,00	2.318.128,00	-9,87%
Asimm.	2,40	-3,02	-3,07	

Cop Clay, tau= -1

	CD	TCM	P. aggregato	Variazione
Media	8.239,29	987.629,30	995.747,20	
Sd	53.654,34	767.010,90	713.419,00	-5,56%
SCR - 0,50%	63.474,65	2.587.143,00	2.326.682,00	-9,54%
Asimm.	2,40	-3,02	-3,08	

Il primo riquadro della Figura 44, i cui valori sono tratti dalla Tabella 20, mette in luce il comportamento della prima variabile di particolare interesse, ovvero lo scarto quadratico medio del portafoglio aggregato. Salvo il caso in cui si ipotizza una forte dipendenza negativa sulle code diversa da 1, esso è pressoché indipendente dalla copula utilizzata. Qualora ρ sia pari a $-0,75$, la σ_p è minore utilizzando la copula gaussiana, ma contemporaneamente, l'asimmetria γ_p è molto più marcata: questo effetto discordante legato al fatto che in $t=0$ il peso del portafoglio di TCM sul portafoglio totale è pressoché assoluto, fa sì che il requisito

di capitale calcolato con una metodologia VaR e con un l.d.c del 99,50% sia pressoché indipendente dalla copula scelta, posto che i parametri siano confrontabili. Come accennato, il peso di P_{TCM} rispetto a P_{CD} è particolarmente importante, infatti la media del primo è circa 120 volte la media del secondo: qualora l'antidurata sia pari a 1, il tasso di capitale sotto rischio del portafoglio di temporanee caso morte è prossimo a 1, mentre quello del portafoglio dei capitali differiti è, in valore assoluto, poco più grande di 0.

Si considerano ora i risultati relativi ad un antidurata successiva, $t = 10$, dove CSR_{TCM} passa da 0,9735 a 0,9620 e CSR_{CD} cambia da -0,07 a -0,48. Questo effetto combinato, diminuisce leggermente il peso del portafoglio di TCM e contemporaneamente aumenta in modo sostanziale il peso del portafoglio di capitali differiti, infatti si vedrà che la diversificazione è nettamente più influente.

t=10 – Polizze a metà della loro vita contrattuale

Tabella 21 – t=10. L'utilizzo della copula gaussiana e della copula di Clayton variandone i parametri

Aggregazione SII -0,25			
	CD	TCM	Portafoglio aggregato
Media	199.666,90	1.998.218,00	2.197.885,00
Sd	564.348,30	1.138.999,00	1.137.722,00
SCR - 0,50%	716.232,40	2.842.173,00	2.751.928,00
Asimm.	1,56	-1,57	

Cop Gauss, rho= 0

	CD	TCM	Portafoglio agg.	Variazione rispetto all'aggregazione secondo SII
Media	199.666,90	1.998.218,00	2.197.738,00	
Sd	564.348,30	1.138.999,00	1.271.289,00	11,74%
SCR - 0,50%	716.232,40	2.842.173,00	2.735.576,00	-0,59%
Asimm.	1,56	-1,57	-0,99	

Cop Clay, tau= 0 - Copula indipendenza

	CD	TCM	Portafoglio agg.	Variazione rispetto all'aggregazione secondo SII
Media	199.666,90	1.998.218,00	2.197.850,00	
Sd	564.348,30	1.138.999,00	1.270.258,00	11,65%
SCR - 0,50%	716.232,40	2.842.173,00	2.723.410,00	-1,04%
Asimm.	1,56	-1,57	-0,99	

Cop Gauss, rho= -0,25

	CD	TCM	Portafoglio agg.	Variazione
Media	199.666,90	1.998.218,00	2.197.926,00	
Sd	564.348,30	1.138.999,00	1.147.690,00	0,88%
SCR - 0,50%	716.232,40	2.842.173,00	2.390.944,00	-13,12%
Asimm.	1,56	-1,57	-1,16	

Cop Clay, tau= -0,16

	CD	TCM	Portafoglio agg.	Variazione
Media	199.666,90	1.998.218,00	2.198.290,00	
Sd	564.348,30	1.138.999,00	1.148.609,00	0,96%
SCR - 0,50%	716.232,40	2.842.173,00	2.180.659,00	-20,76%
Asimm.	1,56	-1,57	-0,84	

Cop Gauss, rho= -0,5

	CD	TCM	Portafoglio agg.	Variazione
Media	199.666,90	1.998.218,00	2.197.600,00	
Sd	564.348,30	1.138.999,00	1.003.177,00	-11,83%
SCR - 0,50%	716.232,40	2.842.173,00	1.953.221,00	-29,02%
Asimm.	1,56	-1,57	-1,37	

Cop Clay, tau=-1/3

	CD	TCM	Portafoglio agg.	Variazione
Media	199.666,90	1.998.218,00	2.197.570,00	
Sd	564.348,30	1.138.999,00	1.019.905,00	-10,36%
SCR - 0,50%	716.232,40	2.842.173,00	1.675.649,00	-39,11%
Asimm.	1,56	-1,57	-0,72	

Cop Gauss, rho= -0,75

	CD	TCM	Portafoglio agg.	Variazione
Media	199.666,90	1.998.218,00	2.198.065,00	
Sd	564.348,30	1.138.999,00	823.039,10	-27,66%
SCR - 0,50%	716.232,40	2.842.173,00	1.333.358,00	-51,55%
Asimm.	1,56	-1,57	-1,63	

Cop Clay, tau= -0,5398931

	CD	TCM	Portafoglio agg.	Variazione
Media	199.666,90	1.998.218,00	2.197.896,00	
Sd	564.348,30	1.138.999,00	875.030,90	-23,09%
SCR - 0,50%	716.232,40	2.842.173,00	1.167.300,00	-57,58%
Asimm.	1,56	-1,57	-0,65	

Cop Gauss, rho= -1

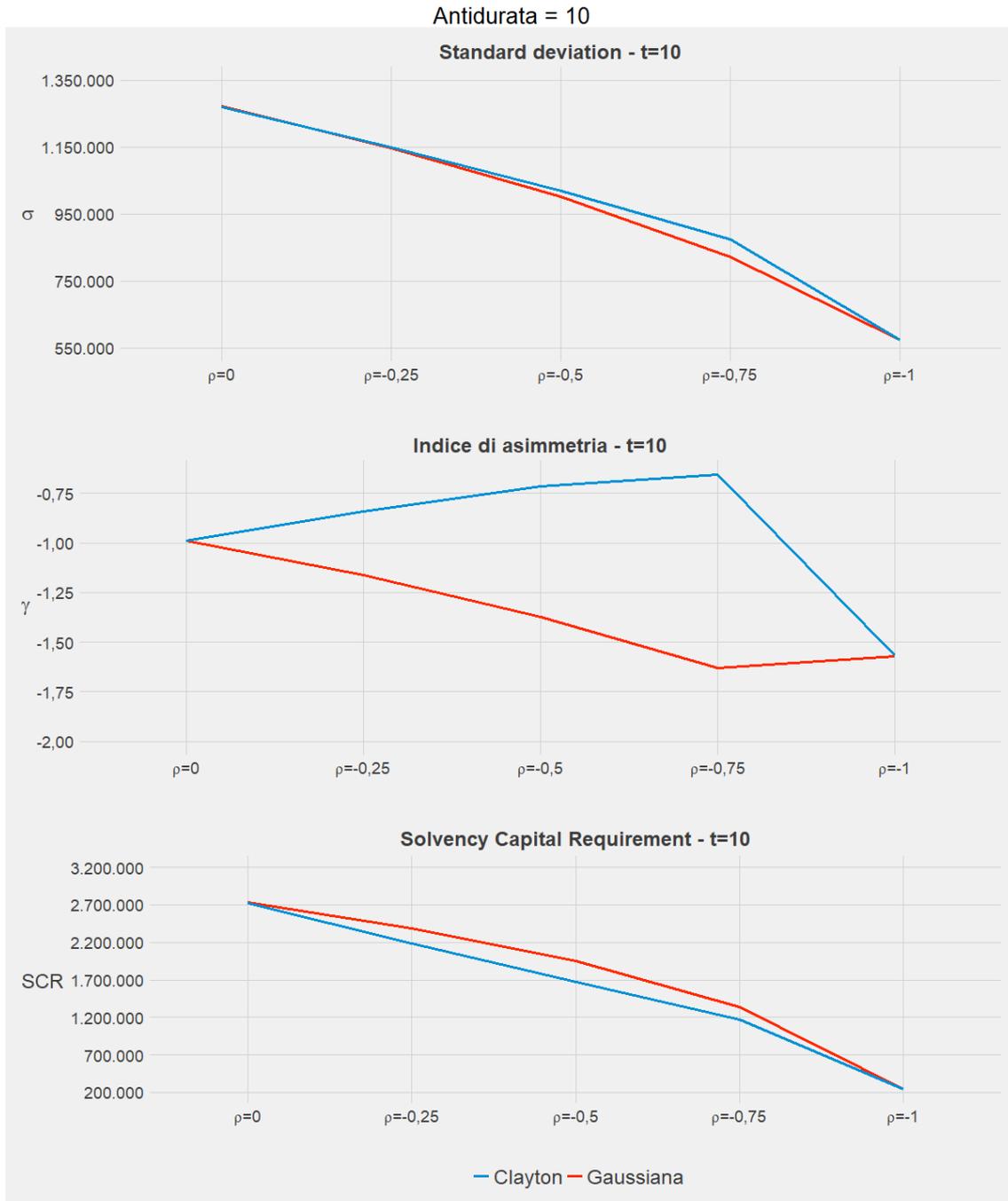
	CD	TCM	Portafoglio agg.	Variazione
Media	199.666,90	1.998.218,00	2.197.820,00	
Sd	564.348,30	1.138.999,00	574.443,90	-49,51%
SCR - 0,50%	716.232,40	2.842.173,00	246.654,00	-91,04%
Asimm.	1,56	-1,57	-1,57	

Cop Clay, tau= -1

	CD	TCM	Portafoglio agg.	Variazione
Media	199.666,90	1.998.218,00	2.198.036	
Sd	564.348,30	1.138.999,00	574.313,50	-49,52%
SCR - 0,50%	716.232,40	2.842.173,00	245.162,40	-91,09%
Asimm.	1,5649	-1,57	-1,57	

Il primo commento essenziale riguarda il rapporto tra le medie dei due portafogli P_{CD} e P_{TCM} : esso passa dallo 0,84% al 5,84%. Nonostante il secondo portafoglio possieda ancora un peso relativo particolarmente importante, la consistenza di P_{CD} è ora tale da mostrare gli effetti della diversificazione in maniera più accentuata.

Figura 46 - $t=10$, σ_p , γ_p e il SCR al variare dei parametri delle copule



Coerentemente con quanto emerge dalla teoria, come mostrato in Figura 45, un aumento in valore assoluto del parametro delle copule comporta un effetto di diversificazione che riduce la *standard deviation* del portafoglio aggregato. Essa risulta maggiore della volatilità calcolata con il coefficiente di correlazione lineare

posto pari a -0,25 solo nel caso della copula indipendenza, che per definizione diversifica meno di quanto possa fare una dipendenza di tipo negativa.

Effetti più coerenti si possono osservare anche nelle variazioni dell'indice di asimmetria: tralasciando il caso della copula gaussiana che continua a soffrire della marcata asimmetria delle marginali, l'utilizzo della copula Clayton riproduce dei portafogli con un indice di asimmetria tendente a 0, al tendere del tau di Kendall verso -1.

Con riferimento all'andamento del *Solvency Capital Requirement*, in questo caso è possibile percepire l'effetto del *natural hedging* in maniera chiara e inequivocabile: utilizzando una funzione copula, a parità di $\rho = -0,25$, si ottiene una riduzione almeno del 13,12% del requisito di capitale; qualora si utilizzasse la copula Clayton che come dimostrato accentua la dipendenza negativa sulla coda sinistra delle distribuzioni, la riduzione aumenta di ulteriori 7 punti percentuali. La maggior consistenza del portafoglio di CD inoltre, rende la riduzione di SCR rispetto al caso base ancora più sostanziosa qualora il parametro delle due copule sia calibrato in funzione di $\rho = -0,50$ dove i gli SCR si riducono del 29% nel caso della copula gaussiana e del 39% nel caso della copula Clayton.

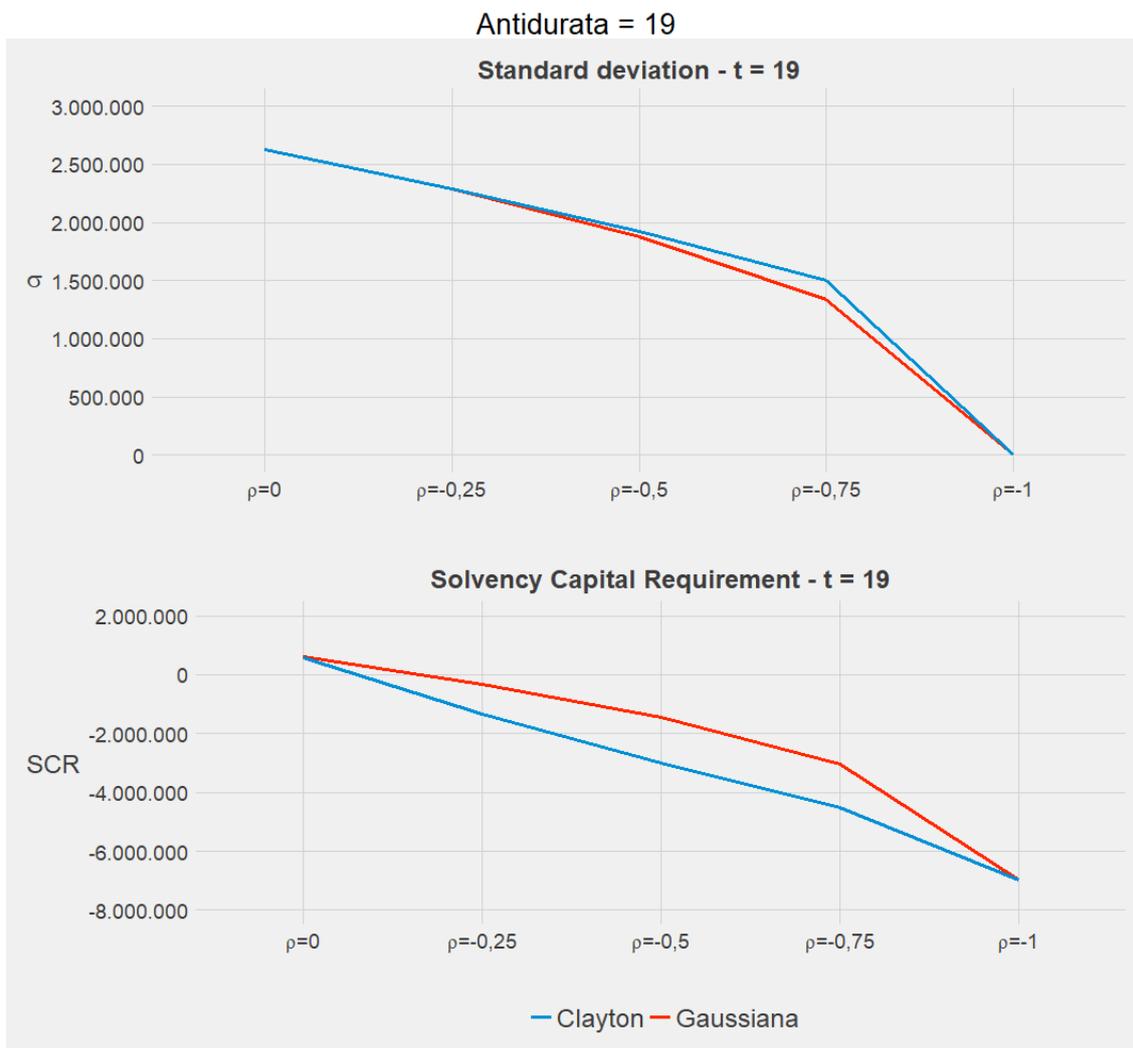
t=19 – Polizze a scadenza

La valutazione relativa esclusivamente alla componente demografica dell'utile assicurativo ⁴⁴, nell'ultima antidurata disponibile, presenta i risultati maggiormente differenti dalla situazione iniziale: \tilde{y}_{CD} ha un valore atteso superiore al milione e il CoV si è ridotto da 1,78 a 6,5 circa mentre \tilde{y}_{TCM} ha un valore atteso di circa 6 milioni con un CoV pari a 0,31 (le *standard deviation* dei due portafogli sono pressoché identiche). In questo contesto il peso dei due portafogli è profondamente cambiato, proprio perché l'antidurata ha reso il valore

⁴⁴ Si rimarca l'esclusivo interesse alla componente demografica dell'utile, perché ovviamente se si considerasse l'utile da investimenti, il portafoglio di capitali differiti ha un peso maggiore a causa dei volumi di riserva matematica da accantonare

assoluto del tasso di capitale sotto rischio del portafoglio di capitali differiti prossimo all'unità. In questa situazione è già sufficiente aggregare i due portafogli con la copula indipendenza per osservare una riduzione del requisito di capitale rispetto al caso in cui esso venga calcolato con la Standard Formula.

Figura 47 - $t=19$, σ_P e SCR al variare dei parametri delle copule



In Figura 47 è possibile osservare che, sempre con riferimento al SCR, l'utilizzo delle funzioni copula con un parametro ρ in valore assoluto $\geq 0,25$ non solo riduce il SCR rispetto ai casi precedenti, ma addirittura lo rende negativo. Questo significa che, con riferimento all'utile demografico di $t = 19$, un'impresa di assicurazione che detiene P_{CD} e P_{TCM} e verifica sul suo data set la possibilità di

aggregarli con una funzione copula, potrebbe non accantonare nulla per essere comunque solvibile in una percentuale di casi superiore al 99,50% su un orizzonte temporale annuale.

Tabella 22 – t=19. L'utilizzo della copula gaussiana e della copula di Clayton variandone i parametri

Aggregazione SII -0.25			
	CD	TCM	Portafoglio aggregato
Media	1.041.110,00	5.927.309,00	6.968.419,00
Sd	1.857.240,00	1.857.280,00	2.274.669,66
SCR - 0,50%	2.446.278,00	739.905,90	2.372.073,00
Asimm.	0,99	-0,98	

Cop Gauss, rho= 0

	CD	TCM	Portafoglio agg.	Variazione rispetto all'aggregazione secondo SII
Media	1.041.110,00	5.927.309,00	6.968.293,00	
Sd	1.857.240,00	1.857.280,00	2.626.942,00	15,49%
SCR - 0,50%	2.446.278,00	739.905,90	603.102,90	-74,57%
Asimm.	0,99	-0,98	0,00	

Cop Clay, tau= 0 - Copula indipendenza

	CD	TCM	Portafoglio agg.	Variazione rispetto all'aggregazione secondo SII
Media	1.041.110,00	5.927.309,00	6.968.143	
Sd	1.857.240,00	1.857.280,00	2.625.073	15,40%
SCR - 0,50%	2.446.278,00	739.905,90	582.822,50	-75,43%
Asimm.	0,99	-0,98	0,00	

Cop Gauss, rho= -0.25

	CD	TCM	Portafoglio agg.	Variazione
Media	1.041.110,00	5.927.309,00	6.967.936	
Sd	1.857.240,00	1.857.280,00	2.286.986	0,54%
SCR - 0,50%	2.446.278,00	739.905,90	-325.773,80	-113,73%
Asimm.	0,99	-0,98	0,00	

Cop Clay, tau= -0.16

	CD	TCM	Portafoglio agg.	Variazione
Media	1.041.110,00	5.927.309,00	6.969.354,00	
Sd	1.857.240,00	1.857.280,00	2.288.468,00	0,61%
SCR - 0,50%	2.446.278,00	739.905,90	-1.330.820	-156,10%
Asimm.	0,99	-0,98	0,44	

Cop Gauss, rho= -0.5

	CD	TCM	Portafoglio agg.	Variazione
Media	1.041.110,00	5.927.309,00	6.967.681,00	
Sd	1.857.240,00	1.857.280,00	1.879.478,00	-17,37%
SCR - 0,50%	2.446.278,00	739.905,90	-1.461.653	-161,62%
Asimm.	0,99	-0,98	0,00	

Cop Clay, tau=-1/3

	CD	TCM	Portafoglio agg.	Variazione
Media	1.041.110,00	5.927.309,00	6.967.629,00	
Sd	1.857.240,00	1.857.280,00	1.925.582,00	-15,35%
SCR - 0,50%	2.446.278,00	739.905,90	-2.991.209	-226,10%
Asimm.	0,99	-0,98	1,00	

Cop Gauss, rho= -0.75

	CD	TCM	Portafoglio agg.	Variazione
Media	1.041.110,00	5.927.309,00	6.969.084,00	
Sd	1.857.240,00	1.857.280,00	1.337.223,00	-41,21%
SCR - 0,50%	2.446.278,00	739.905,90	-3.023.105	-227,45%
Asimm.	0,99	-0,98	0,00	

Cop Clay, tau= -0.5398931

	CD	TCM	Portafoglio agg.	Variazione
Media	1.041.110,00	5.927.309,00	6.968.288,00	
Sd	1.857.240,00	1.857.280,00	1.498.804,00	-34,11%
SCR - 0,50%	2.446.278,00	739.905,90	-4.530.607	-291,00%
Asimm.	0,99	-0,98	-	

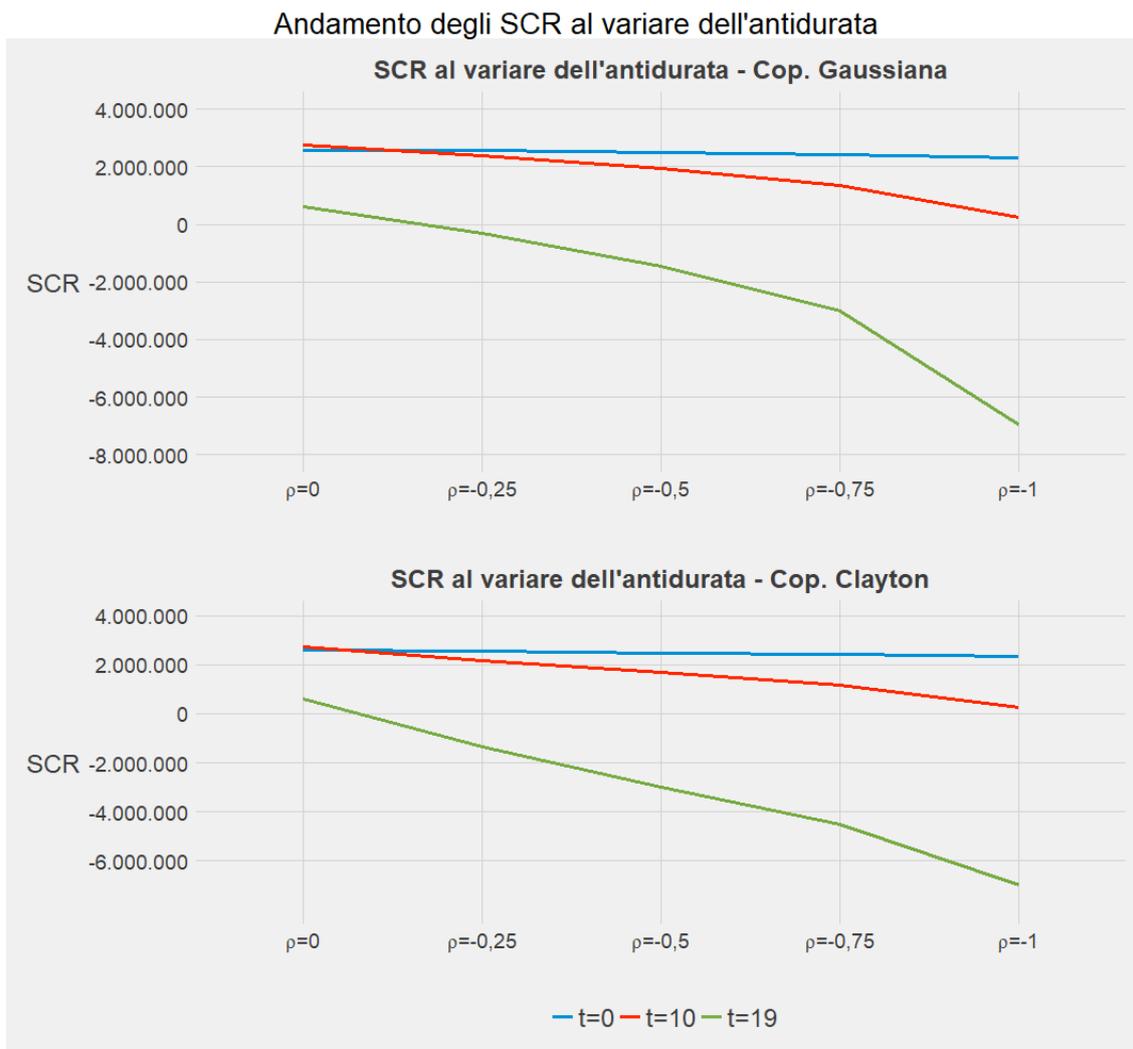
Cop Gauss, rho= -1

	CD	TCM	Portafoglio agg.	Variazione
Media	1.041.110,00	5.927.309,00	6.968.418,00	
Sd	1.857.240,00	1.857.280,00	1.833,51	-99,92%
SCR - 0,50%	2.446.278,00	739.905,90	-6.966.344	-393,68%
Asimm.	0,99	-0,98	163,20	

Cop Clay, tau= -1

	CD	TCM	Portafoglio agg.	Variazione
Media	1.041.110,00	5.927.309,00	6.968.419,00	
Sd	1.857.240,00	1.857.280,00	1.833,28	-99,92%
SCR - 0,50%	2.446.278,00	739.905,90	-6.966.357	-393,68%
Asimm.	0,99	-0,98	186,90	

Figura 48 - andamento dei SCR al variare dell'antidurata



A conclusione di questo paragrafo si riporta con la Figura 48 l'andamento dei SCR nei due casi a seconda della copula scelta, al variare dell'antidurata.

Premettendo che i drivers di tali risultati sono principalmente i tassi dei capitali sotto rischio e i caricamenti di sicurezza, l'elemento di maggior interesse è l'intensità con cui il SCR decresce in $t = 19$ rispetto ai due casi precedenti. Con riferimento all'utilizzo della Copula Clayton, la Figura 45 mostrava che utilizzando un ρ negativo maggiore in termini assoluti, il SCR diminuiva: tale diminuzione, rapportata all'analogo fenomeno 19 antidurate dopo, è pressoché nulla infatti la linea blu di $t = 1$ risulta quasi piatta in un intorno di 2 milioni mentre l'andamento del SCR in $t=19$ varia tra i 3 milioni e i -6,5 milioni.

Capitolo III: La modellizzazione stocastica e market consistent dell'utile demografico

3.1 Introduzione

Tale terzo Capitolo centra il *focus* dell'elaborato sulla valutazione *market consistent*: il suo scopo è quello di presentare da un punto di vista prettamente teorico tutti gli elementi necessari per implementare un modello stocastico che valuti l'utile demografico per una compagnia di assicurazione sulla durata di vita, perfettamente coerente con Solvency II.

I Paragrafi 3.2 e 3.3 riprendono inizialmente la versione stocastica della scomposizione di Homans presente in [41] implementando il concetto di Best Estimate e osservando come si relazionano tra loro le nuove componenti opportunamente definite. In secondo luogo, si dimostra come l'utile demografico *market consistent* possa essere riscritto, in funzione dell'utile demografico c.d. *local GAAP*, al fine di evidenziare non solo il rapporto in termini di magnitudo tra i due, quanto piuttosto le relazioni di tipo strutturale.

Il Paragrafo 3.4 nasce dalla necessità di stimare la curva dei tassi privi di rischio al termine del periodo di valutazione: per questo motivo si presentano i tratti essenziali del modello di Vašíček e si mostra la calibrazione attuata nei *case studies* ricordando che l'obiettivo primario è sempre quello di ottenere una Best Estimate attesa coerente con la curva dei tassi *free risk* nell'istante di valutazione. L'ultimo Paragrafo mostra invece una formula ricorsiva della BE sotto l'ipotesi in cui i tassi privi di rischio alla fine del periodo di valutazione, coincidano con i tassi *forward* stimati dalla curva dei tassi a pronti: ciò consente di evidenziare una distorsione presente nella formulazione dell'utile demografico.

3.2 La formulazione market consistent dell'utile industriale e delle sue componenti

Si riprende ora la formulazione dell'utile assicurativo considerando che il tasso di riserva matematica come definito nel Capitolo 2 dovrà essere sostituito dal tasso di Best Estimate. In questo contesto, l'utile assicurativo relativo al generico anno $t + 1$ può essere scritto come:

$$\tilde{Y}_{t+1} = [\widetilde{BE}_t + \tilde{B}_{t+1} - \tilde{E}_{t+1} - \tilde{S}_{t+1}] \cdot (1 + \tilde{j}_{t+1}) - [\tilde{X}_{t+1} + \widetilde{BE}_{t+1}]$$

scomponibile nelle 5 componenti:

$$\tilde{Y}_{t+1} = {}_1\tilde{Y}_{t+1} + {}_2\tilde{Y}_{t+1} + {}_3\tilde{Y}_{t+1} + {}_4\tilde{Y}_{t+1} + {}_5\tilde{Y}_{t+1}$$

descritte nel Paragrafo 2.2.4.

In questo contesto, l'utile demografico stocastico e *market consistent* è definito nel seguente modo:

$$\begin{aligned} {}_1\tilde{y}_{t+1} &= \left\{ \left[\widetilde{be}_t^{Rf(t),q} + b_{t+1}(1 - \alpha^* - \beta^*) - \gamma^* \right] (\tilde{w}_t - \tilde{s}_{t+1})(1 + j^*) \right. \\ &\quad \left. - \left(\tilde{x}_{t+1} + \tilde{w}_{t+1} \cdot \widetilde{be}_{t+1}^{Rf(t+1),q} \right) \right\} \tilde{Q}_t \\ &= \left[\widetilde{be}_t^{Rf(t),q} (\tilde{w}_{t+1} - \tilde{s}_{t+1}) \tilde{Q}_t + b_{t+1} (\tilde{w}_t - \tilde{s}_{t+1}) \tilde{Q}_t (1 - \alpha^* - \beta^*) - \gamma^* (\tilde{w}_t - \tilde{s}_{t+1}) \tilde{Q}_t \right] \cdot \\ &\quad (1 + j^*) - \left(\tilde{x}_{t+1} \tilde{Q}_t + \tilde{w}_{t+1} \cdot \widetilde{be}_{t+1}^{Rf(t+1),q} \tilde{Q}_t \right) \\ &= \left[\widetilde{BE}_t + \tilde{B}_{t+1} - \widetilde{E}_{t+1}^* - \left(\widetilde{be}_t^{Rf(t),q} - \gamma^* \right) \tilde{s}_{t+1} \right] (1 + j^*) - (\tilde{X}_{t+1} + \widetilde{BE}_{t+1}) \end{aligned}$$

ponendo \widetilde{E}_{t+1}^* uguale a $[(\alpha^* + \beta^*)b_{t+1}(\tilde{w}_t - \tilde{s}_{t+1}) + \gamma^* \tilde{w}_t] \tilde{Q}_t$

${}_1\tilde{y}_{t+1}$ è quindi il risultato dello scarto tra la somma di riserve matematiche (calcolate con i principi proposti da Solvency II) e premi capitalizzati al tasso j^* e la somma degli ammontari eliminati per decesso e le nuove riserve matematiche calcolate all'inizio dell'anno successivo.

La somma dell'utile demografico e dell'utile di eliminazione può esprimersi come:

$${}_1\tilde{y}_{t+1} + {}_2\tilde{y}_{t+1} = \left[\widetilde{BE}_t + \tilde{B}_{t+1} - \widetilde{E}_{t+1}^* - \tilde{S}_{t+1} \right] (1 + j^*) - (\tilde{X}_{t+1} + \widetilde{BE}_{t+1})$$

L'utile di caricamento per spese viene definito come:

$${}_3\tilde{y}_{t+1} = (1 + j^*)(\widetilde{E}_{t+1}^* - \widetilde{E}_{t+1})$$

Prima di presentare la quarta componente, l'utile di sovrainteresse, si pone l'attenzione sullo *spread* tra i tassi finanziari coinvolti, ovvero il primo elemento della formula. L'esistenza di tale differenziale ha delle ripercussioni anche sull'utile demografico in quanto il tasso a cui devono essere capitalizzati premi puri e riserve deve essere lo stesso che compare nell'utile da sovrainteresse. In fase di aggregazione, presentata in seguito, risulta chiara la scomposizione che deriva dall'utilizzo dello stesso tasso nelle due formule degli utili.

$$\begin{aligned} {}_4\tilde{y}_{t+1} &= (\tilde{j}_{t+1} - j^*) \left[\widetilde{be}_t^{Rf(t),q}(\tilde{w}_t) + b_{t+1}(1 - \alpha^* - \beta^*)(\tilde{w}_t - \tilde{s}_{t+1}) - (\gamma^* \tilde{w}_t) \right. \\ &\quad \left. - (g_t \cdot be_t^z \cdot \tilde{s}_{t+1}) \right] \tilde{Q}_t \\ &= (\tilde{j}_{t+1} - j^*) (\widetilde{BE}_t + \widetilde{B}_{t+1} - \widetilde{E}_{t+1}^* - \widetilde{S}_{t+1}) \end{aligned}$$

La somma dei 4 utili così definiti insieme all'utile residuo, calcolato come

$$\begin{aligned} {}_5\tilde{y}_{t+1} &= (\tilde{j}_{t+1} - j^*) (\widetilde{E}_{t+1}^* - \widetilde{E}_{t+1}) \\ \sum_{i=1}^5 {}_i\tilde{y}_{t+1} &= [\widetilde{BE}_t + \widetilde{B}_{t+1} - \widetilde{E}_{t+1}^* - \widetilde{S}_{t+1}](1 + \tilde{j}_{t+1}) - (\widetilde{X}_{t+1} + \widetilde{BE}_{t+1}) \\ &= (\widetilde{BE}_t + \widetilde{B}_{t+1} + \tilde{J}_{t+1}) - (\widetilde{E}_{t+1} + \widetilde{S}_{t+1} + \widetilde{X}_{t+1} + \widetilde{BE}_{t+1}) \end{aligned}$$

che è esattamente la formulazione dell'utile assicurativo nella sua versione *market consistent*.

3.3 Una formulazione compatta dell'utile demografico market consistent

Si riprende ora la formulazione dell'utile demografico con riferimento al *time horizon* annuale

$$\begin{aligned} {}_1\tilde{y}_1^{MCV} &= \left\{ \left[be_0^{Rf(0),q} + b_1(1 - \alpha^* - \beta^*) - \gamma^* \right] (w_0 - \tilde{s}_1)(1 + j^*) \right. \\ &\quad \left. - (\tilde{x}_1 + \tilde{w}_1 \cdot \widetilde{be}_1^{Rf(1),q}) \right\} \tilde{Q}_t \end{aligned}$$

Esattamente come fatto in [41] l'obiettivo di questo paragrafo è quello di riscrivere l'utile demografico come appena definito isolando gli effetti delle sue componenti. Aggiungendo e sottraendo il tasso di riserva matematica completa calcolato con le basi tecniche del I° ordine *locked* e prudenziali e trascurando gli effetti della rivalutazione solo per semplicità formulistica, si ottiene:

$${}_1\tilde{y}_1^{MCV} = \left\{ \left[be_0^{Rf(0),q} + b_1(1 - \alpha^* - \beta^*) - \gamma^* \pm v_0^b \right] (w_0 - \tilde{s}_1)(1 + j^*) - \left(\tilde{x}_1 + \tilde{w}_1 \cdot \tilde{be}_1^{Rf(1),q} \pm \tilde{w}_1 v_1^b \right) \right\}$$

$$= D_1^b \cdot [q_x^*(w_0 - \tilde{s}_1) - \tilde{z}_1] + \left(be_0^{Rf(0),q} - v_0^b \right) (w_0 - \tilde{s}_1)(1 + j^*) - \tilde{w}_1 (\tilde{be}_1^{Rf(1),q} - v_1^b)$$

Definendo l'utile demografico valutato secondo i principi local GAAP ${}_1\tilde{y}_1^{LG}$ come $D_1^b [q_x^*(w_0 - \tilde{s}_1) - \tilde{z}_1]$, ne consegue che l'utile demografico calcolato coerentemente con la *Market Consistent Valuation* è pari alla somma tra ${}_1\tilde{y}_1^{LG}$ e una seconda componente dipendente dai c.d. salti di riserva, ossia dagli scarti tra la Best Estimate e la riserva calcolata con basi tecniche *locked* e prudenziali. Come approfondito nel Paragrafo 1.4.4, la BE è calcolata su basi demografiche realistiche ed è attualizzata con il tasso *risk free* al netto degli aggiustamenti; dalla formula precedente non è possibile quantificare quanto una variazione delle basi tecniche sottostante il calcolo a *fair value* possa impattare sull'utile demografico.

Gli ulteriori passaggi proposti nascono dall'aggiunta e sottrazione della quantità $be_0^{j^*,q}$, una sorta di Best Estimate calcolata anziché con la curva dei tassi *risk free*, con un unico tasso *flat* pari a j^* , base tecnica finanziaria del I° ordine. In formule,

$${}_1\tilde{y}_1^{MCV} = {}_1\tilde{y}_1^{LG} + \left(be_0^{Rf(0),q} - v_0^b \pm be_0^{j^*,q} \right) (w_0 - \tilde{s}_1)(1 + j^*) - \tilde{w}_1 \cdot \left(\tilde{be}_1^{Rf(1),q} - v_1^b \pm be_1^{j^*,q} \right)$$

Ricordando la relazione $\tilde{w}_1 = w_0 - \tilde{s}_1 - \tilde{z}_1$

$${}_1\tilde{y}_1^{MCV} = {}_1\tilde{y}_1^{LG} + {}_1\tilde{y}_1^{MCV \sim RiskFree} + {}_1\tilde{y}_1^{MCV \sim BestEstimate/v_0^b}$$

dove:

$$\begin{aligned} {}_1\tilde{y}_1^{MCV \sim RiskFree} &= (w_0 - \tilde{s}_1) \left[\left(be_0^{Rf(0),q} - be_0^{j^*,q} \right) (1 + j^*) - \left(\tilde{be}_1^{Rf(1),q} - be_1^{j^*,q} \right) \right] \\ &+ \left(\tilde{be}_1^{Rf(1),q} - be_1^{j^*,q} \right) \cdot \tilde{z}_1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} {}_1\tilde{y}_1^{MCV \sim BestEstimate/v_0^b} &= (w_0 - \tilde{s}_1) \left[\left(be_0^{j^*,q} - v_0^b \right) (1 + j^*) - \left(be_1^{j^*,q} - v_1^b \right) \right] \\ &+ \left(be_1^{j^*,q} - v_1^b \right) \cdot \tilde{z}_1 \end{aligned}$$

Questa notazione mette in evidenza i seguenti risultati:

- I) ${}_1\tilde{y}_1^{LG} + {}_1\tilde{y}_1^{MCV \sim BestEstimate/v_0^b}$ mostra l'utile demografico qualora nella BE non compaia il tasso *risk free*: oltre che in termini di indice di posizione della distribuzione, in termini di variabilità una variazione della curva RF non influenza la variabilità della somma in esame.
- II) Essendo la BE calcolata con i tassi privi di rischio, una componente di utile demografico è data dalla variazione della struttura dei tassi finanziari nel *time span* $[0,1]$. La *ratio* di questa apparente contraddizione, risiede nel fatto che l'attualizzazione a *risk free* è un elemento intrinseco nella BE e di conseguenza, essendo la variazione della riserva matematica un elemento cardine nel calcolo dell'utile demografico, i tassi finanziari influenzano l'utile legato alla mortalità della coorte.

Presentati gli elementi caratteristici della formulazione *market consistent* dell'utile demografico su un *time horizon* annuale, si propone un paragrafo in cui vengono mostrate le ipotesi che sottendono il calcolo di $\tilde{be}_1^{Rf(1),q}$ e si descrive il modello di Vašiček, atto a simulare l'evoluzione della curva dei tassi d'interesse privi di rischio.

3.4 Le ipotesi sottostanti la stima di $\widetilde{be}_1^{Rf(1),q}$ e il modello di Vašíček

L'elemento più innovativo e con il peso specifico maggiore della formulazione dell'utile demografico *market consistent* è il tasso di Best Estimate calcolato alla fine dell'orizzonte temporale, ovvero in $t = 1$.

Esso, per sua natura, deve essere calcolato su ipotesi realistiche e la curva dei tassi privi di rischio da utilizzare deve essere quella corrente al momento della valutazione.

Per quanto riguarda la base demografica, il problema non è insormontabile in quanto è lecito ipotizzare che la miglior stima sui tassi di mortalità effettuata dalla compagnia in $t = 0$ sia la stessa a fine dell'anno: nonostante si verifichi una mortalità particolarmente sostenuta, la causa può essere attribuita ad uno *shock* sistematico e i *trend* stimati possono rimanere invariati. Per quanto riguarda il tasso finanziario il discorso è meno semplice in quanto sicuramente uno o più tassi riferiti alle singole *maturity* è cambiato.

Nella stima di $\widetilde{be}_1^{Rf(1),q}$ risulta quindi necessario considerare l'aleatorietà dei tassi privi di rischio.

In questo elaborato non si ha come obiettivo quello di riprodurre fedelmente una possibile stima dei tassi d'interesse utilizzando la stessa metodologia adottata dall'EIOPA; piuttosto si vogliono evidenziare le ripercussioni sulla variabile aleatoria utile demografico *market consistent*, di una variazione della struttura dei tassi privi di rischio. A tal fine si espongono nel sotto paragrafo successivo le peculiarità del modello di Vašíček.

Il modello di Vašíček

Quello in esame è un modello sui tassi d'interesse a tempo continuo che supera ipotesi di tassi privi di rischio *flat* in quanto i tassi d'interesse ricavati dai bond

sono variabili al variare del tempo e soprattutto hanno una struttura *maturity-dependent*: i bond con scadenze più distanti comportano un'esposizione al rischio di tasso d'interesse maggiore e di conseguenza è maggiore il premio al rischio richiesto.

Le ipotesi alla base del modello di Vašíček sono:

- I) Il tasso d'interesse istantaneo coincide con il tasso d'interesse in corrispondenza di una scadenza pari a 0^+
- II) Il tasso d'interesse istantaneo abbia una dinamica c.d. *mean reverting*, ovvero:

$$dr_t = \theta(\bar{r} - r_t)dt + \sigma_r dz_t$$

dove:

- \bar{r} è il valore a cui r_t tende, ovvero la media di lungo periodo del tasso istantaneo
- θ è la velocità con cui r_t tende alla sua media: $\frac{1}{\theta}$ è una buona *proxy* del tempo di convergenza
- σ_r è la volatilità del tasso istantaneo e $E[dz_t] = 0$

Essendo il modello sviluppato nel continuo, mentre i dati di mercato sono in tempo discreto, è necessario discretizzare la formula alla base del modello.

Considerando un moto browniano geometrico X con incremento pari a:

$$dX = \mu_x dt + \sigma_x dz_t$$

secondo il Lemma di Itô

$$df(t, x) = f_t dt + f_x dx + \frac{1}{2} f_{xx} dx dx$$

Si dimostra [44] che tutti i termini legati alla derivata seconda sono trascurabili in quanto o-piccoli $o(dt)$.

Si considera la funzione $e^{\theta t} r_t$, la cui dinamica è:

$$d(e^{\theta t} r_t) = e^{\theta t} r_t \theta dt + e^{\theta t} dr_t$$

avendo, coerentemente con il caso precedente in cui X è un moto browniano geometrico, tralasciato la derivata seconda.

Sostituendo dr_t con la formulazione alla base del modello di Vašíček,

$$\begin{aligned} d(e^{\theta t} r_t) &= e^{\theta t} r_t \theta dt + e^{\theta t} [\theta(\bar{r} - r_t) dt + \sigma_r dz_t] \\ &= \bar{r} e^{\theta t} \theta dt + \sigma_r e^{\theta t} dz_t \end{aligned}$$

Integrando,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} d(e^{\theta t} r_t) &= \int_t^{t+\Delta t} \bar{r} e^{\theta t} \theta dt + \int_t^{t+\Delta t} \sigma_r e^{\theta s} dz_s \\ e^{\theta(t+\Delta t)} r_{t+\Delta t} - e^{\theta t} r_t &= \bar{r} [e^{\theta(t+\Delta t)} - e^{\theta t}] + \int_t^{t+\Delta t} \sigma_r e^{\theta s} dz_s \end{aligned}$$

da cui,

$$r_{t+\Delta t} = e^{-\theta \Delta t} r_t + \bar{r} (1 - e^{-\theta \Delta t}) + \int_t^{t+\Delta t} e^{-\theta(t+\Delta t)} e^{\theta s} \sigma_r dz_s$$

dove la prima componente è una funzione di r_t , la seconda è una quantità deterministica e la terza è una quantità stocastica.

Media e varianza sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} E[r_{t+\Delta t}] &= e^{-\theta \Delta t} r_t + \bar{r} (1 - e^{-\theta \Delta t}) \text{ in quanto } E[dz_t] = 0 \\ Var[r_{t+\Delta t}] &= \frac{\sigma_r^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta \Delta t}) \end{aligned}$$

Si dimostra che, stimati i parametri del modello e date le due funzioni:

$$\begin{aligned} b(\tau) &= \frac{1 - e^{-\theta \tau}}{\theta} \\ a(\tau) &= (\tau - b(\tau)) \left(\bar{r} - \frac{\sigma_r \lambda_r}{\theta} \right) - \left(\tau - 2b(\tau) + \frac{1 - e^{-2\theta \tau}}{2\theta} \right) \frac{\sigma_r^2}{2\theta^2} \end{aligned}$$

la stima dello *yield to maturity* al tempo t riferito alla *maturity* τ è uguale a:

$$y(\tau, r_t) = \frac{a(\tau)}{\tau} + \frac{b(\tau)}{\tau} r_t$$

In questo elaborato, con la curva dei tassi privi di rischio al netto di *volatility adjustment* pubblicata ad aprile 2018 da EIOPA, è stata stimata la curva dei tassi spot in $t = 1$, ovvero sono stati calcolati i tassi *forward* $f_{1-\tau}$.

In un secondo momento è stato calibrato il modello di Vašíček affinché la curva attesa in $t=1$ sia pressoché la curva dei tassi *forward*.

Si specifica che il tasso r_1 è stato simulato sotto misura di probabilità neutrale al rischio (e non sotto probabilità oggettiva), quindi:

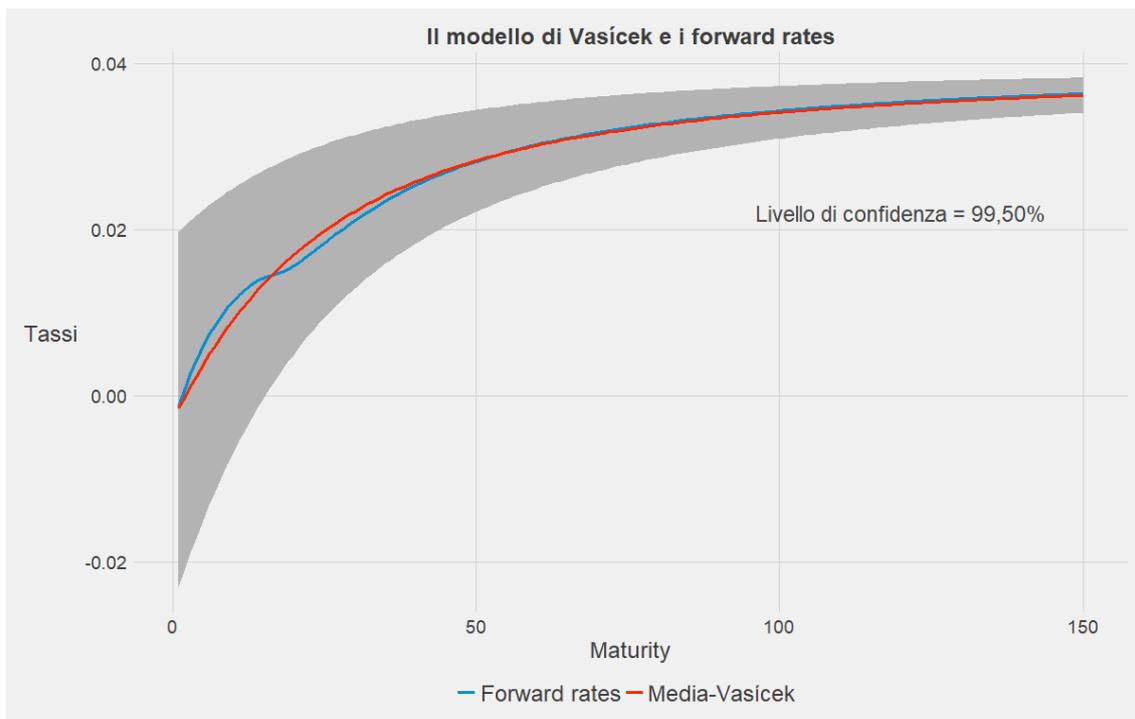
$$\bar{r}^* = \bar{r} - \frac{\sigma_r \lambda_r}{\theta}$$

In Tabella 23 e in Figura 49 si mostrano rispettivamente i parametri del modello e il confronto tra curva dei tassi *forward* e curva attesa secondo il modello in esame; al fine di evidenziare anche l'effetto di σ_r si mostra la regione entro cui oscilla la curva dei tassi stimata con un livello di confidenza del 99,50%.

Tabella 23 – I parametri del modello di Vašíček⁴⁵

n° simulazioni	1.000.000
r0	-0,06
r_bar	0,06
ϑ	0,07
σ	1,20%
λ	-0,2

Figura 49 - La stima della curva risk-free con il modello di Vašíček



⁴⁵ Si osserva che nel modello di Vašíček, lo Sharpe Ratio dei rendimenti obbligazionari coincide con l'opposto del prezzo di mercato per il rischio sui tassi d'interesse λ_r .

Un primo aspetto necessario da sottolineare è che complessivamente, se i tassi spot di $t = 1$ coincidono con i tassi *forward* di $t = 0$, il modello di Vašíček opportunamente calibrato è relativamente poco preciso nell'intorno di ampiezza 10 anni del *Last Liquidity Point*, ossia di quell'istante oltre il quale i tassi privi di rischio non vengono più calcolati dagli *interest rate swap*, ma vengono estrapolati tramite il modello di *Smith-Wilson*. A tal fine, per ognuno dei due portafogli presentati in seguito, i parametri del modello saranno aggiustati affinché il valore atteso del tasso di best estimate calcolato con i tassi privi di rischio del modello di Vašíček, sia uguale al tasso di best estimate calcolato con i tassi *forward*.

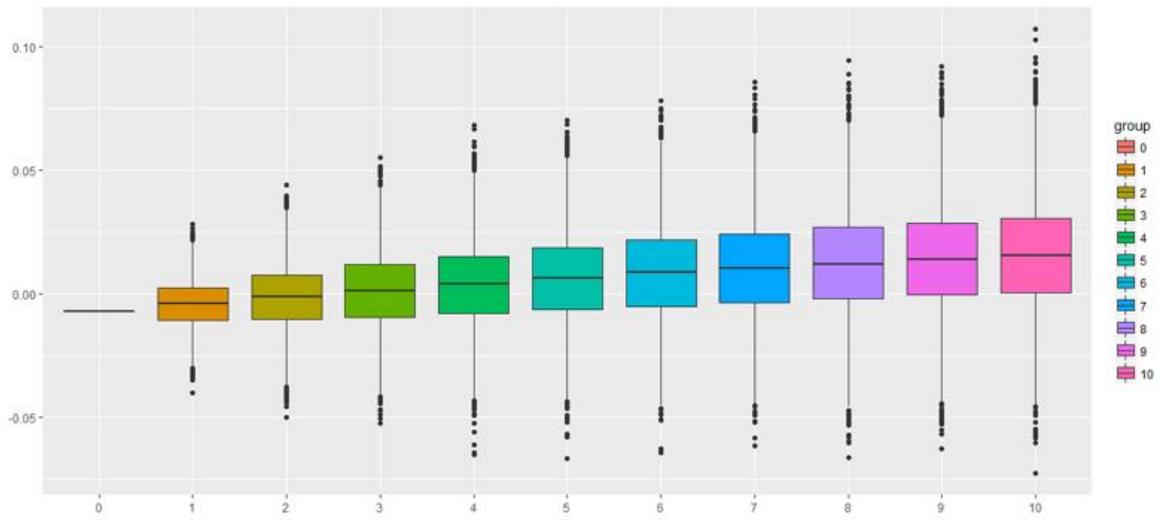
Un secondo elemento da osservare è la variabilità dei rendimenti: essendo

$$\text{Var}(y(\tau, r_{t+\Delta t})) = \frac{b(\tau)^2}{\tau^2} \text{Var}(r_{t+\Delta t}) = \frac{b(\tau)^2}{\tau^2} \frac{\sigma_r^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta\Delta t})$$

Si calcola che lo scarto quadratico medio del processo decresce dal 10,72% circa per la scadenza $\tau = 0$ fino allo 0,11%: questo è un primo indicatore che l'utilizzo di questo modello porterà, nel calcolo della best estimate, una maggior volatilità sul valore attuale atteso dei primi flussi di cassa che sugli ultimi.

Con la Figura 50 si mostra una rappresentazione della volatilità della stima del tasso istantaneo: nella figura superiore si evidenziano i box and whisker plots delle stime dei tassi istantanei per 10 anni, mentre nella figura inferiore si mostrano 5.000 cammini simulati del tasso istantaneo: è evidente come al crescere dell'antidurata l'effetto "mean reverting" perda di importanza che, contemporaneamente, acquisisce σ .

Figura 50 - Box plot e cammini simulati del tasso istantaneo

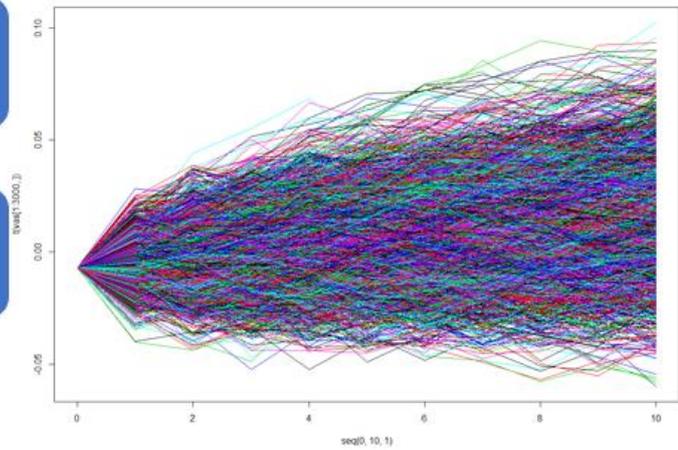


Box Plot – Tassi istantanei tra 0 e 10

- In alto

3.000 simulazioni del tasso istantaneo in t=10

- A destra



3.5 Una formula ricorrente riguardante la best estimate qualora in t si prevedano correttamente i tassi privi di rischio di $t+1$

Si conclude questo capitolo in cui vengono dimostrate e commentate le formule che verranno utilizzate in seguito, con la dimostrazione di come calcolare la best estimate al tempo 1, qualora le ipotesi demografiche rimangano costanti e qualora si verificino determinati eventi circa i tassi privi di rischio.

Si ipotizza che data la curva dei tassi *spot* privi di rischio in $t = 0$, in $t = 1$, la curva dei tassi *spot* coincida con i tassi *forward*.

Considerando il caso di un capitale differito a PU con capitale assicurato unitario,

$$be_t = {}_{n-t}p_{x+t} \left[\prod_{h=0}^{n-t-1} (1 + i_t(0, h, h+1)) \right]^{-1} \quad \forall t > 0$$

Dove $i(0, h, h+1)$ è il generico tasso *forward* calcolato in $t = 0$ e riferito all'arco temporale $h, h+1$.

$$be_{t+1} = \frac{{}_{n-t}p_{x+t}}{{}_1p_{x+t}} \left[\prod_{h=1}^{n-t-1} (1 + i_{t+1}(0, h, h+1)) \right]^{-1} \quad \forall t > 0$$

In quanto $\frac{{}_{n-t}p_{x+t}}{{}_1p_{x+t}}$ è uguale a ${}_{n-t-1}p_{x+t+1}$ e $i_t(0, h, h+1) = i_{t+1}(0, h)$ per $h \geq 1$.

Ne segue che il tasso di best estimate in $t = 1$ è riscrivibile come

$$be_{t+1} = \frac{{}_{n-t}p_{x+t}}{{}_1p_{x+t}} \frac{[\prod_{h=1}^{n-t-1} (1 + i(0, h, h+1))]^{-1} (1 + i(0,1))^{-1}}{(1 + i(0,1))^{-1}}$$

Da cui

$$be_{t+1} = \frac{be_t}{{}_1E_{x+t}^{q, i_t(0,1)}}$$

ovvero

$$be_{t+1}({}_1p_{x+t}) = be_t(1 + i(0,1))$$

Si considera ora il caso in cui anziché un unico premio unico, vengano versati premi annui costanti, π , per tutta la durata del contratto

$$\begin{aligned} be_t &= {}_{n-t}p_{x+t} \left[\prod_{h=0}^{n-t-1} (1 + i_t(0, h, h+1)) \right]^{-1} - \pi \cdot \ddot{a}_{(x+t):(n-t)} \\ &= {}_{n-t}p_{x+t} \left[\prod_{h=0}^{n-t-1} (1 + i_t(0, h, h+1)) \right]^{-1} - \pi \cdot \sum_{h=0}^{n-t-1} {}_hE_{x+t} \end{aligned}$$

mentre

$$be_{t+1} = {}_{n-t-1}p_{x+t+1} \left[\prod_{h=1}^{n-t-1} (1 + i_t(0, h, h+1)) \right]^{-1} - \pi \cdot \sum_{h=0}^{n-t-2} {}_hE_{x+t+1}$$

estraendo il primo termine dalla sommatoria di be_t , si ottiene

$$be_t = {}_{n-t}p_{x+t} \left[\prod_{h=0}^{n-t-1} (1 + i_t(0, h, h+1)) \right]^{-1} - \pi \cdot \sum_{h=1}^{n-t-1} {}_hE_{x+t} - \pi$$

Con riferimento alla formula in esame, si effettua una riduzione pari a 1 dell'indice della sommatoria. In formule

$$be_t = {}_{n-t}p_{x+t} \left[\prod_{h=0}^{n-t-1} (1 + i_t(0, h, h+1)) \right]^{-1} - \pi \cdot \sum_{h=0}^{n-t-2} {}_{h+1}E_{x+t} - \pi$$

Utilizzando i tassi *forward*

$$\begin{aligned} be_t &= {}_{n-t}p_{x+t} \left[\prod_{h=0}^{n-t-1} (1 + i(0, h, h+1)) \right]^{-1} + \\ &- \pi \cdot \sum_{h=0}^{n-t-2} \left({}_{h+1}p_{x+t} \left[\prod_{j=0}^h (1 + i(0, j, j+1)) \right]^{-1} \right) - \pi \end{aligned}$$

Si considera ora il rapporto

$$\begin{aligned} \frac{be_t}{{}_1E_{x+t}^{q,i(0,1)}} &= \frac{{}_{n-t}p_{x+t} \left[\prod_{h=0}^{n-t-1} (1 + i(0, h, h+1)) \right]^{-1}}{{}_1p_{x+t} (1 + i(0,1))^{-1}} + \\ &- \pi \cdot \frac{\sum_{h=0}^{n-t-2} \left({}_{h+1}p_{x+t} \left[\prod_{j=0}^h (1 + i(0, j, j+1)) \right]^{-1} \right)}{{}_1p_{x+t} (1 + i(0,1))^{-1}} - \pi \end{aligned}$$

Esattamente uguale a

$$\begin{aligned} \frac{be_t}{{}_1E_{x+t}^{q,i(0,1)}} &= {}_{n-t-1}p_{x+t+1} \left[\prod_{h=1}^{n-t-1} (1 + i(0, h, h+1)) \right]^{-1} + \\ &- \pi \cdot \sum_{h=0}^{n-t-2} \left({}_h p_{x+t+1} \left[\prod_{j=1}^h (1 + i(0, j, j+1)) \right]^{-1} \right) - \pi \end{aligned}$$

Ricordando che il tasso di BE in $t+1$ è scrivibile come:

$$be_{t+1} = {}_{n-t-1}p_{x+t+1} \left[\prod_{h=1}^{n-t-1} (1 + i_t(0, h, h+1)) \right]^{-1} - \pi \cdot \sum_{h=0}^{n-t-2} {}_h E_{x+t+1}$$

$$\begin{aligned} \frac{be_t}{{}_1E_{x+t}^{q,i_t(0,1)}} &= \frac{{}_{n-t}E_{x+t}}{{}_1E_{x+t}} - \pi \cdot \sum_{h=0}^{n-t-2} \frac{{}_{h+1}E_{x+t}}{{}_1E_{x+t}} - \frac{\pi}{{}_1E_{x+t}} \\ \frac{be_t}{{}_1E_{x+t}^{q,i(0,1)}} &= be_{t+1} - \frac{\pi}{{}_1E_{x+t}} \end{aligned}$$

Da cui, concludendo,

$$(be_t + \pi)(1 + i(0,1)) = be_{t+1}({}_1p_{x+t})$$

L'aspetto più interessante di questa dimostrazione, generalizzabile ad ogni tipo di polizza tradizionale, riguarda proprio il tasso $1 + i(0,1)$, fattore di capitalizzazione del tasso di best estimate e del tasso di premio annuo costante.

Nonostante il p sia calcolato su basi tecniche del I° ordine, il fattore di capitalizzazione della formula ricorrente, sotto ipotesi di aspettative in termini di tassi privo di rischio perfettamente rispettate, è uguale alla somma tra 1 e il tasso *spot* tra 0 e 1.

3.6 Conclusioni

Il modello teorico presentato, finalizzato ad una valutazione *market consistent* dell'utile demografico per una compagnia di assicurazione sulla durata di vita, non solo consente di quantificare lo stesso in maniera rigorosa, ma pone in risalto la sua relazione con l'utile qualora sia in vigore un sistema di valutazione delle passività coerente con i principi civilistici.

La scomposizione

$${}_1\tilde{y}_1^{MCV} = {}_1\tilde{y}_1^{LG} + {}_1\tilde{y}_1^{MCV\sim RiskFree} + {}_1\tilde{y}_1^{MCV\sim BestEstimate/v_0^b}$$

presentata precedentemente merita ulteriori approfondimenti, sia in un'ottica di individuare i valori che assumono le componenti al variare della tipologia di prodotto sottoscritto dalla coorte, che in un'ottica di individuare e quantificare le relazioni che sussistono tra le componenti stesse.

L'elemento più innovativo nel modello in esame riguarda la necessità di stimare la best estimate delle passività alla fine del periodo di valutazione; ciò implica la necessità di stimare la curva dei tassi a pronti privi di rischio. Essendo tale curva imposta da EIOPA utilizzando due metodi distinti per calcolare i tassi (da 0 fino a LLP e da $t = 21$ fino a scadenza), i modelli tradizionali quali Vašíček e CIR necessitano non tanto una calibrazione funzione dei dati reali di mercato, quanto una calibrazione *ad hoc* proprio per mantenere coerenza tra la curva iniziale e la curva stimata dopo 1 periodo, composta dai *tassi forward*.

Nel prossimo Capitolo, posto a conclusione dell'elaborato, si applica il modello proposto a due portafogli distinti e si quantifica l'effetto dell'introduzione di Solvency II in termini di variazione di utile demografico.

Capitolo IV: Un case study e una comparazione tra i due approcci

4.1 Introduzione

Questo capitolo conclusivo dell'elaborato, si prefigge il compito di evidenziare i risultati derivanti dall'applicazione del modello presentato nel Capitolo precedente e di cogliere come il passaggio dal precedente sistema normativo a Solvency II abbia influenzato il calcolo della profittabilità per una compagnia di assicurazione sulla durata di vita. I primi due sotto capitoli riprenderanno gli stessi portafogli di CD e miste descritti nel Capitolo 2 e mostreranno come varia la profittabilità su un orizzonte temporale annuale considerando l'istante di valutazione $t = 0$. Poiché per ogni caso gli spunti di riflessione non sono in numero esiguo, la logica che è stata adottata durante l'elaborazione del presente capitolo, è quella di analizzare in primo luogo i valori assunti dalle varie componenti e, successivamente, fare le considerazioni *as a whole* ovvero andando a cogliere le dinamiche strutturali che intercorrono tra le componenti stesse.

Tale scelta ha portato a dividere il Capitolo in 3 sezioni: la prima analizza i due portafogli in $t = 0$, la seconda sposta l'istante di valutazione rispettivamente di 10 e 19 periodi per entrambi portafogli, mentre la terza e ultima sezione riporta una dimostrazione esplicativa dei risultati ottenuti e le riflessioni poste a conclusione della presentazione dei risultati.

4.1.1 La MCV e l'utile demografico di un portafoglio di CD

Si mostrano i risultati del modello descrittivo dell'utile demografico stocastico e *market consistent* considerando un portafoglio di 15.000 contratti di capitale differito con durata ventennale, di individui maschi di 40 anni.

Coerentemente con quanto mostrato nel Capitolo 2, i singoli capitali assicurati sono estratti da un LogNormale con media 100.000 e CoV pari 2: nel caso in esame le somme assicurate w_0 sono pari a 1,5 miliardi mentre le basi tecniche utilizzate sono:

- I° ordine: [$j^* = 1\%$, $q_x^* = q(\text{ISTAT2016Adjusted})$ ⁴⁶]
- II° ordine [$q_x = q(\text{ISTAT2016})$]
- Calcolo della Best Estimate: [Tassi privi di rischio: EIOPA – 31/12/2015, $q_x = q(\text{ISTAT2016})$]
- Non è presente la possibilità di riscattare

Si analizzano ora i risultati derivanti da 10 milioni di simulazioni specificando che nel calcolo di $\widetilde{be}_1^{Rf(1),q}$ i parametri sono quelli indicati nel Capitolo 3, eccezion fatta per il tasso d'interesse istantaneo r_0 e la media di lungo periodo \bar{r} leggermente modificati affinché il valore atteso della BE al tempo 1 sia uguale alla stessa, calcolata con i *forward rates* impliciti nella curva dei tassi privi di rischio di EIOPA.

Si considera la formula:

$${}_1\tilde{y}_1^{MCV} = {}_1\tilde{y}_1^{LG} + {}_1\tilde{y}_1^{MCV \sim RiskFree} + {}_1\tilde{y}_1^{MCV \sim BestEstimate/v_0^b}$$

⁴⁶ L'aggiustamento citato è lo stesso utilizzato nel Capitolo 2

\mathcal{Y}_1^{LG} – L'utile demografico calcolato con basi tecniche *locked* e prudenziali

I valori della prima componente dell'utile demografico *market consistent* sono pressoché identici a quelli calcolati nel Paragrafo 2.5.1 con la differenza che in questo modello, al fine di poter ottenere la comparabilità tra tutte le componenti dell'utile in esame, si considerano anche le spese di acquisizione e quelle di incasso. Tali valori sono riportati nella Tabella 24

Tabella 24 – Il premio di tariffa e i caricamenti per le spese

Premio Tariffa = 0,04781694			
Spese	Acquisizione	Alfa (calcolato sul premio di tariffa)	50%
	Incasso	Beta (calcolato sul premio di tariffa)	2,50%
	Gestione	Gamma (calcolato sul capitale assicurato)	0,15%

I risultati sono riportati nella Tabella seguente solo con il fine di rendere comparabili i risultati. Si specifica che i valori particolarmente contenuti sono dovuti al valore assoluto del tasso di capitale sotto rischio in $t = 1$, precisamente pari a 0,07122.

Tabella 25 – I risultati relativi alla prima componente dell'utile demografico totale

	y1 - 1, LG
Media teorica	2.528,48
Media simulata	2.527,91
Standard dev.	16.457,70
Asimmetria	2,41
VaR 0,050%	-19.439,56
SCR/Cap.Ass. t=1	0,0013%

$\tilde{y}_1^{MCV \sim RiskFree}$ – La componente legata alla presenza dei tassi privi di rischio nel calcolo della best estimate

Come illustrato quando è stata presentata la scomposizione dell'utile demografico totale, tale seconda componente è legata ai salti di riserva tra la best estimate calcolata come impone la normativa, ossia attualizzando i flussi attesi con i tassi *risk free*, e il valore atteso dei flussi di cassa attualizzati con una curva dei tassi *flat* pari a 1%, base tecnica finanziaria utilizzata per attualizzare la riserva matematica in un contesto *local GAAP*.

Tabella 26 – Il valore atteso della seconda componente di y_1

Formula	$w_0 \left[\left(be_0^{Rf(0),q} - be_0^{j^*,q} \right) (1 + j^*) - \left(\tilde{be}_1^{Rf(1),q} - be_1^{j^*,q} \right) \right] + \left(\tilde{be}_1^{Rf(1),q} - be_1^{j^*,q} \right) \tilde{z}_1$
Valore atteso	$1,5 \text{ miliardi} \cdot [(-0,0765+0,0036) \cdot (1+0,01) - (-0,0553-0,0178)] + (-0,0553-0,0178)$ 1.179.313
	$1,5 \text{ miliardi} \cdot [(-0,0729) \cdot (1+0,01) - (-0,0731)] - 86.220,07$
	$1,5 \text{ miliardi} \cdot (-0,0005) - 86.220,07 = -967.846,07$ $= 0,055\% \text{ di } E(\tilde{w}_1)$

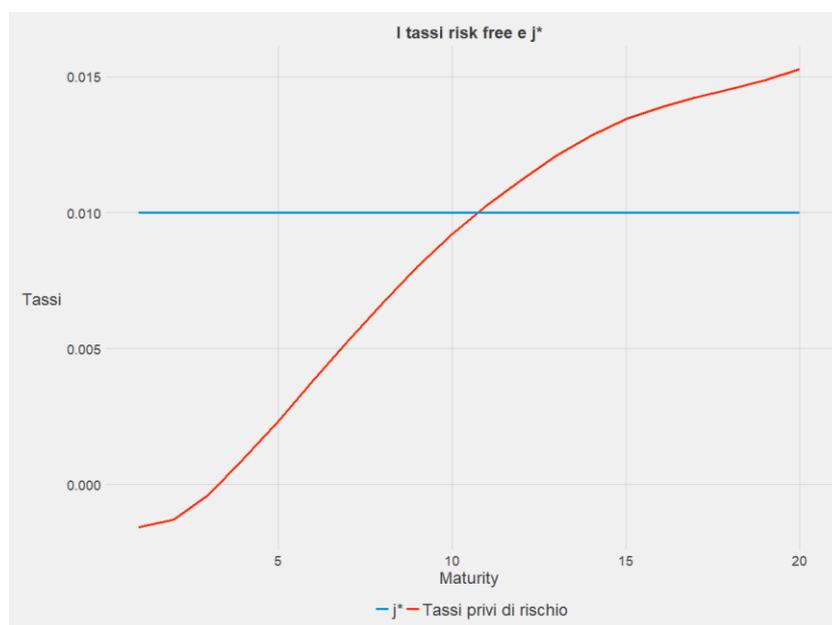
Nella Tabella 26 viene messo in luce il processo di formazione del valore atteso della seconda componente dell'utile demografico e, soprattutto, si mostra dove nasce tale valore atteso.

In primo luogo si osserva che il tasso di BE in $t = 0$ è pari a -7,65% circa: tale valore nasce dal fatto che il valore attuale atteso dei flussi di cassa in uscita in assenza di riscatti è scontato finanziariamente con un tasso privo di rischio uguale al 1,527% (il fattore di attualizzazione è 0,7385) mentre il rendimento finanziario garantito all'assicurato è l'1% con corrispondente fattore di attualizzazione pari a 0,8195.

A conferma di quanto detto, dalla seconda riga del valore atteso si evince che il valore assoluto dello scarto tra i due tassi di riserva al tempo 0 è un valore molto simile a $be_0^{Rf(0),q}$ in quanto $be_0^{j^*,q}$ è prossimo allo 0.

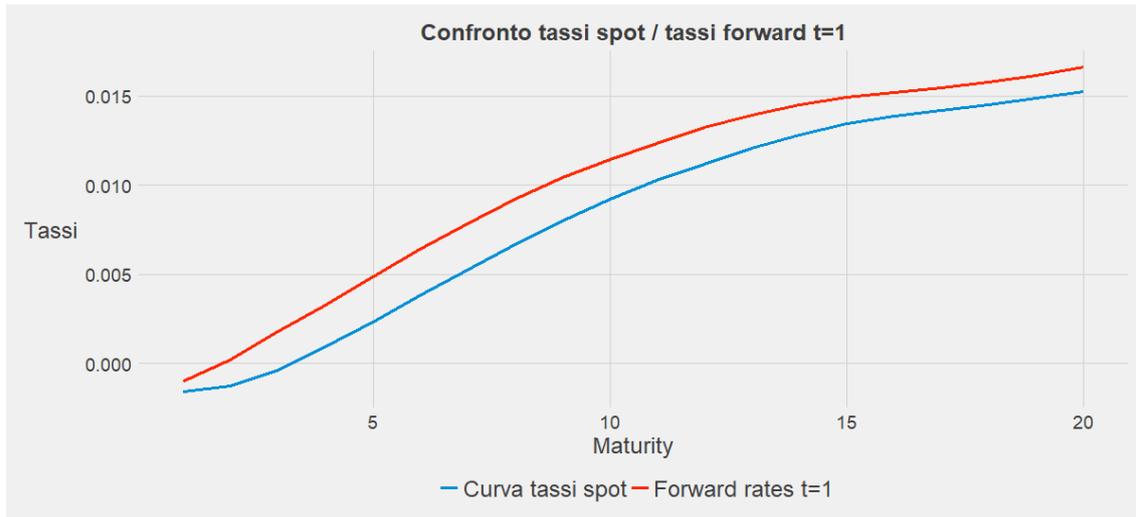
Per quanto riguarda i premi invece, il valore atteso degli stessi attualizzato con i tassi privi di rischio e attualizzato con il tasso j^* è molto simile, in quanto l'effetto dello spread negativo $i(0, h, h + 1) - j^*$ sulle prime antidurate è compensato da valori positivi sulla seconda metà dell'orizzonte temporale ventennale; questo fenomeno è evidenziato in Figura 51.

Figura 51 - Il confronto tassi privi di rischio / j^*



Lo scarto $(be_0^{Rf(0),q} - be_0^{j^*,q})$ capitalizzato al tasso j^* , è minore dello 0,5‰ del valore assoluto dello scarto tra gli stessi tassi calcolati al tempo 1: il motivo è rappresentato nella Figura 52, dove si evidenzia il rapporto tra i tassi spot in $t = 0$ e la miglior stima degli stessi in $t = 1$, ovvero dei tassi *forward* impliciti. Calcolando questi ultimi in $t = 0$, si stima che in $t = 1$ dovrebbe avvenire un aumento generale dei tassi e ciò riduce ulteriormente il valore attuale atteso della prestazione finale, con conseguente allontanamento tra $E[\widetilde{be}_1^{Rf(0),q}]$ e $be_1^{j^*,q}$.

Figura 52 - I tassi spot e i tassi *forward* in $t = 1$



Lo scarto finale produce una perdita di circa 1 milione di euro, valore importante, ma esiguo rispetto al valore atteso dei capitali assicurati in $t = 1$: il valore assoluto del rapporto tra i due è circa lo 0,6‰. Coerentemente con i risultati dedotti dall'analisi del valore atteso, in termini di variabilità rimane il fatto che una variazione dello 0,1‰ del tasso di BE al tempo 1, provoca utili o perdite di centinaia di milioni. Per esprimere meglio questo concetto, si introduce la Tabella 27.

Tabella 27 – I valori simulati di $be(t=1)$ e della seconda componente di y_1

	$Be(t=1)$	$y_1 - 2, be(j^*)$ vs $be(R_f)$
Media teorica	-0,05533	-967.846,07
Media simulata	-0,05542	-837.813,50
Standard dev.	0,02895	43.695.937
Asimmetria	0,44509	-0,4450865
VaR 0,050%	-	-132.403.252

L'elemento di maggior interesse riguarda la *standard deviation* del tasso di best estimate: essa è all'incirca il 55% della sua media e, con il fine di dare un'indicazione dell'impatto di una variazione del tasso di BE in $t = 1$, si specifica che qualora il tasso decresca di una quantità pari alla sua *standard deviation*, le perdite crescono a 44 milioni e mezzo circa, mentre un aumento del tasso pari al

proprio σ genera utile per poco meno di 43 milioni. Interessante è osservare che in termini di asimmetria e *shape* della distribuzione della seconda componente, il *driver* principale è proprio il tasso di BE.

$\hat{\mathbf{Y}}_1^{MCV \sim BestEstimate/v_0^b}$ – La componente legata alla differenza tra basi demografiche del I° ordine e quelle realistiche

L'ultima componente dell'utile demografico è pressoché marginale rispetto alla seconda sia in termini di posizione che in termini di aleatorietà: contrariamente alla seconda infatti, la sua volatilità è influenzata solamente dalla mortalità e ciò rende il suo CoV particolarmente contenuto.

Tabella 28 – Il valore atteso della terza componente di y_1

Formula	$(w_0 - \tilde{s}_1) \left[(be_0^{j^*,q} - v_0^b)(1 + j^*) - (be_1^{j^*,q} - v_1^b) \right] + (be_1^{j^*,q} - v_1^b) \cdot \tilde{z}_1$
Valore atteso	1,5 miliardi $\cdot ((-0,0036-0)(1+0,01)-(0,0178-0,0214)) + (0,0178-0,0214) \cdot 1.179.313$
	1,5 miliardi $\cdot [(-0,0036) \cdot (1+0,01) - (-0,0036)] - 4.316,608$
	$1.788,133 - 4.316,7 = -2.528,475$

Si osserva che gli scarti tra il valore atteso dei flussi attualizzato con j^* e il tasso di riserva matematica totale calcolato come nel bilancio civilistico, variano esclusivamente per la base demografica utilizzata. In questo contesto giocano un ruolo preponderante le singole probabilità di decesso: il tasso di riserva matematica totale è calcolato su probabilità di sopravvivenza maggiori (ISTAT2016 Adjusted) rispetto al proprio minuendo ed esse riducono l'effetto della c.d. attualizzazione demografica. Il risultato complessivo è che sia in $t = 0$ che in $t = 1$, il valore assoluto del tasso di RM totale è maggiore del tasso di

BE^{j^*} , ed è proprio il salto nell'istante successivo che porta una perdita attesa di poche migliaia di euro, esattamente il valore atteso della seconda componente. Si conclude l'analisi del portafoglio di CD mostrando tutti i valori relativi alle 3 componenti dell'utile demografico *market consistent* e le rispettive distribuzioni simulate (rispettivamente Tabella 29 e Figura 53).

Tabella 29 – I risultati delle componenti dell'utile demografico totale - CD

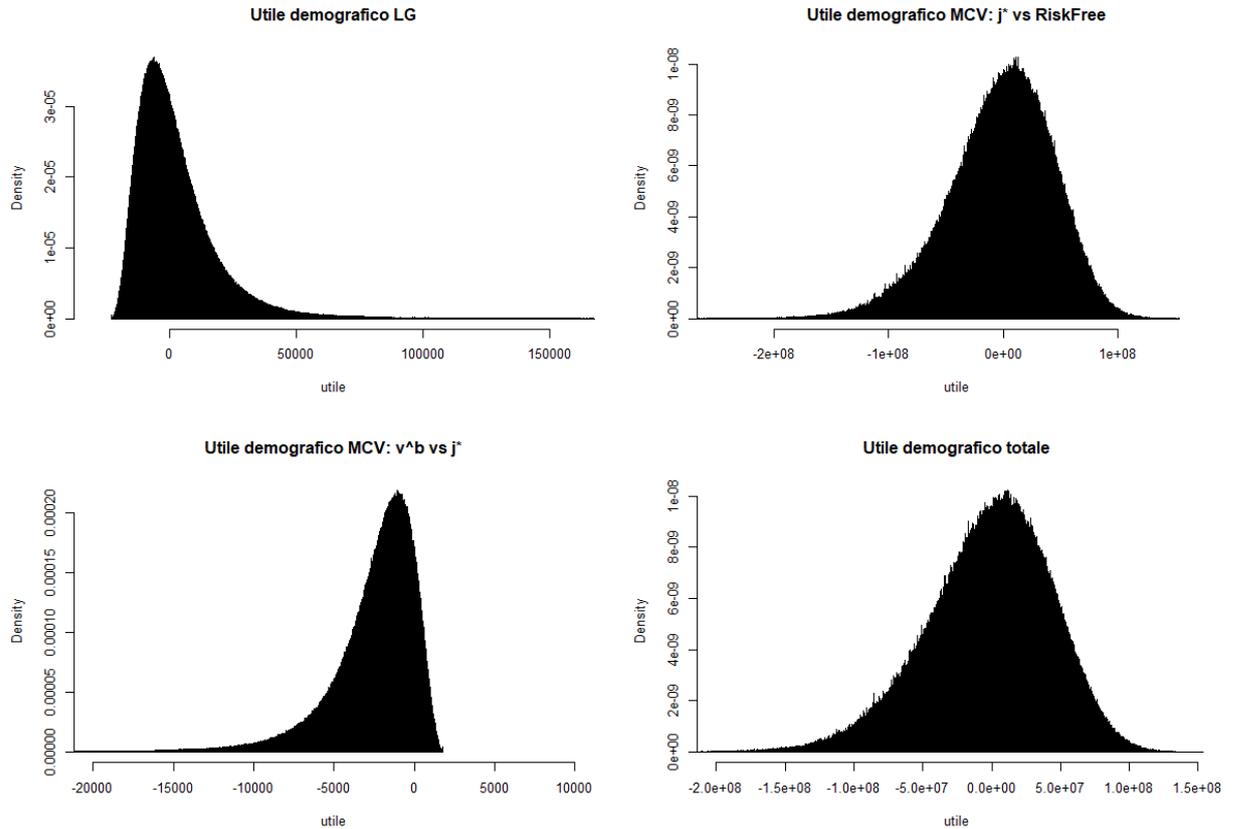
	Be(t=1)	y1 - 1, LG	y1 - 2, be(j*) vs be(Rf)	y1 - 3, Vb vs be(j*)	y1 - tot
Media teorica	-0,06	2.528,48	-967.846,60	-2.530,14	-967.848,26
Media simulata	-0,06	2.527,91	-827.317,50	-2.530,04	-827.319,63
Standard dev.	0,03	16.457,70	43.700.574,00	2.809,71	43.700.558,00
Asimmetria	0,4452	2,4062	-0,4452	-2,4062	-0,4452
VaR 0,50%	-	-19.439,56	-132.510.581,00	-15.780,81	-132.511.685,00

Capitali assicurati t=1: 1,509 miliardi

SCR/Cap.Ass. t=1	-	0,0013%	8,7786%	0,0010%	8,7787%
------------------	---	---------	---------	---------	---------

Dalla precedente Tabella è interessante notare che l'asimmetria dell'utile demografico *market consistent* coincide con l'asimmetria della componente più rilevante, ovvero la seconda. L'indice di asimmetria di quest'ultima componente coincide esattamente con l'opposto dell'indice di asimmetria del tasso di BE in $t = 1$: ne segue che un'indagine sullo *shape* della distribuzione di \tilde{y}_1^{MCV} è riconducibile ad uno studio di $\widetilde{be}_1^{Rf(1),q}$. In questo elaborato, avendo utilizzato il modello di Vašíček per stimare la curva dei tassi *spot* alla fine del periodo di valutazione, l'asimmetria della distribuzione è data dal rapporto tra il tasso istantaneo d'interesse in $t = 0$ e la sua media di lungo periodo a seconda del fatto che il primo sia maggiore o minore del secondo. Nel caso in cui i due coincidessero, l'effetto *mean reverting* sarebbe interamente esaurito e il γ sarebbe pari a 0.

Figura 53 - Le distribuzioni simulate delle 3 componenti di y_1



4.1.2 La MCV e l'utile demografico di un portafoglio di miste

Si analizzano e si commentano ora i risultati del modello volto a quantificare l'utile demografico *market consistent* qualora il portafoglio in esame sia costituito da un'unica coorte di 15.000 assicurati che hanno sottoscritto delle polizze miste. La durata delle polizze e le caratteristiche dei capitali assicurati rimangono invariate, le uniche differenze che si riscontrano rispetto al caso dei capitali differiti riguardano le basi tecniche. Esse sono così definite:

- I° ordine: $[j^* = 1\%, q_x^* = q(\text{ISTAT2014})]$
- II° ordine $[q_x = q(\text{ISTAT2016})]$

- Calcolo della Best Estimate: [Tassi privi di rischio: EIOPA – 31/12/2015, $q_x=q$ (ISTAT2016)]
- Non è presente la possibilità di riscattare: nonostante sia ben noto quanto in una polizza mista sia fondamentale e tipica la possibilità di riscattare specie nelle antidurate centrali, nel presente elaborato è stato deciso di presentare i risultati al netto della componente di eliminazione. Tale scelta è dovuta al fatto che, diversamente, i risultati perdono di chiarezza e risulta molto più faticoso mettere in luce gli aspetti essenziali del modello stocastico.

Si analizzano ora i risultati derivanti da 10 milioni di simulazioni, ricordando che anche in questo caso, il modello di Vašíček, in particolare r_0 e \bar{r} , è calibrato per rendere coerenti le stime del tasso di best estimate in $t = 1$. Si considerano le 3 componenti dell'utile demografico totale *market consistent*:

$${}_1\tilde{y}_1^{MCV} = {}_1\tilde{y}_1^{LG} + {}_1\tilde{y}_1^{MCV \sim RiskFree} + {}_1\tilde{y}_1^{MCV \sim BestEstimate/v_0^b}$$

${}_1\tilde{y}_1^{LG}$ – L'utile demografico calcolato con basi tecniche *locked* e prudenziali

Avendo utilizzato le stesse basi tecniche del *case study* del capito 2, i risultati relativi alla prima componente di utile demografico non presentano spunti di riflessione oltre a quelli già citati. Essi vengono mostrati nella Tabella 31.

Tabella 31 – I risultati relativi all'utile local GAAP – Miste

	y1 - 1, LG
Media teorica	260.745,10
Media simulata	260.470,40
Standard dev.	751.173,70
Asimmetria	-2,41
VaR 0,050%	-3.291.972,00
SCR/Cap.Ass. t=1	0,2181%

$\tilde{y}_1^{MCV \sim RiskFree}$ – La componente legata alla presenza dei tassi privi di rischio nel calcolo della best estimate

Si considera ora la componente dell'utile demografica, legata al fatto che nel tasso di best estimate i flussi attesi sono attualizzati con la curva dei tassi privi di rischio, anziché con il tasso tecnico j^* . Prima di analizzare i risultati esposti in Tabella 32, ci si sofferma sul valore assunto dai tassi di BE:

- Per quanto riguarda $be_0^{Rf(0), q} = -0,0778$ è necessario sottolineare due aspetti. Risulta fondamentale specificare che il tasso di best estimate fortemente negativo al netto della componente riscatti è dovuto a 2 fattori: il tasso spot $i(0,0,20) = 1,57\%$ circa (che impatta in maniera decisa sul valore attuale dell'ultima prestazione) e il differenziale tra le basi demografiche. Quindi, come nel caso del CD, anche in questo caso la struttura della polizza con una prestazione a scadenza che ha un valore atteso esponenzialmente maggiore delle altre prestazioni, fa sì che un tasso spot a scadenza maggiore di j^* , rende il tasso di BE fortemente negativo.
- Con riferimento a $be_0^{j^*, q}$ è chiaro per quanto detto che l'utilizzo di j^* implichi un valore attuale atteso delle prestazioni maggiore e, conseguentemente, un tasso di BE maggiore e prossimo allo 0, dato che l'unica differenza con il *pricing* sono proprio le probabilità di sopravvivenza ipotizzate realistiche.
- $E(\tilde{be}_1^{Rf(1), q})$ presenta un aumento rispetto allo stesso tasso calcolato al tempo precedente perché nel calcolo del valore attuale atteso dei premi entra un elemento in meno e per l'effetto delle spese di acquisizione concentrate nel primo anno.

Tabella 32 – Il valore atteso della seconda componente di y_1

Formula	$w_0 \left[\left(be_0^{Rf(0),q} - be_0^{j^*,q} \right) (1 + j^*) - \left(\widetilde{be}_1^{Rf(1),q} - be_1^{j^*,q} \right) \right] + \left(\widetilde{be}_1^{Rf(1),q} - be_1^{j^*,q} \right) \bar{z}_1$
Valore atteso	$1,5 \text{ miliardi} \cdot [(-0,0778+0,0038) \cdot (1+0,01) - (-0,0563-0,0179)] + (-0,0563-0,0179)$ 1.179.313
	$1,5 \text{ miliardi} \cdot [(-0,0740) \cdot (1+0,01) - (-0,0742)] - 86.220,07$
	$1,5 \text{ miliardi} \cdot (-0,0005) - 86.220,07 = -971.308,6$ $= 0,0642\% \text{ di } E(\widetilde{w}_1)$

La Tabella 32 mette in luce il fatto che il salto tra le due riserve in $t = 0$, capitalizzato al tasso $1 + j^*$ (considerando quindi l'effetto distorsivo della capitalizzazione così come definito nel Paragrafo 3.6) differisce dal salto delle riserve in $t = 1$ per 0,5 millesimi, valore che comporta una perdita media di più di 900.000 euro.

Tabella 33 – I valori simulati di $be(t=1)$ e della seconda componente di y_1

	Be(t=1)	$y_1 - 2, be(j^*) \text{ vs } be(Rf)$
Media teorica	-0,0563	-971.308,60
Media simulata	-0,0564	-879.463,10
Standard dev.	0,0301	45.415.704
Asimmetria	0,44	-0,44
VaR 0,050%	-	-137.571.854
SCR/Cap.Ass. t=1	-	9,11%

La Tabella 33, riassuntiva dei valori ottenuti dalle 10 milioni di simulazioni, evidenzia due concetti cardine: in primo luogo, una variazione pari allo 0,01% del tasso di BE aumenta o decresce l'utile della seconda componente di circa 110.000 euro; in secondo luogo, esattamente come nel caso del portafoglio di CD, $\tilde{y}_1^{MCV \sim RiskFree}$ è il *driver* principale del SCR legato esclusivamente alle passività. Anche per questo portafoglio l'assicuratore, nel caso in cui voglia essere solvibile anche a fronte di uno shock dei tassi d'interesse che si verifica solo nello 0,50%

dei casi totali, è obbligato a detenere in termini di requisito di capitale, più del 9% dei capitali assicurati.

$\tilde{\mathbf{y}}_1^{MCV \sim BestEstimate/v_0^b}$ – La componente legata alla differenza tra basi demografiche del I° ordine e quelle realistiche

Come nel caso del portafoglio di CD, l'ultima componente dell'utile demografico è poco significativa in termini di media della distribuzione; contrariamente però alla seconda componente, la sua volatilità è influenzata solamente dalla mortalità e ciò rende il suo CoV particolarmente contenuto.

Tabella 34 – Il valore atteso della terza componente di y_1

Formula	$(w_0 - \tilde{s}_1) \left[(be_0^{j^*,q} - v_0^b)(1 + j^*) - (be_1^{j^*,q} - v_1^b) \right] + (be_1^{j^*,q} - v_1^b) \cdot \tilde{z}_1$
Valore atteso	1,5 miliardi $\cdot ((-0,0038 - 0)(1 + 0,01) - (0,0179 - 0,0215)) + (0,0179 - 0,0215) \cdot 1.179.313$
	1,5 miliardi $\cdot [(-0,0038) \cdot (1 + 0,01) - (-0,0037)] - 4.346,559$
	1,5 miliardi $\cdot (-0,0002) - 4.346,559 = -260.745$ $< 0,02\%$ di $E(\tilde{w}_1)$

Come nel precedente *case study* relativo al portafoglio di CD, il valore attualizzato dei flussi ponderato con probabilità maggiori (si ricorda che il *pricing* è effettuato con ISTAT2014) porta un risultato minore: ciò implica che $be_t^{j^*,q} < v_t^b$. Per tale terza componente, lo scarto tra i due salti di riserva, al netto dell'effetto di capitalizzazione, si limita allo 0,02%; la conseguenza è che questa porzione di utile demografico acquisisce un ruolo marginale sul baricentro della distribuzione totale.

Si conclude l'analisi del portafoglio di miste mostrando tutti i valori relativi alle 3 componenti dell'utile demografico *market consistent* e le rispettive distribuzioni simulate.

Tabella 35 – I risultati relativi alle componenti dell'utile demografico totale -
Miste

	Be(t=1)	y1 - 1, LG	y1 - 2, be(j*) vs be(Rf)	y1 - 3, Vb vs be(j*)	y1 - tot
Media teorica	-0,06	260.745,10	-971.308,60	-260.733,50	-971.297,00
Media simulata	-0,06	260.470,40	-879.463,10	-260.734,50	-879.727,20
Standard dev.	0,03	751.173,70	45.415.704,00	2.829,63	45.423.003,00
Asimmetria	0,4422	-2,4083	-0,4422	-2,4083	-0,4420
VaR 0,50%	-	-3.291.972,00	-137.571.854,00	-274.116,40	-137.613.571,00

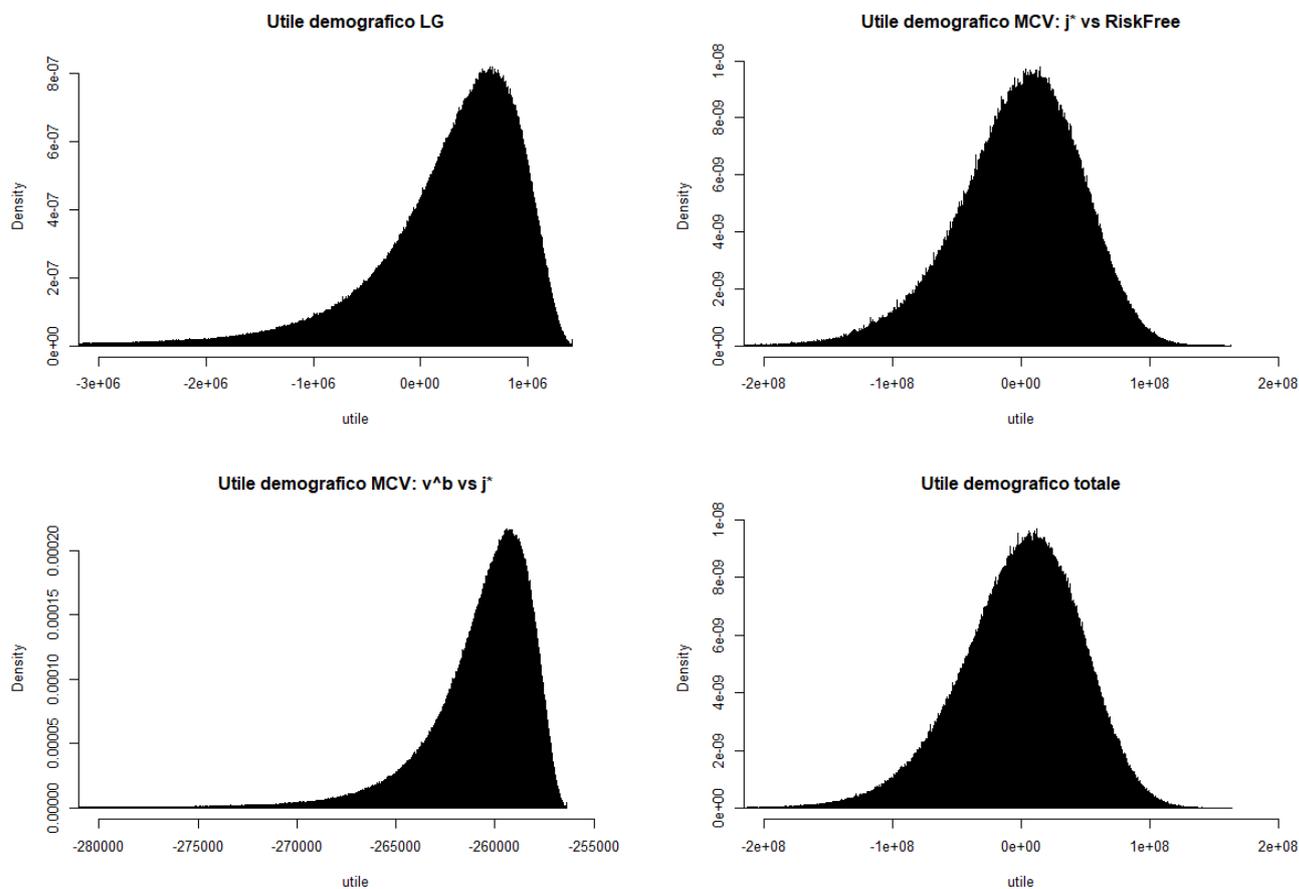
Capitali assicurati t=1: 1,509 miliardi

SCR/Cap.Ass. t=1	-	0,2181%	9,1139%	0,0182%	9,1167%
------------------	---	---------	---------	---------	---------

Si osserva che le riflessioni sull'indice di asimmetria fatte per il caso del portafoglio di CD, sono pienamente verificate anche in questo *case study*:

$$\gamma\left({}_1\tilde{y}_1^{MCV}\right) = \gamma\left({}_1\tilde{y}_1^{MCV \sim RiskFree}\right) = -\gamma\left(\widetilde{be}_1^{Rf(1),q}\right)$$

Figura 54 - Le distribuzioni simulate delle 3 componenti di y1



4.2 Un case study in $t = 10$ e $t = 19$: gli effetti della scelta del time horizon sul SCR

Al fine di ottenere una visione più completa del modello stocastico atto a valutare l'utile demografico *market consistent*, si presentano i risultati dell'analisi dello stesso a metà della vita dei contratti e nell'anno immediatamente prima della scadenza. Si ricorda che un vincolo imprescindibile del modello è quello di calibrarlo affinché il valore atteso della Best Estimate in $t = 11$ sia uguale al valore atteso dei flussi attualizzati con i tassi *forward* estraibili dall'ultima curva spot disponibile. Per questa ragione, il modello di Vašíček in $t = 11$ viene regolato indipendentemente dai parametri calibrati in $t = 0$. Nota la debolezza di questa approssimazione, si giustifica questa scelta con la necessità di mantenere una coerenza in termini di media e di aleatorietà del modello.

Si inizia la trattazione considerando il caso del portafoglio costituito da CD.

4.2.1 Il portafoglio di capitali differiti

Dopo aver ipotizzato che il tasso di BE in $t = 10$ sia uguale a 0,3775 (valore coerente con i tassi *forward* estrapolati in $t = 0$), si presentano in Tabella 36 i risultati di 10 milioni di simulazioni.

Tabella 36 – I risultati in $t = 10$ – Capitali differiti

	Be($t=11$)	y1 - 1, LG	y1 - 2, be(j^*) vs be(Rf)	y1 - 3, Vb vs be(j^*)	y1 - tot
Media teorica	0,43	230.554,30	-6.828.430,00	-230.554,30	-6.828.430,00
Media simulata	0,43	230.828,80	-6.983.101,00	-230.526,90	-6.982.799,10
Standard dev.	0,04	621.895,70	59.014.312,00	4.216,67	59.016.932,00
Asimmetria	0,5592	1,4951	-0,2296	-1,4713	-0,2297
VaR 0,50%	-	-795.801,60	-172.561.796,00	-248.132,20	-172.545.111,00

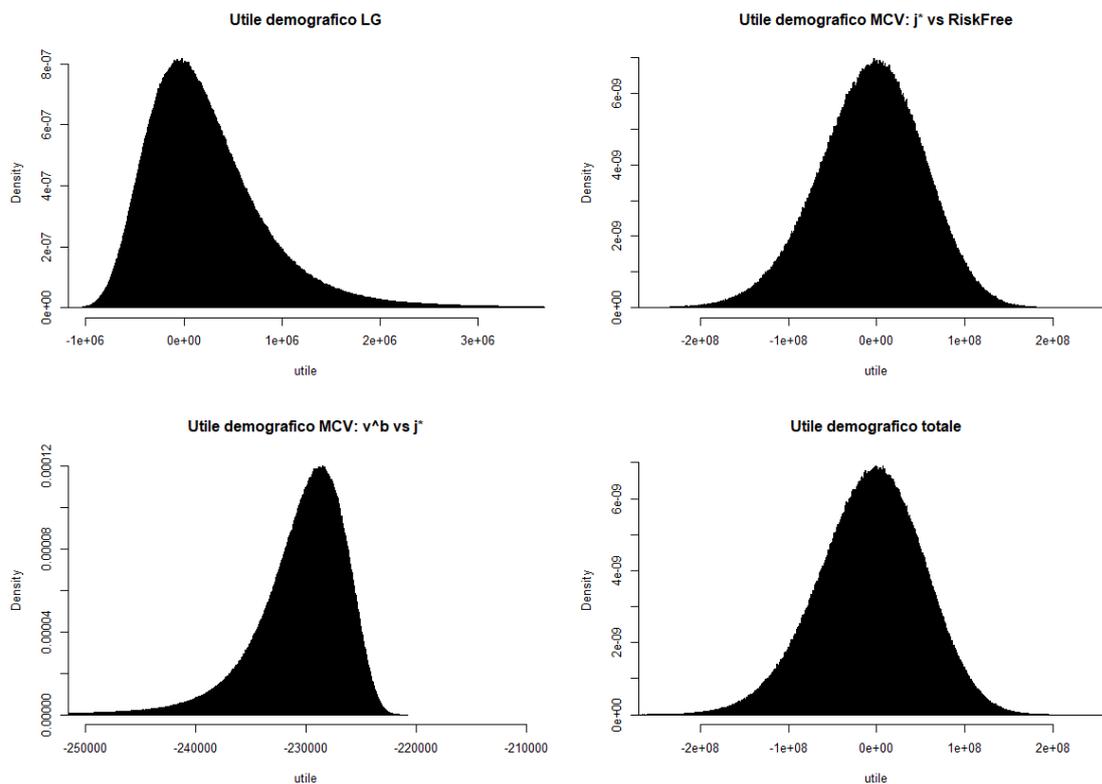
Valore atteso dei capitali assicurati $t=11$: 1,489 miliardi

SCR/Cap.Ass. $t=11$	-	0,0534%	11,5889%	0,0167%	11,5878%
---------------------	---	---------	----------	---------	----------

Rimandando al Paragrafo 4.3 le riflessioni riguardanti il rapporto tra i valori attesi della prima e della terza componente, in questa sede è interessante osservare due elementi:

- I) In primo luogo, la media della seconda componente è ancor più negativa: essendo la curva dei tassi *spot* attesi posta più in alto della curva dei tassi *spot* di partenza, la maggior distanza tra il tasso che attualizza l'ultima prestazione e j^* aumenta in valore assoluto l'entità della perdita. Si specifica fin da ora che osservando in maniera parziale questi risultati sembrerebbe che un aumento generale dei tassi privi di rischio sia un elemento sfavorevole per l'impresa di assicurazione. Come si commenterà nelle conclusioni del capitolo, la considerazione sui tassi *risk free* va fatta considerando anche l'utile finanziario, dove ad un loro aumento corrisponde un aumento atteso dei rendimenti ottenuti dall'investimento degli attivi.
- II) La calibrazione dei parametri del modello di Vašíček ha condotto ad un tasso istantaneo atteso molto più vicino al tasso istantaneo di lungo periodo, di quanto non capitasse per $t = 0$. La conseguenza di quanto detto è che l'effetto *mean reverting* è molto più debole, a differenza dell'effetto di σ che si manifesta in maniera più chiara portando una volatilità maggiore alla curva stimata dei tassi di attualizzazione, specie sulle prime antidurate.

Figura 55 – Le distribuzioni simulate delle 3 componente dell'utile demografico
MC - CD



Valutazione in $t=19$, time horizon = 1 year

Si presentano in Tabella 37 i risultati del modello simulativo riferito all'arco temporale tra [19,20].

Tabella 37 – I risultati del modello simulativo in $t = 19$

	y1 - 1, LG	y1 - 2, be(j*) vs be(Rf)	y1 - 3, Vb vs be(j*)	y1 - tot
Media teorica	1.040.705,00	-17.948.972,00	-1.040.705,00	-17.948.972,00
Media simulata	1.040.644,00	-17.948.972,00	-1.040.628,00	-17.948.956,00
Standard dev.	1.857.396,00	0,00	0,00	1.857.396,00
Asimmetria	0,9892	-	-	0,9892
VaR 0,50%	-2.448.563,00	-17.948.972,00	-1.040.628,00	-21.438.164,00

Valore atteso dei capitali assicurati $t=20$: 1,444 miliardi

SCR/Cap.Ass. $t=20$	0,1695%	1,2426%	0,0720%	1,4842%
---------------------	---------	---------	---------	---------

Dei risultati sopra esposti, si sottolineano 2 concetti chiave:

- I) Il valore atteso della seconda componente conferma il suo trend decrescente, in ragione dell'aumento dello scarto tra il tasso privo di rischio con cui viene attualizzata la prestazione finale e il tasso tecnico j^* .
- II) L'unica fonte di alea è data dalla mortalità all'interno della prima componente, ovvero l'utile demografico *local GAAP*. Essendo la valutazione relativa solo al *time span* [19,20], si ipotizza che il tasso di best estimate in ingresso è pari al suo valore atteso, mentre quello in uscita è pari a 1. Essendo anche il valore atteso dei flussi attualizzato con j^* in $t = 20$ (così come il tasso di RM *locked* e prudenziale) pari a 1, la seconda e la terza componente diventano variabili degeneri con risultato pari al proprio valore atteso.

4.2.2 Il portafoglio di Miste

L'ultimo *case study* che verrà presentato, fa riferimento al portafoglio di 15.000 miste, valutato in $t = 10$ e in $t = 19$ ovvero all'ultima antidurata prima della scadenza di tutti i contratti. Si ricorda che, come approfondito nel Capitolo 2 e nell'Appendice B, una polizza mista è priva di rischio nell'ultimo anno di contratto.

In primo luogo si espongono i dati relativi alle 10 milioni di simulazioni del primo caso con la Tabella 38.

Tabella 38 – I risultati del modello simulativo in $t = 10$ (miste)

	Be(t=11)	y1 - 1, LG	y1 - 2, be(j*) vs be(Rf)	y1 - 3, Vb vs be(j*)	y1 - tot
Media teorica	0,44	395.352,00	-6.990.026,00	-395.352,00	-6.990.026,00
Media simulata	0,44	395.409,00	-6.999.458,00	-398.213,80	-7.002.262,80
Standard dev.	0,04	601.860,50	59.840.313,00	1.923,26	59.844.387,00
Asimmetria	0,2290	-1,4929	-0,2290	-1,4930	-0,2290
VaR 0,50%	-	-2.118.223,00	-174.453.199,00	-406.246,40	-174.477.175,00

Valore atteso dei capitali assicurati t=11: 1,489 miliardi

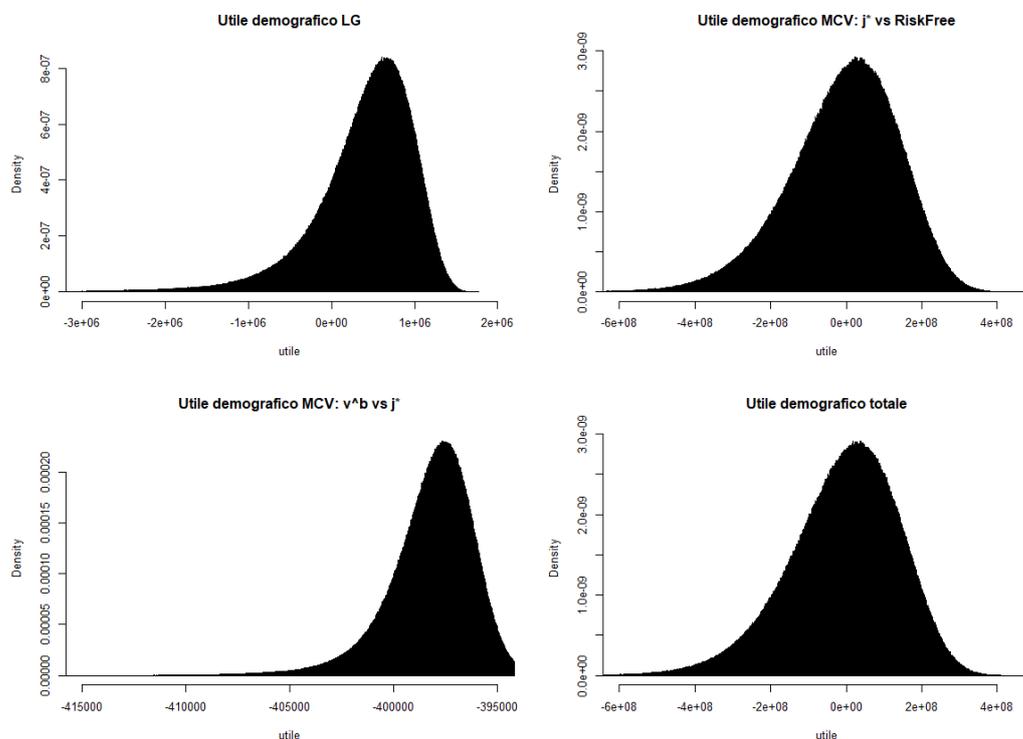
SCR/Cap.Ass. t=11	-	0,1423%	11,7159%	0,0273%	11,7175%
-------------------	---	---------	----------	---------	----------

Osservando fin da principio che questi risultati sono coerenti con quelli relativi al portafoglio di CD, si osservano i seguenti elementi:

- I) A parità di curva spot attesa in $t = 11$, essendo CD e mista due polizze strutturalmente simili in quanto entrambe caratterizzate da una prestazione caso vita a scadenza con VAA maggiore delle altre, il valore atteso della seconda componente di utile demografico *market consistent* è negativa e crescente in valore assoluto
- II) La somma delle medie della prima e della terza componente continua ad essere uguale a 0, mentre la volatilità della prima è sistematicamente maggiore di quella della terza. La causa risiede nel moltiplicatore dell'unica variabile aleatoria (\tilde{z}) esattamente pari al

salto tra il valore atteso dei flussi attualizzato con j^* e la riserva matematica calcolata con i principi civilistici.

Figura 56 - Le distribuzioni simulate delle componenti dell'utile demografico in $t=11$ - miste



Valutazione in $t=19$, time horizon = 1 year

Si presentano i risultati della valutazione dell'utile demografico *market consistent* in Tabella 39 e si commentano in seguito.

Tabella 39 – I risultati del modello simulativo in $t = 19$ (miste)

	y1 - 1, LG	y1 - 2, $be(j^*)$ vs $be(R_f)$	y1 - 3, V_b vs $be(j^*)$	y1 - tot
Media teorica	0,00	-18.035.198,00	0,00	-18.035.198,00
Media simulata	0,00	-18.035.198,00	0,00	-18.035.198,00
Standard dev.	0,00	0,00	0,00	0,00
Asimmetria	-	-	-	-
VaR 0,50%	0,00	-18.035.198,00	0,00	-18.035.198,00

Valore atteso dei capitali assicurati $t=20$: 1,444 miliardi

SCR/Cap.Ass. $t=20$	0%	1,25%	0%	1,25%
---------------------	----	-------	----	-------

I due elementi di maggior interesse riguardano:

- I) La prima componente, ${}_1\tilde{y}_1^{LG}$, è una variabile aleatoria degenera con valore nullo essendo la mista una polizza priva di rischio demografico nell'ultimo anno
- II) La terza componente, come verrà dimostrato nel Paragrafo seguente, è funzione della prima e, conseguentemente, anch'essa è una variabile degenera pari a 0
- III) ${}_1\tilde{y}_1^{MCV}$ è interamente descritto da ${}_1\tilde{y}_1^{MCV \sim RiskFree}$. Tale seconda componente non ha un valore atteso nullo in quanto i salti di riserva in $t = 19$ non sono nulli a differenza di quelli in $t = 20$; questo è il motivo perché anch'essa è una variabile degenera.

Avendo messo in luce l'importanza della seconda componente rispetto alla prima e la terza e avendo individuato i *driver* della stessa, nel prossimo Paragrafo si studierà in maniera approfondita la relazione tra la prima e la terza componente che, come emerso dai *case studies* precedenti, hanno valore atteso della somma pari a 0.

4.3 Il valore atteso della somma di ${}_1\tilde{y}_1^{LG}$ e

$${}_1\tilde{y}_1^{MCV \sim BestEstimate/v_0^b}$$

Come suggerito dai risultati dei modelli simulativi del Paragrafo precedente, si indaga ora sul valore atteso della somma della prima e della terza componente dell'utile demografico *market consistent*.

Si considera la somma

$${}_1\tilde{y}_1^{LG} + {}_1\tilde{y}_1^{MCV \sim BestEstimate/v_0^b}$$

riferita al caso generico del capitale differito in $t = 0$ (dove $\tilde{x}_1 = 0$) e riferendo la valutazione al *time span* $[0,1]$.

$$\begin{aligned} & {}_1\tilde{y}_1^{LG} + {}_1\tilde{y}_1^{MCV \sim BestEstimate/v_0^b} \\ &= \{ \tilde{w}_t \cdot (v_t^b + \pi)(1 + j^*) - v_{t+1}^b \tilde{w}_{t+1} \} + \\ &+ \{ \tilde{w}_t \left[(be_t^{j^*,q} - v_t^b)(1 + j^*) - (be_{t+1}^{j^*,q} - v_{t+1}^b) \right] + (be_{t+1}^{j^*,q} - v_{t+1}^b) \cdot \tilde{z}_{t+1} \} \\ &= \{ \tilde{w}_t \cdot (v_t^b + \pi)(1 + j^*) - v_{t+1}^b \tilde{w}_{t+1} \} + \\ &+ (be_t^{j^*,q} - v_t^b) \tilde{w}_t (1 + j^*) - (be_{t+1}^{j^*,q} - v_{t+1}^b) (\tilde{w}_t - \tilde{z}_1) \end{aligned}$$

e, non essendo considerati i riscatti, $(\tilde{w}_t - \tilde{z}_1) = \tilde{w}_1$

La precedente formula è quindi riscrivibile come,

$$\begin{aligned} & \pi(1 + j^*)\tilde{w}_t + v_t^b(1 + j^*)\tilde{w}_t - v_{t+1}^b\tilde{w}_{t+1} + \\ &+ be_t^{j^*,q}(1 + j^*)\tilde{w}_t - v_t^b(1 + j^*)w_0 - be_1^{j^*,q}\tilde{w}_1 + v_1^b\tilde{w}_1 \end{aligned}$$

Eliminando i termini uguali, rimane:

$$\pi(1 + j^*)\tilde{w}_t + be_t^{j^*,q}(1 + j^*)\tilde{w}_t - be_{t+1}^{j^*,q}\tilde{w}_{t+1}$$

Riscrivibile come

$$\begin{aligned} & \tilde{w}_t \left[\pi(1 + j^*) + be_t^{j^*,q}(1 + j^*) \right] - be_{t+1}^{j^*,q}(\tilde{w}_t - \tilde{z}_1) \\ &= \tilde{w}_t \left[\pi(1 + j^*) + be_t^{j^*,q}(1 + j^*) - be_{t+1}^{j^*,q} \right] + be_{t+1}^{j^*,q}(\tilde{z}_1) \end{aligned}$$

Il valore atteso della somma di ${}_1\tilde{y}_t^{LG}$ e ${}_1\tilde{y}_t^{MCV \sim BestEstimate/v_0^b}$ è esprimibile come

$$\tilde{w}_t \left[\pi(1 + j^*) + be_t^{j^*,q}(1 + j^*) - be_{t+1}^{j^*,q} \right] + be_{t+1}^{j^*,q}(\tilde{w}_t \cdot q_{x+t})$$

ed è uguale a 0 se e solo se

$$\pi(1 + j^*) + be_t^{j^*,q}(1 + j^*) = be_{t+1}^{j^*,q}(1 - q_{x+t})$$

Ovvero, si tratta di dimostrare che

$$\left(\pi + be_t^{j^*,q} \right) (1 + j^*) = be_{t+1}^{j^*,q} \cdot {}_1p_{x+t}$$

4.3.1 L'equazione ricorsiva “mista” (j^* e q)

L'equazione con cui termina il Paragrafo precedente è molto simile alla formula ricorsiva di Fouret, con la differenza che il tasso di PAC π è calcolato su basi tecniche del I° ordine, mentre la c.d. $be_0^{j^*,q}$ è calcolata sul tasso tecnico j^* e basi demografiche realistiche p .

Si considera il caso di un CD a premio unico, con capitale assicurato unitario. La durata della polizza è pari a n e la valutazione avviene nell'istante temporale t . In questo contesto,

$$be_t^{j^*,q} = {}_{n-t}p_{x+t} (1 + j^*)^{-(n-t)}$$

Mentre

$$be_{t+1}^{j^*,q} = {}_{n-t-1}p_{x+t+1} (1 + j^*)^{-(n-t-1)}$$

Ne segue che

$$be_t^{j^*,q}(1 + j^*) = {}_{n-t}p_{x+t} (1 + j^*)^{-(n-t-1)}$$

E, contemporaneamente,

$$\begin{aligned} be_{t+1}^{j^*,q} {}_1p_{x+t} &= {}_{n-t-1}p_{x+t+1} \cdot {}_1p_x \cdot (1 + j^*)^{-(n-t-1)} \\ &= {}_{n-t}p_{x+t} (1 + j^*)^{-(n-t-1)} \end{aligned}$$

Da cui, $be_t^{j^*,q}(1 + j^*) = be_{t+1}^{j^*,q} {}_1p_{x+t}$

Considerando il caso in cui anziché un unico PU vengano versati PAC per l'intera durata del contratto, l'obiettivo è quello di dimostrare che

$$\left(be_t^{j^*,q} + \pi \right) (1 + j^*) = be_{t+1}^{j^*,q} {}_1p_{x+t}$$

Con π tasso di PAC calcolato su basi tecniche del I° ordine.

Le grandezze definite precedentemente assumerebbero i seguenti valori:

$$be_t^{j^*,q} = {}_{n-t}p_{x+t} (1+j^*)^{-(n-t)} - \pi \sum_{h=0}^{n-t-1} h p_{x+t} (1+j^*)^{-h}$$

Mentre $be_{t+1}^{j^*,q}$

$$be_{t+1}^{j^*,q} = {}_{n-t-1}p_{x+t+1} (1+j^*)^{-(n-t-1)} - \pi \sum_{h=0}^{n-t-2} h p_{x+t+1} (1+j^*)^{-h}$$

con riferimento a $be_t^{j^*,q}$, estraendo il primo termine della sommatoria, si ottiene

$$be_t^{j^*,q} = {}_{n-t}p_{x+t} (1+j^*)^{-(n-t)} - \pi \left(1 + \sum_{h=1}^{n-t-1} h p_{x+t} (1+j^*)^{-h} \right)$$

Riprendendo i passaggi relativi alla formula ricorsiva del tasso di BE qualora la curva dei tassi spot in $t+1$ coincida perfettamente con i tassi attesi in t (Paragrafo 3.5), si esegue una riduzione dell'indice della sommatoria: $s = h - 1$

$$be_t^{j^*,q} = {}_{n-t}p_{x+t} (1+j^*)^{-(n-t)} - \pi \left(1 + \sum_{s=0}^{n-t-2} s+1 p_{x+t} (1+j^*)^{-(s+1)} \right)$$

Si considera ora la trasformazione

$$\frac{be_t^{j^*,q}}{{}_1E_{x+t}^{j^*,q}} = \frac{{}_{n-t}p_{x+t}}{{}_1p_{x+t}} \frac{(1+j^*)^{-(n-t)}}{(1+j^*)^{-(1)}} - \pi \left(\frac{1}{{}_1E_{x+t}^{j^*,q}} + \sum_{s=0}^{n-t-2} \frac{s+1 p_{x+t}}{{}_1p_{x+t}} \cdot \frac{(1+j^*)^{-(s+1)}}{(1+j^*)^{-(1)}} \right)$$

Da cui

$$\frac{be_t^{j^*,q}}{{}_1E_{x+t}^{j^*,q}} = {}_{n-t-1}p_{x+t+1} (1+j^*)^{-(n-t-1)} - \frac{\pi}{{}_1E_{x+t}^{j^*,q}} - \pi \cdot \sum_{s=0}^{n-t-2} s p_{x+t+1} (1+j^*)^{-s}$$

Si ottiene quindi, considerando che il primo e il secondo termine a destra del segno di uguale coincidono con $be_{t+1}^{j^*,q}$

$$\frac{be_t^{j^*,q}}{{}_1E_{x+t}^{j^*,q}} = be_{t+1}^{j^*,q} - \frac{\pi}{{}_1E_{x+t}^{j^*,q}}$$

Ovvero

$$\left(be_t^{j^*,q} + \pi \right) (1+j^*) = be_{t+1}^{j^*,q} {}_1p_{x+t}$$

Q.E.D.

4.3.2 Implicazioni e corollari dell'equazione ricorsiva “mista” (j^* e q)

Il primo corollario derivante da quanto appena dimostrato è che, indipendentemente dalle basi tecniche con cui sia stato effettuato il *pricing*, la formula ricorrente

$$(be_t^{j^*,q} + \pi)(1 + j^*) = be_{t+1}^{j^*,q} p_{x+t}$$

è vera, purché

- 1) La somma del valore attuale atteso dei flussi all'inizio del periodo e del tasso di PAC venga capitalizzata allo stesso tasso con cui vengono attualizzati i flussi monetari
- 2) Le probabilità che moltiplicano $be_{t+1}^{j^*,q}$ siano le stesse con cui vengono ponderati i valori attualizzati dei flussi all'interno dei tassi di BE.

Si riprende ora la riflessione riguardante la somma dei valori attesi della prima e della terza componente dell'utile demografico.

Dimostrata la veridicità dell'equazione ricorrente sopracitata, ne segue che

$$E \left[{}_1\tilde{y}_t^{LG} + {}_1\tilde{y}_t^{MCV \sim BestEstimate/v_0^b} \right] = 0$$

A conferma di ciò, si presentano in Figura 57 e Figura 58 gli andamenti dei valori attesi delle due componenti (si presenta prima il caso del portafoglio di CD e poi quello di miste): è chiaro che ogni valore atteso dell'utile demografico local GAAP, sia uguale all'opposto del valore atteso della terza componente.

Figura 57 - I valori attesi della prima e della terza componente - CD

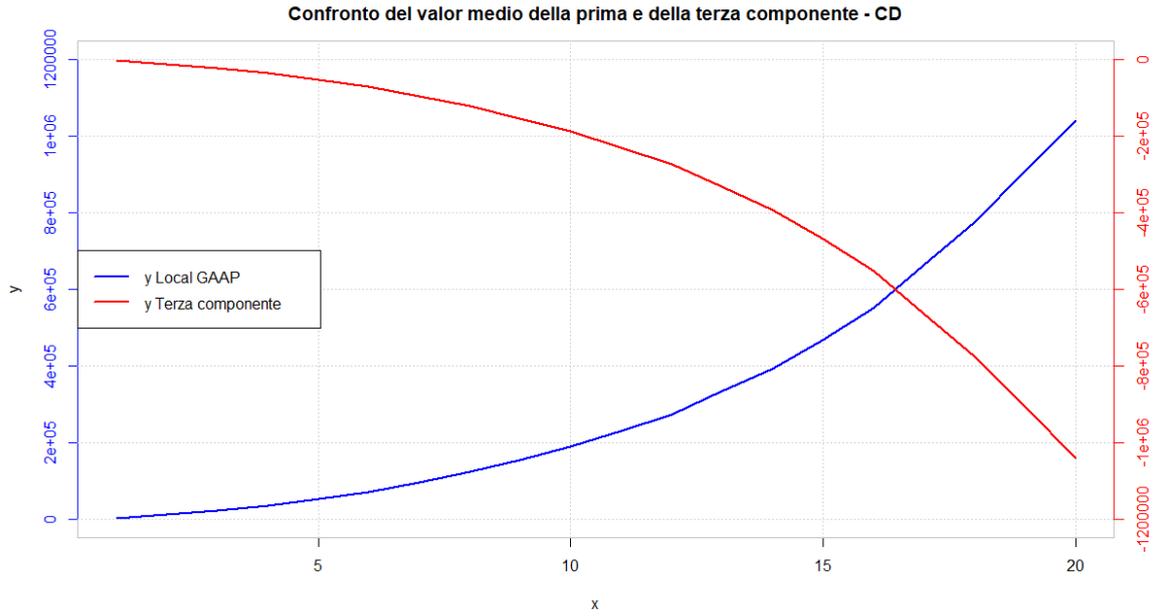
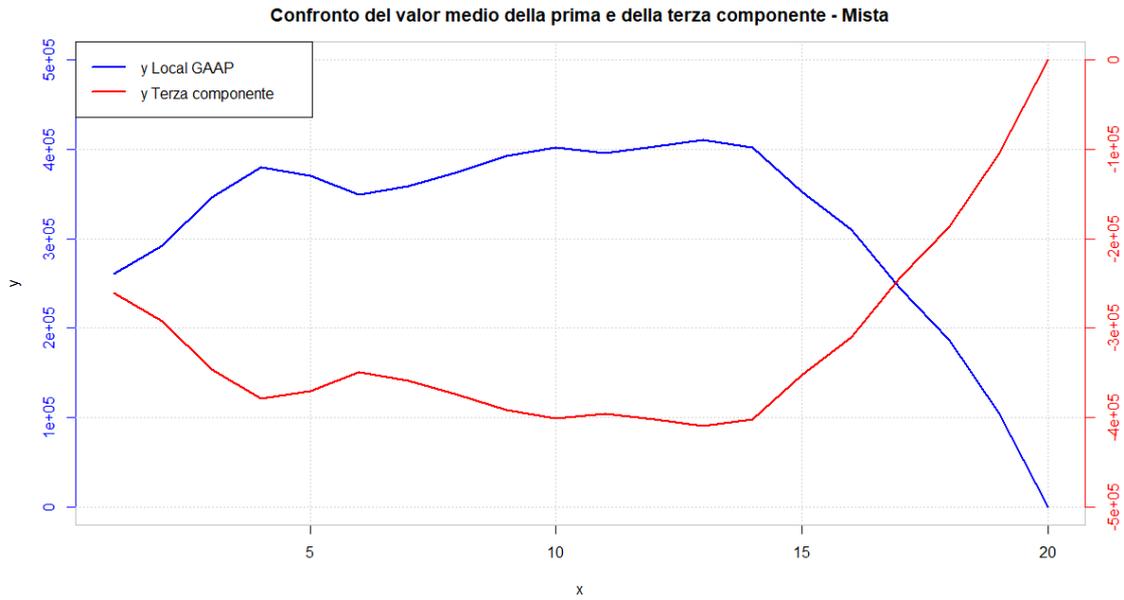


Figura 58 - I valori attesi della prima e della terza componente - Mista



Il corollario di quanto appena evidenziato è che

$$\begin{aligned}
 E[\tilde{y}_{t+1}^{MCV}] &= E[\tilde{y}_{t+1}^{MCV \sim RiskFree}] \\
 &= E\left[(\tilde{w}_t - \tilde{s}_1) \left[(be_t^{Rf(0),q} - be_t^{j^*,q})(1 + j^*) - (\bar{be}_{t+1}^{Rf(1),q} - be_{t+1}^{j^*,q}) \right] \right. \\
 &\quad \left. + (\bar{be}_{t+1}^{Rf(1),q} - be_{t+1}^{j^*,q}) \cdot \tilde{z}_{t+1} \right]
 \end{aligned}$$

che, in assenza di riscatti e considerando la valutazione in t dell'utile demografico al tempo $t + 1$,

$$E[\tilde{y}_{t+1}^{MCV}] = w_0 p_{x+t} \left[\left(E[\widetilde{be}_t^{Rf(0),q}] - be_t^{j^*,q} \right) (1 + j^*) - \left(E[\widetilde{be}_{t+1}^{Rf(1),q}] - be_{t+1}^{j^*,q} \right) \right] \\ + \left(\left[\widetilde{be}_{t+1}^{Rf(1),q} \right] - be_{t+1}^{j^*,q} \right) \cdot w_0 \cdot q_{x+t}$$

L'elemento messo in luce da questo ultimo passaggio è l'importanza della stima della curva dei tassi privi di rischio al tempo successivo: come risalta dal *case study*, variazioni dello 0,01% del tasso di BE in $t = 1$ comportano variazioni di decine di milioni di utile. Questo concetto, punto di arrivo del presente elaborato, verrà ripreso nelle seguenti Conclusioni; si conclude il capitolo evidenziando che l'introduzione della MCV obbliga l'assicuratore non solo a scegliere con cura le basi demografiche da utilizzare in fase di *pricing*, ma a stimare costantemente e accuratamente la curva dei tassi privi di rischio, *driver* principale dell'utile demografico.

4.4 Riepilogo e conclusioni

I *case studies* e le formule ricorrenti fino ad ora esposti e dimostrate mettono in luce una nuova fisionomia dell'utile demografico: se in un contesto *local GAAP* era possibile scindere completamente la componente finanziaria da quella puramente demografica, in un contesto Solvency II le due componenti sono strettamente correlate tra loro.

Riprendendo la scomposizione dell'utile demografico presentata nel Paragrafo 3.3

$${}_1\tilde{y}_1^{MCV} = {}_1\tilde{y}_1^{LG} + {}_1\tilde{y}_1^{MCV \sim RiskFree} + {}_1\tilde{y}_1^{MCV \sim BestEstimate/v_0^b}$$

ed essendo dimostrato che

$$E \left[{}_1\tilde{y}_1^{LG} \right] - E \left[{}_1\tilde{y}_1^{MCV \sim Be/v_0^b} \right] = 0$$

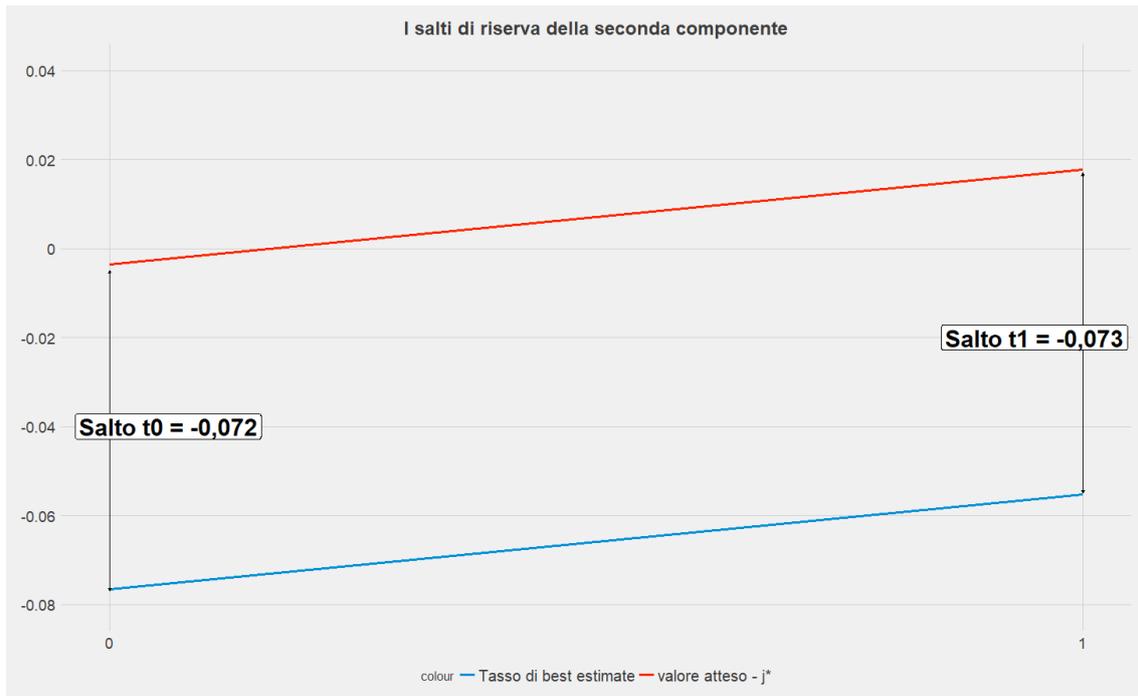
almeno per quanto riguarda il valore atteso dell'utile demografico *market consistent*, l'analisi si riconduce allo studio della seconda componente, precedentemente definita come

$$\begin{aligned} {}_1\tilde{y}_1^{MCV \sim RiskFree} = & (w_0 - \tilde{s}_1) \left[\left(be_0^{Rf(0),q} - be_0^{j^*,q} \right) (1 + j^*) - \left(\widetilde{be}_1^{Rf(1),q} - be_1^{j^*,q} \right) \right] \\ & + \left(\widetilde{be}_1^{Rf(1),q} - be_1^{j^*,q} \right) \cdot \tilde{z}_1 \end{aligned}$$

Concentrarsi sulla seconda componente dell'utile demografico, significa in primo luogo analizzare i salti tra la best estimate e il valore atteso dei tassi, attualizzato al tasso costante j^* .

Con riferimento alla prima antidurata del portafoglio di capitali differiti, con la Figura 59 si evidenzia come il primo salto di riserva, capitalizzato per il fattore $(1 + j^*)$, comporta un utile demografico atteso negativo pur essendo minore del secondo salto in termini assoluti.

Figura 59 - I primi salti di riserva (2° componente dell'utile demografico) del portafoglio di capitali differiti, $t=0$



L'elemento chiave in termini di utile demografico atteso è quindi la struttura della curva dei tassi privi di rischio attesa alla fine del periodo di valutazione: qualora essa implichi che il primo salto di riserva, opportunamente capitalizzato, non sia almeno pari al salto alla fine del periodo, si verifica una perdita.

Tabella 40 – I valori attesi della seconda componente dell'utile demografico – Portafogli di capitali differiti

	Media teorica
t=0	-967.847
t=10	-6.828.430
t=19	-17.948.972

La Tabella 40, riassuntiva dei valori attesi delle seconde componenti (e quindi dell'intero utile demografico *market consistent*) degli utili demografici dei portafogli di capitali differiti, dimostra che l'utile demografico *market consistent* previsto sia negativo nei casi in cui la curva dei tassi *forward* preveda un generale aumento dei tassi rispetto alla curva *spot*.

La ragione di questo fenomeno è da ricercare nel fatto che, all'aumento della curva dei tassi, segue una riduzione dei salti di riserva al crescere dell'antidurata (il primo salto è quindi maggiore del secondo), ma essendo la best estimate minore del valore atteso dei flussi attualizzato con j^* , il primo salto è negativo e il secondo, non lo compensa.

Il discorso è analogo per tutte quelle tipologie di polizze che prevedono una prestazione a scadenza con valore atteso preponderante.

Operativamente, tutto ciò porterebbe a pensare che un aumento atteso dei tassi privi di rischio porti una perdita attesa maggiore per l'impresa di assicurazione; si osserva che nella formulazione dell'utile assicurativo totale mostrata nel Paragrafo 3.2, l'utile finanziario cresce all'aumentare del rendimento atteso degli investimenti: questo significa che, complessivamente, la perdita in termini demografici è più che compensata dai proventi finanziari e, complessivamente, un aumento dei tassi *risk free* rimane un elemento positivo per la compagnia di assicurazione.

Con riferimento alla volatilità, la Tabella 41 riassume le *standard deviations* delle seconde componenti degli utili demografici, al variare dell'antidurata.

Tabella 41 – Gli s.q.m. delle seconde componenti degli utili demografici al variare di t

	Standard deviation
t=0	43.700.574,00
t=10	59.014.312,00
t=19	0,00

In questo contesto, la maggior volatilità è data esclusivamente dal parametro σ del modello di Vašíček: poiché nel presente elaborato è stato necessario ricalibrare lo stesso per ogni modello (proprio per avere coerenza in termini di tasso di best estimate atteso), la volatilità della seconda componente deriva principalmente dalla volatilità del tasso di best estimate. Lo s.q.m. di quest'ultimo, a sua volta,

dipende dai parametri assunti dal modello di Vašíček: se il tasso istantaneo è lontano dalla media di lungo periodo prevale l'effetto *mean reverting*, diversamente σ si manifesta in tutta la sua portata.

Da un punto di vista meramente pratico, l'utilizzo del modello di Vašíček non è l'ideale per stimare i tassi privi di rischio futuri, soprattutto perché EIOPA utilizza una metodologia differente. Specificata questa debolezza, ne consegue che i rapporti tra gli SCR calcolati alle varie antidurate e i valori attesi dei capitali assicurati, sono strettamente correlati alle volatilità delle seconde componenti.

Con la Tabella 42 si mostrano tali valori

Tabella 42 – L'andamento del rapporto SCR su capitali assicurati attesi, al variare dell'antidurata – caso dei capitali differiti

	SCR/Capitali assicurati
t=0	8,78%
t=10	11,59%
t=19	1,48%

Riflessioni finali

Il presente elaborato volge interamente la sua attenzione alla variabile aleatoria utile demografico di una compagnia di assicurazione sulla durata di vita. L'obiettivo primo che ha incoraggiato la trattazione di questo argomento, è stato quello di elaborare un modello stocastico che non si limitasse a quantificare gli utili o le perdite previste da un assicuratore, ma individuasse le maggiori fonti di rischio in un contesto normativo ben delineato, ossia quello attuale di Solvency II.

Proprio per capire al meglio quali sono le logiche che hanno portato alla regolamentazione attuale, in primo luogo è stata presentata l'evoluzione normativa del requisito patrimoniale di solvibilità per il solo rischio demografico per un assicuratore, focalizzando l'interesse su come l'orientamento verso una visione *risk based* e *market consistent* abbia portato il legislatore internazionale non solo a ridefinire la metodologia di calcolo del requisito, ma a definire i tratti necessari per un sistema di *governance* efficace ed efficiente nonché a valutare a *fair value* attività e passività in capo all'impresa di assicurazione.

Una volta descritto quale sia stato il percorso giuridico e attuariale che ha trasformato la metodologia di calcolo di un requisito di capitale per il rischio demografico da “semplici” coefficienti moltiplicativi di riserve matematiche e capitali sotto rischio (solo se positivi) alla tecnica c.d. Δ BOF, l'interesse è stato rivolto alla ricerca di una metodologia che fosse in grado di quantificare il rischio legato all'utile demografico, esplicitando i fattori che partecipano alla formazione del suddetto rischio. Il secondo capitolo infatti ha ripreso un modello stocastico presentato nel testo “*Un modello di teoria del rischio per la valutazione della solvibilità di una Compagnia di assicurazione sulla vita*” [41], modello fondato sul concetto di coorte. L'utilizzo del modello originale è stato svolto con la duplice finalità di cogliere in maniera puntuale gli effetti sulla variabile aleatoria utile

demografico di cambiamenti di basi tecniche e, soprattutto, per studiare gli effetti, in termini di beneficio di diversificazione, derivanti dalla detenzione di due portafogli laddove il primo sia esposto al rischio di longevità ed il secondo al rischio di mortalità.

Tale analisi è stata condotta su diverse antidurate (alla prima disponibile, a metà della vita contrattuale e a scadenza) cosicché il peso dei portafogli, funzione dei tassi di capitale sotto rischio (a loro volta funzione dell'antidurata), cambiasse e fosse possibile osservare come l'effetto di diversificazione fosse tanto consistente quanto più i portafogli assumevano pesi simili. L'utilizzo delle funzioni copula per modellizzare la dipendenza tra gli utili demografici dei portafogli presi in esame, ha portato a quantificare la riduzione di requisito di capitale: la copula di Clayton, opportunamente parametrizzata, comporta una diminuzione rispetto a quanto si ottiene con la copula Gaussiana calibrata con lo stesso parametro; tale diminuzione è compresa nell'intervallo [50%,100%] a seconda dei pesi dei due portafogli nelle varie antidurate.

Conosciuta ed articolata in svariate forme la versione del suddetto modello concepita per un contesto giuridico coerente con i principi civilistici, l'idea che ha motivato la stesura di questo elaborato è stata quella di riscrivere tale modello stocastico rendendolo concorde con Solvency II.

Al fine di non confondere gli effetti delle singole componenti, non solo si è riscritto l'utile demografico nella sua versione *market consistent*, ma sono state altresì riscritte tutte le cinque componenti dell'utile assicurativo così da cogliere pienamente gli aspetti legati alle relazioni tra le stesse. Questa scelta è stata ripagata, perché, come dimostrato nel quarto capitolo, il *driver* dell'utile demografico *market consistent* è di natura prettamente finanziaria: infatti gli effetti derivanti da una variazione dei tassi privi di rischio (tassi con cui viene attualizzata la best estimate) porta un effetto negativo sull'utile demografico e, contemporaneamente, un effetto positivo sull'utile da sovrainteresse.

Come sottolineato precedentemente, tra il modello utilizzato per stimare la curva dei tassi d'interesse necessari alla stima della best estimate alla fine del periodo di valutazione e il modello utilizzato da EIOPA, c'è una discordanza che si manifesta in distorsioni in quanto a variabilità ed asimmetria. Un possibile spunto di approfondimento di questo elaborato potrebbe essere quello di utilizzare la stessa metodologia estrapolativa di EIOPA, cosicché anche il requisito di capitale alle varie antidurate, possa essere calcolato senza dover scontare l'effetto della debolezza intrinseca derivante dalla calibrazione dei parametri del modello di Vašíček.

Con la Tabella 43 si riportano i risultati relativi all'utile demografico *market consistent* (il c.d. utile totale) e l'utile calcolato con i principi *local GAAP*.

Tabella 43 – L'utile demografico local GAAP e quello market consistent – Portafoglio di capitali differiti

	y1 - 1, LG	y1 - tot
Media teorica	230.554	-6.828.430
Media simulata	230.829	-6.982.799
Standard dev.	621.896	59.016.932
Asimmetria	1,50	-0,23
VaR 0,50%	-795.802	-172.545.111
SCR/Cap.Ass. t=11	0,05%	11,59%

L'aspetto più interessante è che la mortalità stocastica che impatta sui due utili è esattamente la stessa: l'elemento innovativo dell'utile demografico *market consistent* che lo modifica fortemente sia in termini di media che in termini di volatilità, è l'attualizzazione con i tassi privi di rischio.

Un aspetto particolarmente interessante che costituisce lo sviluppo naturale di questo elaborato, è sicuramente lo studio di possibili metodologie di Asset Liability Management che può intraprendere una compagnia di assicurazione, con il fine di ridurre gli effetti della volatilità dei tassi d'interesse e, conseguentemente, il proprio requisito di capitale.

In conclusione si osserva che considerare l'utile demografico come una monade leibniziana comporta una visione distorta della realtà, in quanto l'utile assicurativo propriamente detto non è dato dalla semplice somma delle sue componenti, quanto dall'interazione delle stesse tra loro.

In un contesto in cui mortalità e rischio di tasso d'interesse assumono i ruoli di protagonisti in termini di solvibilità di un'impresa di assicurazione, questo elaborato evidenzia come la metodologia c.d. Δ BOF presente in Solvency II impone di considerare anche il lato degli attivi, proprio per non avere una visione incompleta circa il requisito di capitale. Il compito dell'assicuratore diventa quindi quello di ottenere un mix ottimale sia in termini di scelte legate alle passività (tasso garantito all'assicurato e tavola demografica utilizzata in fase di *pricing*) che di investimenti in prodotti volti a coprire l'assicuratore da oscillazioni sfavorevoli sia dei trend di mortalità che dei tassi privi di rischio.

Appendice A – Tavole selezionate e tavole proiettate: il caso delle A62

A.1 Tavole selezionate e tavole proiettate

Nel Capitolo 2 si è citata la base demografica q_t^* ed è stato mostrato il concetto di caricamento di sicurezza implicito. Bisogna precisare però che le probabilità annuali di morte per individui di ogni età, sono informazioni ricavabili da un apposito strumento detto tavola di mortalità.

Il primo elemento di una generica tavola di mortalità indica un numero fittizio (tendenzialmente pari a 100000) di individui di età 0, appartenenti ad una collettività chiusa a nuovi ingressi. La tavola mostra come tale collettività decresce in termini numerici, secondo la mortalità dell'anno in cui è stata costruita: per esempio, la SIM91M descrive l'evoluzione di una generica popolazione di 100000 uomini secondo la mortalità dell'anno 1991.

È interessante osservare che soprattutto in passato, la tariffazione avveniva distintamente tra maschi e femmine: il premio che si andava a richiedere agli assicurati era diverso in funzione anche del sesso dell'assicurato. Ciò avveniva perché, tendenzialmente, le probabilità di sopravvivenza e decesso sono diverse in funzione del sesso e quindi il profilo di rischio di ogni assicurato ne era funzione.

Con l'introduzione della c.d. Gender Directive ciò non è stato più possibile: per le imprese di assicurazione è diventato quindi fondamentale stimare *ex-ante* le composizioni dei propri portafogli in termini di sesso degli individui. Per queste ragioni, si parla di tavola unica: l'impresa di assicurazione valuta tutte le polizze riferite a soggetti con le stesse caratteristiche indipendentemente dal sesso e con una sola tavola; tale tavola contiene una stima della composizione del portafoglio in termini maschi-femmine.

Riprendendo il discorso delle tavole di mortalità, è chiaro che da ognuna è possibile ricavare tutte le informazioni demografiche di interesse: per esempio, indicato con l_x il numero di sopravvissuti ad una generica età,

$$\frac{l_{x+1}}{l_x} = {}_1p_x$$

$$1 - {}_1p_x = {}_1q_x$$

Si specifica però che, soprattutto in passato, ogni tavola era costruita per anno di calendario: si studiava nel determinato anno quale fosse la situazione demografica della popolazione italiana e sulla base di essa si stimavano probabilità di mortalità e sopravvivenza. In tal modo sono state costruite le tavole demografiche SIM61, SIM71 ecc. La cadenza decennale di tali tavole è dovuta al fatto che esse sono state costruite in corrispondenza dei censimenti fatti sulla popolazione italiana (che avevano cadenza decennale). Dagli anni 2000 in poi, non è stato più necessario aspettare il censimento per costruire tavole di mortalità, quindi l'ISTAT fornisce ogni anno una tavola costruita con una logica analoga, cioè per anno di calendario. Si osserva che la modalità per anno di calendario non è la più consona o la più diretta per costruire le tavole perché i membri della collettività utilizzata per costruire la tavola, appartengono a generazioni diverse che hanno caratteristiche di sopravvivenza diverse (stili di vita diversi, anni di generazione diversi). L'approccio più coerente sarebbe quello per anno di generazione che consiste nel considerare tutti coloro nati in un determinato anno e seguire tale generazione fino alla completa eliminazione. Questa metodologia implica però la necessità di seguire la generazione per almeno un centinaio di anni. In alcuni contesti, specie quello delle rendite, è necessario costruire tavole per generazione per cogliere le differenze in termini di anno di generazione, tra i vari soggetti che entrano nella rendita.

Le tavole RG48, IPS55 e A62 sono tavole utilizzate nel mercato assicurativo (non di produzione ISTAT quindi) (rispettivamente Ragioneria Generale dello Stato prima e ANIA le altre due) per calcolare le tariffe delle rendite. Sono tavole

innanzitutto proiettate: non si considera la sopravvivenza ad una determinata data di calendario, ma la si stima attraverso un modello statistico. Ciò è necessario in quanto nel momento in cui si valutano dei contratti con una durata molto lunga nel tempo, utilizzare una tavola per contemporanei porterebbe a sottostimare il prezzo della rendita. Tali tavole, oltre che essere proiettate, sono anche selezionate: esse non considerano la popolazione generale, ma una certa parte di essa in quanto, generalmente, si osserva che la probabilità di sopravvivenza dei percettori di rendita è più elevata di quella della popolazione generale. Collettività selezionata significa che esistono dei fattori di selezione che vengono utilizzati per considerare questo differenziale in termini di sopravvivenza. Il motivo dell'autoselezione all'ingresso risiede proprio nel fatto che, avendo l'assicurato un determinato set informativo sulle proprie condizioni di salute, nel momento in cui egli sceglie di stipulare una rendita è convinto di vivere a lungo. L'autoselezione però non è l'unica causa di una diversa mortalità: il cardine del discorso è che chi si assicura non è un cittadino particolarmente rappresentativo della popolazione generale: chi sceglie di assicurarsi, tendenzialmente

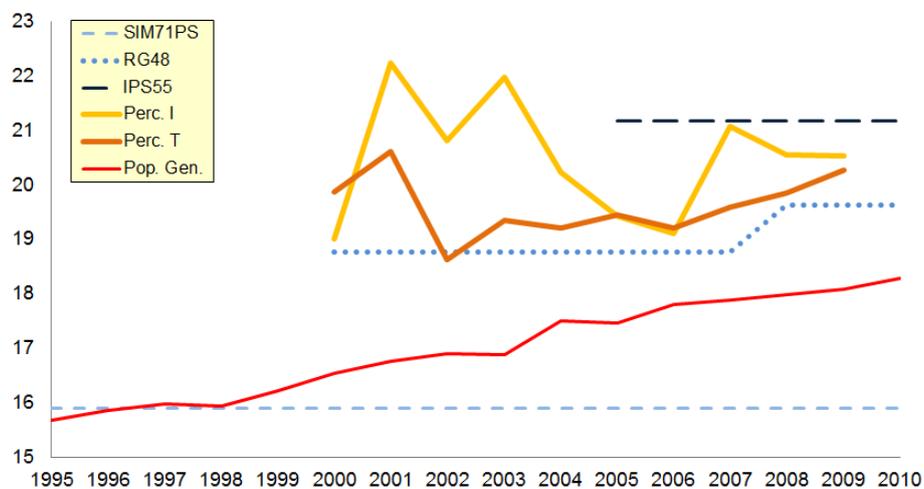
- a) Ha una disponibilità economica più alta degli altri cittadini (è verificato che esiste una correlazione positiva tra reddito e mortalità)
- b) Un soggetto che ha deciso di assicurarsi spontaneamente ha un'ottica previdenziale verso la propria vita (tendenzialmente fa controlli più spesso, esercizio fisico, ecc.)

Si osserva che questo discorso assume un peso particolarmente rilevante in un paese come l'Italia, dove l'assicurazione non è obbligatoria e non è un fenomeno di massa.

A.2 Le tavole A62 e il meccanismo dell'age-shifting

La Figura A.2-1, tratta da “ANIA (2014). Le basi demografiche per rendite vitalizie A1900-2020 e A62”, mostra un confronto tra le speranze di vita di percettori di rendite maschi di età pari a 65 anni. (“per teste”, Perc. T e “ponderati per l'importo della rendita”, Perc. I) con le speranze di vita dedotte dalle basi demografiche utilizzate sul mercato assicurativo e con le speranze relative alla popolazione generale.

Figura A.2-1- Confronti tra andamenti effettivi e attesi della speranza di vita a 65 anni (maschi)



Oltre all'evidenza del fenomeno dell'autoselezione in quanto la linea rossa della popolazione generale è ben al di sotto delle due linee “empiriche” Perc. I e Perc. T, è interessante osservare che l'alta volatilità delle due linee appena citate non distolgano l'attenzione dal fatto che l' RG48 in primis e l'IPS55 in maniera meno grave, non stimino adeguatamente l'evoluzione della sopravvivenza.

Tabella A.2-1 – I valori sottostanti la Figura A.2-1

Età	Speranze di vita				Variazione %		
	Valori per rendite differite			Percettori (importi)	Perc. /	Perc. /	Perc. /
	SIM71PS	RG48	IPSS55		SIM71PS	RG48	IPSS55
60	18.52	24.04	26.51	24.77	0.337473	0.030366	-0.06564
65	14.94	19.63	21.19	20.55	0.375502	0.046867	-0.0302
70	11.79	14.64	17.06	16.65	0.412214	0.137295	-0.02403
75	9.07	10.91	12.55	12.69	0.399118	0.163153	0.011155
80	6.77	7.76	9.38	9.75	0.440177	0.256443	0.039446
85	4.76	5.27	6.3	7.14	0.5	0.354839	0.133333
90	N.D.	3.55	4.3	5.63	N.D.	0.585915	0.309302

Oltre all'evidente necessità di una nuova tavola di mortalità per prezzare adeguatamente le rendite, la pubblicazione di dati aggiornati sulla durata di vita sia da parte dell'ISTAT che da parte del Continuous Mortality Investigation Bureau ha contribuito al raggiungimento dello scopo.

La procedura per l'ottenimento delle tavole proiettate e selezionate per la generazione 1962 è stata essenzialmente caratterizzata da due passaggi:

- I) L'osservazione e l'elaborazione dell'evoluzione della speranza di vita delle varie generazioni della popolazione italiana: ciò ha imposto all'ANIA di utilizzare i dati appartenenti al time span 1900-2010 e di considerare le proiezioni ISTAT 2011-2065⁴⁷; si specifica che altre previsioni ISTAT erano già state utilizzate per la stesura dell'IPS55. Tali proiezioni hanno come base il modello stocastico Lee-Carter.
- II) Aggiustare i suddetti valori in funzione dell'autoselezione tipica dei percettori di rendita ovvero del differenziale in termini di sopravvivenza con la popolazione "base". L'utilizzo dei dati relativi all'esperienza inglese, tradizionalmente molto consistenti, ha consentito di stimare dei "fattori di antiselezione".

Le tavole ottenute da questa procedura sono le seguenti:

⁴⁷ ISTAT - Il futuro demografico del paese, 2012 <http://www.istat.it/it/files/2011/12/futuro-demografico.pdf>

- I) TG62: una tavola di mortalità solo proiettata (a partire dal 2011) della generazione 1962 della popolazione italiana.
- II) A62D, A62I e A62C: sono tavole di mortalità della generazione 1962, indifferenziate per sesso (diverse composizioni per sesso), rispettivamente di percettori di rendite differite (“D”), Immediate (“I”) e collettive (“C”).

Al fine di ridurre le matrici bi-dimensionale delle tavole di mortalità, si è deciso di utilizzare il metodo dell’age-shifting per le altre generazioni. Si riporta in seguito un estratto del documento precedentemente citato che descrive al meglio tale metodologia:

“Secondo tale approccio, si assume una tavola di riferimento per una determinata generazione con anno di nascita τ_0 . Ogni percettore nato in anni diversi è considerato come se fosse nato nell’anno τ_0 , ma attribuendogli un’età modificata $x+\Delta(\tau)$, ovvero il percettore è reso più vecchio ($\Delta(\tau) \geq 0$ per $\tau \leq \tau_0$) o più giovane ($\Delta(\tau) \leq 0$ per $\tau \geq \tau_0$) con l’obiettivo di approssimare la durata di vita che caratterizza lo stesso percettore nella tavola di mortalità corrispondente al suo anno di nascita”

Tale *shift* è particolarmente appropriato per le generazioni in un intorno piccolo della 1962.

Si riporta infine la tabella A2 che evidenzia per quali generazioni vicine a quella del 1962, ci sia un primo *shift*. Le due colonne mostrano i casi in cui la popolazione sottostante sia composta dal 100% di maschi o dal 100% di femmine

Figura A.2-2 - I primi shift delle A62

Generazione	% M/F	
	100-0	0-100
1957	1	1
1958	0	0
1959	0	0
1960	0	0
1961	0	0
1962	0	0
1963	0	0
1964	0	0
1965	0	0
1966	0	0
1967	-1	-1

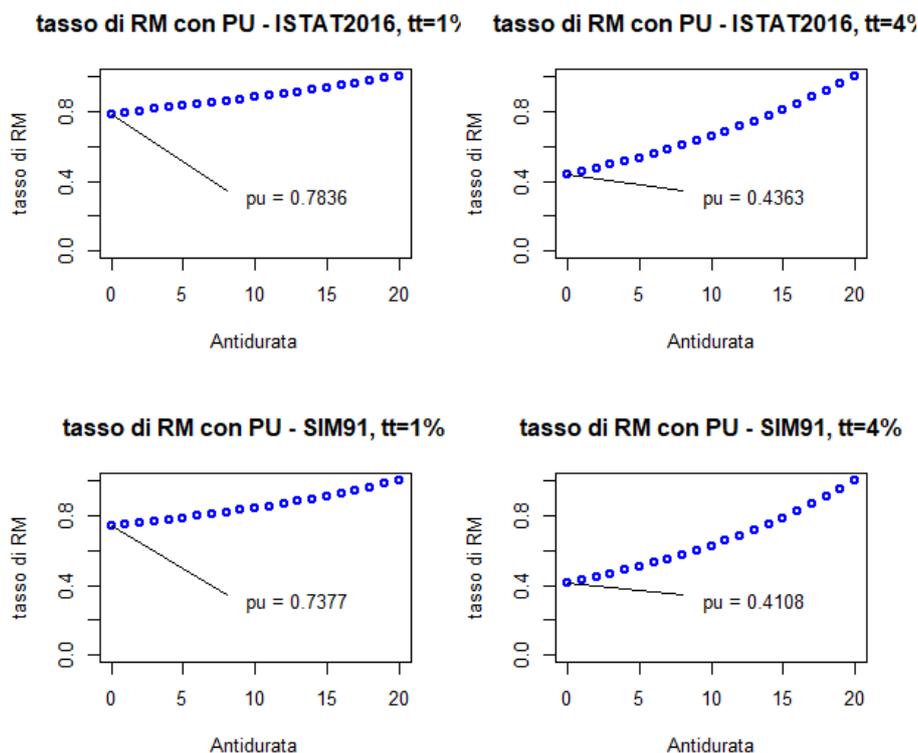
Appendice B – Approfondimenti di elementi di tecnica attuariale delle assicurazioni sulla durata di vita

B.1 Gli effetti derivanti dai cambiamenti delle basi tecniche sull'andamento del tasso di RM pura nei principali prodotti

Il capitale differito

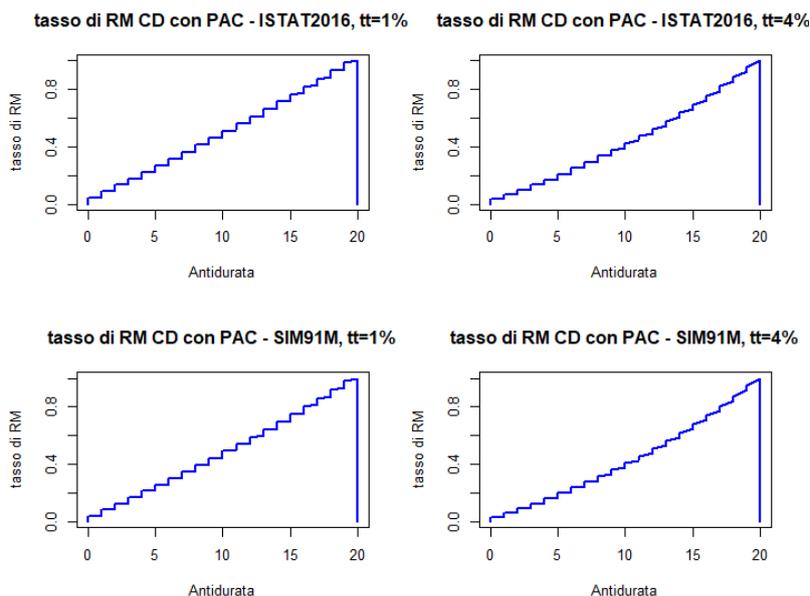
Nella Figura B.1-1 si confronta l'andamento del tasso di riserva matematica per un capitale differito al variare delle basi tecniche qualora l'assicurato versi un *pu*.

Figura B.1-1 - Confronto tra tassi di RM al variare delle basi tecniche del I° ordine



In Figura B.1-1 si può osservare che utilizzare una tavola più recente con probabilità di sopravvivenza maggiori (ISTAT2016 vs SIM1991) imponga all'assicurato di pagare un premio maggiore e, contemporaneamente, di ricevere un rendimento demografico minore dato che si ipotizza che saranno relativamente poche le riserve matematiche da smontare dei soggetti deceduti. Specularmente, garantire un rendimento finanziario maggiore⁴⁸ consente di poter pagare un premio minore e beneficiare di rendimenti finanziari maggiori: qualora il tasso tecnico passi dal 1% al 4%, il tasso di PU all'incirca si dimezza. L'interesse ora si sposta sull'andamento del tasso di riserva matematica qualora il premio non venga versato in un'unica soluzione, ma vengano versati più premi annui costanti per l'intera durata del contratto: con la Figura B.1-2 avviene una comparazione dell'andamento del tasso in esame, al variare delle basi tecniche del I° ordine qualora l'assicurati versi più p .

Figura B.1-2 - Il tasso di RM di un CD in caso di tasso di PAC al variare delle b.t.



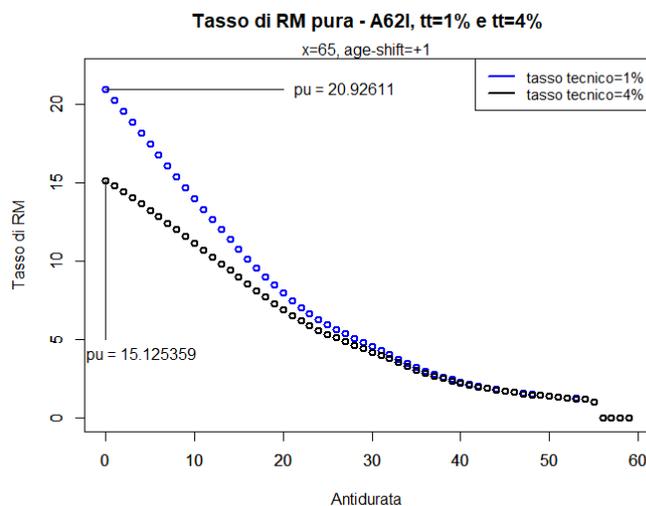
⁴⁸ Il tasso tecnico del 4% utilizzato è notevolmente distante dai tassi tecnici garantiti sul mercato assicurativo al giorno d'oggi; è stato prediletto rispetto a valori più bassi solamente per evidenziare l'andamento dei tassi di riserva matematica.

Anche in questo caso l'utilizzo di una tavola demografica più datata e la garanzia di un tasso tecnico maggiore, accentuano la convessità della curva: infatti, osservando il caso in cui le basi tecniche sono SIM1991/ $tt=4\%$, si coglie in maniera limpida come i minori salti della riserva (dovuti ai minori tassi di PAC) sono supportati da una forte capitalizzazione demografico finanziaria (specie nelle ultime antidurate) che porta il tasso in esame al valore finale uguale ad 1.

La rendita in pagamento

In Figura B.1-3 si mostra quale sarebbe l'andamento del tasso di RM pura di una rendita in pagamento, qualora il tasso tecnico sia aumentato dal 1% al 4%.

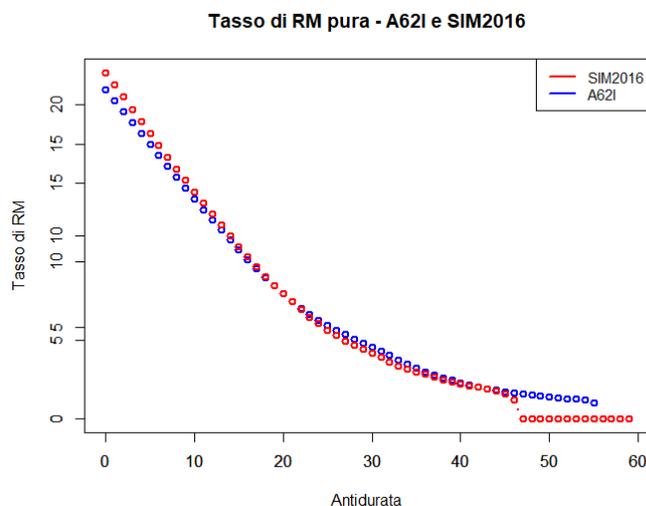
Figura B.1-3 - L'effetto sul tasso di RM di un aumento del tasso tecnico.



In questo caso, il tasso pu decresce del 27,72% circa, ma l'elemento più importante risiede nella minor convessità della curva: nelle prime antidurate addirittura, il tasso mostra una concavità verso il basso. In questo caso la decrescenza è dovuta al fatto che l'effetto derivante dalla formulazione della RM appena descritto (un termine in meno, quello con probabilità di sopravvivenza maggiori) ha un impatto ancora più forte della capitalizzazione finanziaria, che però, rispetto al caso precedente, influisce in modo consistente sull'andamento del tasso.

Si conclude la trattazione della “rendita in pagamento” osservando, con la figura B.1-4, gli effetti sul tasso di RM pura di un cambio di basi demografiche:

Figura B.1-4 - Il tasso di RM pura con A62 e SIM2016

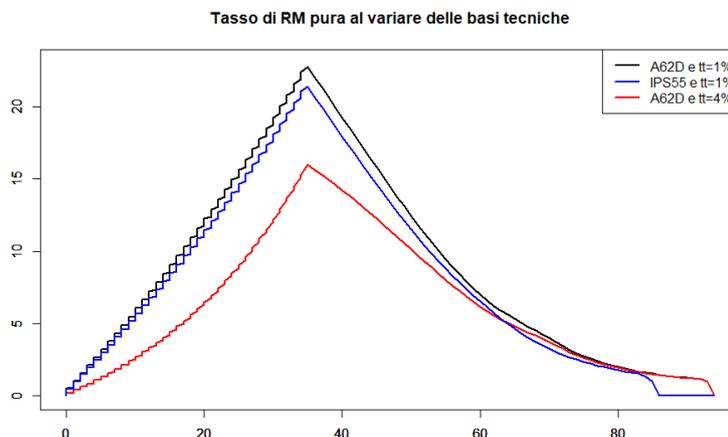


Utilizzando una tavola che non sia selezionata né proiettata (l' ISTAT2016) si verifica un effetto crescente al crescere dell'antidurata: lo spread tra i due tassi è sempre maggiore. Nonostante nelle prime antidurate lo spread sia minimo, intorno all'antidurata 27 il valore del tasso di RM pura calcolato con l'A62I è il 27% dell'analogo calcolato con l'ISTAT2016. I valori che presentano la differenza più importante, sono quelli relativi alle maggiori anzianità: l'ISTAT2016 ipotizza che nessun soggetto possa raggiungere in vita l'età di 112 anni, mentre l'A62I identifica, seppur infime, probabilità di raggiungere l'età di 121 anni.

La rendita differita

In Figura B.1-5 si mostra come cambia il tasso di RM pura, cambiando le basi tecniche per una rendita differita.

Figura B.1-5 – L'effetto del cambio delle b.t. sul tasso di RM pura della rendita differita

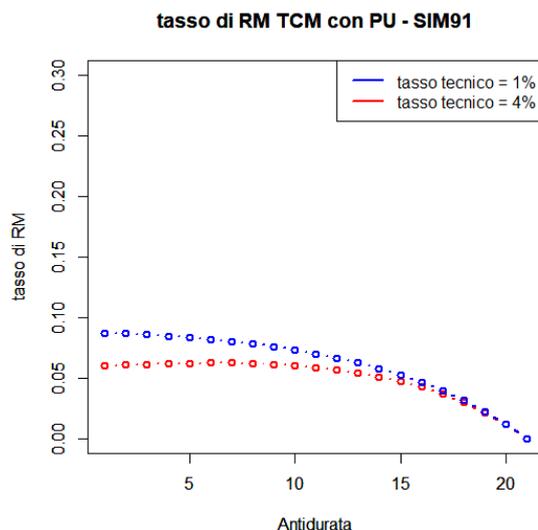


Oltre al notevole effetto sulla coda destra della distribuzione legato all'utilizzo di una tavola demografica che non considera la possibilità di sopravvivere fino a certe età (ω corrisponde a 121 anni secondo le A62 e a 117 secondo l'IPS55) come già osservato durante la discussione della “rendita in pagamento”, durante la fase di accumulo i rendimenti finanziari giocano un ruolo tanto importante quanto nella fase di erogazione. Maggiori rendimenti consentono p minori, una capitalizzazione finanziaria maggiore sia in fase di accumulo che successivamente: il risultato p quello di poter maturare un montante minore alla 35esima antidurata, che comunque garantisce ulteriori rendimenti finanziari nella fase di erogazione.

La temporanea caso morte

Si conclude questa sezione con l'analisi della variazione del tasso di RM pura di un TCM al variare delle basi tecniche.

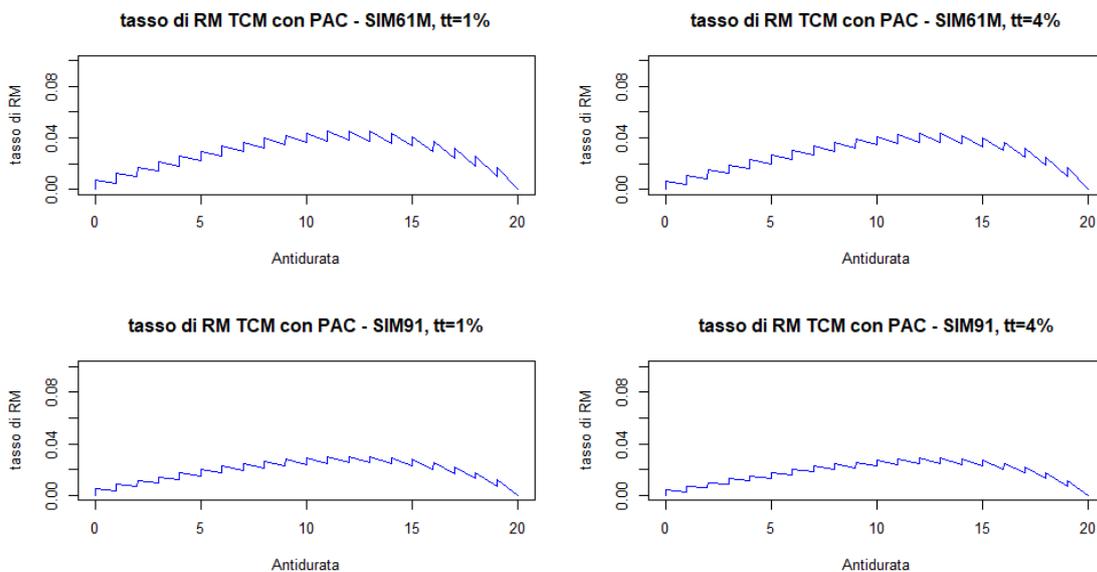
Figura B.1-6 - L'andamento del tasso di RM pura di un TCM al variare del tasso tecnico



Qualora invece l'assicurato decida di finanziare la copertura assicurativa tramite versamenti di tassi di premio annuo costante, l'andamento della riserva matematica è esattamente quello suggerito dal confronto tra tasso di premio annuo costante e tassi dei premi annui puri presentato in Figura ?.

In ultima analisi si studia il comportamento del tasso di riserva matematica pura al variare delle basi tecniche: graficamente, ciò viene mostrato in Figura B.1-7.

Figura B.1-7 - Il tasso di RM di una TCM al variare delle basi tecniche. Caso: tassi PAC

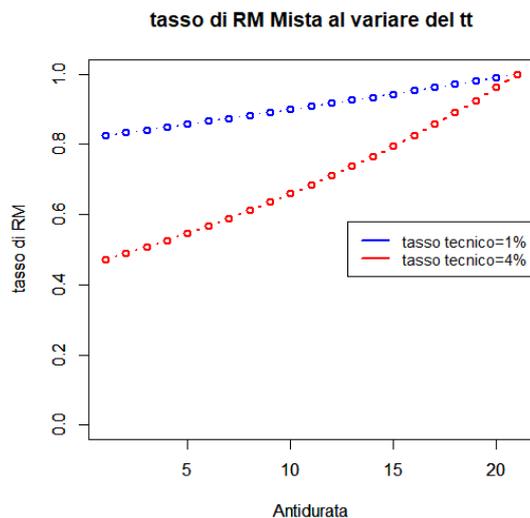


Oltre al fatto che una garanzia finanziaria maggiore si traduce in tassi di premio annuo costante e tasso di riserva matematica pura minori, si osserva che utilizzare una base tecnica demografica più recente (dove le probabilità di morte sono minori) implica un minor tasso di RM pura su ogni antidurata in quanto il valore attuale atteso degli oneri a carico delle assicuratore è minore. Se, per paradosso, la popolazione di riferimento non fosse soggetta al rischio di premorienza (ci si riferisce quindi ad un'ipotetica generazione di immortali), il grafico del tasso in esame sarebbe una linea retta coincidente con l'asse delle ascisse perché, conseguentemente, l'assicuratore non rischierebbe di dover pagare nessun capitale in nessun caso: sarebbe quindi inutile ogni forma di accantonamento.

La mista

La Figura B.1-8 mostra invece come varia l'andamento del tasso di RM pura al variare del tasso tecnico; avendo osservato nei precedenti paragrafi quanto il tasso di premio unico di un capitale differito sia maggiore del tasso di premio di una temporanea caso morte, ora risulta logico pensare che l'influenza maggiore sul tasso di RM pura della Mista sia proprio del CD.

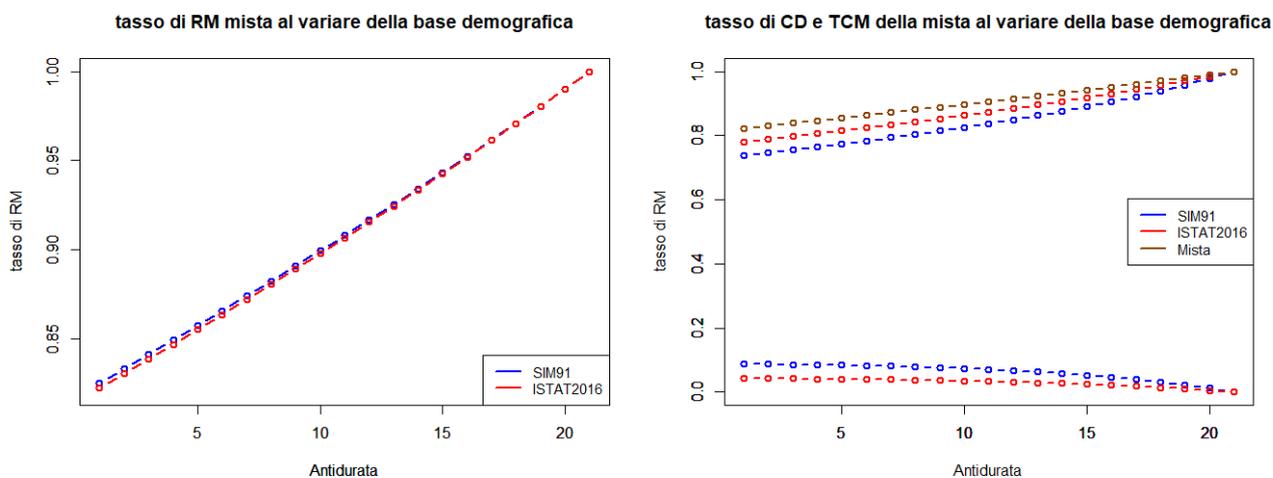
Figura B.1-8 - Il tasso di RM di una Mista al variare del tasso tecnico



Infatti, aumentando drasticamente j^* , il tasso di RM pura del CD abbassa drasticamente il suo punto di partenza per poi raggiungere il valore unitario a scadenza; quello della TCM invece subisce invece una riduzione importante (in termini percentuali più che assoluti) solo nelle prime antidurate: l'effetto complessivo è un punto di partenza più basso con dei successivi rendimenti finanziari più marcati.

In Figura 18 si considera un fatto più singolare: il cambiamento della base demografica di I° ordine (nella fattispecie concreta si passa da una SIM91 a una ISTAT2016) riduce di una quantità minima il tasso di RM pura della Mista.

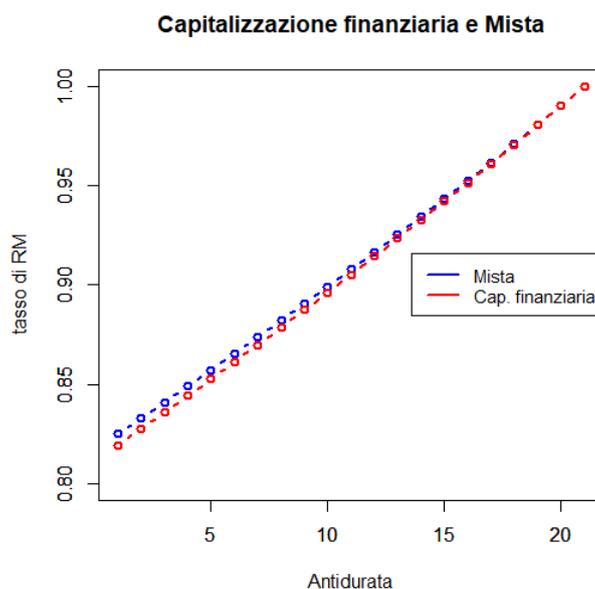
Figura B.1-9a e 9b - Il tasso di RM di una Mista al variare della base demografica



Come ben evidenziato in figura, ci sono 2 temi da affrontare:

- I) Il cambio di tavola demografica utilizzata provoca una variazione sia nel tasso di riserva del capitale differito che nel tasso di riserva della temporanea caso morte. Essendo la struttura della TCM finalizzata a garantire un capitale non a scadenza, ma alla fine dell'anno in cui è avvenuto il decesso del soggetto assicurato, una variazione delle ipotesi demografiche ha su tale polizza un impatto maggiore (seppur di una quantità minima) rispetto all'effetto opposto che si verifica nel tasso di RM pura del capitale differito.
- II) A questo punto del discorso risulta interessante riflettere sulla natura della mista dato che, a prima vista, sembrerebbe che l'assicuratore sia pressoché indifferente dinanzi alla scelta della base demografica da utilizzare. Nonostante questo punto verrà minuziosamente spiegato nel Paragrafo 2.5.4 del Capitolo 2 quando si affronterà il tema dell'utile assicurativo, si aggiunge la Figura B.1-10 per mostrare un aspetto peculiare della Mista: la componente demografica non è irrilevante.

Figura B.1-10 - Confronto tra la Capitalizzazione Finanziaria e il tasso di RM di una Mista



Si considera un certo strumento finanziario che abbia un rendimento dell'1% con capitalizzazione composta annualmente e che non paghi né cedole né dividendi. Se tale strumento avesse una durata di 20 anni, il suo prezzo in $t = 0$ sarebbe (per 1 unità di capitale a scadenza) 0.8195445. Lo scarto tra l'unità e tale prezzo indica quale sia il valore che acquisterà l'investimento iniziale in termini di rendimento finanziario. La mista è molto simile a tale strumento finanziario, salvo che il capitale assicurato, anziché essere corrisposto con certezza a scadenza, potrebbe essere corrisposto prima qualora il soggetto assicurato decedesse. Concretamente, in entrambi i casi l'importo del pagamento è deterministico, ma nella Mista, il momento è aleatorio con la condizione che in nessun caso avverrebbe dopo del momento in cui avverrebbe per lo strumento finanziario.

In Figura B.1-10, sfruttando la definizione di “riserva matematica” intesa come “strumento per attribuire un valore ad un contratto assicurativo”, si confronta il valore del suddetto prodotto finanziario con il “valore” della mista. Si evince che, per il beneficiario, la garanzia di ottenere il capitale prima, o al limite in

contemporanea, rispetto allo strumento finanziario, implica che il prezzo della Mista sia strettamente maggiore del prezzo dello strumento finanziario.

Considerando quindi un tasso tecnico dell'1%, la componente finanziaria della Mista porta un aumento del costo rispetto allo strumento finanziario pari a $0.8250576 - 0.8195445 = 0.005513$.⁴⁹

Concludendo il tema del rischio demografico si considerano i premi naturali. Essi corrispondono a:

$$\begin{cases} p_{h+1}^{(N)} = {}_{/1}A_{x+h} = (v^*) \cdot q_{x+h}^* \text{ per } h = 0, 1, \dots, n-2 \\ p_n^{(N)} = 1 \end{cases}$$

È interessante osservare che il rischio demografico, per il periodo $[n-1, n]$ non c'è: indipendentemente da quello che accadrà, l'assicuratore sarà costretto a pagare il capitale assicurato.

Si conclude la trattazione della Mista semplice osservando che in questo elaborato non verranno presentate ulteriori trattazioni sul tasso di riserva matematica pura: considerare il caso di versamenti di tassi di premio annuo costante, non porterebbe un valore aggiunto all'elaborato essendo sia facilmente deducibili dai tassi riguardanti capitale differito e TCM, che privi di ulteriori spunti di riflessione.

B.2 La scomposizione dell'utile demografico

All'interno della formula dell'utile è possibile identificare quali siano i *drivers* di valore, ossia gli elementi che lo generano.

A tal fine, si prende in esempio una polizza mista rivalutabile: ovviamente tale scomposizione è applicabile ad ogni altra forma assicurativa. SI specifica inoltre che anche in questa sede si considereranno prestazioni unitarie e valori sotto forma di tassi.

⁴⁹ Si ricorda che la Mista è stipulata per un soggetto di 40 anni, con una durata ventennale.

⁵⁰ Come i tassi di RM pura, anche i tassi dei premi naturali della Mista corrispondono alla somma dei tassi dei premi naturali del capitale differito e della TCM

In primo luogo, si considera la scomposizione del tasso di premio di tariffa in tasso di premio puro e tasso per caricamento per spese

$$p_{t-1}^T = pr_{t-1} + \gamma_{t-1}$$

In secondo luogo, si considera la formulazione del tasso di RM pura ante rivalutazione:

$$(v_{t-1}^* + p_{t-1})(1 + j^*) = q_{x+t-1}^* + v_{t-1}^* \cdot p_{x+t-1}^*$$

Da cui

$$(v_{t-1}^* + p_{t-1})(1 + j^*) = (1 - v_{t-1}^*)q_{x+t-1}^* + v_{t-1}^*$$

Riprendendo la formulazione dell'utile annuo atteso

$$u_t^* = (v_{t-1}^* + pr_{t-1}^T - e_{t-1})(1 + j) - q_{x+t-1} - ris_t \cdot p_{x+t-1} \cdot r_t - v_t^* \cdot p_{x+t-1} \cdot (1 - r_t)$$

Ricorrendo alla scomposizione del tasso di premio di tariffa

$$u_t^* = (v_{t-1}^* + pr_{t-1})(1 + j) + (\gamma_{t-1} - e_{t-1})(1 + j) - q_{x+t-1} - ris_t \cdot p_{x+t-1} \cdot r_t - v_t^* \cdot p_{x+t-1} + v_t^* \cdot p_{x+t-1} r_t$$

Aggiungendo e sottraendo la quantità $v_t^* \cdot q_{x+t-1}$

$$u_t^* = (v_{t-1}^* + pr_{t-1})(1 + j) + (\gamma_{t-1} - e_{t-1})(1 + j) - q_{x+t-1} + v_t^* \cdot q_{x+t-1}^* - v_t^*(p_{x+t-1}^* + q_{x+t-1}^*) + r_t \cdot p_{x+t-1}(v_t^* - ris_t)$$

Scomponendo ora il tasso di RM pura ante rivalutazione in funzione del tasso di rivalutazione j_t^v , si ottiene $v_t^* = v_{t-1}^*(1 + j_t^v) = v_{t-1}^* + (v_{t-1}^*) \cdot j_t^v$

Da cui

$$u_t^* = (v_{t-1}^* + pr_{t-1})(1 + j) + (\gamma_{t-1} - e_{t-1})(1 + j) - q_{x+t-1} + (v_{t-1}^*) \cdot q_{x+t-1} + (v_{t-1}^*)q_{x+t-1} \cdot j_t^v - v_{t-1}^* + r_t \cdot p_{x+t-1}(v_{t-1}^* - ris_t)$$

Da cui, sfruttando la relazione tra tasso di RM pura calcolata ante rivalutazione e post rivalutazione:

$$u_t^* = (v_{t-1}^* + pr_{t-1})(1 + j) + (\gamma_{t-1} - e_{t-1})(1 + j) - q_{x+t-1} + (v_{t-1}^*) \cdot q_{x+t-1} + (v_{t-1}^*) \cdot q_{x+t-1} j_t^v - v_{t-1}^*(1 + j_t^v) + r_t \cdot p_{x+t-1}(v_{t-1}^* - ris_t)$$

Raggruppando

$$\begin{aligned}
u_t^* &= (v_{t-1}^* + pr_{t-1})(1 + j) + (\gamma_{t-1} - e_{t-1})(1 + j) - (1 - v_{t-}^*) \cdot q_{x+t-1} \\
&\quad - (v_{t-}^*) \cdot j_t^v (1 - q_{x+t-1}) - (v_{t-}^*) + r_t \cdot p_{x+t-1} (v_t^* - ris_t) \\
&\quad - (v_{t-1}^* + pr_{t-1})(1 + j^*) + (1 - v_{t-}^*) q_{x+t-1}^* + v_{t-}^*
\end{aligned}$$

Si osserva che l'ultima riga dell'equazione appena esposta è un valore nullo in quanto deve valere che $(v_{t-1}^* + pr_{t-1})(1 + j^*) = (1 - v_{t-}^*) q_{x+t-1}^* + v_{t-}^*$

Infine, raggruppando

$$\begin{aligned}
u_t^* &= \{(v_{t-1}^* + pr_{t-1})(j - j^*) - (v_{t-}^*) \cdot j_t^v \cdot p_{x+t-1}\} + \{(\gamma_{t-1} - e_{t-1})(1 + j)\} \\
&\quad + \{(1 - v_{t-}^*)(q_{x+t-1}^* - q_{x+t-1})\} + \{(v_{t-}^* - ris_t)p_{x+t-1} \cdot r_t\}
\end{aligned}$$

Ovvero, sfruttando la notazione utilizzata per spiegare le varie componenti nel Capitolo 2

$$u_t^* = f u_t + e u_t + m u_t + r u_t$$

La scomposizione appena effettuata, seppur con delle variazioni e delle semplificazioni, è tratta dalla c.d. formula di Homans.

Bibliografia

- [1] ANIA (2014). “*Le basi demografiche per rendite vitalizie A1900-2020 e A62*”.
- [2] ANIA. “*IPS55 Base demografica per le assicurazioni di rendita. Documento di consultazione*”
http://www.mmenzietti.altervista.org/TAAV/IPS55_Nuova_base_demografica.pdf
- [3] BACINELLO A.R. (1986). “*Portfolio valuation in life insurance*”. Insurance and Risk Theory – serie NATO ASI
- [4] Baione F. (2015). “*Tecnica attuariale delle assicurazioni sulla vita. A.a 2015-2016*”
- [5] BIANCHI L. (2014). “*Life Technical Provisions in Solvency II. Best estimate, risk margin, diversification of risks, allowance for taxes, pricing and other topics in Life Insurance*”. Lambert Academic Publishing.
- [6] BOX G.P.E., JENKINS G.M. (1976). “*Time-series analysis*”. Holden Day, New York
- [7] BRAMANTI M., PAGANI C.D., SALSA S. (2014). “*Analisi Matematica 1 con elementi di geometria e algebra lineare*”. Terza ristampa, Zanichelli Editore
- [8] BUOL (1969). “*Financial Guarantees required from Life Assurance Concerns*” (*Les garanties financières requises des entreprises d`assurance vie*)”, Report of the O.E.C.D. Insurance Committee, Paris.
- [9] CAMPAGNE C. (1961). “*Standard minimum de solvabilité applicable aux entreprises d`assurances*”, Report of the OECE, March 11 Reprinted in Het Verzekerings-Archief deel XLVIII, 1971-1974.

- [10] CEIOPS (2007). “*The underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation*”, Aprile 2007.
(<https://eiopa.europa.eu/Publications/QIS/QIS3CalibrationPapers.pdf#search=filename%3AQIS3CalibrationPapers%2Epdf>)
- [11] CEIOPS (2009). “CEIOPS’ Advice for Level 2 implementing measures on Solvency II: Standard Formula SCR – Article 109 c Life Underwriting Risk”. October 2009
- [12] CHARPENTIER A. (2016). “*Computational Actuarial Science with R*”, First Edition, CRC Press - Taylor & Francis Group
- [13] CLEMENTE G.P. E SAVELLI N. (2014). "*Lezioni di Matematica attuariale danni. Dispense per a.a. 2013/2014*", Università Cattolica del Sacro Cuore, Milano.
- [14] COMMISSIONE EUROPEA (2012). Regolamento n. 1606/2002 del Parlamento europeo e del Consiglio del 19 luglio 2002 relativo all'applicazione di principi contabili internazionali.
- [15] COMMISSIONE EUROPEA (2009). Direttiva 2009/138/CE "Solvency II", novembre 2009
(https://www.ivass.it/normativa/internazionale/internazionale-ue/direttive/2009-138-ce/direttiva_solvency_II_aggiornata.pdf).
- [16] COMMISSIONE EUROPEA (2014). *Delegated Regulation* (EU) 2015/35, ottobre 2014
(<http://eur-lex.europa.eu/legal-content/IT/TXT/PDF/?uri=OJ:L:2015:012:FULL&from=EN>).
- [17] DECRETO LEGISLATIVO 3 NOVEMBRE 2003, N. 307. "*Attuazione delle direttive 2002/12/CE e 2002/13/CE concernenti il margine di solvibilità delle imprese di assicurazione, rispettivamente, sulla vita e nei rami diversi dall'assicurazione sulla vita*", pubblicato nella Gazzetta Ufficiale n. 266 del 15 novembre 2003 - Supplemento Ordinario n. 174

- [18] DURANTE F. E SEMPI C. (2016). “*Principles of copula theory*”, CRC Press.
- [19] EIOPA (2011). "Report on the fifth Quantitative Impact Study (QIS5) for Solvency II", marzo 2011
(https://eiopa.europa.eu/Publications/Reports/QIS5_Report_Final.pdf).
- [20] EIOPA (2013), “*Technical Findings on the Long-Term Guarantees Assessment*”, EIOPA/13/296
- [21] EIOPA (2014). “*Technical Specification for the Preparatory Phase. Part I*”. 30 Aprile 2014
- [22] EIOPA (2014). “*The underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation*”, luglio 2014.
(https://eiopa.europa.eu/Publications/Guidelines/TP_Final_document_EN.pdf)
- [23] EIOPA (2015). "Guidelines on the valuation of technical provisions", Febbraio 2015.
- [24] FLOREANI A. (2013). "Finanza delle imprese di assicurazione", corso di Economia delle aziende di assicurazione II, Università Cattolica del Sacro Cuore, Milano.
- [25] FURLAN C. (2008). “*La solvibilità delle imprese assicuratrici: linee evolutive ed aspetti critici*”, Tesi di Dottorato di Ricerca in Finanza Aziendale, Università degli Studi di Trieste.
- [26] HAJEK S. (2011). “*Solvency II. Strumenti per il Risk Management delle aziende assicurative*”, Prima Edizione, EGEA
- [27] ISVAP. *Regolamento 21 del 28 Marzo 2008*. Regolamento concernente i principi attuariali e le regole applicative per la determinazione delle tariffe e delle riserve tecniche dei rami vita di cui agli articoli 32, 33 e 36 del Decreto Legislativo 7 Settembre 2005, numero 209 – Codice delle Assicurazioni Private

- [28] IVASS. *Regolamento 18 del 15 Marzo 2016*. Regolamento concernente le regole applicative per la determinazione delle riserve tecniche di cui all'articolo 36-bis, del decreto legislativo 7 settembre 2005, numero 209 – codice delle assicurazioni privati conseguente all'implementazione nazionale delle linee guida EIOPA sui requisiti finanziari del regime Solvency II (requisito di I° pilastro)
- [29] IVASS. *Regolamento 29 del 6 settembre 2016*. Regolamento recante disposizioni relative alle imprese di assicurazione locali ai sensi degli articoli 51-bis, 51-ter, 51-quater del titolo IV, Capi I e II, del Decreto Legislativo 7 Settembre 2005 N. 209- Codice delle Assicurazioni Private come novellato dal Decreto Legislativo 12 Maggio 2015, N. 74.
- [30] JOHNSON R., WICHERN D. (2007). “*Applied Multivariate Statistical Analysis*”, Sesta Edizione, Pearson Prentice Hall
- [31] KLUGMAN S., PANJER H., WILLMOT G. (2012) “*Loss models from data to decisions*”. Third edition. Wiley.
- [32] MELISI G. (2013) “*Modelli di Tariffazione e Capital Allocation nell'assicurazione RCA con Black-box*”, Tesi di Dottorato di Ricerca in Scienze Attuariali, Università degli Studi di Roma –La Sapienza.
- [33] PICCOLO D. (2010), “*Statistica*”, Terza edizione, Il Mulino – Strumenti
- [34] PITACCO E., OLIVIERI A. (2005), “*La valutazione nelle assicurazioni vita. Profili attuariali*”. Prima Edizione, EGEA.
- [35] PITACCO E. “*Matematica e Tecnica Attuariale delle assicurazioni sulla durata di vita*”. Dodicesima ristampa, LINT.
- [36] PITACCO E., DENUIT M., HABERMAN S., OLIVIERI A. (2009). “*Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*”, First Edition, Oxford University Press

- [37] PITACCO E., OLIVIERI A. (2010). “*Introduction to Insurance Mathematics. Technical and Financial Features of Risk Transfers*”, Seconda Edizione, Springer.
- [38] POSTE VITA (2016). “*Solvency II – Relazione sulla solvibilità e condizione finanziaria del Gruppo Poste Vita al 31 Dicembre 2016*” (<https://www.poste.it/files/1476464031029/SFCR-Gruppo-PV.pdf>)
- [39] PRIMA DIRETTIVA 79/267/CEE DEL CONSIGLIO, del 5 marzo 1979, recante coordinamento delle disposizioni legislative, regolamentari ed amministrative riguardanti l'accesso all'attività dell'assicurazione diretta sulla vita ed il suo esercizio.
- [40] SANDSTRÖM A. (2010), “*Handbook of Solvency for Actuaries and Risk Managers: Theory and Practice*”, Chapman&Hall-CRC Finance Series, Londra
- [41] SAVELLI N. (1993). “*Un modello di teoria del rischio per la valutazione della solvibilità di una Compagnia di assicurazione sulla vita*”. LINT
- [42] SAVELLI N., CLEMENTE G.P. (2013), "A Risk-Theory Model to Assess the Capital Requirement for Mortality and Longevity Risk", Journal of Interdisciplinary Mathematics, Taylor and Francis.
- [43] SAVELLI N. (2017). "Lezioni di Teoria del Rischio II. Dispense per a.a. 2016/2017", Università Cattolica del Sacro Cuore, Milano.
- [44] SBUELZ A., TARELLI A. (2016). “*Lezioni di Asset Pricing*”. Dispense per a.a. 2016/2017", Università Cattolica del Sacro Cuore, Milano.
- [45] SOPRANO A., CRIELAARD B., PIACENZA F., RUSPANTINI D., “*Measuring operational and reputational risk. A practitioner’s Approach*”. Wiley Finance
- [46] WATSON WYATT (2004). “*Financial Services Authority Calibration of the Enhanced Capital Requirement for with-profit life insurers*”.

[47] WATSON WYATT (2004). “*Untitled report to FSA regarding survey results*”
Disponibile in <http://www.fsa.gov.uk>

Ringraziamenti

Premettendo che la gioia e la passione che hanno mosso la stesura del presente elaborato è sicuramente dovuta a tutti coloro che mi hanno accompagnato durante questo percorso, i miei ringraziamenti sono davvero sinceri e pieni di devozione: sono davvero convinto che sia un dono potersi dedicare alla propria passione con il sostegno delle persone più care, ed è proprio per quello che mi avete regalato che mi sento di scrivere questi ringraziamenti.

Specifico che vorrei scrivere qui a lato con che logica ho deciso l'ordine dei ringraziamenti, “però questo margine è troppo piccolo per poterlo contenere”

Ringrazio innanzitutto il Professor Savelli, sia per il lavoro di sostegno, collaborazione e supporto durante la stesura di questo elaborato, che per avermi condotto verso questo mondo di cui mi sono innamorato e che ogni giorno mi piace scoprire di più. I suoi suggerimenti e le sue parole sono andati ben oltre il semplice ruolo accademico.

Ringrazio di cuore il Professor Clemente, che con una passione pressoché infinita mi ha dato tutti gli strumenti tecnici e le parole più umane, di cui ho avuto bisogno, nel corso dell'ultimo anno.

I Professori Sbuelz, Zappa, Tarelli e la Professoressa Facchinetti sono stati docenti straordinari che prima di trasmettere un concetto, hanno trasmesso l'entusiasmo per la propria professione: non sarei mai riuscito a dedicarmi completamente a ciò, se in voi non avessi colto la bellezza di quello che insegnate.

Un ringraziamento particolare va al Dott. Luca Bianchi che con i suoi preziosi consigli e con una pazienza ammirevole ha portato un valore aggiunto all'impostazione dell'elaborato.

Il ringraziamento più grande va alla mia famiglia, ai miei nonni, alla mia ragazza e ai miei più cari amici. I miei genitori sono persone straordinarie, che hanno investito una grande parte della loro vita nel fare di me una bella persona: mi piace l'idea di spendere tutto me stesso per non rendere vano un solo loro sforzo.

Un grazie infinito va a Camilla, la ragazza che mi ha accompagnato in questo percorso e che amo, a Nicolò, il fratello che non ho mai avuto, a Federico, amico d'oro (che oltretutto mi tocca ringraziare anche per aver assemblato chi ha fatto "10 milioni di simulazioni" ogni volta!) e a Jacopo, un collega e un amico straordinario con cui è stato meraviglioso intraprendere l'esperienza universitaria. Il mio grazie va a tutti i ragazzi straordinari che ho conosciuto in questi anni: Marchino, Michele, Emanuele, Christian, Giorgio, Carletto, Bruno, Alessio, Maria e Mattia.

Una scoperta di rara bellezza, un grazie lo rivolgo a Chiara e Lorenzo, amicizia costruita a suon di viaggi e passioni condivise.

Un grande grazie va anche a Edoardo e ad Andrea, i vostri preziosi consigli mi hanno aiutato a vivere questa esperienza al meglio.

Il mio ultimo grazie, e scrivere quanto è grande sarebbe comunque riduttivo, va a tutti coloro che mi vogliono bene anche se non li ho citati in queste paginette: di sicuro sapranno che il vizio di scrivere i ringraziamenti la notte prima della consegna, mi ha sopraffatto anche questa volta.